大学受験難関特別コース80日

TRAINING PAPER

DAILY® PROGRAM

物理　《見本》

1

TRAINING PAPER®

大学受験デイリープログラム高校物理
—難関特別コース—

効果的な使い方

♣物理の受験対策を80日間で完成させます

●物理大学受験デイリープログラム—難関特別コース—80日間は，物理の受験に備えて，完全な実力を養成するために編集されたトレーニングペーパーの特別コースです。全部で５巻からなっており，第５巻は補充演習編です。（詳しい予定は左の表を参照）

●第１巻から第４巻までは，次のような学習順に配列してあります。

力と運動 → 気体の分子運動 → 波動 → 電界と電流 → 電界と磁界 → 原子

●第１巻～第４巻で80日の学習を完結できます。

●第４巻には，総合演習の日があります。総合演習は，実際の入学試験のつもりで取り組む学習日です。

●第５巻の補充演習編は，第１巻～第４巻と対応した構成になっています。

●『力と運動』『波動』など，学習のまとまりの中は，

〔例題学習日：○日〕→〔応用問題学習日：○日〕→〔演習問題日〕

という構成で進んでいきます。

♣１日の学習を効果的に進めるために

●例題学習日の構成

確認トレーニング

例題を解く上での基本となる事項の問題を並べてあります。どの内容の理解が不十分かチェックできます。

➡弱点をつぶしてから例題へ

例　題

入試問題の中からよく出題される重要な問題を選び，ていねいな解き方で正しい解答が書けるようにします。

➡例題は完全に理解すること！

実戦トレーニング

例題と同じような問題の練習です。実際の入試問題から選んでありますから，実戦的に解法力が養成できます。

➡解けるまでねばること！確実に実力アップ

ここに注目！

問題を解く上でのポイントや注意点を示してあります。

➡確実に頭に入れておくこと！必ず役に立つ

◎解答は別冊になっています。

●応用問題学習日の構成

応用問題1

応用問題2

より高度な入試問題を2問集めてあります。解き方はすぐには示してありませんから，まず自分で取り組みなさい。途中でつかえたら，アドバイスを読みもう1度取り組みなさい。解答は別冊にあります。
➜考え方を身につけることが何よりも大切

実戦トレーニング

応用問題と似たような問題に取り組み，基礎概念を応用場面にあてはめていく練習をします。
➜さらに応用力を充実！

●演習問題日の構成

演習問題1～5

演習問題を5問用意してあります。学習のまとまりの総仕上げです。
➜実力アップの演習問題日

♣使い方のくふう

●プログラムに沿って1日1日と学習を進めていくとき，次のようなくふうをすると，よりいっそう効果的です。

① 1つの学習のまとまりが終わって，基本事項をもう1度確認しておきたいときは，『ここに注目！』や確認トレーニングだけをひろって復習しておきます。

② 物理の学習は，いろいろな場面の問題を数多く解くことも大切ですが，重要な例題を繰り返し見直すことも重要です。1つの学習のまとまりが終わったら，例題だけもう1度やってみるのも実力養成になります。

③ トレーニングには解答欄があります。解答だけでなく公式や重要事項をメモしてもよい。

④ 学習内容により，もっとトレーニングがしたいときには，補充演習編（第5巻）に取り組むと，いっそう充実します。

♣入試問題を解くために

●法則，公式については，導く過程や適用するときの条件をきちんと整理し，教科書にあるような基本事項を十分に把握しておくこと。

●教科書などにはあまり見られないような場面の問題でも，問題文をよく読みこなし既知の場面や考え方と結びつけていく能力を身につけること。

●そのためには，十分な読解力が必要です。長い問題文には，よく読むと解答のためのヒントが隠されていたりするものです。

●数値計算が含まれるので，有効数字の扱い方になれておくこと。計算ミス，ケアレスミスは絶対にしてはいけない。

●数学的要素（三角関数，微分・積分，方程式，近似式）にも習熟しておくこと。

●実際の試験では，標準レベルの問題を確実に解くこと。難問に時間をとられて，確実に得点できる問題をのがしてはいけない。

◎大学受験デイリープログラム―難関特別コース―では，質のよい問題を必要十分なだけ用意してプログラムを組んでいます。これをやりこなせば，入試問題を解く力が完全に身につきます。自信をもって十分に活用し，合格を目指してください。

力と運動　　　13日間

◇　力と運動では，理科Ⅰで学習した，速度と加速度や運動の法則，落下運動，力学的エネルギーとその保存などの内容と，選択物理で学習した，円運動や単振動，運動量といった内容をまとめます。

いくつかの基本事項が，1つの問題場面で組み合わせて設問してあることが多いので，問題で与えられている条件と求めるものとを見極めることが大切です。よくあつかわれるのは，重力による運動，円すい振り子，単振動，鉛直面内の円運動，人工衛星，物体の衝突などです。

ここではこれらを，比較的単純な場面からだんだん複合的な問題へと進めていきます。

- 例題学習日 8日
- 応用問題学習日 4日
- 演習問題日 1日

◇　学習上のポイント

① 力と加速度を運動方程式で結びつける。
② 力，速度，加速度，運動量などの向きをはっきりさせる。
③ 保存される量があるかないかに注目する。

◇　この13日間の学習で，力と運動について十分な実力を身につけます。

第 1 日	力と運動13日間 ① 学習日　月　日
	物体の運動と力

物体の運動と力

きょうから，大学受験デイリープログラムを始めます。入学試験問題といっても，ふだん教科書などで見ている問題とそれほどちがっているわけではありません。何が問題として取りあげられているのかを見極めれば，必ず解けます。このデプロで入学試験問題になれるようにしましょう。

その第1日として，きょうは力学の根幹をなす問題について考えてみます。

まず，確認トレーニングで基本事項をチェックしなさい。

確認トレーニング

〔解答欄〕

1 〈物体の運動〉

斜面上を上向きに10m/sの速さで出発した物体が逆向きの加速度を生じながら，等加速度直線運動を続けています。次の問いに答えなさい。

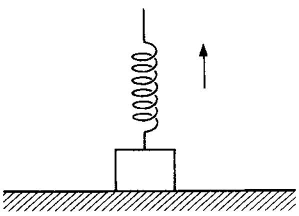
(1) 6.0s後には，斜面上を下向きに，2.0m/sの速さになりました。この運動の加速度の大きさを求めなさい。

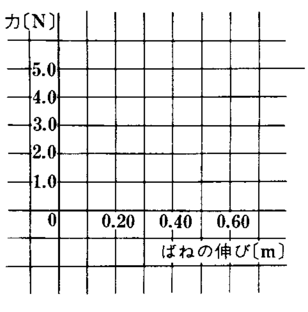
(2) 6.0s後の物体の位置は，出発点から何mのところにありますか。

(3) 斜面上をもっとも高く上ったとき，物体は出発点から何mのところにありますか。

2 〈運動の法則〉

図のように，ばねの一端に0.50kgの物体をつけ，ばねが自然の長さになるようにして水平な台の上に置きます。この状態から，ばねの他端を鉛直上方に引くとき，次の問いに答えなさい。ただし，重力加速度を$g=10$〔m/s²〕，ばね定数を10N/mとします。



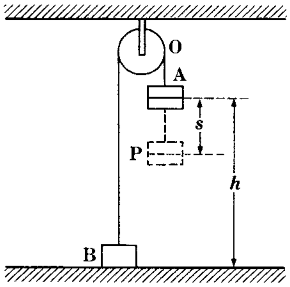


(1) ばねを静かに引くとき，ばねを引き始めてから，物体が台の上から離れるまでに，ばねの弾性力および抗力のばねののびの長さに対する変化を表すグラフを書きなさい。

(2) つぎに，物体を8.0Nの力で引くとき，物体に生じる加速度およびばねののびを求めなさい。

3 〈運動の法則〉

軸のなめらかな定滑車Oに，大きさが無視できる質量 M の物体Aと質量 $m(2m>M>m)$ の物体Bとが，のびちぢみしない糸でつり下げられています。定滑車の質量は M および m にくらべて無視できるほど小さいこととします。



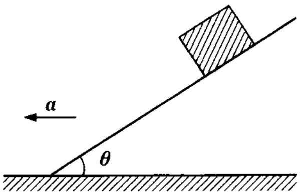
はじめ，図のように，Bは地上に固定されており，Aは地上 h の高さに静止しています。Bを静かにはなすと，物体Aは大きさ(ア)(　　)$\cdot g$ の加速度で動きだします。ただし，g は重力加速度です。また，このとき糸の張力は(イ)(　　)です。

Aが動き始めてから距離 s だけ降下して図に示したP点を通過するまでに要する時間は(ウ)(　　)で，P点でのAの速さは(エ)(　　)です。P点でAの半分の質量をきりはなすと，Aの残りの部分は，向きが(オ)(　　)で大きさ(カ)(　　)$\cdot g$ の加速度をもって運動をつづけます。それが，地上すれすれまで降りてきて，再び上昇するためには，$s=$(キ)(　　)$\cdot h$ でなければなりません。

（岡山大）

4 〈運動の法則〉

図において，水平に対して角 θ をなす斜面が水平面上を動いていて，その加速度は矢印の方向に a で，斜面はなめらかです。斜面上の物体の質量を m，重力加速度を g として，次の問いに答えなさい。



(1) 斜面上の物体の，斜面に対する加速度を求めなさい。

(2) 物体Aが斜面上に静止するときの a の大きさを求めなさい。

運動方程式は，力学にかぎらずいろいろな場面で用いるたいせつな式です。どんな場合にもあてはめられるようにしておきなさい。
では，その運動方程式を利用する例題です。

例題1　上昇するひもの張力

次の文中の空欄に当てはまる答を，与えられた記号を用いて記せ。

質量 M，長さ L の一様なひもが，鉛直線上を大きさ a の加速度で上昇している。ひもの上端には，大きさ F の力が，重力とは反対の向きに働いている。いま，ひもの下端から距離 l だけ上方の点Pに注目し，ひもの伸び縮みを無視して，ひもの内部に生じている張力を求めてみよう。

まず，ひも全体の重心Cの運動に着目すると，その運動方程式は $Ma=$ (1)$\boxed{}$ と得られる。ただし重力加速度の大きさを g とする。

次に，ひもを点Pのところで2つの部分に分けて考えると，長さ l の部分の上端には，大きさ T の張力が鉛直上方に働くことになる。そこで，この長さ l の部分の重心 C_1 の運動に着目すると，C_1 には大きさ (2)$\boxed{}$ の重力と，大きさ (3)$\boxed{}$ の力が働くことになるから，C_1 の運動方程式は (4)$\boxed{}$ と得られる。

一方，長さ $L-l$ の部分の重心 C_2 には，大きさ (5)$\boxed{}$ の重力のほかにも，次の2つの力が働くことになる。1つは大きさ (6)$\boxed{}$ の力であり，もう1つは大きさ (7)$\boxed{}$ の力の反作用である。したがって，C_2 の運動方程式は (8)$\boxed{}$ と得られる。

最後に，C_1(または C_2)とCに対する運動方程式から a を消去すると，$T=$ (9)$\boxed{}$ という結果が得られる。

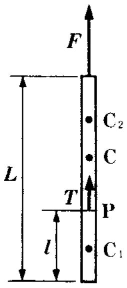
以上では，点Pにおけるひもの張力の大きさ T を，$F>Mg$ の場合について求めてみたが，$F<Mg$(ひもの上端に働く力はやはり鉛直上方に向いている)の場合にも，(9)と同じ結果が得られる。

(早稲田大-理工)

Advice
(1) ひもの全質量が重心Cに集中していると考えて，質点として扱い，質点Cにはたらいている力を書き出して運動方程式をたてればよいのです。
(2) 長さ l の部分の質量をまず求めることです。
(3) C_1 を質点と考えて，これにはたらく力は重力のほかに何があるかを考えることです。
(4) (2)，(3)で得られた力によって質点 C_1 が加速度 a で運動すると考えます。
(5) 長さ $L-l$ の部分の質量をまず求めることです。
(6)，(7) 重力以外にどのような力が作用しているかを考えます。
(8) (5)～(7)で得られた力によって質点 C_2 が加速度 a で運動すると考えます。
(9) (1)，(4)で得た運動方程式から a を消去します。

解き方 (1) C点にはたらいている力は，上向きには F，下向きには重力 Mg である。したがって，運動方程式は

$$Ma=F-Mg \quad (\text{ただし } F>Mg)$$



(2) ひもは一様だから線密度が $\dfrac{M}{L}$ であり，長さ l の部分の質量は

$$\frac{M}{L}\times l=\frac{l}{L}M$$

となる。

したがって，C_1 にはたらく重力は $\dfrac{l}{L}Mg$ である。

(3) P点に上向きにはたらく張力 T が点 C_1 に伝えられ，作用していると考える。

(4) 質量 $\dfrac{l}{L}M$ の質点が，上向きの張力 T と下向きの重力 $\dfrac{l}{L}Mg$ を受けて，加速度 a で上昇していると考えればよい。したがって質点 C_1 の運動方程式は

$$\frac{l}{L}Ma=T-\frac{l}{L}Mg$$

(5) 長さ $L-l$ の部分の質量は，$\dfrac{L-l}{L}M$ であるから，これにはたらく重力は $\dfrac{L-l}{L}Mg$ となる。

(6) 上向きに引っ張っている大きさ F の力

(7) C_1 を引っ張っている大きさ T の力（張力）の反作用の力

(8) 質量 $\dfrac{L-l}{L}M$ の質点が，上向きの力 F と下向きの重力 $\dfrac{L-l}{L}Mg$，および下向きの力 T を受けて，加速度 a で上昇していると考えればよく，質点 C_2 の運動方程式は

$$\frac{L-l}{L}Ma=F-\frac{L-l}{L}Mg-T$$

(9) (1)で得た式を変形すると，$a=\dfrac{F-Mg}{M}$ となる。

これを(4)で得た式に代入する

$$\frac{l}{L}M\times\frac{F-Mg}{M}=T-\frac{l}{L}Mg$$

$$\therefore \quad T=\frac{l}{L}F$$

●解答● (1) $F-Mg$ (2) $\dfrac{l}{L}Mg$ (3) T

(4) $\dfrac{l}{L}Ma=T-\dfrac{l}{L}Mg$ (5) $\dfrac{L-l}{L}Mg$ (6) F

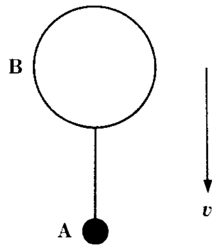
(7) T (8) $\dfrac{L-l}{L}Ma=F-\dfrac{L-l}{L}Mg-T$ (9) $\dfrac{l}{L}F$

力のつりあいを考えたり，力を分解して運動に関係する力をとらえるところがポイントです。加速度運動をしている物体上に静止している物体については慣性力を考えると，運動方程式は力のつりあいの問題になることもおさえておきなさい。

実戦トレーニング

1 **〈おもりのついた気球の運動〉**

図のように質量 M の気球Bが，質量 m の小物体Aを質量の無視できる糸でつるして，一定の速さ v で下降している。重力の加速度の大きさを g とし，空気の抵抗および物体Aにはたらく浮力は無視できるものとする。また，気球は鉛直方向に運動するとして，つぎの問いに答えよ。



(1)　ア．物体Aにはたらく力

　　イ．気球Bにはたらく力

を図中に，それぞれ，矢印で記入せよ。ただし，気球のみの重心Gは気球の中心にあるものとする。

(2)　糸の張力はいくらか。

(3)　気球にはたらく浮力はいくらか。

物体Aが地面から h の高さになったとき，糸を切断した。

(4)　物体Aが地面に到達した瞬間の運動量の大きさはいくらか。

(5)　物体Aが地面に到達するまでに要する時間はいくらか。

(6)　気球の加速度の大きさはいくらか。　(信州大)

問題 Memo　基本的な力学の問題です。力のつりあいの式から，未知の力を既知の力で表すのですが，そのためのステップとして作図をさせています。問題文の状況を正しく理解できれば難しい問題ではありません。

2 〈エレベーターの加速度運動と慣性力〉

高さ 105〔m〕の高層ビルの屋上までエレベーターで昇った。エレベーターは，最初の 5 秒間は一定の加速度 a で，つぎの 12 秒間は一定の速さで上昇して高さ 87〔m〕まで達し，あとは一定の加速度 b で減速しながら上昇して屋上に着いた。

(1) 最初の 5 秒までは，エレベーターの高さ y は出発からの時間 t を用いるとどんな式で表されるか。

(2) 加速度 a はいくらか。

(3) 一定の速さで上昇した距離はいくらか。

(4) 加速度 b はいくらか。

(5) エレベーターは地上から屋上まで昇るのに全部でどれだけの時間を要したか。

(6) エレベーターの中にばねを用いた体重計があり，体重 50〔kgw〕の人がこれにのったとすれば，①加速度 a で上昇中，②一定の速さで上昇中には，体重計はそれぞれどんな値を示すか。 （大阪電通大）

問題 Memo 等加速度直線運動の典型的な問題です。学校のテストにもよく出題されます。

3 〈摩擦がある斜面上でのつりあいと運動〉

質量 m の物体にばねを取り付け，斜面に沿って引き上げた。引き上げる力は斜面に平行とし，物体が滑り始めるときのばねの伸びを測定した。斜面が水平面となす角度をいろいろに変えて測定したところ，ばねの伸びは角度 60° のときに最大となった。以下の問に答えよ。ただし，$\sqrt{3}\fallingdotseq 1.732$ とし，答えは小数点以下 2 桁まで求めよ。なお，必要ならば次の公式を用いてよい。

$$a\cos\alpha + b\sin\alpha = c\cos(A-\alpha), \qquad \text{ここで } c=\sqrt{a^2+b^2},\ \tan A=\frac{b}{a}$$

(a) 物体と斜面の間の最大静止摩擦係数を求めよ。

(b) 最大となったときのばねの伸びは，物体を鉛直につり下げた場合の伸びの何倍か。

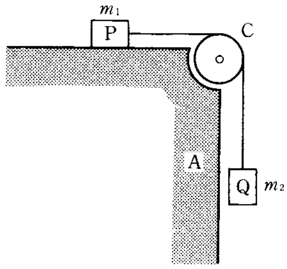
(c) ばねを取りはずした物体を斜面の上に置いて，斜面の傾斜角度を 0° から徐々に増したところ，物体が斜面を滑り出した。このときの角度を求めよ。

(d) 次に斜面の角度を再び 60° に保ち，物体を斜面上に置いて初速度 0 で滑べらせたところ，t 秒間に滑った距離は物体を初速度 0 で t 秒間自由落下させたときのちょうど 70% であった。斜面と物体間の動摩擦係数を求めよ。（慶應義塾大-理工）

問題 Memo 力のつりあいを考えるには，まず実際にその物体が受けている力をみつけだすことです。次に，みつけだした力のつりあいの式をつくり解いていきます。この種の問題は，よく出題され，頻度が高いとみてよいでしょう。加速度運動を考えるときにも，物体がどのような力を受けているかをはっきりとらえることが大切といえます。また，この問題の程度は標準です。

4 〈糸で結ばれた落下錘と粗面上の物体の系の運動〉

あらい水平面上を移動する質量 m_1 の物体Pと，垂直に昇降する質量 m_2 のおもりQとが，図に示すように，滑車Cにかけられた伸び縮みのない糸で結ばれている。おもりQが定点Aを通過する瞬間に，物体Pは左方向に v_0 の速さで動いていた。滑車Cと糸の質量，および滑車における摩擦はないと考え，CとAとはじゅうぶんに離れているものとして，次の問に答えよ。ただし重力の加速度は g，物体と水平面との間の動摩擦係数は μ とする。



(1) おもりQが最高点に達するまでの時間 T を示せ。

(2) また，その最高点と定点Aとの距離 H を示せ。　（慶應義塾大-理工）

問題 Memo 運動する物体の状態を知るには，その物体が受ける力を考えることが必要です。この問題では，物体Pは，動摩擦力と張力，おもりQは重力と張力をつねに受けて運動するので等加速度運動をすることがわかります。これは等加速度運動の基本的な問題といえるでしょう。

これで，実戦トレーニングは終わりです。いろいろ目先は変わっても，もとになる考え方は同じなので，基本をたいせつにしなさい。

●ここに注目／● 　　　　**物体の運動と力**

① **等加速度直線運動**

$$\boldsymbol{v=v_0+at} \qquad \boldsymbol{s=v_0t+\frac{1}{2}at^2} \qquad \boldsymbol{v^2-v_0{}^2=2as}$$

向きの違いは，＋と－で表せる。

② **運動方程式**　　$\boldsymbol{F=ma}$

③ **慣性力**

加速度運動をしている系を基準にしたとき現れる見かけの力。力の大きさは ma，力の向きは，加速度の向きと逆である。慣性力を考えると，この系上に静止している物体の運動方程式は力のつりあいの式になる。

きょうはこれですべて終わりです。最後までよくがんばりました。

第 2 日	力と運動 13 日間 ② 学習日 月 日
	重力による運動

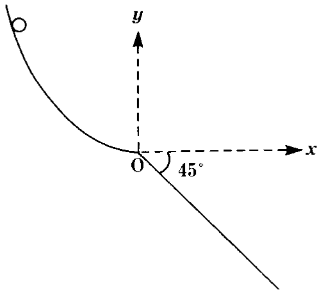
きょうは重力による運動を題材とする問題を考えます。物が落ちる，物を投げる，こういった現象も，重力加速度をもとに分析できます。

まずは確認トレーニングです。重力は鉛直下向きにはたらくので，重力による運動については，鉛直方向と水平方向に分けて考えることが基本です。しっかりチェックしなさい。

確認トレーニング

〔解答欄〕

1 〈重力による運動〉



図のように，なめらかなスロープが座標系の原点 O で，傾斜角 45° の斜面に接続しています。小石をこのスロープのある高さの地点からすべらせたところ，O 点で水平方向に v_0 の速さで空中に飛び出しました。次の問いに答えなさい。ただし，重力加速度の大きさは g，x，y 軸および座標軸の正の向きは図に示したように定めます。

(1) 飛び出してから t 秒後の x 座標，y 座標を表す式を書きなさい。

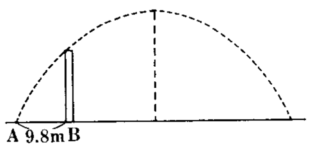
(2) t 秒後の y 座標を，x 座標の関数として表しなさい。

(3) 斜面上へ落ちた地点の x 座標を表す式を書きなさい。 (北見工大)

2 〈重力による運動〉

A という地点から石をある仰角で投げ上げたところ，t_1 秒後に A と同じ水平面上の B 点に落下しました。次に同じ A 点から石を，さきの 2 倍の仰角で投げ上げたところ，t_2 秒後に同じように B 点に落下しました。空気の抵抗はないものとして，AB 間の距離を求めなさい。もし，$t_1=4$ 秒，$t_2=9$ 秒ならば，AB 間の距離はどのくらいですか。

3 〈重力による運動〉

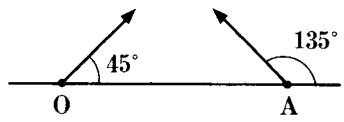


水平な地面の A 点からボールを投げ上げたら，1.0 秒後に A から 9.8m の点 B に立てた壁の先端を通って飛んでいき，投げてから 4.0 秒後に地面に落下しました。壁の高さとボールの初速度を求めなさい。

では，例題です。やさしい問題なので，すぐに解けるでしょう。

例題2　時間をおいて斜方投射される2物体の衝突過程

図のように水平面上に2点O，Aがある。いま点Oより質量2.0×10^2[kg]の物体を速さ7.9×10^2[m/s]，角度45°で発射してから，時間60[s]後に点Aから質量1.0×10^2[kg]の物体を角度135°で発射した。点Aから発射して30[s]後に，この2つの物体は衝突した。空気の抵抗を無視し，重力の加速度の大きさを9.8[m/s^2]とし，運動は鉛直面内で行なわれるものとして次の問に答えよ。



(1)　点Oから発射した物体の発射20[s]後における速度の水平成分と鉛直成分はそれぞれいくらか。
(2)　点Oから発射した物体の到達できる最大の高さはいくらか。
(3)　点Aから発射した物体の初速はいくらか。
(4)　点Aから発射した物体の発射10[s]後における位置エネルギーと運動エネルギーはそれぞれいくらか。ただし，水平面上の位置エネルギーを0とする。
(5)　OA間の距離はいくらか。　　　　(岡山理科大-理)

Advice　(3)　2物体が衝突した高さは等しいことがポイントです。
(5)　衝突したときの2物体の水平運動距離の和がOAの距離になります。

解き方　(1)　点Oから発射した物体の初速をu_0，発射角をθとする。
速度の水平成分はどの位置でも変わらず，

$$u_x=u_0\cos\theta=7.9\times10^2\cos45^\circ=7.9\times10^2\times\frac{1}{\sqrt{2}}=5.6\times10^2[\mathrm{m/s}]$$

鉛直方向には重力加速度gがはたらいているので20[s]後の鉛直速度は

$$u_y=u_0\sin\theta-gt=7.9\times10^2\sin45^\circ-9.8\times20=3.6\times10^2[\mathrm{m/s}]$$

(2)　最高点では鉛直速度が0となるので，等加速度直線運動の公式$v^2-v_0{}^2=2ah$より，最高点の高さをH，鉛直上向きを正とすれば　$a=-g$　であることに注意して

$$-(u_0\sin\theta)^2=-2gH$$

$$\therefore\quad H=\frac{(u_0\sin\theta)^2}{2g}=\frac{(7.9\times10^2\sin45^\circ)^2}{2\times9.8}=1.6\times10^4[\mathrm{m}]$$

(3)　2物体が衝突した高さをhとし，Aから発射した物体の初速をv_0とする。
発射角$\theta'=45^\circ$，Aから発射した後の時間$t'=30$[s]であるから，次の関係式が成り立つ。

Aについて

$$h=v_0t'\sin\theta'-\frac{1}{2}gt'^2\qquad\cdots\cdots\cdots①$$

また，Oから発射した物体をBとすれば，Bは，

$$t=60+t'=90[\mathrm{s}]$$

で高さがhになるから，

$$h=u_0t\sin\theta-\frac{g}{2}t^2\qquad\cdots\cdots\cdots②$$

①=②よりv_0を求めれば

$$v_0=\frac{1}{t'\sin\theta'}\left\{u_0t\sin\theta+\frac{g}{2}(t'^2-t^2)\right\}$$

これに　$\theta=\theta'=45^\circ$, $t=60+30=90$[s], $t'=30$[s], $u_0=7.9\times10^2$[m/s] を代入して

$$v_0=\frac{1}{30\times\frac{1}{\sqrt{2}}}\left\{7.9\times10^2\times90\times\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{9.8}{2}(30^2-90^2)\right\}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{30}(503\times10^2-353\times10^2)\fallingdotseq7.1\times10^2[\mathrm{m/s}]$$

(4)　A から発射した物体の発射直後の力学的エネルギー E_0 は，運動エネルギーのみで，

$$E_0=\frac{1}{2}mv_0{}^2=\frac{1}{2}\times1.0\times10^2\times(7.1\times10^2)^2\fallingdotseq25.2\times10^6[\mathrm{J}]$$

10[s] 後の高さ h' は

$$h'=v_0t\sin\theta-\frac{1}{2}gt^2=7.1\times10^2\times10\sin45^\circ-\frac{1}{2}\times9.8\times10^2\fallingdotseq4.5\times10^3[\mathrm{m}]$$

よって 10[s] 後の位置エネルギー U は

$$U=mgh'=1.0\times10^2\times9.8\times4.5\times10^3\fallingdotseq4.4\times10^6[\mathrm{J}]$$

同時刻での運動エネルギー K は力学的エネルギー保存則から

$$K=E_0-U=25.2\times10^6-4.4\times10^6\fallingdotseq2.1\times10^7[\mathrm{J}]$$

(5)　衝突地点までの 2 物体の水平移動距離の和が求める $\overline{\mathrm{OA}}$ の距離である。

$$\overline{\mathrm{OA}}=u_0t\cos\theta+v_0t'\cos\theta'=7.9\times10^2\times90\cos45^\circ+7.1\times10^2\times30\cos45^\circ$$
$$=6.5\times10^4[\mathrm{m}]$$

●解答●　(1)　水平成分 5.6×10^2[m/s]　　鉛直成分 3.6×10^2[m/s]

(2)　1.6×10^4[m]　　(3)　($v_0=$)7.1×10^2[m/s]

(4)　位置エネルギー　4.4×10^6[J]　　運動エネルギー　2.1×10^7[J]

(5)　6.5×10^4[m]

次は実戦トレーニングです。放物運動の問題は，衝突やエネルギー保存などと複合されているものが多いので，そのような取り組み方を身につけること。

実戦トレーニング

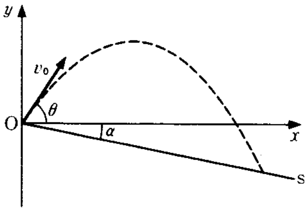
1 **〈鉛直投げ上げ運動〉**

物体Aを地上の点Pから垂直上方に初速度50m/秒で打ち上げ，2秒後に物体Bを同じく点Pから垂直上方に初速度100m/秒で打ち上げる。空気の抵抗はないものとすると，Aを打ち上げてから何秒後にAとBとが衝突するか。　　　　（上智大-理工）

問題 Memo　鉛直投げ上げ運動で，時間差をおいて投げた物体の高さを求める問題です。

2 〈スキーのジャンプの放物運動モデル〉

スキーのジャンプ競技の一番簡単なモデルを考えよう。原点Oから初速度 v_0m/s で，水平に対し θ という発射角で上向きにとびだした質量 $m$kg の粒子が，水平と下向きに角 α をなす斜面上へ最大の距離をとぶには，v_0，m，α を一定として，θ をどのように選んだらよいか。空気の抵抗を無視し，重力加速度を gm/s^2 とせよ。



(ア) 答を導く過程を含めて，答を書け。

(イ) このモデルが実際のジャンプの問題にもっとよく合うようにするには，どのようにこのモデルを改良したらよいか。主なもの2つを書け。　　(慶應義塾大-医)

問題 Memo 空中にとびだした物体の運動は放物運動です。放物運動は水平方向に等速直線運動，鉛直方向に等加速度運動ですが，このような問題では，ある時刻における，物理状態，つまり位置，速度などの関係から結果を導く場合が多く，簡単にみえますが，内容のあるものも多いですから注意しましょう。(イ)は，モデルを実際の問題に適合するように条件を考える珍しい問題です。全体的には，三角関数の知識がかなり必要な，やや難しい問題といえるでしょう。

3 〈水平運動する物体と斜方投射物体の衝突条件〉

水平な地面より一定の高さ h を保ちながら，一定速度 V で一直線に動いている物体Aがある。この物体が地面にある物体Bの真上を通過してから時間 t 後，Bを初速度 v で打ち上げる。重力加速度を g とし，また，空気の抵抗はないものとして，以下の問に答えよ。

(1) BがちょうどAと同じ方向，同じ速度になったときAと出会うようになるには，t と v の値をいくらにすればよいか。

(2) $V=\dfrac{\sqrt{3gh}}{4}$ で $v=\sqrt{3gh}$ のとき，BがAの運動方向と30°の角度で下方から衝突するようにするには，打ち上げ方向が地面となす角 θ，および t の値をそれぞれいくらにすればよいか。また，Bを打ち上げた後，衝突するまでの時間 T はいくらになるか。（慶應義塾大-理工）

問題 Memo　等速直線運動をする物体と放物運動する2つの物体とが，ある一定時刻に，同一場所であう条件をもとめるわけですが，放物運動の問題としては標準的なものといえるでしょう。

では，斜方投射の考え方をまとめておきましょう。

●ここに注目！● 　**重力による運動**

① **斜方投射の考え方**

投げ出した物体にはたらく力は，鉛直下向きにはたらく重力だけである。空気抵抗などがなければ，水平方向には力ははたらかない。

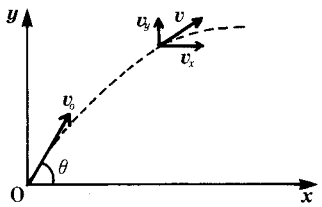
② **水平方向の運動**

$v_x = v_0\cos\theta$ 　　 $x = (v_0\cos\theta)t$

③ **鉛直方向の運動**

$v_y = v_0\sin\theta - gt$ 　　 $y = (v_0\sin\theta)t - \frac{1}{2}gt^2$

鉛直上向きを正としたので，重力加速度が $-g$ となることに注意せよ。



これで全部終わりです。第3日は，円運動についてです。

第 3 日	力と運動 13 日間 ③　　　　学習日　　月　　日
	# 円 運 動

デプロの学習の進め方にもそろそろなれてきたことでしょう。
第 3 日のきょうは，等速円運動についてです。物体を円運動させる力は向心力で，進行方向に対してつねに垂直にはたらく力です。等速円運動についての基本事項を，まず確認トレーニングでチェックしなさい。

確認トレーニング

〔解答欄〕

1 〈等速円運動の角速度〉

半径 1.5m の円周上を 1 分間に 30 周の割合で等速円運動をする物体があります。

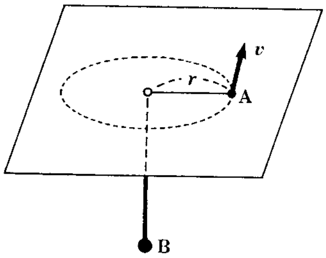
(1)　この運動の周期を求めなさい。

(2)　この物体の角速度を求めなさい。

(3)　この物体の速さを求めなさい。

(4)　この物体にはたらく加速度の大きさを求めなさい。

2 〈向心力〉



軽くて伸びない糸の両端に，質量 0.20kg の物体 A と質量 0.50kg の物体 B を結び，A を水平な板の上にのせ，B は，板にあけた小さな穴からつるします。板の上の糸の長さを 0.80m とし，この部分に直角な方向の速度を A に与えたところ，A は半径 0.80m の等速円運動を行いました。これについて，次の問いに答えなさい。

(1)　何が向心力となっていますか。また，大きさはいくらですか。

(2)　A の速度はいくらですか。

(3)　A の円運動の周期を求めなさい。

3 〈等速円運動〉

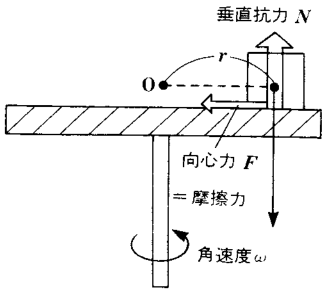
半径 200m の円形の線路に沿い，一定の速さ 20m/s で列車を安全に走らせるためには，線路面を水平に対してどれだけ傾けなければなりませんか。この問題を次の問いに従って解きなさい。

(1)　列車にはたらく力を図示しなさい。

(2)　線路面の傾き角 θ を $\tan\theta$ で示しなさい。

4 〈等速円運動〉

鉛直な軸のまわりを，水平に回転している円板の上に，質量0.50kgの物体を中心から0.50mのところにのせて回転しました。円板と物体との間の静止摩擦係数を0.20とします。



(1) 回転円板が毎秒0.8回転しているときに，物体の中心に向かう加速度の大きさはいくらですか。

(2) 面との間の最大静止摩擦力はいくらですか。

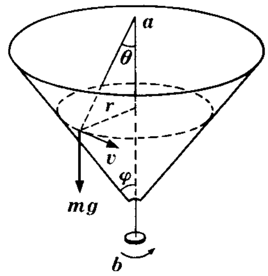
(3) 物体がすべり出す直前の回転数はいくらですか。

(4) (1)のとき，円板の回転を急に止めると，物体は円板上をいくらすべって静止しますか。ただし，動摩擦係数を0.18とします。

例題は一見複雑そうですが，内容的には基本です。しっかり取り組みましょう。

例題3　逆円すい面上での物体の運動

図のように，半頂角 φ の直円すい面がその対称軸を鉛直にし，逆向きに立てて固定してある。この対称軸に細い棒 ab が立っていて，その上端 a に糸が結びつけてあり，糸の他端に質量 m の小球（大きさが無視できる）がついている。棒 ab をしだいに速く回していくと，糸と棒のなす角度もしだいに増加し（糸は棒にまきつかないものとする），小球が円すい面にふれる直前には円運動をするようになった。そのとき糸と棒 ab のなす角を θ，対称軸から小球までの距離を r とする。このとき，糸を切って小球を円すい面にのせた。小球は円すい面にのり，そのままの高さで円運動をつづけた。



次の問いに答えよ。ただし，重力の加速度を g とする。また円すいの内側の面はなめらかである。

(1)　糸を切る直前の糸の張力 T を求めよ。

(2)　小球が円すい面にのった瞬間における小球の速度の大きさ v を求めよ。

(3)　小球が円すい面にのった瞬間における，円すい面が小球におよぼす力 N（垂直抗力）を求めよ。ただし，小球の速さは v で表し，(2)で求めた v の値を代入する必要はない。

(4)　小球が円すい面にのり，そのままの高さで円運動をつづけるのは，角 φ と θ との間にどのような関係式が成り立つときか。　（金沢大）

Advice　(1)　小球にはたらく力は，糸からの張力と重力です。鉛直方向のつりあいから張力を求めることができます。

(2)　円すい面にふれる直前と，のった瞬間における小球の速度 v は，変わらないものと考えます。小球が受けている向心力の大きさを T と θ で表して運動方程式をたてます。

(3)　小球にはたらく力は，円すい面からの垂直抗力と重力です。向心力の大きさを N と φ で表して運動方程式をたてます。

(4)　鉛直方向について，つりあいの式をたてて，(2)と(3)の結果を用います。

解き方　(1)　糸の張力の鉛直方向の成分は図1より $T\cos\theta$ である。したがって，鉛直方向の力のつりあいより，

$T\cos\theta = mg$

$$\therefore \quad T = \frac{mg}{\cos\theta}$$

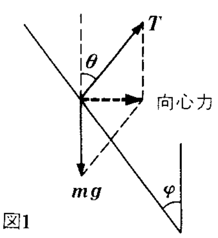


図1

(2)　小球は，$T\sin\theta$ の大きさの向心力を受けて円運動をしている。中心方向の加速度は $\dfrac{v^2}{r}$ であるから，運動方程式は

$$T\sin\theta = m\frac{v^2}{r}$$

ここで，(1)の結果を用いて T を消去すると

$$\frac{mg}{\cos\theta}\times\sin\theta=m\frac{v^2}{r}$$

$$\therefore\quad v=\sqrt{gr\tan\theta}$$

(3)　図2より小球が，$N\cos\varphi$ の大きさの向心力を受けて円運動をすると考えると，

$$N\cos\varphi=m\frac{v^2}{r}$$

$$\therefore\quad N=\frac{mv^2}{r\cos\varphi}$$

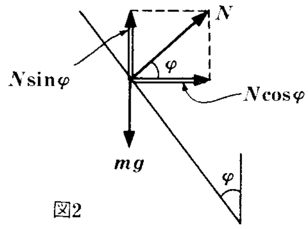


図2

(4)　鉛直方向の力のつりあいから，

$$N\sin\varphi=mg$$

$$\therefore\quad N=\frac{mg}{\sin\varphi}$$

この結果と(2)，(3)の結果を用いて式を変形すると

$$\frac{mgr\tan\theta}{r\cos\varphi}=\frac{mg}{\sin\varphi}$$

これより，$\tan\varphi\tan\theta=1$

$$\tan\varphi=\frac{1}{\tan\theta}=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$$

$$\therefore\quad \varphi+\theta=\frac{\pi}{2}$$

(図3からわかるように，

$\tan\varphi=\dfrac{b}{a}$，$\tan\theta=\dfrac{a}{b}$)

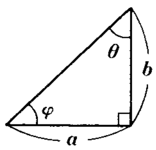


図3

(注)　このとき

$$N=\frac{mg\tan\theta}{\cos\varphi}=\frac{mg}{\cos\varphi\tan\varphi}=\frac{mg}{\sin\varphi}$$

$$=\frac{mg}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}=\frac{mg}{\cos\theta}=T$$

となる。

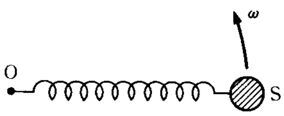
すなわち，小球が円すい面にふれる直前の張力と，のった瞬間の垂直抗力は，方向も大きさも等しく，糸を切る前後で小球にはたらく力としては何の変化もないことになる。したがって，小球はそのままの高さで円運動を続ける。

●解答●　(1)　$T=\dfrac{mg}{\cos\theta}$　　(2)　$v=\sqrt{gr\tan\theta}$　　(3)　$N=\dfrac{mv^2}{r\cos\varphi}$　　(4)　$\varphi+\theta=\dfrac{\pi}{2}$

実戦トレーニング

1 〈ばねにつながれた質点の等速円運動〉

図のように，自然長 l_0〔m〕，ばね定数 k〔N/m〕のばねの先端に質量 m〔kg〕の小球Sが取り付けてある。このばねは，他端Oを中心として，なめらかな水平面内で回転できるようになっている。ばねの質量および小球Sと水平面の間のまさつ力は無視できるとして，次の各問いに答えよ。



問1　点Oを中心として，小球Sが水平面上を角速度 ω〔rad/s〕で回転するときのばねの長さ l を l_0，k，m，ω を用いて表わせ。

問2　問1の回転の際に，ばねに蓄えられる弾性エネルギーはいくらか。l_0，k，m，ω を用いて表わせ。

問3　一定の角速度 ω で回転している小球Sを，ある時刻にばねから切り離すと，小球Sはどのような運動をするか。説明せよ。　（千葉大）

問題 Memo　等速円運動の向心力をばねの力が担うという，きわめてすなおな問題です。

2 〈円運動，重力と遠心力のつりあい〉

以下の $\boxed{}$ に記入すべきものを，その番号にしたがい記せ。

半径 r の半円形の針金を，弧の中点 O を下にして半円の中心 C と点 O を通る鉛直軸（y 軸）のまわりに回転できるようにしてある。図 1 に示すように，質量 m の物体 A に孔をあけて針金を通し，針金とともに一定の角速度 ω で回転させたところ，A は針金に対して P 点（$\angle \mathrm{PCO}=\theta$）で静止したままであった。ただし A と針金の間の摩擦力および A の大きさは無視できるものとし，重力加速度を g とする。

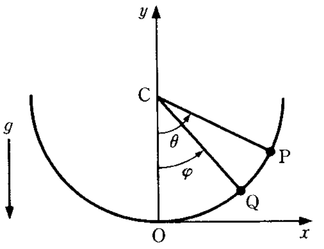


図 1

この場合 A に働く力の間に成り立つ式は円の接線方向について，(1)$\boxed{}=0$，半径方向について，抗力＝(2)$\boxed{}$ となる。したがって，$\cos\theta=$ (3)$\boxed{}$ であることがわかる。P 点からはずれた同じ円上の点 Q（$\angle \mathrm{QCO}=\varphi$）に A をおくときはどうなるであろうか。この点での重力と遠心力それぞれの円の接線方向成分は，φ の大きくなる方向を正として，(4)$\boxed{}$ と (5)$\boxed{}$ になる。この 2 つの力の成分の和の符号は $\varphi<\theta$ のとき (6)$\boxed{}$，$\varphi>\theta$ のとき (7)$\boxed{}$ となるので A は円上を動き始める。

次に図 2 に示すように，半円形の代りに $y=ax^2\,(a>0)$ の放物線形の針金に通した物体 A について考えよう。座標 $(x_0,\ ax_0{}^2)$ の点 R に A を置き，一定の角速度 ω で y 軸のまわりに針金を回転させたところ A は針金に対して静止したままであった。この点での放物線の接線の傾き（接線と x 軸のなす角の正接）は $2ax_0$ である。

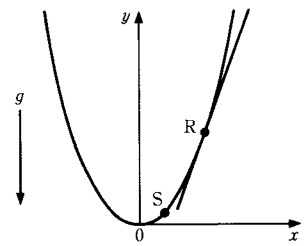


図 2

この場合 A に働く力の間に成り立つ式から，(8)$\boxed{}=2ax_0$ となる。R 点からはずれた同じ放物線上の点 S（この点は点 R よりも頂点に近いとする）に A をおくとき，物体は放物線上で (9)$\boxed{}$。〔(9)についてはつぎの 1 ～ 3 のうち正しいものを選べ。〕

1．y 座標の大きい方へ動き始める　　2．y 座標の小さい方へ動き始める

3．S 点に静止したままである

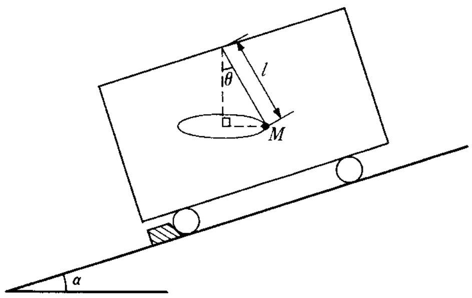
（早稲田大-教育）

問題 Memo 回転する円弧および放物弧上におかれた物体に働く重力と遠心力の関係を論じたもので，基本的な内容で頻出度の高い問題です。

3 〈等加速度運動をしている台車中の円すい振り子〉

次の文の □ の中にあてはまる式または記号を，また，{　}の中の正しいものの番号を，それぞれの解答欄に記入せよ。

水平面と角 α〔rad(ラジアン)〕の傾きをなす直線軌道上に，車輪止めによって停止している台車がある。この台車に乗っている人が，図のように，長さ l〔m〕の軽い糸の上端を固定し，下端に小さな質量 M〔kg〕をもったおもりをつけて，水平面内で等速円運動をさせた。重力の加速度を g〔m/s²〕とし，空気の抵抗は無視できるものとする。



いま，おもりが静止したときの糸の方向と円運動をさせたときの糸とのなす角（半頂角）を θ〔rad〕とすると，おもりに働く糸の張力と重力との合力が(イ){ (1) 向心力 (2) 慣性力 (3) 遠心力 }となって，おもりは等速円運動を続ける。この合力の大きさは(ロ)□〔N〕であり，張力の大きさは(ハ)□〔N〕である。したがって，角速度の大きさは(ニ)□〔rad/s〕となり，おもりの円運動の周期は(ホ)□〔s〕となる。また，このおもりの持つエネルギーは，おもりが静止している状態から(ヘ)□〔J〕だけ増加している。

次に，車輪止めをはずしたところ，台車は動き始めた。このとき，台車に乗っている人が，おもりの運動を止めて静かにつるすと，おもりには台車の進行方向と(ト){ (1) 同じ (2) 垂直 (3) 反対 }方向の大きさ(チ)□〔N〕の慣性力が働き，糸は鉛直線（重力方向）と(リ)□〔rad〕の角をなして傾いた。そこで，糸に垂直な平面内でおもりに半頂角 θ〔rad〕の等速円運動をさせたところ，おもりの角速度は(ヌ)□〔rad/s〕となり，円運動の周期は(ル)□〔s〕となった。ただし，台車が動くときの空気抵抗と車輪の慣性モーメントは無視できるものとする。

（京都大）

問題 Memo 等速円運動（円錐振り子）の基本問題に，慣性力の問題を組み合わせてあるところが特徴です。等速円運動の基本と，円すい振り子の角速度と周期の公式を導く方法をしっかり覚えていれば，とくに難しくはありません。

最後に，等速円運動についてまとめて，終わりにしましょう。

●ここに注目／●　　円運動

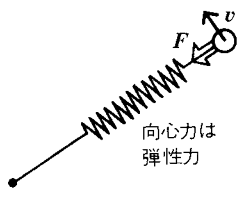
① 等速円運動の基本式

$$v = r\omega = \frac{2\pi r}{T} = 2\pi r n \qquad \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi n$$

② 加速度と向心力

$$a = r\omega^2 = \frac{v^2}{r} \qquad F = mr\omega^2 = \frac{mv^2}{r}$$

円運動する物体には，常に速度と垂直の向きの向心力がはたらいている。



③ 遠心力

円運動する物体を基準にしたとき現れる慣性力を遠心力という。

第4日	力と運動13日間④ 学習日　月　日
	単 振 動

きょうのテーマは，単振動です。単振動をする物体には $F=-kx$ と表される力がはたらきます。この力をみつければ，単振動の問題は解けたも同然です。

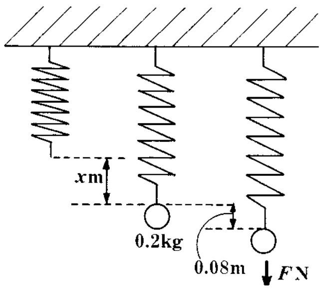
まず，確認トレーニングでチェックします。ばね振り子・単振り子の，単振動を起こす力を確認しておきなさい。

確認トレーニング

〔解答欄〕

1 〈ばね振り子〉

ばね定数12N/mのつるまきばねを鉛直につるし，図のように，下端におもりをつけるようにしてあります。



(1) 0.2kgのおもりをつけたとき，つりあいの位置は自然の長さより何mのびたところですか。

(2) つりあいの位置よりさらに0.08m下げるためには，どれほどの力を加えなければなりませんか。

(3) (2)の状態で手を離してこのばねを振動させたとき，この振動の周期と角振動数を求めなさい。

2 〈単振り子〉

糸の長さが0.20mの単振り子の周期を求めなさい。また，重力加速度が $\frac{g}{6}$ の月面で振らせたときはどうですか。上向きの加速度が1.5m/s² で上昇しているエレベーターの中で振らせたときはどうですか。

3 〈単振動〉

次の(1)，(2)，(3)のような変化を与えた場合，ばね振り子および単振り子の周期にどのような変化が起きるか，簡単に述べなさい。

(1) おもりの質量を2倍にする。

(2) ばねまたは糸の長さを2倍にする。

(3) 上向きの加速度3.0m/s² で上昇しているエレベーターの中で観測する。

4 〈単振動〉

ばね定数10.0N/mのばねに0.10kgのおもりをつるし，さらにその下にもう1つ0.02kgの小さなおもりをつるしたとき，次の問いに答えなさい。

(1) ばねののびは何mですか。

(2) 小さなおもりだけを静かに切り離すと，大きなおもりはどんな運動をしますか。そのとき振動の中心はどこですか。

(3) おもりの速さの最大値を求めなさい。

では，例題です。

例題 4　斜面上の単振り子

長さ l の振り子を鉛直面内で微小な振れの角で振らせるとき，その振動数 ν_0 が $\nu_0=\dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{g}{l}}$ (g は重力加速度) で与えられることはよく知られている。ここでは，この式を参考にして，以下のような振り子について考えよう。

図 1 のように，水平面 AO と θ の傾きをなす斜面 BO 上の一定点 P に，斜面と垂直に棒 PQ を立てた装置を用意する。斜面の傾きの角 θ は 0° から 90° まで変えられるものとする。いま，図 1 に示されたように，質量 m の小球と長さ l の細い糸とからなる振り子を点 P にとりつけた。斜面と小球の間の接触は完全になめらかであり，また，小球の半径は糸の長さ l に比べて無視できるものとして，以下の設問に答えよ。結果だけでなく，考え方や途中の計算も簡単に示せ。

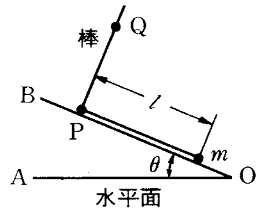


図 1

(a)　図 2 のように，小球がそのつりあいの位置のまわりに微小な振れの角で振動を行なうとき，その振動数 ν_P は $0^\circ<\theta\leqq 90^\circ$ の角度範囲で θ のどのような関数となるか。ν_P を ν_0 と θ を用いて表せ。

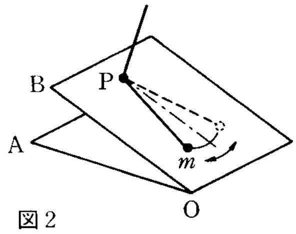


図 2

(b)　次に，図 3 のように，糸の長さを l に保ったまま，振り子をとりつける点を，P から $\dfrac{l}{\sqrt{2}}$ の点 Q まで引き上げた。θ が 30° で，小球がつりあいの位置に静止している場合について，糸の張力 T および小球が斜面から受ける抗力 N の大きさを求めよ。

(c)　図 3 のように点 Q からつるされた小球を，そのつりあいの位置のまわりに微小な振れの角で紙面に垂直な方向に振動させる。その場合の振動数 ν_Q は θ によってどのように変わるか。その概略を，$0^\circ<\theta\leqq 90^\circ$ の範囲で，θ を横軸に，振動数 ν_Q を縦軸にとって図示し，そのもとになる式も記せ。　(東京大)

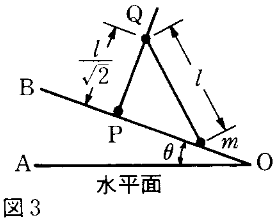


図 3

Advice　一般に，斜面上を，斜面から離れずに運動している物体では，これに加わる力の斜面に垂直な成分の合力は 0 となり，結局斜面内の成分だけを考えればよいことになります。斜面に垂直な方向の力のつりあいからは，斜面からの垂直抗力が得られますが，これが実在しえない方向の力として求まれば，実際には斜面から離れていることを示します。

本問では図形的考察からも斜面から離れる条件は求まりますが，このように，数式の内容を

物理的に解釈したり，逆に物理的条件を適当な方法で数式化することは，いろいろな場面で重要であり，注目しておくべきです。

(a) 小球 m にはたらく力の斜面内の成分をとりだし，鉛直面内での振り子にはたらく力と，大きさや方向を対比させてみます。力のはたらき方が同じなら，相似な（同種類の）運動をすることになります。

(b) つりあいの位置は，位置エネルギーが最小となるPから斜面の最大傾角の方向に下がった位置になります。あとははたらく力をみいだせばよいだけです。3力のつりあいになるので，力の三角形を利用する手もあります。

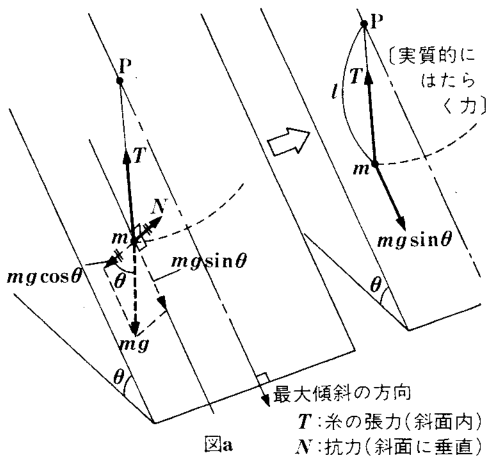
(c) 糸と斜面のなす角が45°になることや，傾き θ を大きくしていくと小球が斜面から離れる状況が生じることに気がつかないようではだめです。離れてしまえば，単なる鉛直面内の単振動です。

斜面上で運動する場合については，最初に述べたように，各力の斜面内の成分をとりだしてみます。糸の張力の斜面内の成分の向きに注意してください。あとはPと小球との距離が一定で，小球はPを中心として円運動することに気づけば，振り子としての長さをどう考えたらよいか，わかるでしょう。

斜面からいつ離れるかは，図形的に考えてわかってしまうと思いますが，きちんと解くには，斜面に垂直な方向の力のつりあいから垂直抗力を求め，これが0から実在しない方向の力へと変わるときの条件を考察します。糸の張力は，小球がつりあいの位置（最下点）を通るとき最大となりますので，垂直抗力はこの位置で最小となり，つりあいの位置で離れなければ，振動中離れることはありません。ここまで考える必要はないかもしれませんが，気になる人は解析してみましょう。

解き方 (a) 小球には，重力，糸の張力，斜面からの抗力がはたらくが，斜面からの抗力と，重力の斜面に垂直な成分とはつりあうから，実質的には糸の張力と，重力の斜面方向の成分の2力だけを考えればよい。重力の斜面方向の成分は，小球の位置によらず，斜面の最大傾斜の方向にはたらき，大きさは $mg\sin\theta$ で一定である。したがって，斜面上の振り子は，重力加速度が $g\sin\theta$ であるような重力場で，鉛直面内を振動する長さ l の単振り子と同等であると考えてよい。したがってその振動数 ν_P は

$$\nu_P=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g\sin\theta}{l}}=\nu_0\sqrt{\sin\theta}$$

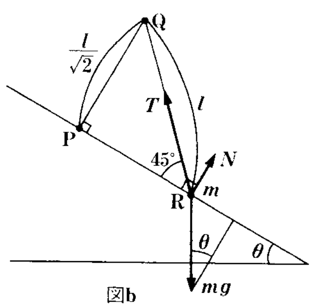


図a

(b) 小球のつりあいの位置をRとすると，PRは斜面の最大傾斜の方向になることは明白。また，△PQRは直角二等辺三角形となり，糸と斜面のなす角は，45°となる。

小球には，重力，糸の張力 T，面からの抗力 N が図bに示すようにはたらき，つりあう。したがって斜面方向および斜面に垂直な方向についてのつりあいから，

$$\begin{cases} T\cos 45^\circ = mg\sin\theta \\ N + T\sin 45^\circ = mg\cos\theta \end{cases}$$

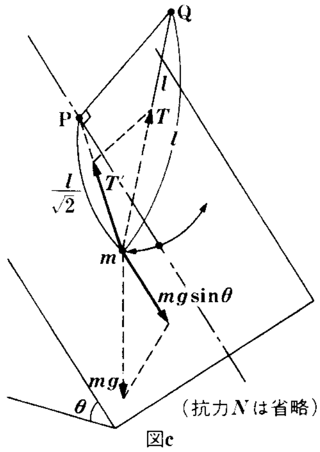


図b

よって $\begin{cases} T=\sqrt{2}mg\sin\theta & \cdots\cdots\cdots① \\ N=mg(\cos\theta-\sin\theta) & \cdots\cdots\cdots② \end{cases}$

$\theta=30^\circ$ を代入して　$T=\dfrac{\sqrt{2}}{2}mg$　$N=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}mg$

(c)　まず小球が斜面上で振動する場合を考える。小球の移動にともなって張力 T の向きが変化するが，T を斜面に垂直な成分と斜面内の成分 T' とに分解し，重力も同様に分解して考えると，小球は斜面に垂直な方向には運動しないから，斜面に垂直な方向の力はつりあう。したがって小球に実質的にはたらく力は T' と重力の斜面方向の成分となる。ところで T' はつねに小球と点 P を結ぶ方向に作用し，また小球と P との距離はつねに $\dfrac{l}{\sqrt{2}}$(PR の長さ)で一定である。したがって小球の運動は，P から長さ $\dfrac{l}{\sqrt{2}}$ の糸でつるされた場合と同等となり，これは(a)と同様にして，重力加速度が $g\sin\theta$ である重力場で，鉛直面内を振動する長さ $\dfrac{l}{\sqrt{2}}$ の単振り子と同等となるから



図c

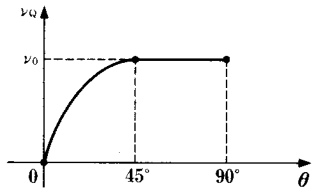
$$\nu_Q=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\sqrt{2}g\sin\theta}{l}}=\nu_0\sqrt{\sqrt{2}\sin\theta}$$

ここで，小球が斜面上にあるのは，$0<\theta<45^\circ$ の範囲である。このことは，$\theta\geqq45^\circ$ では②から $N\leqq0$ となることなどからわかる。

$45^\circ\leqq\theta\leqq90^\circ$ では，小球は斜面を離れ，Q から鉛直につり下げられた状態となり，通常の重力場内での長さ l の単振り子となるから　$\nu_Q=\nu_0$

以上から

$$\nu_Q=\begin{cases}\nu_0\sqrt{\sqrt{2}\sin\theta} & (0^\circ<\theta<45^\circ) \\ \nu_0 & (45^\circ\leqq\theta\leqq90^\circ)\end{cases}$$



図d

となり，これを図示すれば，図 d のようになる。

●解答●　(a)　小球は斜面に垂直な方向には運動しないから，小球にはたらく力の斜面に垂直な成分はつりあう。したがって実質的にはたらく力は糸の張力と，重力の斜面方向の成分だけとなる。後者はつねに斜面の最大傾角の方向に向かい，大きさは $mg\sin\theta$ で一定である。したがって小球は，重力加速度が $g\sin\theta$ の重力場で鉛直面内を振動する長さ l の振り子と同等と考えられ，よって

$$\nu_P=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g\sin\theta}{l}}=\nu_0\sqrt{\sin\theta}$$

(b)　条件から糸と斜面のなす角は 45°。小球にはたらく力は，鉛直下方に重力 mg，糸の方向に張力 T，斜面に垂直上向きに抗力 N であり，これらがつりあう。したがって，斜面方向と，斜面に垂直な方向について成分のつりあいを考えて

$$\begin{cases} N+T\sin45^\circ=mg\cos\theta \\ mg\sin\theta=T\cos45^\circ \end{cases}$$

これから N，T を求め，$\theta=30^\circ$ を代入して

$$T=\frac{\sqrt{2}}{2}mg \qquad N=\frac{\sqrt{3}-1}{2}mg$$

(c) $\theta \geqq 45^\circ$ となると，小球は斜面から離れ，鉛直面内を振動する単振り子となるから

$\nu_Q=\nu_0 \quad (45^\circ \leqq \theta \leqq 90^\circ)$

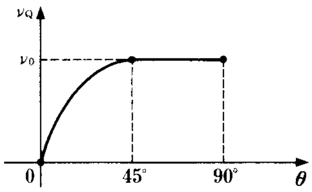
$0<\theta<45^\circ$ では小球は斜面上を運動する。(a)と同様，実質的にはたらく力は，重力および糸の張力の斜面内の成分となる。前者は斜面の最大傾斜方向に一定の大きさ $mg\sin\theta$，一方後者は小球からＰに向かう方向をとる。また小球とＰとの距離はつねに $\frac{l}{\sqrt{2}}$ で一定。したがって小球はＰから長さ $\frac{l}{\sqrt{2}}$ の糸でつるされた状態と同等であり，よって(a)と同様にして，$g\sin\theta$ の加速度の重力場での長さ $\frac{l}{\sqrt{2}}$ の振り子と同じ運動をすると考えられる。

よって $\nu_Q=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\sqrt{2}g\sin\theta}{l}}=\nu_0\sqrt{\sqrt{2}\sin\theta}$

以上から

$$\nu_Q=\begin{cases}\nu_0\sqrt{\sqrt{2}\sin\theta} & (0<\theta<45^\circ)\\ \nu_0 & (45^\circ \leqq \theta \leqq 90^\circ)\end{cases}$$

この概略を図示すると図ｄのようになる。



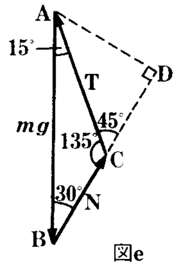
図d

別 解 (b) 力の三角形

m にはたらく３力，mg，N，T がつりあうから，これらの３力は，三角形を作る。これを図示すると，図ｅのようになる。図のようにＤをとり，AB＝1 とすると，

$$\mathrm{AD}=\mathrm{CD}=\sin30^\circ=\frac{1}{2}, \quad \mathrm{AC}=\frac{\mathrm{AD}}{\sin45^\circ}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\mathrm{BD}=\cos30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \mathrm{BC}=\mathrm{BD}-\mathrm{CD}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$$ となり



図e

よって

$$T=\frac{\sqrt{2}}{2}mg \qquad N=\frac{\sqrt{3}-1}{2}mg$$

（もちろん △ABC に正弦定理を用いてもよい。）

ちょっと複雑な問題でしたが，よく理解できましたね。

続いて，実戦トレーニングです。

実戦トレーニング

1 〈鉛直方向のばねの単振動〉

ばね定数 k のつるまきばねの一端を固定し，他端に質量 m のおもりをつるしたところ，ばねは自然の長さから x_0 だけ伸びて静止した。つり合いの位置からさらに少し引いて放した。つり合いの位置を原点とし，鉛直下向きに x 軸をとり，下方を正の向きとして，座標 x の位置を通る瞬間の加速度を a とする。

(1) 最初静止したときのつり合いの式は $\boxed{}$ である。

(2) 運動方程式は $\boxed{}$ である。

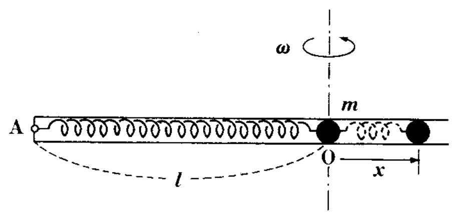
(3) (1)，(2)から加速度は $\boxed{}$ である。

(4) 周期は $\boxed{}$ である。　　　　　　　　　　　　　　　　（千葉大）

問題 Memo　ばねの単振動の基本的な問題です。学校の授業での解説そのままといってよいほどすなおな問題でしょう。

2 〈鉛管内のばねにつけられたおもりの円運動〉

フックの法則にしたがう理想的なばねがあり，その自然長は l，ばね定数は k である。このばねに質量 m の小球をつけて，図のように内面のなめらかな細い鉛管の中に入れ，ばねの一端をA点に固定する。そして小球の真下の点O，すなわちAから距離 l の点Oを通る鉛直線を回転軸として，鉛管を水平面内で一定の角速度 ω で回転させる。そして小球をOから少しずらしてやると，小球は鉛管内でO点を中心として微小振動をはじめた。



(1) 小球がO点から x だけずれたとき，小球にはたらく遠心力とばねの復元力の大きさをもとめよ。

(2) 小球にはたらく力の合力をもとめよ。ここで，力は鉛管の軸方向の成分のみを考え，ばねの伸びる向きを正とせよ。

(3) 小球が微小振動をおこなうための条件をもとめよ。また，この微小振動は何とよばれるか。

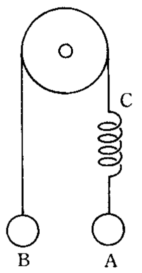
(4) この微小振動の角振動数をもとめよ。また，鉛管が一回転する間に，何回の微小振動がおこなわれるか。 （大阪電通大）

問題 Memo　問題の設定が複雑そうなわりには，内容は単純で，答えるべきことがらを正しく理解すればやさしい問題です。

3 〈定滑車とばね〉

次の各問の答を記せ。

自然の長さ l のばねの一端に質量 m の小さい球Aが，他端Cには，同じ質量 m の小さい球Bに結びつけられた糸が，それぞれつけられていて，全体は図のようになめらかな定滑車にかけられている。ばねの定数（力と伸びとの比例定数）を k，重力の加速度の大きさを g とし，また糸，ばねおよび定滑車の質量を無視する。



この系がつりあいの状態にあるときのばねの長さが $l+s$ であった。

問1　球Aにはたらく力のつりあいの式を記せ。

次に，球A，Bをそれぞれつりあいの位置から鉛直下方に等しい距離 a だけ引き，同時に，静かにはなしたところ，二つの球は振動をはじめた。糸は常にたるまないものとし，ある瞬間におけるA，Bのつりあいの位置からの変位をそれぞれ鉛直下方に x，y，それらの加速度を α，β，糸の張力の大きさを T とする。

問2　球A，Bの運動方程式，および点Cについての力のつりあいの式を記せ。

問3　前問の式から，ばねの伸びの加速度 $\alpha+\beta$ を T，g を含まない式で表わせ。

問4　ばねの全長が

$l+s+$ イ$\boxed{}\cos($ロ$\boxed{}\,t)$

で表わされるとして，イ$\boxed{}$，ロ$\boxed{}$に入るべき式を記せ。

以上では糸が常にたるまないと仮定したが，実際には a がある限度をこえると，運動の途中で糸がたるむ。

問5　糸が常にたるまないためには，a がどのような条件を満足しなければならないか。

問6　前問の条件が破れる場合，糸がたるみはじめる瞬間におけるばねの全長はいくらか。

（早稲田大-理工）

問題 Memo　定滑車とばねの組み合わせで頻出度の高い問題です。球A，Bおよび点Cにおいて正しく運動方程式をたてれば容易に解くことができます。

答えあわせをしましょう。

●ここに注目／● **単振動**

① **単振動の変位・速度・加速度**

$\boldsymbol{x = a\sin\omega t}$ $\boldsymbol{v = a\omega\cos\omega t}$ $\boldsymbol{a = -a\omega^2\sin\omega t = -\omega^2 x}$

② **単振動の復元力**

$\boldsymbol{F = -kx}$

大きさが変位に比例し，向きが変位と逆向きの力がはたらく物体は単振動をする。

③ **単振動の周期**

$$\left.\begin{array}{l} a = -\dfrac{k}{m}x \\ a = -\omega^2 x \end{array}\right\} \text{より} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \therefore \ T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

ばね振り子の場合 $\boldsymbol{T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}}$

単振り子の場合 $\boldsymbol{T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}}$

これで終わりです。第５日は，エネルギーについてあつかいます。

第 5 日	力と運動13日間⑤　　学習日　月　日
	運動とエネルギー

第5日 運動とエネルギー

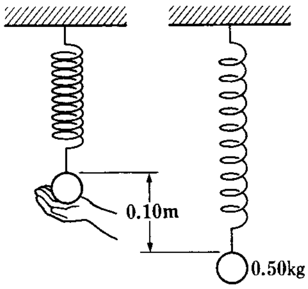
きょうの問題では，エネルギーをあつかいます。エネルギーも含めて考えると，力学の問題もほぼ全体を網羅しているといえます。さっそく始めましょう。

では，確認トレーニングです。力学的エネルギーがどんな場合に保存され，失われると何になるかを，きちんとチェックしなさい。

確認トレーニング

〔解答欄〕

1 〈仕事とエネルギー〉



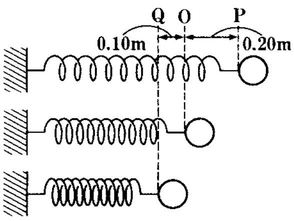
図のように，自然の長さのばねに質量0.50kgのおもりをつるし，手を静かに下ろしていってはなしたところ，ばねは0.10mのびました。これについて，次の問いに答えなさい。ただし，ばねの重さは無視できるものとします。

(1)　このばねのばね定数は何N/mですか。

(2)　ばねがされた仕事は何Jですか。

(3)　このばねを水平面上に置いて，自然の長さから0.080mのばして手をはなしました。ばねが自然の長さに戻るまでにおもりにした仕事は何Jですか。

2 〈位置エネルギーと運動エネルギー〉

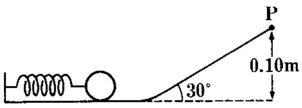


図のように，ばね定数20N/mのばねを点Pまでのばして，質量0.40kgの物体をつけ，手をはなしたところ，ばねは点Qまで縮みました。これについて，次の問いに答えなさい。

(1)　このばねのもつ弾性力による位置エネルギーは何J減少しましたか。

(2)　面と物体の間の動摩擦係数を求めなさい。

3 〈力学的エネルギー保存の法則〉



図のように，なめらかな水平面と斜面が連続しています。水平面の端にばね定数20N/mのばねを固定し，右端には質量0.040kgの小球をおしつけ，ばねを0.20m縮めてはなしたところ，小球はばねから離れたあと，斜面上を水平面から0.10mの点Pを通って空間にとび出しました。これについて，次の問いに答えなさい。

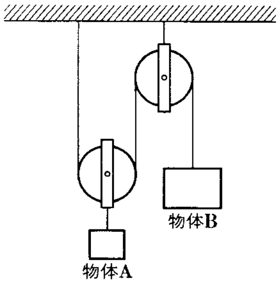
(1)　点Pでのこの小球の速さは何m/sですか。

(2)　空間にとび出してこの小球が最高点に達したときのこの小球の高さは何mになりますか。

(3)　この小球の落下点での速さは何m/sですか。

4 〈力学的エネルギー保存の法則〉

図のように，動滑車には質量 5.0kg の物体 A を，定滑車には質量 3.0kg の物体 B をとりつけました。この物体 A が 5.0m 上昇したときについて，次の問いに答えなさい。ただし，滑車の重さや摩擦は無視できるものとします。

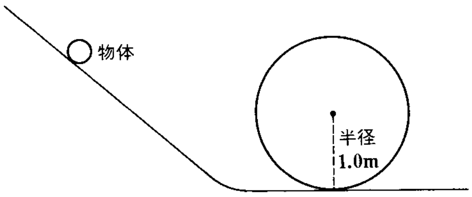


(1) 物体 A が 5.0m 上昇したとき，物体 B は何 m 下降しますか。

(2) 物体 A が 5.0m 上昇したとき，物体 A，B の速さはそれぞれ何 m/s になりますか。

5 〈円運動と力学的エネルギー〉

図のように，質量 2.0kg の物体をある高さから初速 0 ですべらせて，半径 1.0m の円運動させるためには，最初の高さを最低何 m にしなければなりませんか。



例題5　糸につけたおもりの鉛直面内での運動

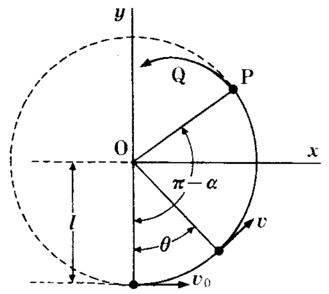
図に示すように，質量 m のおもりを長さ l の糸で固定点 O からつり下げ，糸を鉛直静止の状態にしておき，おもりに水平方向に初速 v_0 を与えた。重力加速度を g として次の各問に答えよ。途中の計算の要点をも示せ。ただし，糸の質量と伸び縮み，おもりの大きさ，空気の抵抗および固定点 O での摩擦は無視せよ。

(1) 鉛直下方に対し，糸の角度が $\theta(\pi \geqq \theta \geqq 0)$ となったときの次の量を求めよ。ただし，このとき糸はたるんではいないものとする。

(A) おもりの速さ v

(B) 糸の張力 T

(2) 実際には，鉛直下方に対し，糸の角度が $\pi-\alpha\left(\dfrac{\pi}{2}>\alpha>0\right)$ になった点 P をおもりが通過した瞬間から，糸がたるみはじめた。以下，答は g，l，α（の全部または一部）だけを用いて表せ。ただし，座標軸としては，固定点 O を原点とし，水平方向に図のように x 軸，鉛直上向きに y 軸をとることとする。



(A) 初速 v_0 の大きさを求めよ。

(B) 点 P でのおもりの速度の x 成分 $(v_{\mathrm{P}})_x$ および y 成分 $(v_{\mathrm{P}})_y$ を求めよ。

(C) 点 P を通過後におもりが到達できる最高点 Q の座標 $(x_{\mathrm{Q}},\ y_{\mathrm{Q}})$ を求めよ。　（東北大）

Advice　(1) おもりにはたらく力は重力と張力で，張力はおもりの運動方向と垂直になっています。したがって，張力はおもりに仕事をせず，おもりについて力学的エネルギー保存の法則が成り立ちます。

(2) 点 P を通過後糸がたるむということは何を示しているでしょう。糸がたるむとき張力は 0 だから，点 P を境におもりの運動が変化します。点 P までは張力と重力を受けて円運動をし，点 P からは重力だけを受けて運動します。点 P での運動の向きは斜め上方なので，点 P からは放物運動ということになります。ここまでわかれば，(B)や(C)は基本問題です。

放物運動を解くコツは，次の通りです。

● 放物運動は，鉛直方向と水平方向とに分けて考えよ

鉛直方向は投げ上げの公式を使い，水平方向は等速と考えて解きます。

解き方　(1)(A) おもりが最下点にあるときを基準にとり，力学的エネルギー保存の法則の式をたてる。糸の角度が θ のときのおもりの高さは，$l(1-\cos\theta)$ だから，力学的エネルギー保存の法則により

$$\frac{1}{2}mv^2+mgl(1-\cos\theta)=\frac{1}{2}mv_0{}^2$$

$$\therefore\quad v=\sqrt{v_0{}^2-2gl(1-\cos\theta)} \quad \cdots\cdots\cdots①$$

(B) おもりにはたらく力は糸の張力を T，重力を mg とすれば図1のようになる。糸の方向について運動方程式をたてると，この点での向心力は $m\dfrac{v^2}{l}$ だから

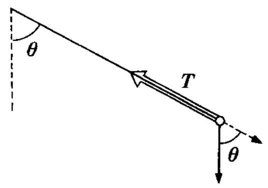


図1

$$m\frac{v^2}{l}=T-mg\cos\theta \qquad \cdots\cdots\cdots ②$$

①を②に代入して T を求めると

$$T=\frac{mv_0{}^2}{l}+mg(3\cos\theta-2)$$

(2)(A) 糸がたるむとき張力は0だから，点Pでおもりに働く力は，図2のように，重力 mg だけである。点Pでのおもりの速さを v_P とし，糸方向について運動方程式をたてると

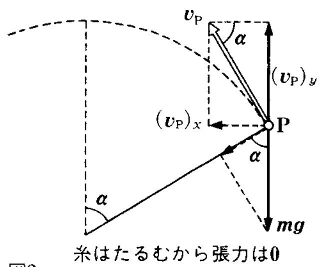


図2

$$m\frac{v_P{}^2}{l}=mg\cos\alpha \qquad \cdots\cdots\cdots ③$$

P点の高さは $l(1+\cos\alpha)$ だから，力学的エネルギー保存の法則より

$$\frac{1}{2}mv_P{}^2+mgl(1+\cos\alpha)=\frac{1}{2}mv_0{}^2 \qquad \cdots\cdots\cdots ④$$

③，④より v_P を消去して v_0 を求めると

$$v_0=\sqrt{gl(3\cos\alpha+2)} \qquad \cdots\cdots\cdots ⑤$$

なお，この(2)(A)は，(1)で $T=0$，$\theta=\pi-\alpha$ の場合だから，(1)(B)の答の式にこれをあてはめると v_0 が簡単に求められる。すなわち，

$$0=\frac{mv_0{}^2}{l}+mg\{3\cos(\pi-\alpha)-2\}$$

$$\therefore\quad v_0=\sqrt{gl\{2-3\cos(\pi-\alpha)\}}=\sqrt{gl\{2-3\times(-\cos\alpha)\}}=\sqrt{gl(3\cos\alpha+2)}$$

(B) ③より

$$v_P=\sqrt{gl\cos\alpha}$$

よって

$$(v_P)_x=-v_P\cos\alpha=-\cos\alpha\sqrt{gl\cos\alpha}$$
$$(v_P)_y=v_P\sin\alpha=\sin\alpha\sqrt{gl\cos\alpha}$$

(C) 点Pから点Qに達するまでの時間を t とする。投げ上げの公式　$V=V_0-gt$ より

$$0=(v_P)_y-gt$$

$$\therefore\quad t=\frac{(v_P)_y}{g}=\frac{\sin\alpha}{g}\sqrt{gl\cos\alpha}=\sin\alpha\sqrt{\frac{l\cos\alpha}{g}} \qquad \cdots\cdots\cdots ⑥$$

また，公式　$y=V_0t-\dfrac{1}{2}gt^2$ に⑥を代入し，点Pの原点からの高さが $l\cos\alpha$ であることに注意して y_Q を求めると

$$y_Q=l\cos\alpha+(v_P)_yt-\frac{1}{2}gt^2$$
$$=l\cos\alpha+\sin\alpha\sqrt{gl\cos\alpha}\cdot\sin\alpha\sqrt{\frac{l\cos\alpha}{g}}-\frac{1}{2}g\sin^2\alpha\frac{l\cos\alpha}{g}$$
$$=l\cos\alpha+\frac{1}{2}l\sin^2\alpha\cos\alpha=l\cos\alpha\left(1+\frac{1}{2}\sin^2\alpha\right)$$

x 方向は等速で，点Pの x 座標は $l\sin\alpha$ だから

$$x_Q=l\sin\alpha+(v_P)_xt=l\sin\alpha-\cos\alpha\sqrt{gl\cos\alpha}\cdot\sin\alpha\sqrt{\frac{l\cos\alpha}{g}}$$
$$=l\sin\alpha-l\sin\alpha\cdot\cos^2\alpha=l\sin\alpha(1-\cos^2\alpha)=l\sin^3\alpha$$

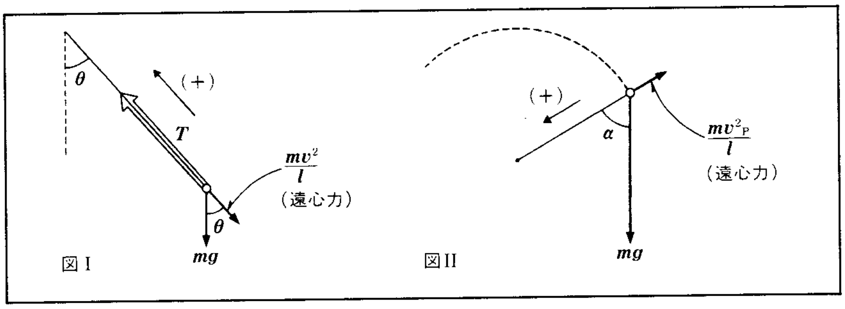
●解答●　(1)(A)　$\sqrt{v_0{}^2-2gl(1-\cos\theta)}$　　(B)　$\dfrac{mv_0{}^2}{l}+mg(3\cos\theta-2)$

(2)(A)　$\sqrt{gl(3\cos\alpha+2)}$

(B)　$(v_P)_x=-\cos\alpha\sqrt{gl\cos\alpha}$　　$(v_P)_y=\sin\alpha\sqrt{gl\cos\alpha}$

(C)　$x_Q=l\sin^3\alpha$　　$y_Q=l\cos\alpha\left(1+\dfrac{1}{2}\sin^2\alpha\right)$

別　解　おもりと一緒に円運動をする座標系で考察すると，おもりに働く力は図Ｉ，IIのようになる。((1)の場合は図Ｉ，(2)の場合は図II）



正の向きを決めて，これらのつり合いの式をたてると，図Ｉより

$$T-mg\cos\theta-\frac{mv^2}{l}=0$$

これを変形すると，②が得られる。

また，図IIより

$$mg\cos\alpha-\frac{mv_P{}^2}{l}=0$$

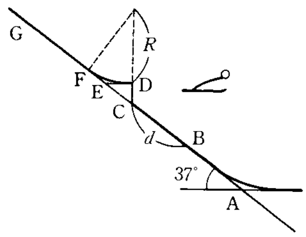
これを変形すると，③式が得られる。

位置エネルギー・運動エネルギー，そしてそれらが全体として保存されることなどをうまくあてはめて，問題に取り組めばよいのです。ばねの場合には，さらに弾性力による位置エネルギーも考えることをおさえておきなさい。

実戦トレーニング

1 〈スキーのジャンプの放物運動モデル〉

図のように水平と37°$\left(\sin 37^\circ \fallingdotseq \dfrac{3}{5},\ \cos 37^\circ \fallingdotseq \dfrac{4}{5}\right)$，$\overline{\mathrm{AG}}$ が十分長い斜面にジャンプ台を作る基礎計算をしよう。簡単にジャンパーおよびスキーを質量 m[kg] の物体と考え，斜面との摩擦および空気抵抗を無視し，重力の加速度を g[m/s²] とする。ただし，g として 9.8[m/s²] 等の数値を用いてはいけない。



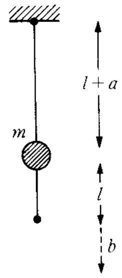
(1) ジャンプ台の高さ $\overline{\mathrm{CD}}$ を飛距離 $\overline{\mathrm{CB}}=d$[m] の$\dfrac{1}{25}$とする。ジャンプ台の上 $\overset{\frown}{\mathrm{FD}}$ は半径 R[m] の円弧で $\overline{\mathrm{DE}}$ は D における円弧の水平な接線であり，斜面と E で交わる。ジャンパーがジャンプ台から飛び出す速さ v[m/s] を飛距離 d[m] の関数として求めよ。

(2) 滑走出発点 G を適当に決めて初速度 0 で出発し，(1)で計算した v を得るには $\overline{\mathrm{GE}}$ の距離をどれだけにするとよいか。 (立命館大-理工)

問題 Memo 放物運動の基本的な問題ですが，斜面上の水平投射運動というところに特徴があります。

2 〈上下に弾性糸をもつ質点の運動〉

質量 m のおもりを自然の長さが l のゴムひもで天井からつるし，同質で同じ長さ（自然の長さが l）のゴムひもをおもりの下につける。静止の状態で上のゴムひもの長さは $l+a$ であった（図）。



ゴムひもはその自然の長さからの伸びに比例する張力を生じ，自然の長さのときは自由にまがるものとする。重力加速度を g とし，ゴムひもの質量は無視できるものとして以下の設問に答えよ。

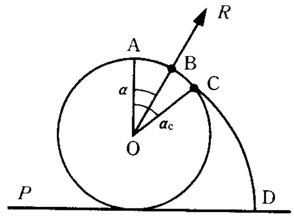
1．図の静止の状態から，下のゴムひもの下端をゆっくりと距離 b だけ引き下げる。これに必要な仕事 W_1 を求めよ。
2．図の静止の状態から，下のゴムひもの下端を急に距離 b だけ引き下げる。これに必要な仕事 W_2 を求めよ。
3．前問のように図の静止の状態から，下のゴムひもの下端を急に距離 b だけ引き下げ，下端をその位置に固定した。おもりは以後どのような運動をするか。
4．つぎに図の静止の状態にもどし，下のゴムひもの下端をその位置に固定し，おもりをつり合いの位置の上下に小さく振動させる。この振動の周期 T を求めよ。またつり合いの位置から上方向への振幅 A と，下方向への振幅 B との比はいくらか。　　（東京大）

問題 Memo　上下にゴムひもをつけたおもりを天井からつるし，下のゴムひもの状態をいろいろ変えたときの，おもりの運動や，必要な仕事の解析です。前半はゴムひもを引くときの仕事の解析ですが，「ゆっくり引く」ときと「急に引く」ときの違いが問われています。

後半は単振動の解析ですが，例によって場合わけ（周期の異なる単振動のつなぎあわせ）が必要な設定がなされています。後半は慣れていないと，少々難しいかもしれません。

3 〈球面上から落下する質点の運動〉

半径 a の滑らかな球が水平な面 P 上に固定されている。質量 m の質点が球の最高点 A から初速ゼロですべりだし，C 点で球面より離れ，自由落下して面 P 上の D 点に落ちた。空気抵抗は無視できるものとして，次の問に答えよ。



(a) 質点の，A 点における位置エネルギーと B 点における位置エネルギーとの差はいくらか。ただし，B 点は円の弧 AC 上の点で，$\overline{\mathrm{OA}}$ と $\overline{\mathrm{OB}}$ のなす角を α とする。

(b) B 点で，質点が球面から受ける抗力 R を求めよ。

(c) $\cos\alpha_c$ はいくらか。ただし，α_c は $\overline{\mathrm{OA}}$ と $\overline{\mathrm{OC}}$ のなす角である。

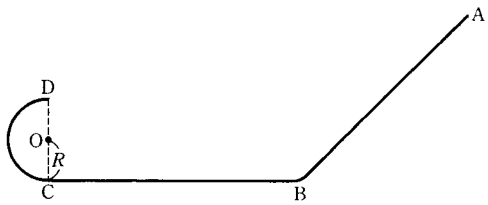
(d) C 点での質点の速さはいくらか。

(e) D 点に落ちる直前の質点の運動エネルギーはいくらか。　　　　(千葉大-理〈物理〉)

問題 Memo　なめらかな球面上を質点がすべり落ちるという，よくある典型的な円運動の問題です。全体的にすなおな基本的な問題といえましょう。

4 〈斜面から半円筒面へころがる質点の運動〉

平らな斜面が水平面と滑らかに接続し，水平面のもう一方の端が，中心軸が水平で半径 R の半円筒に接続している。鉛直な平面で切った断面が図に示してある。AB が斜面，BC が水平面，CD が半円筒であり，C の鉛直上方に中心軸 O があり，また，その軸とこの断面とは垂直である。これらの面上を質点が運動するが，摩擦は無視できるほど小さく，質点は図の断面内を動くものとする。



〔1〕 斜面 AB 上で，水平面 BC から高さ h の点で質点を静かに放したところ，質点は半円筒の途中から引き返し，行きと同じ道筋を経て元の位置まで戻った。このとき，h が満たすべき条件を示せ。

〔2〕 斜面 AB 上で，水平面 BC から高さ H の点で質点を静かに放したところ，質点は半円筒の最高部 D から飛び出した。このとき，H が満たすべき条件を示せ。

〔3〕 上の問い〔2〕において，D から飛び出した質点は BC 上に落下した。落下点と C との距離を R と H とを用いて表わせ。　　　(立命館大-理工〈地方〉)

問題 Memo 斜面をすべり落ちてきた質点が半円筒にそって上昇していく問題で，エネルギー保存則の問題として典型的なものです。〔2〕では，質点が最高部に達するまでに半円筒から離れないための条件に着目しましょう。

実戦トレーニングはこれで終わりです。エネルギーについてのまとめをして，きょうのしめくくりとしましょう。

●ここに注目！● **運動とエネルギー**

① **仕事とエネルギー**

$$W = Fs$$

他の物体に仕事をすることのできる物体はエネルギーをもつ。

② **運動エネルギーと位置エネルギー**

$$E_K = \frac{1}{2}mv^2 \qquad E_P = mgh$$

位置エネルギーでは，基準を明確にすることに注意せよ。

③ **力学的エネルギー保存の法則**

重力以外に力がはたらかないか，力がはたらいても仕事をしない場合には，運動エネルギーと位置エネルギーの和は保存される。

④ **鉛直面内の円運動**

向心力は仕事をしないので，力学的エネルギー保存の法則が成り立つ。

高さによって速さは変化するが，それぞれの点での向心力は，$\dfrac{mv^2}{r}$ であたえられる。

第6日	力と運動13日間⑥ 学習日　月　日
	人工衛星の運動

わたしたちの毎日の生活は，様々な科学技術の恩恵を受けています。そのひとつに，人工衛星があります。人工衛星はたんに上空を巡っているだけではなく，気象データを送ってくれたり，放送電波の中継をしてくれたりしています。この人工衛星の運動も，これまでにみてきたのと同じ物理の法則にのっとっています。きょうは，問題の中でこのことを具体的に考えていきます。

確認トレーニング

〔解答欄〕

1 〈万有引力の法則〉

質量 M の天体Sのまわりを，質量 m の天体Pが円運動しています。次の問いに答えなさい。ただし，SとPの距離を r，万有引力定数を G とします。

(1) SとPの間にはたらく万有引力 F を求めなさい。

(2) 天体Pの公転周期 T を求めなさい。

2 〈人工衛星〉

地表からの高さ h〔m〕をまわる人工衛星Pについて考えます。

(1) 地球の質量を M〔kg〕，衛星の質量を m〔kg〕，地球の半径を R〔m〕として，地球と人工衛星の間にはたらく万有引力 F_1〔N〕を求めなさい。

(2) 衛星の速度を v〔m/s〕として，円運動の向心力 F_2〔N〕を求めなさい。

(3) $F_1=F_2$ の関係があることから，衛星の速度 v を求めなさい。

(4) 同じ衛星が地表すれすれをまわるときの速度を v'〔m/s〕として，v が v' の0.9倍となる高さ h は，地球の半径の約何倍のときですか。

(5) また，高さ h をまわるときの周期 T と地表すれすれを回るときの周期 T' との比 $\dfrac{T}{T'}$ も求めなさい。

3 〈万有引力〉

地球のまわりの月の公転を円運動とみなして，その半径を r，周期を T，月の質量を m，地球の質量を M，万有引力の定数を G としたとき，

(1) 月の速さ v を G，M，r で表しなさい。

(2) 地球を半径 R の球とみたとき，地表での重力の加速度 g はどのような形になりますか。

(3) r^3T^{-2} という量を g，R で表しなさい。

(4) 上の r と T の関係を太陽系の惑星にあてはめると，どういう法則になりますか。　　　　（一橋大）

人工衛星についての問題では，まず確実にケプラーの法則とニュートンの万有引力の法則があつかわれます。さっそく例題に取り組んでみましょう。

例題6　軌道の変化する人工衛星の運動

地球を半径 6.4×10^6m の球とし，地表での重力加速度を 9.8m/s^2 として，以下の各問に答えよ。

(1)　円軌道をえがいている人工衛星の地表からの高さが，ちょうど地球の直径に等しいとき，人工衛星の周期を求めよ。（単位：分）

(2)　この人工衛星の速さを求めよ。（単位：km/s）

(3)　この人工衛星が，進行方向にごく短時間の逆噴射をおこなったところ，だ円軌道に移り，その周期が変化した。新しい軌道上で地球に最も近い点での地表からの高さが，地球の半径に等しいとき，新しい周期はもとの周期の何倍であるか。　　(大阪府大-工)

Advice　(1)　人工衛星の円運動の向心力は地球の引力になります。あるいは，引力と遠心力がつりあうと考えてもよいでしょう。軌道位置での地球の引力の大きさは，万有引力の法則を使って求めます。万有引力定数 G と地球の質量 M があたえられていませんが，これは地表位置での重力加速度を用いて表すことができます。地表面の物体について，（万有引力）=（重力加速度)×(質量）の式をつくってみましょう。単位に気をつけましょう。

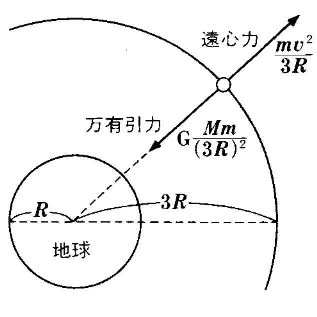
(2)　等速円運動では，速さ v，角速度 ω，周期 T の間には，半径を r として

$$v=r\omega \qquad T=\frac{2\pi}{\omega}$$

の関係があります。これを使ってもよいでしょう。あるいは，遠心力（向心力）を速さ v で表して，(1)と同様につりあいの式をたてて解いてもよいでしょう。

(3)　地球から最も遠い位置は，逆噴射をした位置で，地表から地球半径の2倍の高さのところになります（最初の円運動と同じ)。これからだ円軌道の長半径が求まります。あとはケプラーの第3法則『惑星の公転周期の2乗と軌道の長半径の3乗の比は一定』を使い，円軌道とだ円軌道での比が等しいことを用いれば，だ円軌道での周期が得られます。

解き方　(1)　地球の質量を M，半径を R，人工衛星の質量を m，周期を T とすると，万有引力と遠心力とのつりあいにより（万有引力が向心力となるとして運動方程式を考えても同じ）



$$G\frac{Mm}{r^2}=mr\omega^2$$

また，$r=3R$，$\omega=\dfrac{2\pi}{T}$　であるから，これを代入して

$$G\frac{Mm}{(3R)^2}=m\cdot3R\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2$$

$$\therefore\quad \frac{T^2}{(3R)^3}=\frac{4\pi^2}{GM}\quad\cdots\cdots\cdots①$$

地表面の物体について，重力加速度 g を用いると，

$$G\frac{Mm}{R^2}=mg\qquad\therefore\quad GM=gR^2$$

が成り立つから，これを①式に代入して

$$T=2\pi\sqrt{\frac{27R^3}{gR^2}}=2\pi\sqrt{\frac{27R}{g}}=2\times3.14\sqrt{\frac{27\times6.4\times10^6}{9.8}}=2.64\times10^4\,[\text{s}]=4.4\times10^2\,[\text{分}]$$

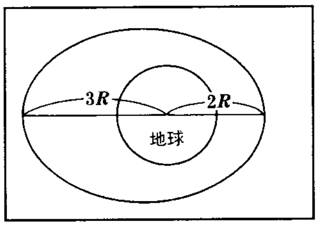
(2) 速さを v〔m/s〕とし，遠心力を $\dfrac{mv^2}{3R}$ で表すと

$$G\frac{Mm}{(3R)^2}=\frac{mv^2}{3R}$$

$$\therefore\quad v=\sqrt{\frac{GM}{3R}}=\sqrt{\frac{gR^2}{3R}}=\sqrt{\frac{gR}{3}}=\sqrt{\frac{9.8\times6.4\times10^6}{3}}=4.6\times10^3\,\text{〔m/s〕}=4.6\,\text{〔km/s〕}$$

(注) (1)で T が求められたので，$vT=2\pi\cdot3R$ で求めてもよい。

(3) 人工衛星の地表からの高さは，最も高い点で $2R$，最も低い点で R だから，軌道の長半径は，$\dfrac{5R}{2}$ である（図参照）。



周期を T' とすると，ケプラーの第3法則が人工衛星についても成り立つから

$$\frac{T^2}{(3R)^3}=\frac{T'^2}{\left(\dfrac{5R}{2}\right)^3}$$

$$\therefore\quad \frac{T'}{T}=\left(\frac{\dfrac{5R}{2}}{3R}\right)^{\frac{3}{2}}=\left(\frac{5}{6}\right)^{\frac{3}{2}}=0.76$$

●解答● (1) 4.4×10^2 分　(2) 4.6km/s　(3) 0.76 倍

では，実戦トレーニングです。万有引力が向心力になること，エネルギー保存の法則やケプラーの第3法則をうまくあてはめることがポイントです。

実戦トレーニング

1 **〈人工衛星の運動〉**

人工衛星について以下の問に答えよ。ただし，地球の公転や空気の抵抗は無視してよく，人工衛星の軌道は円形とする。またこの問題にいう「一周」とは，円軌道上のある点から出発した人工衛星が，同じ点に戻ってくるまでをさしている（地球は自転しているから，地表から見て同じ位置に戻るわけではない）。地球の半径は6400km，地球がその中心から rm の距離（r は地球の半径より大とする）にある1kgの物体に及ぼす引力は $4.0\times\dfrac{10^{14}}{r^2}$N〔kg･m/s^2〕である。

なお，計算が必要な場合には途中の経過を示し，解答は有効数字2桁まで求めること。その際に，この問題の末尾にある数表を利用してもよい。

(a) 人工衛星が地球に落ちてこずに，いつまでも地球の周囲をまわり続けられるのは何故か。理由を述べよ。

(b) 高度600kmの軌道を飛ぶ人工衛星が，その軌道を一周するのに要する時間はいくらか。

(c) 地球の中心を通りその赤道を含む面（これを赤道面という）内で，地球の自転と同じ角速度で地球をまわる人工衛星は，赤道上のある地点の上空にとまったまま浮かんでいるように見えるので，静止衛星とよばれる（気象衛星ひまわりなど）。もし静止衛星を日本の真上にとめておくことができれば大変便利だが，実際は赤道面内にしかとめておくことができない。この理由を述べよ。

(d) 静止衛星の地上からの高度を求めよ。

x	x^2	x^3	x	x^2	x^3
5	25	125	55	3025	166375
10	100	1000	60	3600	216000
15	225	3375	65	4225	274625
20	400	8000	70	4900	343000
25	625	15625	75	5625	421875
30	900	27000	80	6400	512000
35	1225	42875	85	7225	614125
40	1600	64000	90	8100	729000
45	2025	91125	95	9025	857375
50	2500	125000	100	10000	1000000

（東京工大）

問題 Memo 人工衛星についての普通の問題です。人工衛星が円運動する理由や静止衛星である条件などを論述させる点と，数表を与えて3乗根の近似値を求めさせる点に特徴があります。

2 <地球と太陽の質量比の万有引力による運動からの決定>

つぎの文中の空欄に入れるべき式または数値を記せ。

太陽の質量は地球の質量の何倍ぐらいあるだろうか。太陽の質量を M，地球の質量を m として，その質量の比 $K=\dfrac{m}{M}$ のおおよその値を，よく知られた数値を用いて求めてみよう。

（近似値の表）

太陽・地球間の光の所要時間	500〔s〕
地球の赤道・極間の経線に沿った距離	10^7〔m〕
光の速さ	3×10^8〔m/s〕
重力の加速度（g）	10〔$\mathrm{m/s^2}$〕
地球の公転周期（T）	3×10^7〔s〕
円周率の2乗（π^2）	10

このためにまず地球の公転運動を考える。その軌道は太陽を中心とする半径 R の円であるとし，公転の周期を T とすれば，軌道運動の加速度の大きさは(ア)［　　］である。また地球と太陽との間にはたらく引力は，万有引力定数 G を用いて，(イ)［　　］とあらわされる。これら二つの量の間の関係を利用することによって，太陽の質量は $M=$ (ウ)［　　］とあらわすことができる。

つぎに，地球を半径 r の球であるとし，地表の物体に対する地球の引力と重力加速度 g との関係を使うと，地球の質量は $m=$ (エ)［　　］とあらわすことができる。

こうして質量比は $K=$ (オ)［　　］となる。この式の値は前表の近似値を用いて計算することができて，有効数字1桁とすると $K=$ (カ)［　　］を得る。　　（信州大）

問題 Memo　円運動と万有引力とから地球と太陽の質量比を求める問題です。万有引力が地球の公転の向心力であること，地上の物体の重さは，その物体と地球との万有引力によるものであることがわかれが，容易に解ける標準的な問題です。

3 〈人工衛星の運動〉

角速度 ω で円軌道を描いて地球の周囲をまわっている人工衛星がある。地球の質量を M，人工衛星の質量を m，万有引力定数を G として，以下の空欄に記入すべきものを記せ。

地球の大きさおよび他の天体の影響を無視したとき，この人工衛星の軌道半径は (1)[　　　] で，その速度の大きさは (2)[　　　] である。またそのときの運動エネルギーは (3)[　　　] である。無限遠点における位置エネルギーを 0 にとったとき，人工衛星の位置エネルギーは $-\dfrac{GMm}{\text{軌道半径}}$ である。したがって位置エネルギーと運動エネルギーの和 E は 1 つの項にまとめられて (4)[　　　] となる。

この人工衛星から進行方向に，人工衛星の質量に比較して十分小さい質量の小物体を発射した。この小物体が無限遠に飛んで行くことができるためには，人工衛星からの発射後の小物体の運動エネルギーが，発射前の小物体の運動エネルギーに対して最小限 (5)[　　　] 倍なければならない。このとき人工衛星に対する最小限の相対速度の大きさは (6)[　　　] で与えられる。次にこの人工衛星から，進行方向と逆向きに同種の小物体を発射する。これが無限遠に飛んで行くことができるためには，人工衛星に対する相対速度の大きさとして最小限 (7)[　　　] が必要である。

(早稲田大-教育)

問題 Memo 円軌道の人工衛星の問題としてよくみられるのは，その半径や周期を求める問題です。この出題はさらにすすんで，人工衛星から小物体を発射させたことと，相対速度を組み合わせたことが大きな特徴になります。そのために，入試問題としては〝やや難〟のレベルになるでしょう。

●ここに注目！● **人工衛星の運動**

① **ケプラーの法則**

第1法則　惑星は太陽のまわりに太陽を1つの焦点とするだ円軌道をえがく。

第2法則　惑星と太陽とを結ぶ径が単位時間にえがく面積は一定である（面積速度一定）。

第3法則　惑星の公転周期の2乗は，だ円軌道の長軸半径（平均距離）の3乗に比例する。

第3法則は，$\boldsymbol{T^2=kr^3}$ と表せる。周期の単位を年，半径の単位を天文単位（地球と太陽との平均距離）として地球の場合をあてはめると，$k=1$ となることを覚えておくとよい。

② **万有引力の法則**

$$F=G\frac{m_1m_2}{r^2}$$

③ **万有引力による位置エネルギー**

$$U=-G\frac{m_1m_2}{r}$$

④ **人工衛星の運動**

人工衛星は，中心となる惑星との間の万有引力によって，円軌道またはだ円軌道をえがいて運動する。このとき，運動エネルギーと万有引力による位置エネルギーの和は一定である。

これで終わりです。

第7日	力と運動13日間⑦　　学習日　月　日 **運動量**

エネルギーと並んで重要なものに運動量があります。きょうは，この運動量の関係する問題について考えます。

運動量と力積の関係，作用・反作用の法則から運動量保存の法則が導かれることなどがポイントといえます。きちんとチェックしなさい。

確認トレーニング

〔解答欄〕

1 〈運動量保存の法則〉

なめらかな水平面上に小球Bを置いてあります。これに質量も大きさも等しい小球Aを速さ V〔m/s〕で衝突させました。衝突前の小球Aの進んできた向きからはかってAは左30°の向きへ，Bは右60°の向きへ進んでいきました。衝突後の小球A，Bの速さを求めなさい。

2 〈2物体の衝突とはねかえりの係数〉

質量0.40kgのボールAが速さ10m/sで，反対方向から質量0.20kgのボールBが速さ6.0m/sで飛んできて正面衝突しました。はねかえりの係数が(1)〜(3)の場合について，衝突後のA，Bの速度を求めなさい。ただし，衝突前のAの運動の向きを正とします。

(1)　$e=0$　　(2)　$e=1$　　(3)　$e=0.6$

3 〈運動量〉

鉛直下方に降る雨の中を速さ v_0〔m/s〕で水平方向に走っている電車があります。進行方向に垂直な前面ガラスにおよぼす力を求めようと思います。いま雨滴はすべて同じ質量 m〔kg〕，同じ速度 v〔m/s〕をもち，またガラスにあたる雨滴はすべてはねかえることなく，ガラス面にそって流れおちるものとして，次の問いに答えなさい。ただし，空気の抵抗は無視できるものとします。

(1)　雨滴のガラスに対する速さを求めなさい。

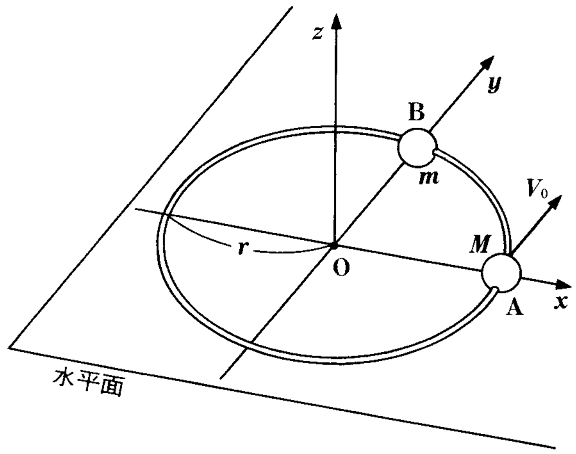
(2)　雨滴1個がガラスにあたったとき，水平方向の運動量の変化はいくらですか。

(3)　雨滴の 1m^3 中の数を n 個とすれば，ガラスに作用する水平方向の圧力はいくらですか。

運動量のあつかわれる問題では，何といっても物体の衝突がよく題材になります。例題で考えてみましょう。

例題7　円形リング上を運動する2物体の衝突

図のように，水平におかれた半径 r の円形リングに小球A(質量 M)および小球B(質量 m)が滑らかに動けるように通してある。リングの中心に $x-y$ 座標の原点をとり，リングと x 軸の交点にA，y 軸との交点にBを置く。小球Aに初速 V_0 を与え，静止している小球Bに衝突させた。衝突は完全弾性衝突，$M>m$ として，次の各問いに答えよ。



(i)　衝突後の小球Aの速さはいくらか。
(ii)　次の衝突までに要する時間はいくらか。
(iii)　2回目の衝突後の小球Bの速さはいくらか。
(iv)　$M=2m$ の場合，2回目の衝突場所の座標 $(x,\ y)$ を求めよ。　(東京電気大-工)

Advice　(i)　運動量保存とはね返り係数の式を連立させます。
(ii)　1回目の衝突後Bは1周し，さらに V_At 進んでAと衝突します。
(iv)　1回目と2回目の衝突点の距離 l は1回目の衝突後のAの移動距離です。l を求めてそれが半径 r の円の弧として，中心角がいくらになるか求めてみましょう。

解き方　(i)　衝突に際し小球の運動方向には外力がはたらかないからこの向き，つまり円の接線方向の運動量は保存されるので，衝突後の小球A，Bの速さを V_A，V_B とすれば，初速度 V_0 による回転の向きを正として

$$MV_0=MV_A+mV_B \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

完全弾性衝突 $(e=1)$ であるから

$$-1=\frac{V_A-V_B}{V_0} \quad \cdots\cdots\cdots ②$$

①，②式より

$$V_A=\frac{M-m}{M+m}V_0 \qquad V_B=\frac{2M}{M+m}V_0$$

(ii)　(i)の結果をみると，$M>m$ より，

$$V_A>0,\quad V_B>0$$

したがってA，Bは同方向に運動する。次の衝突までの時間を t とすれば，小球Aが円周にそって距離 V_At 進むあいだに，小球Bは1周し，さらに V_At だけ進んで小球Aに衝突する。よって

$$V_Bt=2\pi r+V_At$$

(i)の結果を代入し，整理すると，

$$t=\frac{2\pi r}{V_B-V_A}=\frac{2\pi r}{\dfrac{2M\cdot V_0}{M+m}-\dfrac{M-m}{M+m}V_0}=\frac{2\pi r}{V_0}$$

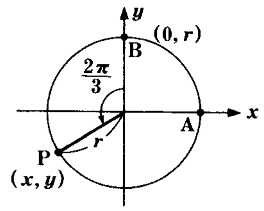
（別解） はじめの衝突から次の衝突までにBは1周してAに追いつく。BがAに対して接近する速さ（V_B-V_A）は②より

$$V_B-V_A=V_0$$

円形リング1周は $2\pi r$ だから，次の衝突までの時間 t は

$$t=\frac{2\pi r}{V_B-V_A}=\frac{2\pi r}{V_0}$$

（iii） 2回目の衝突後の小球A，Bの速さを V_A'，V_B' とすると



運動量保存より

$$MV_A+mV_B=MV_A'+mV_B' \quad \cdots\cdots③$$

また，反発係数が1だから

$$-1=\frac{V_A'-V_B'}{V_A-V_B} \quad \cdots\cdots④$$

③，④式を解いて　$V_B'=0$

（iv） 2回目の衝突点は，小球Aが，1回目の衝突ののち，速度 V_A で時間 t だけ回転した地点である。よって，$M=2m$ であるから

$$l=V_At=\frac{M-m}{M+m}V_0\cdot\frac{2\pi r}{V_0}=\frac{2m-m}{2m+m}\times 2\pi r=\frac{2\pi r}{3}$$

よって2回目の衝突点は，$(0,\ r)$ から $\frac{2\pi}{3}$〔rad〕回転したP点である。

P点の座標を $(x,\ y)$ とすれば

$$x=r\cos\left(\frac{2}{3}\pi+\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}r \qquad y=r\sin\left(\frac{2}{3}\pi+\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{r}{2}$$

●解答●　（i）　$V_A=\dfrac{M-m}{M+m}V_0$　（ii）　$t=\dfrac{2\pi r}{V_0}$　（iii）　0

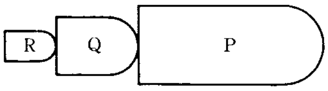
（iv）　$(x,\ y)=\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}r,\ -\dfrac{r}{2}\right)$

衝突以外の分裂などについても，実戦トレーニングでなれておきなさい。

実戦トレーニング

1 **〈多段ロケットの分離と速度変化〉**

次のA［　　］～D［　　］に適切なものを①～⑩のうちから選べ。



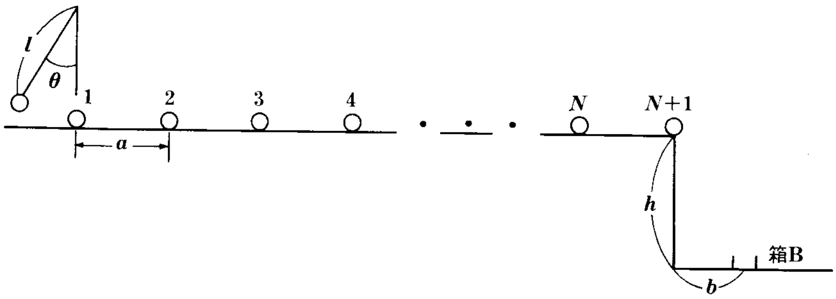
質量がそれぞれ150〔kg〕，80〔kg〕，20〔kg〕の3つの部分P，Q，Rに切離せるようになったロケットが宇宙空間を飛んでいる。はじめ，PとQの間を切離し，進行方向と逆方向にPから相対速度の大きさvでQ,Rを打ち出すと，Pの速さはvのA［　　］×10^B［　　］倍の速さだけ増加した。次に，PとQ，Rの間が所定の距離はなれたとき，QとRを切離し，QからRを，Pの進行方向と逆方向に打ち出す。このQに対するRの相対速度の大きさがvのC［　　］×10^D［　　］倍であるとき，PとQはこの所定距離を保ったまま同じ速度で飛行しつづけることができる。

① −3　② −2　③ −1　④ 0　⑤ 1　⑥ 2　⑦ 3
⑧ 4　⑨ 5　⑩ 6

（立命館大-理工）

問題 Memo　飛行物体の分裂の問題で運動量保存の法則に関する基本問題ですが，運動の向きをきちんとおさえておかないと大変です。その点で相対運動に関しては良問です。

2 〈球の連鎖衝突〉



質量 m の球を長さ l のひもにつるし，角度 θ だけ振らせ，ひもを伸ばした状態から静かに放す。この球はひもの支点の真下の床の上に静止している同種の球1と正面衝突し，衝撃を受けた球1は静止している同種の球2と正面衝突する。こうして衝撃は一直線上に等間隔（間隔 a）に並べた $N+1$ 個の質量 m の同種の球をつぎつぎと伝わっていく。$N+1$ 番目の球は h だけ低い床に b だけ離して置いた小さな箱Bに直接飛び込むとする。

球の大きさ・摩擦は無視できるとし，また重力加速度を g として，次の問いに答えよ。

(1) $N+1$ 番目の球が箱Bに直接飛び込むためには，$N+1$ 番目の球の初速度の大きさを v_{N+1} とすると，h と b はどのような関係になければならないか。

(2) 振り子の球が1番目の球と正面衝突する直前の速度の大きさ v_0 を求めよ。

(3) $N+1$ 回の衝突がすべて完全弾性衝突であるとすると，1番目の球が動き始めてから $N+1$ 番目の球が動き始めるまでの時間はいくらか。

(4) $N+1$ 回の衝突がすべてはね返り係数が e の衝突の場合に，$N+1$ 番目の球が得る速度の大きさを求めよ。

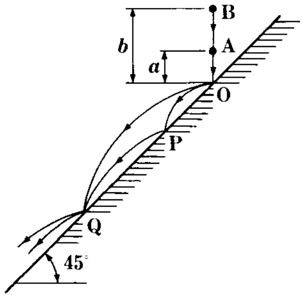
(5) (4)と同じ場合に，1番目の球が動き始めてから $N+1$ 番目の球が動き始めるまでの時間を求めよ。

（東海大）

問題 Memo 2球の衝突はよくみかける問題ですが，この問題は，たくさんの球が次から次へと衝突するところに特徴があります。この種の問題を解くポイントは，規則性をみつけることです。多球の衝突とはちがいますが，1つの球を自然落下させると，床に何度か衝突をくり返して，やがて静止します。この運動で，球を落としてから静止するまでの時間を求めさせる問題があります。これも，解くポイントは，規則性をみつけることです。

3 〈斜面上での球のはねかえり〉

水平面と45度傾いた斜面上の点Oの真上から小さな球を初速度ゼロで落下させる。球と斜面との衝突は完全弾性衝突である。重力加速度をgで表し，図を参照して次の問に答えよ。



I　O点の真上高さaの点Aから落下させると，球はO点，つづいてP点ではねかえって，Q点に達した。このとき，

(1)　O点ではねかえった直後の球の速度の水平成分と鉛直成分を求めよ。

(2)　O点ではねかえってからP点に達するまでの時間を求めよ。

(3)　OP間の距離を求めよ。

(4)　P点ではねかえった直後の球の速度の水平成分と鉛直成分を求めよ。

(5)　P点ではねかえってからQ点に達するまでの時間を求めよ。

(6)　PQ間の距離を求めよ。

II　次に，O点の真上高さbの点Bから落下させると，球はO点ではねかえった後，直接Q点に命中した。aとbの比a/bを求めよ。　(電気通信大-工)

問題 Memo　斜面上での球のはねかえりという一見複雑そうな問題ですが，完全弾性衝突を正しく理解していれば意外とやさしいはずです。

4 〈はね上がった球の放物運動〉

水平な床上に距離 d〔m〕だけ離れて2点A，Bがある。また点Aの真上 h〔m〕に点Cがある。いま点Cから質量 M〔kg〕の球を，ABに平行にある速度で打ちだした。球は床と2度衝突した後，点Bの鉛直上方にある標的にちょうど水平に当たった。球と床との反発係数(はね返りの係数)を $e(1>e>0)$ として次の問に答えよ。ただし，重力の加速度を g〔m/s²〕とし，球と標的の大きさ，および空気の抵抗は無視できるものとする。また球の水平方向の速度は，球が床と衝突する前後で変わらないものとする。

問1　点Cを離れるときの球の速さ v〔m/s〕，球が点Cを離れてから標的に到達するまでの時間 t〔s〕，および標的の高さ y〔m〕を求めよ。

問2　球が床との最初の衝突で失う力学的エネルギー E〔J〕を求めよ。

問3　標的の位置を変えずに点Cから水平に打ちだす球の速さだけを変えて，球が床と1度衝突した後標的に当たるようにすることができる。この場合，点Cを離れるときの球の速さ w〔m/s〕を求めよ。　　(北海道大)

問題 Memo　放物運動をする物体が床に斜衝突して，ふたたび放物運動をするという問題はよく出題されますから自信をつけておきましょう。この種の問題では，放物運動の性質と，床に斜衝突したとき物体の速度がどのように変わるかが理解できていれば，容易に解けるでしょう。

●ここに注目！● **運 動 量**

① **運動量保存の法則**

$$\boldsymbol{m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2'}$$

運動量はベクトルであるから，向きに注意すること。直線上の衝突・分裂をあつかうときには，正とする向きをきちんとおさえておくこと。

② **はねかえりの係数**

$$e = -\frac{v_2' - v_1'}{v_2 - v_1}$$

運動量保存の法則は，力学にかぎらずいろいろな場面で用います。きちんとチェックできたところで，きょうは終わりにしましょう。

第8日

力と運動13日間⑧　　学習日　月　日

エネルギー保存と運動量保存

力学についての学習もきょうで一段落です。きょうは，力学全体を包含する総合的な問題について考えます。物体の運動を連続的にあつかっていきましょう。

はじめに確認トレーニングでチェックしなさい。

確認トレーニング

〔解答欄〕

1 〈運動量〉

質量が m で半径が a である2つの小さな球に，長さ l の糸をつけ，2つの球が接するように，糸の上端を $2a$ 離してぶら下げます。いま，2本の糸をふくむ鉛直面内で，糸がたるまないようにして，2本の糸が鉛直線とそれぞれ θ の角をなすまで2球を左右に移動させて静かに放したところ，球は支持点の直下で衝突し，糸が鉛直線と θ' の角をなす位置まではね返りました。このとき，次の問いに答えなさい。

(1) 2球が衝突する直前の速さはいくらですか。ただし，重力加速度を g とします。

(2) 衝突によって1球が失った運動エネルギーはいくらですか。

(3) 2球間のはねかえりの係数はいくらですか。

(4) 衝突のとき，1球が受けた力積はいくらですか。　（室蘭工大）

2 〈運動量〉

水平でなめらかな一つの直線上を，2つの小球A，Bが同じ向きに運動しています。Aの質量は m，Bの質量はその2倍です。Bの速度は v で，AがBの4倍の速度でBを追いかけて両球が弾性衝突するものとします。衝突後のA，Bの速度を v_A，v_B とするとき，次の問いに答えなさい。

(1) はねかえりの係数はどのように表されますか。

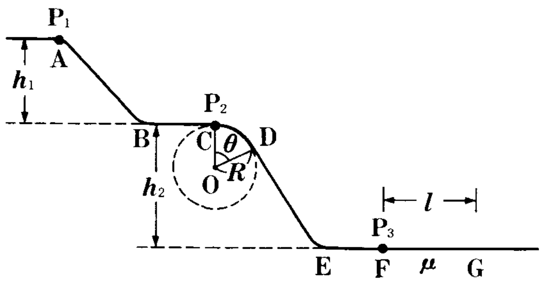
(2) v_A，v_B はそれぞれいくらになりますか。

(3) 衝突によって，Bはどれだけの運動量をAから奪いとりますか。m，v を用いて表しなさい。

(4) A，B全体について，衝突前後の運動エネルギーの変化はいくらですか。

例題8　拘束された径路をすべり降りる物体の衝突とエネルギー

図で，鉛直面内にある ABCDEFG はじゅうぶん細い針金でできており，この針金に穴をあけた小物体(P_1，P_2，P_3)を通してある。BC 及び EFG は水平であり，BC は図のように EG から h_2 の高さにあり，A 点は更に h_1 の高さの所にある。また CD は半径 R の円弧の一部($\angle COD=\theta$)である。A 点から F 点まではなめらかな針金でできており，FG は動摩擦係数 μ の粗い針金でできている。



さて，今 A 点に置かれた小物体 P_1(質量 m_1)が静かにすべり落ち，C 点に置かれた小物体 P_2(質量 m_2)をはねとばし，自分自身は C 点で止まった。P_2 は C から E へとすべり落ち，F まで進み，F 点に置かれた小物体 P_3(質量 m_3)と合体して運動をつづけ，G 点で止まった。重力加速度を g，FG 間の距離を l として次の問いに答えよ。

問1　B 点での P_1 の速度を g，h_1 で表せ。

問2　C 点での衝突直後の P_2 の速度を g，m_1，m_2，h_1 で表せ。また P_1 が P_2 に衝突したときのはねかえりの係数を m_1，m_2 で表せ。

問3　D 点の直前での P_2 の速度を g，m_1，m_2，h_1，R，θ で表せ。また P_2 のうける抗力を g，m_1，m_2，h_1，R，θ で表せ。

問4　F 点における衝突直後の合体した小物体(P_2+P_3)の速度を g，m_1，m_2，m_3，h_1，h_2 で表せ。

問5　合体した小物体(P_2+P_3)の加速度を a として，FG 間での運動方程式をみちびけ。また動摩擦係数 μ を m_1，m_2，m_3，h_1，h_2，l で表せ。　(新潟大)

Advice　問1　力学的エネルギー保存則が成立します。P_1 の位置エネルギーの減少が運動エネルギーの増加と等しいことから求めます。

問2　P_1 の運動量が衝突により，すべて P_2 の運動量に変化したことから P_2 の衝突直後の速度を求めます。次に，P_1，P_2 の衝突前後における相対速度の比から，はねかえりの係数を求めます。

問3　C → D の過程では，C 点と D 点の位置エネルギーの差だけ P_2 は運動エネルギーを増加させていきます。D 点で物体に作用する力は，重力と抗力で，この OD 方向の合力が円運動の向心力になっていると考えます。この場合，抗力は，$\overrightarrow{OD}$，$\overrightarrow{DO}$ どちらの向きにもはたらき得るので，どちらの向きを正とするか，はっきり示しておきましょう。どちらになるかは，必要な向心力の大きさと重力との関係で決まります。

問4　力学的エネルギー保存則を用いて，衝突直前の P_2 の速度を求め，さらに，運動量保存則を用いて，(P_2+P_3)の速度を求めます。

問5　動摩擦力のみが作用して(P_2+P_3)の物体が等加速度運動をしているとして運動方程式をたて，また，$v^2-v_0{}^2=2aS$ を利用して，先に求めた加速度を代入して，μ の値を導きます。

解き方　問1　AB 間はなめらかであるので，力学的エネルギーは保存され，重力による位置エネルギーの減少が運動エネルギーの増加になっているから，求める速度を v_1 とすると

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2=m_1gh_1$$

$$\therefore\quad v_1=\sqrt{2gh_1}\qquad\cdots\cdots\cdots①$$

問2　衝突後，A は静止し，B が v_2 で動きだしたとすれば，運動量保存則より，

$$m_1v_1=m_2v_2$$

となる。これに①を代入して，

$$v_2=\frac{m_1}{m_2}v_1=\frac{m_1}{m_2}\sqrt{2gh_1}\qquad\cdots\cdots\cdots②$$

次に，はねかえりの係数を e とすると，$-e$ が衝突前後の相対速度の比であるから，

$$-e=\frac{0-v_2}{v_1-0}$$

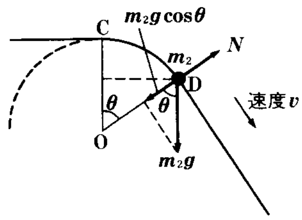
これに，①，②を代入して

$$-e=\frac{-\dfrac{m_1}{m_2}\sqrt{2gh_1}}{\sqrt{2gh_1}}=-\frac{m_1}{m_2}$$

よって，$e=\dfrac{m_1}{m_2}$

問3　C 点と D 点の高さの差は

$h=R-R\cos\theta=R(1-\cos\theta)$ である。



C 点と D 点での力学的エネルギーは保存されるから，D 点での速さを v とすれば，

$$\frac{1}{2}m_2v_2^2+m_2gR(1-\cos\theta)=\frac{1}{2}m_2v^2$$

これに，②を代入して整理すると

$$v=\sqrt{v_2^2+2gR(1-\cos\theta)}$$

$$=\sqrt{2g\left\{\left(\frac{m_1}{m_2}\right)^2h_1+R(1-\cos\theta)\right\}}\qquad\cdots\cdots\cdots③$$

次に，D 点直前における OD 方向にはたらく力を考える。抗力を $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ の向きを正として，N とすると，重力の OD 方向の成分と N の合力が円運動の向心力になっている。

よって，

$$m_2g\cos\theta-N=\frac{m_2v^2}{R}$$

$$N=m_2g\cos\theta-\frac{m_2}{R}\times2g\left\{\left(\frac{m_1}{m_2}\right)^2h_1+R(1-\cos\theta)\right\}$$

$$=m_2g\left\{3\cos\theta-2\left(\frac{m_1}{m_2}\right)^2\frac{h_1}{R}-2\right\}$$

となる。

問4　P_2 が，F 点で衝突する直前の速さ v_3 は，力学的エネルギー保存則を用いて考えれば，C 点と F 点の比較より，

$$\frac{1}{2}m_2v_2^2+m_2gh_2=\frac{1}{2}m_2v_3^2$$

$$\therefore\quad v_3^2=v_2^2+2gh_2$$

となるから，これに，②を代入して

$$v_3^2=\left(\frac{m_1}{m_2}\right)^2\times2gh_1+2gh_2$$

$$\therefore\quad v_3=\frac{1}{m_2}\sqrt{2g(m_1^2h_1+m_2^2h_2)}\qquad\cdots\cdots\cdots④$$

P_2 と P_3 が合体して，v_4 の速度になったとすれば，運動量保存則を用いて，

$$m_2 v_3 = (m_2 + m_3) v_4$$

となるので，これと④式より

$$v_4 = \frac{m_2}{m_2 + m_3} v_3 = \frac{1}{m_2 + m_3}\sqrt{2g(m_1{}^2 h_1 + m_2{}^2 h_2)} \quad \cdots\cdots⑤$$

問 5　このとき，物体が受ける動摩擦力は $F = -\mu(m_2 + m_3)g$ であるから，運動方程式は，

$$(m_2 + m_3)\alpha = -\mu(m_2 + m_3)g$$

となる。

よって，加速度 α は，$\alpha = -\mu g$ となる。初速度 v_4 で，α の一定加速度で運動しながら，距離 l 動いた後止まるので，

$$0^2 - v_4{}^2 = 2\alpha l$$

となる。⑤と $\alpha = -\mu g$ を代入して，

$$-\left\{\frac{1}{m_2 + m_3}\sqrt{2g(m_1{}^2 h_1 + m_2{}^2 h_2)}\right\}^2 = 2(-\mu g)l$$

$$\therefore \quad \mu = \frac{m_1{}^2 h_1 + m_2{}^2 h_2}{(m_2 + m_3)^2 l}$$

●解答●　問 1　$\sqrt{2gh_1}$

問 2　$\dfrac{m_1}{m_2}\sqrt{2gh_1}$　　$e = \dfrac{m_1}{m_2}$

問 3　速度 $= \sqrt{2g\left\{\left(\dfrac{m_1}{m_2}\right)^2 h_1 + R(1 - \cos\theta)\right\}}$

抗力 $= m_2 g\left\{3\cos\theta - 2\left(\dfrac{m_1}{m_2}\right)^2 \dfrac{h_1}{R} - 2\right\}$（ただし，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ の向きを正とする）

問 4　$\dfrac{1}{m_2 + m_3}\sqrt{2g(m_1{}^2 h_1 + m_2{}^2 h_2)}$

問 5　運動方程式：$(m_2 + m_3)\alpha = -\mu(m_2 + m_3)g$

$$\mu = \frac{m_1{}^2 h_1 + m_2{}^2 h_2}{(m_2 + m_3)^2 l}$$

では，実戦トレーニングに進みます。摩擦などがないか，非弾性衝突ではないかなどをチェックポイントにしなさい。

実戦トレーニング

1 〈自動車の減速運動と衝突〉

時速40(km)(11.1(m/s))で走っている自動車Aが前方に停車している自動車Bを発見し，その10(m)手前で急ブレーキをかけたので，車輪は回転することなく，スリップしていって衝突した。衝突の瞬間に両車が変形してくいこむために6000(J)のエネルギーが失われた。それから両車は1つになって運動し，まもなく停止した。B車もブレーキがかかっていたので車輪は回転することなく移動した。

A車の質量は1200(kg)，B車の質量は800(kg)，両車とも道路との動摩擦係数は0.500である。重力の加速度は9.81(m/s^2)として計算せよ。

(1) 衝突直前のA車の速さはいくらか。

(2) A，Bが1つになって動き出した直後の速さはいくらか。

(3) A，Bが1つになって動き出してから止まるまでの時間はいくらか。

(4) 衝突後に摩擦によって失われたエネルギーはいくらか。　　　　　　　　　　(千葉大)

問題 Memo　ある速度で走っている自動車が急ブレーキをかけたために，その後一様に減速していくというありふれた問題に，衝突をつけ加えたところに特徴があります。しかし，設問はわりあい平易ですから，順序よく解答すればとくにやっかいなことはないでしょう。

2 〈単振り子と衝突・エネルギー保存〉

重さの無視できる長さ lm＝1.24m の糸に半径 rm＝2cm の球形の鉛のおもりをぶらさげた振り子がある。鉛の密度 ρkg/m^3＝11.3g/cm^3，重力加速度を gm/s^2＝9.80m/s^2 として，以下の問に答えよ。

(a) おもりの質量 m を表す式および数値を求めよ。

（以下の式ではおもりの質量として記号 m を使え。）

(b) 振幅が小さい時のおもりの周期を表す式を示せ。

いま，この振り子を静止させておいて，このおもりの中心に Mkg＝20g の鉛のたまを速度 vm/s＝20m/s で打ちこんだら，このたまはおもりの中にはいり中心で止った。

(c) このおもりはもとの位置からどれだけの高さまであがるか。式および数値を示せ。

(d) このたまとおもりの衝突の際に，力学的エネルギーの損失があるか。あるとすれば，この損失量を表す式を示せ。

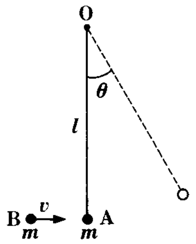
(e) この失われた力学的エネルギーはどの様な形のエネルギーになるか。3 つあげよ。

（慶應義塾大-医）

問題 Memo　単振り子の基本的な性質と，物体の衝突に関する基本事項を重ねあわせた問題で，この形式の問題はよく出題されます。このような力学的な関係を明らかにしようとする問題としては，標準的なものといえるでしょう。

3 〈単振り子と小球の衝突と力学的エネルギー保存〉

質量 m の小球Aが，図のように定点Oから長さ l の糸でつるされていて，初め静止している。左方から等しい質量 m の小球Bが速さ v で水平にとんできて，Aと正面衝突した。次の問に答えよ。



(1) 衝突直後のA，B 2球の速さをそれぞれ v_A，v_B とするとき，衝突における運動量保存の法則の式を書け。

(2) 前問の衝突が弾性衝突で，2球の運動エネルギーの和が保存されるとき，v_A，v_B はいくらになるか。また，はねかえりの係数（反発係数）e の定義の式を書き，ついで本問の場合の e の数値を求めよ。

(3) 弾性衝突をして小球Aが振れて，鉛直線と糸のなす角 θ の最大値が 60° であった。糸の長さ l が 5m とするとき，小球Aの初速 v_A はいくらであったか。空気の抵抗は無視して，重力加速度 $g=9.8\mathrm{m/s^2}$ として計算せよ。

(4) 小球A，Bが粘土でできていて，衝突して2球が合体したとき，衝突後の速さ v' はいくらになるか。また2球の運動エネルギーの和について，衝突直後のそれを K'，衝突直前のそれを K としたとき，両者の比 K'/K を求めよ。

(5) 前問(4)において，合体した2球の振れの角の最大値を θ_1 として，$\cos\theta_1=\dfrac{7}{9}$ であった。小球Bがとんできた速さ v はいくらであったか。有効数字2桁で答えよ。　(中央大-理工)

問題 Memo　運動量保存則に力学的エネルギー保存則をからませた標準的な問題で，定義的なものも含まれています。

●ここに注目！● エネルギー保存と運動量保存

① **衝突とエネルギー損失**

弾性衝突では，力学的エネルギーは保存されるが，非弾性衝突では力学的エネルギーが失われ，熱などになる。

② **摩擦によるエネルギー損失**

摩擦力は運動をさまたげる向きにはたらくので，摩擦力による仕事の分だけ，物体のエネルギーは減少する。

これで終わりです。第9日からは，力と運動についての応用問題に進みます。

第9日

力と運動13日間 ⑨　　学習日　　月　　日

応用問題 (1)　—重力による運動—

力学についての応用問題の最初は，やはり物体の運動についてです。日常的な題材をうまくかみくだけるかどうか，さっそく始めましょう。

応用問題1　物体の投げ上げ過程のモデル

物体を手のひらにのせ，手をゆっくり上げても物体は手のひらから離れないが，手を急激に上げ静止させると物体は手のひらから離れてとび上がる。このような現象を模型的に考察してみよう。

図1に破線で示すように，水平面上に平らな台Aがあり，この台の上に質量 m の物体Bをのせる。台を水平に保ったまま，図2に示す速度 v_A で台を鉛直上方に持ち上げる。台が動きはじめてからの時間を t とする。台および物体の鉛直方向の移動距離をそれぞれ y_A，y_B とし，重力加速度を g とする。物体には空気の抵抗力は働かないものとして，以下の設問に答えよ。結果だけでなく，考え方や途中の計算も簡単に示せ。

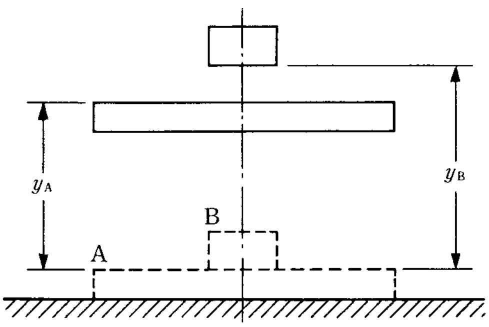


図1

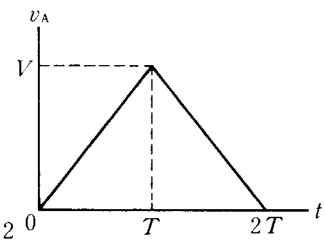


図2

(a)　$0<t<T$ において，物体の受ける垂直抗力 N を求めよ。また，物体が台から離れないと仮定し，$T<t<2T$ において物体の受ける垂直抗力 N' を求めよ。

(b)　物体が台から離れるための条件は何か。また，物体が離れるのはいつか。以下の設問においては，設問bの条件が満たされているとする。

(c)　物体が台から離れた後，最高点に達した時の y_B を求めよ。

(d)　$t=0$ から物体が台上に落ちるまでの時間について，y_A と y_B を t の関数として求めよ。また，y_A を実線，y_B を破線で，その概略を同一図上に示せ。　　(東京大)

物体を投げ上げるという日常的現象をモデル化し，手を離れるまでの過程を含めて考えるという問題です。何となく経験から答えはわかるけれども，あらたまって問われるとまごついてしまう人も多いでしょう。しかし，親切な誘導が設けられています。後半少々計算が繁雑になることを除けば，内容的にはそれほど難しくはありません。

〔解答欄〕

Advice 台が加速される $0<t<T$ の間は，(a)の問題文にもにおわされているように，物体が台から離れることはありません。なぜか。もし物体が台から離れたらどうなるでしょう。物体にはたらく力は重力だけになり，物体は重力加速度によって減速されます。一方，台は加速されているのですから，すぐ追いつかれてしまうというわけです。

では，台が減速される $T<t<2T$ ではどうでしょう。台から離れれば，物体は重力により減速されることは同じです。しかし，台も減速されるわけで，台の減速の割合のほうが大きければ，台と物体は離れることになります。

これらのことを，物体が台から離れないと仮定して，台からの垂直抗力を求め，求まった抗力を表す式の内容を物理的に解釈して考えなさいというのが本問の主旨です。

(a) 運動方程式をたてます。物体にはたらく力は重力と抗力，物体の加速度は，台の加速度に等しくなります。台の加速度は図2から求めます。

(b) (a)で得られた抗力を表す数式を，物理的に吟味します。抗力は上向きにしか実在しません。下向きの，実在しない抗力が現れてきたら，台と物体は離れていると解釈されるわけです。

(c) 台から離れた物体は，離れたときの速度を初速度とし，重力だけを受けて等加速度運動をします。最高点はエネルギー保存則によっても求められますが，次にグラフをえがくことも考えると，等加速度運動として解き，速度 $=0$ となるときの高さを求めるようにしたほうがよいでしょう。

(d) 台の運動は図2から考えます。もちろん $t=T$ で場合わけが必要です。物体が台上に落ちる時刻は $y_A=y_B$ となるときとして求めますが，y_A も y_B も t の範囲で場合わけがされて求まりますから，どの場合の y_A と y_B を使うべきかに注意します。解が求まったら，物理的に吟味することも忘れてはなりません。

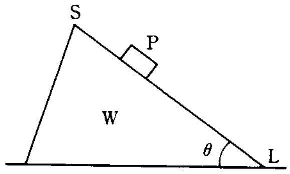
グラフは物体が台上に落ちるまでをえがくこと。よけいなところまでのばしたりしないように注意してください。グラフの形が変わるところや，最高点，台上に落ちる時刻，などはきちんと記入してください。

もうひとつ応用問題をしましょう。慣性力を使いなれるとわかりやすくなる問題がけっこう多いので，そのつもりで取りかかりなさい。

応用問題2　水平運動する斜面とその上の物体の相対運動

次の ア□～ウ□ を埋めよ。

図のように，水平な床の上に，質量 M で頂角 θ のくさび W を置き，その斜面 SL 上に質量 m の小さい物体 P を置いた。くさびの面と床および物体との間には摩擦はないものとする。



いま，物体を静かに放して，くさびを大きさ β の加速度で右方へ動かす。そのとき，物体の，くさびに対する，斜面に平行な相対加速度 γ は，β，θ および重力の加速度の大きさ g を用いて表わせば，$\gamma=$ ア□ となる。ただし，物体が斜面上を落下する場合に $\gamma>0$ とする。

次に，くさびも物体もはじめに静止させておき，物体を静かに放して，斜面上を落下させると，くさびは，大きさ A の加速度で床の上を左方へ動く。物体の床に対する加速度の水平・鉛直成分をそれぞれ $a(>0)$，$b(>0)$ とすれば，b は a，A および θ を用いて，$b=$ イ□ と表わされる。このとき，床がくさびに及ぼす垂直抗力 N は，M，m，g および θ を用いて，$N=$ ウ□ と表わされる。　(立命館大-理工)

くさびの上にのっている物体について，くさびが加速度運動をしたとき，物体に生じる加速度や，くさびが床から受ける垂直抗力を求める問題です。座標系をくさびの斜面にとるのか床にとるのか，はっきり区別しないと解くのが難しくなります。

〔解答欄〕

Advice ア　くさびに固定した座標系で考えます。くさびが加速度 β で右に動くと，物体には，左向きに慣性力 $m\beta$ が生じます。そのほか物体には重力と垂直抗力がはたらいているので，それらによる斜面に平行な方向についての運動方程式をたてます。

イ　くさびに固定した座標系で考えたとき，物体には慣性力 $m\mathrm{A}$ が生じます。これを用いて力のつりあいの式をつくります。また，床に固定した座標系で考えた加速度 a，b を用いて運動方程式をつくります。

ウ　床に固定した座標系でくさびの運動方程式をたてます。くさびには床からの抗力，重力，物体からの反作用の力がはたらいています。

きちんと答えあわせをしなさい。
次は，実戦トレーニングです。

実戦トレーニング

1 〈空気抵抗のある場合の落下運動〉

つぎの問題の$\boxed{}$の中に入れるべき最も近い数値を問題末尾の解答表の中から選び，その番号を解答用マーク・カードの指定された欄にマークしなさい（番号の中の0という数字も必ずマークすること，同じ番号を何回用いてもよい）。

まわりの空気に対して相対速度 v〔m/s〕で運動する半径 R〔m〕の球体は，$F=kvR$〔N〕の空気抵抗を受ける。比例定数 k を，$k=3.14\times10^{-4}$〔kg/m・s〕とし，重力加速度を 9.80〔m/s²〕，水滴の密度を 1.00×10^{3}〔kg/m³〕として，次の問に答えよ。ただし必要であれば，$\sqrt[3]{2}=1.26$ を用いてよい。水滴は球体とする。

(1) 半径 $R=1.00\times10^{-4}$〔m〕の水滴が一定速度で鉛直に落下している。このときの水滴の速さは(ア)$\boxed{}$〔m/s〕である。

(2) 半径 $R=1.00\times10^{-4}$〔m〕の水滴が上昇気流に乗って，地表に対して 1.00〔m/s〕の速さで上昇している。この上昇気流の速さは(イ)$\boxed{}$〔m/s〕である。

(3) 水平方向に速さ 1.73〔m/s〕の風が吹いているとき，水滴が鉛直線と30度傾いて一定の速さで落下している。この水滴の速さは(ウ)$\boxed{}$〔m/s〕であり，この水滴の半径は(エ)$\boxed{}$〔m〕である。

(4) 一定速度で並んで鉛直に落下している半径 $R=1.00\times10^{-4}$〔m〕の二つの水滴が，瞬間に合体して，一つの球となった。球となった直後の速さは(オ)$\boxed{}$〔m/s〕であり，球の鉛直下向の加速度の大きさは(カ)$\boxed{}$〔m/s²〕である。

〔解答表〕

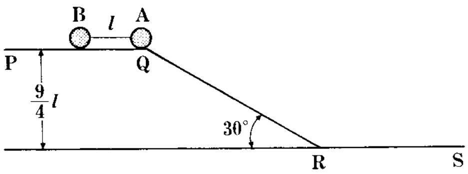
01. 1.5×10^{-4}	02. 3.0×10^{-3}	03. 4.8×10^{-3}	04. 6.3×10^{-3}
05. 9.8×10^{-3}	06. 1.5×10^{-2}	07. 4.8×10^{-2}	08. 6.6×10^{-2}
09. 8.4×10^{-2}	10. 1.0×10^{-1}	11. 2.0×10^{-1}	12. 4.5×10^{-1}
13. 5.3×10^{-1}	14. 7.2×10^{-1}	15. 8.2×10^{-1}	16. 1.3
17. 2.3	18. 3.5	19. 3.6	20. 4.8
21. 5.3	22. 7.4	23. 8.2	24. 9.3
25. 1.2×10	26. 2.0×10	27. 3.3×10	28. 4.6×10
29. 5.2×10	30. 6.1×10		

（東京理科大-理工〈機械工・情報科〉）

問題 Memo 空気抵抗のある場合の落下運動と風が吹いている場合の速度合成を組み合わせた問題です。とくに難解な部分はありませんが，数値計算が少々やっかいでしょう。

2 〈斜面を降下し衝突する糸で結ばれた２物体の運動〉

図において，PQ，RS は水平面，QR は水平面に対し 30° の傾きをもった斜面で，水平面と斜面とは Q，R でなめらかに接続している。質量の等しい小物体 A と B とは長さ l の糸でつながれ，糸がはった状態で PQ 上におかれている。A は斜面にちょうどさしかかったところにあり，落ちないように手で支えられている。水平面および斜面の物体との間の摩擦が無視できるものとし，重力加速度を g として，次の問いに答えよ。



(1) 手をはなすと A は斜面をすべりはじめる。このときの A の加速度はいくらか。

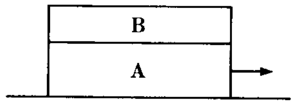
(2) PQ は RS より $\dfrac{9}{4}l$ だけ高いとする。A が R に達したとき，A の速さはいくらか。

(3) RS 上に達してから，B は A に追いついて衝突し，以後 A，B は一体となって運動した。このときの速さはいくらか。　（近畿大-理工）

問題 Memo　２つの物体を糸で結んだ問題はよくありますが，水平面と斜面が組み合わされている点に特徴があります。斜面を降りて水平面に達したときのそれぞれの物体の速さが異なってくるため，２つの物体の衝突の問題へと展開されていくことになります。

3 **〈重ねた2物体の運動〉**

図のように，水平面上に質量 M〔kg〕の板Aがあり，その上に質量 m〔kg〕の板Bがのせてある。板Aと板Bとの間の静止摩擦係数を μ，板Aと水平面との間の運動摩擦係数を μ' とする。重力加速度を g〔m/s²〕，$\mu>\mu'$ として問いに答えよ。



(1) 板A及び板Bに作用する重力はそれぞれいくらか。

(2) 水平面が板Aに及ぼす力の大きさはいくらか。

(3) 板Aに糸をつけて水平方向にひっぱって動かす。板Aと板Bとの間にすべりが生じない限度でその加速度を最大にしたい。その加速度の大きさとそのとき糸をひっぱっている力の大きさを求めよ。

(4) 板Bに糸をつけて水平方向にひっぱって動かす。板Aと板Bとの間にすべりが生じない限度でその加速度を最大にしたい。その加速度の大きさとそのとき糸をひっぱっている力の大きさを求めよ。

(5) 上の(3)と(4)の場合で，最大の加速度が相等しいとすれば，m と M との比はいくらになっているか。

(玉川大-工)

問題 Memo 重ねた物体の加速度運動では，ひとつひとつの物体に働く力を正しく理解できるかどうかがポイントになります。2物体A，Bを一体と考えて解こうとすると(3)と(4)は，同じ問題のような気がしてくるでしょう。出題者の意図はそこにあります。ひとつひとつの物体に働く力を見ぬけばやさしい問題ですが，それができないと難問に感じるかもしれません。

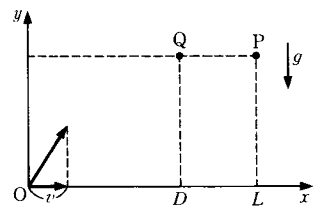
これで終わりです。

第 10 日	力と運動 13 日間 ⑩ 学習日　月　日
	応用問題 (2) —重力とエネルギー—

応用問題の２日めは，重力がテーマとなる問題です。
まずは一般的な放物運動からアタックです。

応用問題 3　放物運動と衝突

甲君より水平距離 L だけ前方の木の枝にサルがぶらさがっている。甲君はサルにエサを与えようとしてエサを投げ上げたところ，達した最高点の高さはちょうどサルの位置と同じ高さであったが，水平距離は足らず，甲君から $D(D<L<2D)$ の距離であった。そのためサルはころ合いを見計って枝から手を離し自由落下したところ，空中でうまくエサをとらえて，エサと一緒に地面に落ちた。



以上のような状況を力学的に考察するため，つぎのように簡単化した。重力加速度の大きさを g として $\boxed{\quad}$ の中をうめよ。

水平方向を x 軸，鉛直上向きを y 軸にとる。時刻 $t=0$ において原点 O から質量 m の小球 A を投げ上げたところ，x 座標 D で最高点 Q に達した。このことから，初速度の x 成分を v とすると，この時刻は (1)$\boxed{\quad}$，初速度の y 成分は (2)$\boxed{\quad}$ であるから，Q の y 座標は (3)$\boxed{\quad}$ となることがわかる。いま x 座標は L，y 座標は点 Q と同じ値の点 P に質量 M の小球 B があるとする。B がある時刻に自由落下し始めたところ，y 座標が正の点 R で A と B は衝突したという。この自由落下し始めた時刻は (4)$\boxed{\quad}$ であり，衝突までに B は点 P から (5)$\boxed{\quad}$ だけ落下している。衝突直後，A と B は一体となって落下した。一体となった直後の速度ベクトルの x 成分と y 成分はそれぞれ ((6)$\boxed{\quad}$，(7)$\boxed{\quad}$) であるから，時刻 (8)$\boxed{\quad}$ のとき A と B は x 軸上に達し，その x 座標は (9)$\boxed{\quad}$ であることがわかる。

つぎに衝突直後，A は B からみて x 成分と y 成分が $(-v,\ 0)$ の相対速度で互に反発する場合を考えよう。このとき，その瞬間の B の速度ベクトルの x 成分と y 成分はそれぞれ ((10)$\boxed{\quad}$，(11)$\boxed{\quad}$) となる。したがって，今度は B が x 軸上に達する位置の x 座標は (12)$\boxed{\quad}$ となる。

（早稲田大-教育）

斜方投射された物体が最高点に達したとき，その前方の同じ高さのところから別の物体が落下し，それらが衝突した。放物運動と運動量保存の法則を組み合わせた問題です。落ちついて解いていかないと混乱します。

〔解答欄〕

Advice (1) x 軸方向には等速直線運動をしていることに注目します。

(2) y 軸方向には等加速度運動です。最高点では y 軸方向の速度が 0 になること，および，その時刻が(1)で得られることから求めます。

(3) 斜方投射の y 座標の式に(1)，(2)で得られた値を代入します。

(4) y 軸方向には小球 A, Bともに自由落下することに注目します。正直に計算しようとすると苦労します。

(5) まず，小球 A が Q から R に達するまでの時間を求めることです。

(6)，(7) 運動量保存の法則を x，y 各方向に対して使います。

(8) y 方向の速度成分は衝突しても変化しません。そして，最高点に達する時間が(1)で得られていることを利用すればよいのです。

(9) まず，R から x 軸上に達するまでの時間を求めます。次に，衝突後 x 軸方向に(6)で得られた速度で投げ出されたと考えて衝突点から落下点までの距離を求めます。

(10) B の x 軸方向の速度を V_x としたとき，A の x 軸方向の速度がどのように表されるかを考えてから運動量保存の式を適用します。

(11) y 方向は変化しませんが，すぐにはわからない人は(10)と同様にやってみてください。

(12) (9)と同様に考えてみましょう。

次は，鉛直面内での円運動についての応用問題です。

応用問題4　糸でつるされたおもりの鉛直面内での運動と初速度の関係

文中の［　　］に適合する式を求め，また「　　」には適合する(イ)，(ロ)，(ハ)のいずれか一つを選べ。

図1に示すように，伸縮しない質量の無視できる長さ l の糸の一端に，質量 m の質点をつるし，他端を一点Oに固定して，点Oを通る一つの鉛直面内の運動を考える。空気の抵抗および固定点Oでの抵抗を無視し，重力加速度を g とする。この運動は最下点Pで質点に与える水平方向の速さ v_0 によって，次のような場合がおこる。

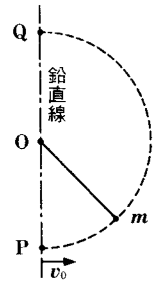


図1

(a)　速さ v_0 が(1)［　　］のとき，質点は点Oと同じ高さまで達することができる。

(b)　速さ v_0 が(1)［　　］より小さければ，質点は円周上で振動する。この場合，質点が点Pを通過するときの糸の張力は(2)［　　］であり，また質点がひきかえす点での糸の張力は(3)［　　］となる。質点がひきかえす点で糸を切れば，そののち質点は(4)「(イ)円の接線方向に飛び出す。(ロ)鉛直に落下する。(ハ)円の法線方向に飛び出す。」

(c)　速さ v_0 が(5)［　　］を越えれば，糸はたるまず，質点は最高点Qに達する。速さ v_0 が(5)［　　］のとき，質点は(6)「(イ)点Qで方向を変えて円周上をひきかえす。(ロ)点Qより鉛直に落下する。(ハ)円周上を一方向に回転する。」

(d)　速さ v_0 が(1)［　　］より大きく，かつ(5)［　　］より小さければ，糸は途中でたるみ，質点は円周からはなれる。円周をはなれる直前の質点の速さは，(7)［　　］である。点Pでの速さ v_0 が(8)［　　］のとき，円周をはなれた質点は，固定点Oを通過する。　(埼玉大)

円運動において，糸の張力，重力，遠心力の関係を求める問題です。(1)から(7)までは力学的エネルギー保存則を使いながら解いていけます。(8)は放物運動をする質点が定点を通るとき，その初速を求める問題です。計算が複雑になるので注意しましょう。

〔解答欄〕

Advice (1) 運動エネルギーと重力による力学的エネルギーがつねに保存されます。

(2) 質点が円運動するときは遠心力がはたらき，これが糸の張力と重力の糸方向の成分の和とつりあいます。

(5) 糸がたるむのは数式上では「糸の張力 $\leqq 0$」になることで表わされます。

(8) 円周を離れた質点は放物運動をしてO点を通過します。このとき(7)で用いた数式を使うところがポイントです。

重力がはたらく運動では，等加速度運動の公式と力学的エネルギー保存の法則をうまくあてはめることがたいせつです。

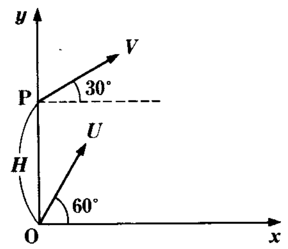
実戦トレーニングで，みがきをかけましょう。

実戦トレーニング

1 〈放物運動をする 2 球の衝突〉

次の文の□の中に適当な数値を入れよ。

等しい質量 M をもつ二つの小球 A, B がある。いま A を地上の一点 O から，また B を O から鉛直上方に H 離れた点 P から，それらが同じ鉛直面内を運動するように，同時に投げ出す。A の初速度は U で，水平線に対する仰角は 60°, B の初速度は V で，水平線に対する仰角は 30° であったとする。二つの小球はその後空中で衝突し，衝突後 A と B は一体となって運動する。



図に示すように，点 O に座標原点をとり，水平方向に x 軸，鉛直上方に y 軸をとる。時間は小球を投げ出した瞬間からはかり，重力加速度を g とする。

A と B は時刻 (1)□，x 座標 (2)□，y 座標 (3)□ において衝突する。この衝突が空中で起こるために H の満たすべき条件は (4)□ であり，また，U と V の関係は (5)□ である。さて，A と B が一体となってできた小球 C の質量は (6)□ であり，運動量の保存則から，衝突直後の速度の x 方向成分は (7)□，y 方向成分は (8)□ となる。結局，C は時刻 (9)□ に点 O から (10)□ 離れた地上の点に落下する。

ただし小球の運動に対する空気抵抗の影響は考えないものとする。また，以下の解答群では，関係式 (5)□ を用いて V を U で表した式が書かれている。(ただし，コ，サ，シは別である)

〔解答群〕

ア：$\dfrac{H}{U}$　イ：$2H$　ウ：$\dfrac{\sqrt{3}H}{U}$　エ：$\dfrac{U}{\sqrt{3}}$

オ：$\dfrac{\sqrt{3}H}{2}$　カ：$H-\dfrac{gH^2}{U^2}$　キ：$H=\dfrac{U^2}{g}$　ク：$H>\dfrac{U^2}{g}$

ケ：$H<\dfrac{U^2}{g}$　コ：$V=U$　サ：$V=\dfrac{U}{2}$　シ：$V=\dfrac{U}{\sqrt{3}}$

ス：$2M$　セ：U　ソ：$\dfrac{U}{2}$

タ：$\dfrac{3H\left(1-\dfrac{gH}{U^2}\right)}{2}$　チ：$\dfrac{U}{\sqrt{3}}-\dfrac{\sqrt{3}gH}{U}$　ツ：$\dfrac{U}{\sqrt{3}}+\dfrac{\sqrt{3}gH}{U}$

テ：$\dfrac{\dfrac{U}{g}\left(1+\sqrt{1+\dfrac{3gH}{U^2}}\right)}{\sqrt{3}}$　ト：$\dfrac{\dfrac{U}{g}\left(1-\dfrac{3gH}{U^2}+\sqrt{1+\dfrac{3gH}{U^2}}\right)}{\sqrt{3}}$

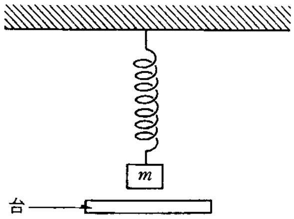
ナ：$\dfrac{\dfrac{U^2}{g}\left(1+\sqrt{1+\dfrac{3gH}{U^2}}\right)}{2\sqrt{3}}$　ニ：$\dfrac{\dfrac{U^2}{g}\left(1-\dfrac{3gH}{U^2}+\sqrt{1+\dfrac{3gH}{U^2}}\right)}{2\sqrt{3}}$

(関西大-工)

問題 Memo 放物運動は，水平方向と鉛直方向とにわけて考えることが大切です。放物運動の問題に出あったら，そのことがすぐに頭に浮かんでくるようになりたいものです。

2 〈ばねの振動とエネルギー〉

次の文中の空欄に当てはまる答を，与えられた記号を用いて記入せよ。



図のように，自然の長さ l，ばね定数 k のつるまきばねの上端を固定し，下端に質量 m のおもりを結びつけて，鉛直につるす。またその下に，自由に上下することのできる台を置く。ばねの質量と空気の抵抗は無視できるものとし，また重力加速度を g とする。

おもりを台にのせて，ばねの長さを l にしたのち，きわめてゆっくりと台を下げていったところ，ばねの長さが $l+$ (1)$\boxed{\quad\quad}$ となったところで，おもりは台から離れた。ここで台をとり去り，おもりを上下に振動させたら，周期は (2)$\boxed{\quad\quad}$ となった。

次に，ふたたびおもりを台にのせ，ばねの長さをいったん l より短くしてから，おもりと台に下向きの速度を与えた。そして，ばねの長さが l のときおもりが台にのったまま速さ v で下がるようにし，以後は台を一定の速さ v で下げ続けたところ，ばねの長さが $l+$ (3)$\boxed{\quad\quad}$ となったところで，おもりは台から離れ，その後は上下に振動した。その振幅は (4)$\boxed{\quad\quad}$ であった。

もう一度おもりを台にのせ，ばねの長さを l にしていったん静止させ，ついで台を下向きの一定加速度 $a(0<a<g)$ で下げていったところ，ばねの長さが $l+$ (5)$\boxed{\quad\quad}$ となったところで，おもりは台から離れた。そのときのおもりの運動エネルギーは (6)$\boxed{\quad\quad}$ であり，その後おもりは上下に振動したが，その振幅は (7)$\boxed{\quad\quad}$ であった。

おもりの上面が平らで水平であるとし，その上に質量が m に比べて無視できるほど小さい砂粒をのせ，おもりを手で下に引っ張って止めてから手を離す。手を離したときのばねの長さが $l+$ (8)$\boxed{\quad\quad}$ よりも長ければ，砂粒はおもりの振動の途中でおもりから離れる。

(早稲田大-理工)

問題 Memo 上下に移動できる台とばね振り子との組み合わせで，おもりが台から離れるための条件を求める問題です。この類題は頻出度の高い問題です。(1)，(2)，(3)は基本的ですが(4)以降は複雑で着眼のしかたを適切にしないと簡単には解けません。

3 〈ばねとおもりの系のつりあいと運動〉

つぎの問題の□の中に入れるべき正しい答，またはそれに最も近い答を問題末尾の解答表の中から選び，その番号を解答用マーク・カードの指定された欄にマークしなさい。(番号の0という数字も必ずマークすること。同じ番号を何回用いてもよい。)

自然の長さが2.1×10^{-1}〔m〕，ばね定数1.6×10〔N/m〕の軽いつる巻きばねと，三つの物体M_1，M_2，M_3がある。それぞれの物体の質量は，$M_1 : 4.0\times10^{-2}$〔kg〕，$M_2 : 1.0\times10^{-1}$〔kg〕，$M_3 : 2.0\times10^{-1}$〔kg〕である。これらの物体には穴があけてあり，図(1～4)に示されるように，ばねと物体に細長い棒を通す。物体は棒に沿って滑らかに動き，ばねの伸び縮みもこの方向におきる。重力の加速度を9.8〔m/s^2〕として，以下の問に答えなさい。

(1) 図1のように，ばねの一端Pを固定し，他端Qに物体M_1を結びつけて滑らかで水平な台の上に置く。いま物体を平衡な位置から右へ少しだけ引いて手を離したところ，周期(ア)□〔s〕で振動した。つぎに水平台の上に，物体との間に摩擦の無視できないシートを敷いて，平衡な位置から1.0×10^{-2}〔m〕だけ物体を右に引いたとき，物体が動きださないためには摩擦係数は(イ)□以上でなければならない。

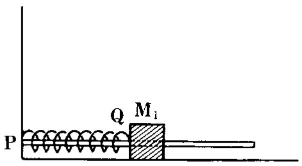


図1

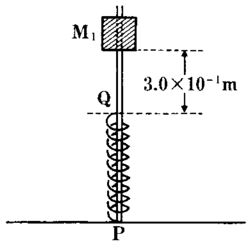


図2

(2) このばねを図2のように鉛直に立て，物体M_1をばねから離して一端Qから高さ3.0×10^{-1}〔m〕だけ引き上げ，手を離して落した。このときばねの縮む最大の長さは(ウ)□〔m〕であり，またばねに蓄えられたエネルギーは(エ)□〔J〕である。

(3) 図3のように，棒を通したばねを鉛直方向に対して角度60°傾け，一端Pを棒と共に回転台の上に固定し，他端Qに物体M_1を結びつけたところ，ばねの長さは(オ)□〔m〕になった。つぎにこの傾斜角を保ったまま，台が角速度，10〔rad/s〕で回転したところ，ばねが伸びて物体M_1はPから(カ)□〔m〕の位置で釣合った。このとき棒が物体におよぼす抗力は(キ)□〔N〕である。

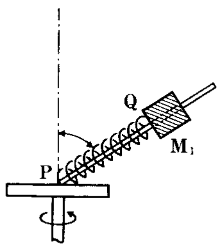


図3

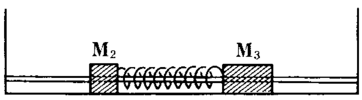


図4

(4) 図4のように，同じばねを物体M_2，M_3で両側からはさみ，滑らかな水平台の上に置いた。ただし，ばねはM_2，M_3に接触しているだけで固定されていない。いまM_2，M_3の両側を押して，ばねを5.0×10^{-2}〔m〕だけ縮ませた。この状態では，物体M_2，M_3にはそれぞれ手からの外力と，ばねの弾力が働き釣合って静止している。急に手を離したところ，物体はばねにはじかれてたがいに逆の方向へ動いた。このときの物体M_2の速さv_2と，物体M_3の速さv_3との比$\dfrac{v_2}{v_3}$は(ク)□である。また，M_2とM_3の運動エネルギーの和は(ケ)□〔J〕である。したがって，v_2は(コ)□〔m/s〕である。

〔解答表〕

01. 1.2×10^{-2}	02. 2.0×10^{-2}	03. 3.2×10^{-2}
04. 4.1×10^{-2}	05. 5.0×10^{-2}	06. 1.5×10^{-1}
07. 1.7×10^{-1}	08. 2.0×10^{-1}	09. 2.4×10^{-1}
10. 3.1×10^{-1}	11. 4.1×10^{-1}	12. 5.2×10^{-1}

13. 6.3×10^{-1}	14. 7.7×10^{-1}	15. 9.2×10^{-1}
16. 1.3	17. 1.5	18. 2.0
19. 3.2	20. 4.3	21. 5.6
22. 6.7	23. 8.2	24. 1.0×10
25. 2.0×10	26. 3.1×10	27. 5.2×10

（東京理科大-理工〈物理・土木工他〉）

問題 Memo ばねと物体の系を各種の状態の下において，単振動，摩擦力を含むつりあい，エネルギー保存の法則の応用，遠心力を含むつりあい，分裂（運動量保存の法則の応用）等，力学の基礎的分野全般にわたる理解を見る問題になっています。

第 11 日は円運動や単振動を中心とした問題を考えます。

第 11 日	力と運動 13 日間 ⑪　　学習日　月　日 **応用問題 (3)**　—円運動と単振動—

応用問題も 3 日めになりました。だいぶ感覚がつかめてきたことでしょう。きょうの最初の問題は，円運動と単振動を組みあわせたものです。円運動はそれだけの単純な問題としてはあつかわれません。遠心力の考え方になれるようにしなさい。では，始めましょう。

応用問題 5　回転円板上での単振動

文中の設問についての答を，計算または説明をつけて解答欄に記入せよ。ただし，問 5, 6 については答のみでよい。

水平面内において一定の角速度 ω で回転している円板がある。円板上には，半径方向にみぞが掘られており，その中にばねが置かれている。ばねの一端は，円板中心に固定され，他端には質量 M のおもりがつけられている。おもりの大きさ，ばねの質量を無視することができ，また，おもりとばねは，みぞの中を滑らかに動けるものとする。ばねの自然な長さを l，ばねの強さ (単位の長さだけ伸ばすために必要な力) を K とし，円板中心 O からおもりまでの距離 r を用いておもりの位置を表すことにする。

(I)　いま，円板上で静止している観測者 B には，おもりが $r=r_0$ の点に静止して見えたとする。

問 1　おもりに作用する力のつりあいの条件から，r_0 を l，K，M，ω を用いて表せ。

(II)　つぎに，B がおもりをみぞに沿って外側に動かし，点 O からの距離 r_1 の点で静かにおもりを放したところ，上述の力のつりあいが破れておもりが運動を始めた。時刻 t におけるおもりの位置 r を $r(t)$，そのとき B が見るみぞ方向の加速度を $a(t)$ と書く。おもりに作用するみぞ方向の力は，B から見て，ばねの力と遠心力であるから，みぞ方向に関して B が書く運動方程式は

$$M\cdot a(t)=\boxed{} \quad \cdots\cdots\cdots(1)$$

となる。(ただし，加速度，力いずれもみぞ方向外向きを正とする。)

問 2　上の(1)式を完成せよ。

いま，おもりの位置を，$r(t)$ の代りに，r_0 から測って $x(t)=r(t)-r_0$ を用いて表すと，(1)式の右辺の力は，$-L\cdot x(t)$ の形になることがわかる。ここで L は t に依存しない定数である。

問 3　L を K，M，ω を用いて表せ。

問 4　x の正，負に対応して，この力はどちら向きになるか，理由をつけて答えよ。

問 5　観測者 B から見て，おもりはどのような運動をするか，10 字以内で答えよ。

問 6　その運動を特徴づける量 (例えば，速度，加速度，振動の中心の位置，周期，振幅など) を 2 つだけ名称をつけて式で与えよ。ただし，本文中で与えられた量のうち，t に依存しないもののみを用いよ。

(北海道大)

半径方向にみぞを持ち，水平面内で回転する円板上での単振動を扱っています。円板上に静止している人から見ると，ばねの力に加えて遠心力も考慮に入れなければならない点に特徴があります。

順を追って誘導的に小問が設けられているので，基本事項をきちんと把握していればそれほどむずかしい問題ではありませんが，見かけの力である遠心力と単振動についての十分な理解が必要です。

〔解答欄〕

Advice 問1　回転する円板上に静止している人から円板上の物体の運動を見るときには，物体に遠心力がはたらいていると考えなくてはいけません。遠心力とばねの弾性力のつりあいの式をつくります。

問2　遠心力とばねの弾性力は，物体の位置（ここでは円板の中心からの距離）によって変わります。この2力の合力が物体にはたらく力になります。

問3　つりあいの位置を原点とする座標に変換します。問1のつりあいの条件の式も使います。

問4　x の正，負に対応して，遠心力とばねの弾性力の合力の符号を考えます。

問5，問6　「加速度が，$a=-\omega^2x$　とかけるとき，その運動は単振動であり，その周期は $\dfrac{2\pi}{\omega}$ である」という基本事項を思い出します。また，その振幅は，原点と初めの物体の位置によって決まります。

次の応用問題は，単振動についてです。

応用問題6　2本の糸で張った質点の単振動

質量が無視でき，伸び縮みしない糸がある。この糸の一端をなめらかな水平板上の一点Aに固定し，他端をAから距離 l だけ離れた点Bを通し，おもりWをつけ，一定の張力 T でひっぱる(図1)。以下の問いに答えよ。

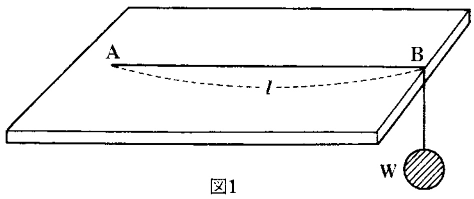


図1

(1)　この糸の点Aから距離 $\frac{l}{2}$ のところに質量 m の質点をつけ，質点を板上で運動させる。質点は点Aを中心に半径 $\frac{l}{2}$ の円弧の上を運動するが，静止位置からの変位 x は $\frac{l}{2}$ に比べて十分小さいとする。したがって，質点は直線ABに垂直な直線上を運動すると考えてよい(図2)。

(A)　質点の加速度を a として，運動の方程式を書け。

(B)　時刻 $t=0$ で，変位 $x=0$，速度 $v=v_0$ であるとして，質点の変位 x を時間 t の関数として表せ。

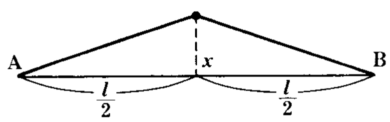


図2

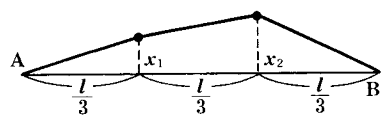


図3

(2)　点Aから距離 $\frac{l}{3}$，$\frac{2l}{3}$ のところに，同じ質量 m の2個の質点をつける。図3のように，左の質点を1，右の質点を2とし，静止位置からのそれぞれの変位を x_1，x_2 とする。x_1，x_2 は $\frac{l}{3}$ に比べて十分小さいとし，問い(1)の場合と同様に，質点は各々直線ABに垂直な直線上を運動すると考える。

(A)　質点1と質点2の加速度を a_1，a_2 とし，それぞれの運動の方程式を書け。

　ところで，この運動の方程式から分かるように，2個の質点の運動は一般には単純でない。しかし，それぞれが単振動をし，2つの変位の間に $x_1=\alpha x_2$ の関係が成り立つ特別な場合がある。ここで，α は定数である。以下では，このような場合を考える。

(B)　問い(A)で得られた式を $ma_1=\beta_1 x_1$，$ma_2=\beta_2 x_2$ の形に書き換える。

　このとき，β_1 と β_2 の間にはどのような関係が成り立つか。その関係を示し，それが成り立つ理由を簡潔に述べよ。

(C)　問い(B)で得られた関係を使い，α の2つの値を求めよ。

(D)　その単振動の振動数を求めよ。

(E)　質点1と質点2からなる系の重心はどのような運動をするか。　　（東北大）

単振動の問題ですが，単振動の原因となる力が張力である点，2 つの質点の単振動を同時に考える点などから，少し難しい問題といえます。また，θ が非常に小さいときの三角関数の近似式を使うところもポイントです。

〔解答欄〕

Advice　単振動する質点の運動はかならず，$F=-kx$　で表されます。問題の条件からこの式を導くことが前提となります。

(1)(A)　質点は直線 AB に垂直な直線上を運動する，という条件がたいせつです。これをもとに力を図示します。また，x は $\dfrac{l}{2}$ に比べて十分小さいという条件は，三角関数の近似式を用いることを示しています。

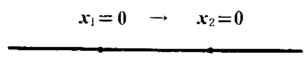
(B)　単振動の変位 x と時間 t の関係は，$x=A\sin\omega t$　と表せます。条件をうまく用いて，A，ω を定めます。

(2)(A)　2 つの質点の運動方向は AB に垂直です。ということは，AB と平行な方向には動きません。このことを 2 つの質点にはたらく張力の関係にうまくあてはめます。

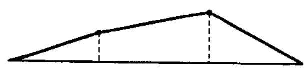
(B)　$x_1=\alpha x_2$　という式が何を示しているか考えます。図のように，$x_1=0$ なら $x_2=0$ だし，x_1 が 2 倍になれば x_2 も 2 倍になるのだから，質点 1，2 はそろって振動していることになります。このことを式の展開にうまくあてはめる必要があります。

(C)(D)　(A)(B)の結果を用いて計算するだけです。

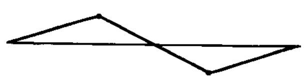
(E)　重心の変位がどうなるかを考えます。



$\alpha=0$のとき



$\alpha<0$のとき



$\alpha>0$のとき

単振動では $F=-kx$ がたいせつだから，まずこの形を求めなさい。
続いて実戦トレーニングです。

実戦トレーニング

1 〈摩擦のある曲面での等速運動〉

次の文の $\boxed{}$ の中に記入すべき式を，また，{　　} の中の正しいものの番号を，それぞれの解答欄（省略）に記入せよ。

図1は内半径 a，外半径 $2a$ の円形のスピードウェイの平面図である。その断面は図2のように与えられている。AB，B′A′ は車の走る部分で $\frac{1}{4}$ の円弧から成り，BCB′ の部分は水平である。

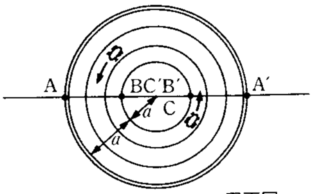


図1　スピードウェイの平面図

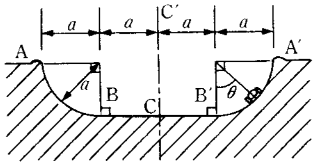


図2　スピードウェイの断面図

車は各レーン（車線）を守って速さ v で走行しているが，進行方向に対して直角の方向には一般に横すべりが起こりうるものとし，このときの車と路面の間の横すべりの摩擦係数を μ，重力の加速度を g，車の質量を m とする。また，車の大きさを無視し，質点と見なしたとき，各レーンにおける車の位置を図2のように鉛直線からの角 θ で表すことができるものとする。いま，かりに $\mu=0$ としたとき，車が路面から受ける抗力 R を求めると $R=$ (イ) $\boxed{}$ となるが，一定の θ を保つとき車の速さ v は，$v=$ (ロ) $\boxed{}$ として与えられる。

したがって，車の速さがこの値より増加すると車は (ハ) {(1)　外側　(2)　内側} のレーンの方へすべり込み，速さが減少すると (ニ) {(1)　外側　(2)　内側} のレーンの方へすべり込む。

ところが現実には $0<\mu<1$ であり，横すべりに対して抵抗が働くので，ある範囲内の v の変化に対しては車は横すべりすることはない。この範囲は，車がどのレーンにあるかによって，すなわち，θ の値によって異なる。

そこで，θ に関する二つの限界値 θ_1 と θ_2 を考えよう。いくら v を大きくしても横すべりしない限界の θ の値を θ_1，また，いくら v を小さくしても横すべりしない限界の θ の値を θ_2 としたとき，θ_1 は (ホ) $\boxed{}$ で，また θ_2 は (ヘ) $\boxed{}$ によって与えられる。したがって，横すべりせずに走行するためレーサーのとるべき速さ v は，θ の区分に対応して次のように与えられる。

(a)　$\theta\leqq$ {(ト)　(1)　θ_1　(2)　θ_2} のとき　$v\leqq$ (チ) $\boxed{}$

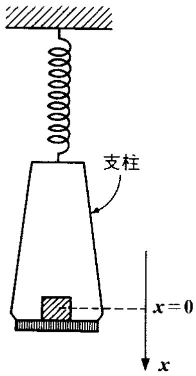
(b)　{(リ)　(1)　θ_1　(2)　θ_2} $\leqq\theta\leqq$ {(ヌ)　(1)　θ_1　(2)　θ_2} のとき　(ル) $\boxed{}$ $\leqq v\leqq$ (ヲ) $\boxed{}$

(c)　{(ワ)　(1)　θ_1　(2)　θ_2} $\leqq\theta$ のとき　(カ) $\boxed{}$ $\leqq v$　（京都大）

問題 Memo　問題の前半は，路面からの抗力，重力，遠心力のつりあいの問題で，基本事項を理解していれば容易に答えられます。摩擦力も考慮に入れて車が横すべりしない条件を求める後半部は難解です。摩擦力のはたらく方向に関する場合わけを正確におこなうことがポイントです。また不等式の成立条件に関する数学的能力も要求されます。

2 〈ばね振り子とおもりの浮き上がり〉

ばね定数 k〔N/m〕のばねに長い支柱を用いて円板を固定し，円板の上に質量 m〔kg〕のおもりをのせて天井からつるす（図)。支柱を含めた円板の質量は M〔kg〕である。そのつりあいの位置から鉛直下方に h_0〔m〕だけ円板を引き，静かに放した後のおもりと円板の運動を調べる。運動中，円板は水平に保たれており，また空気の抵抗とばねの質量は無視できるものとする。おもりの位置を鉛直下向きにとった x 座標（単位は〔m〕，原点はつりあいにおけるおもりの位置にとる）で表わし，重力加速度を g〔m/sec^2〕として，以下の［　　］に適切な式または語句を入れよ。ただし，解答(12)については，答の導き方も示せ。



h_0 が小さいとき，おもりは円板にのったまま全体が単振動を行った。位置 x におけるおもりの加速度が a〔m/sec^2〕であったとすると，このときのおもりと円板（支柱を含む）全体の運動を定める式は (1)［　　］で与えられる。従ってこの単振動の周期は (2)［　　］〔sec〕である。おもりが位置 x にあるとき，おもりと円板（支柱を含む）全体の重力による位置エネルギーは，おもりが位置 h_0 にあるときに比べて (3)［　　］〔J〕だけ (4)［　　］しており，ばねの（弾性による）位置エネルギーは，同じく (5)［　　］〔J〕だけ (6)［　　］している。従って位置 x におけるおもりの速さは (7)［　　］〔m/sec〕である。また，このときおもりが円板から受ける抗力〔垂直抗力）は鉛直 (8)［　　］向きで，その大きさは (9)［　　］〔N〕である。

h_0 を次第に大きくしてこの実験をくり返したところ，h_0 がある値 h_m をこえた場合おもりがある位置で円板から浮くのが観測された。この h_m は (10)［　　］で与えられる。特に $h_0=\sqrt{3}h_m$ としたとき，おもりは位置 $x=$ (11)［　　］で円板から離れ，$|x|=$ (12)［　　］の高さまで到達した。ただし，支柱はこの高さや h_m に比べて十分長いものとする。　(北海道大)

問題 Memo　単振動の問題として難しくありません。円板とおもりが一体となって運動する場合，おもりが円板から離れる場合の考え方をはっきりさせます。

3 <衛星の運動と中心物体の質量>

地球を半径 0.64×10^7m の球とする。長さの単位として 1×10^7m を，時間の単位として1時間を採用する場合に，以下の各問について，その答を有効数字2桁の数値で与えよ。

(1) 地表での重力加速度が，どのような値をとるかを計算せよ。

(2) 地球を周回する人工衛星の，円軌道の半径を R，周期を T とする。このとき $\dfrac{T^2}{R^3}$ という量が，どのような値をとるかを計算せよ。

(3) 木星の衛星イオでは，その円軌道の半径が 42×10^7m，周期は42時間である。木星の質量は，地球の質量の何倍であるか。 (大阪府大-工)

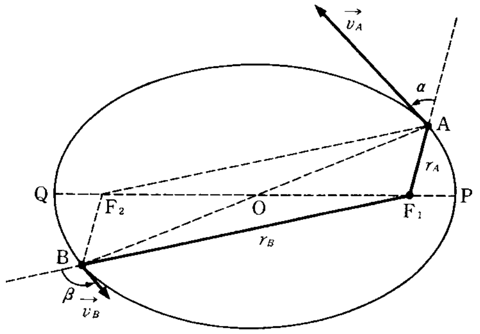
問題 Memo 人工衛星の万有引力による等速円運動を扱ったものですが，長さの単位として 10^7m，時間の単位として1時間を用いるところに特徴があります。とくに，(2)の問題では単位にまどわされないように注意しましょう。

単位についてまちがえなければ，やさしい問題です。

4 〈惑星のだ円運動・面積速度〉

次の文中の空欄にあてはまる答を記入せよ。

太陽を1つの焦点としてだ円軌道をえがいている惑星の運動を調べよう。太陽の質量 M は惑星の質量 m にくらべて十分大きく，万有引力定数は G とする。図1において太陽はだ円の1つの焦点 F_1 にある。F_1 と他の1つの焦点 F_2 との中点を O，惑星が太陽に最も近づく点（近日点）を P，最も遠ざかる点（遠日点）を Q とする。このとき，だ円の長軸は PQ である。惑星が軌道上の任意の点 A にあるとき，太陽からの距離 $\overline{F_1A}$（動径）を r_A，そのときの速度ベクトルを $\overrightarrow{v_A}$，その大きさを v_A とする。次に O 点に関する A 点の対称点 B を考え，$\overline{F_1B}$ を r_B，B 点における速度ベクトルを $\overrightarrow{v_B}$，その大きさを v_B とする。$\overrightarrow{v_A}$ と $\overrightarrow{v_B}$ は平行で互いに逆向きである。



だ円の性質　$r_A + r_B = \overline{PQ}$
$\alpha + \beta = 180°$

図1

惑星のだ円運動では動径の大きさと速度ベクトルの大きさはともに変化するが，これらの間になりたつ関係式を求めよう。A 点において，惑星の運動エネルギーは (イ)[　　　]，位置エネルギーは (ロ)[　　　] であり，この和は軌道上のどの点でもエネルギー保存則から一定となる。

A 点における F_1A 方向と $\overrightarrow{v_A}$ のなす角を α，B 点における F_1B 方向と $\overrightarrow{v_B}$ のなす角を β とする。A 点における面積速度（動径が単位時間にえがく面積）は (ハ)[　　　] と書け，B 点についても同様に書けるので，ケプラーの第2法則とだ円の性質（図1）を使うと，A 点と B 点における速度の大きさの比はかんたんに

$$\frac{v_A}{v_B} = \text{(ニ)}\boxed{\quad\quad}$$

となる。この関係式を用いると，A 点と B 点において表示した全エネルギーの式から v_A と v_B が消去できて，全エネルギーは対称点の動径 r_A と r_B の関数として (ホ)[　　　] と表わされる。したがって，A 点の速度の大きさは r_A と r_B の関数として

$$v_A = \text{(ヘ)}\boxed{\quad\quad}$$

と書ける。v_B も同様に書けるので，これらの積は

$$v_A v_B = \text{(ト)}\boxed{\quad\quad}$$

となり，軌道上のどの対称点でも一定値をとることがわかる。

さて以上の知識から，速度ベクトルの先端がえがく軌跡（ホドグラフ）を求めてみよう。図2に示すように，軌道上の各点における速度ベクトルの始点を O′ 点に集中させるように平行移動したものを考える。このようにして得られたホドグラフ上で $v_A + v_B$ は $v_P + v_Q$ のとき最大になる。そして，任意の対称点での速度の大きさの積は一定であったので，速度ベクトルの先端のえがくホドグラフの形は (チ)[　　　] となることがわかる。

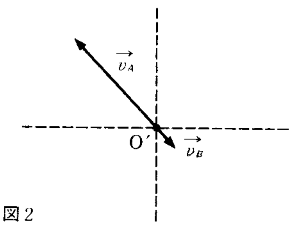


図2

（早稲田大-教育）

問題 Memo　だ円軌道をえがく惑星の運動では面積速度が一定であること，力学的エネルギー保存の法則は軌道上のどこでも成り立つこと，これらを念頭において式を表すことです。だ円運動は教科書ではほとんど扱いませんが，おそれずに挑戦しましょう。

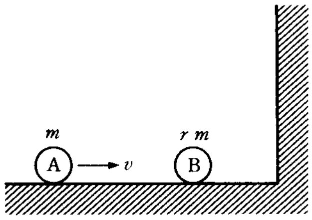
これで終わりです。

応用問題 (4) —運動量—

力学についての応用問題もきょうで最後です。
まず，物体の連続衝突の問題にアタックしましょう。

応用問題 7　2 球の連続衝突

図のように左側が無限に広がり，右側に壁をもった，摩擦のない水平な床がある。左方より壁に向かって一定の速さ v で進む質量 m の質点 A が，壁から少しはなれて静止している質量 rm の質点 B に，左から衝突するとき，下記の各項目について，r に対する条件を求めよ。衝突はすべて弾性的に行われ，質点 A，B は常に壁面に垂直な一直線上を動くものとする。



質点 A，B が第 1 回目の衝突をしたあと，

(1)　質点 A は左側へ進む。

(2)　質点 A は左側へ進み，質点 B は壁で反射されて質点 A を追うが，第 2 回目の衝突は起こらない。

(3)　質点 A は左側へ進み，質点 B は壁で反射されて質点 A を追い，第 2 回目の衝突が起こる。

(4)　質点 A は静止する。

(5)　質点 A は右側へ進む。

上記(5)を経由し，質点 A，B が第 2 回目の衝突をしたあと，

(6)　質点 A は左側へ進む。

(7)　質点 A は静止する。

(8)　質点 A は右側へ進む。　（大阪大）

一直線上の 2 球の衝突の問題では，一般には，次の 3 つの法則の 1 つまたは 2 つを使って問題を解きます。

(i)　**運動量保存の法則**

(ii)　**力学的エネルギー保存の法則**（ただし，$e=1$ のとき）

(iii)　**はね返りの係数の式**

この問題は，衝突後の 2 球の運動の向きに注意させながら，これらの法則が適切に使えるかどうかを調べようとしています。

〔解答欄〕

$\boxed{\text{Advice}}$ 1. 小問ごとの式をたてて解くのは手間がかかり，時間のむだです。はじめに右方を正ときめ，この向きにしたがって，運動量保存の法則とはね返りの係数の式をたてて，衝突後のA, Bの速度を求めておくとよいでしょう。

2. 第1回の衝突では左方へ運動するときは，速度は負で，右方へ運動するときの速度は正となります。

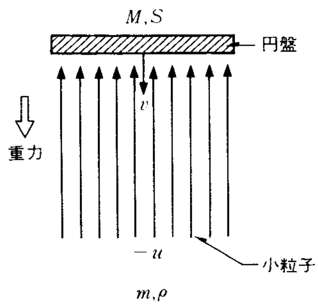
3. 衝突はすべて〝弾性的に″行われます。はね返りの係数 e は1です。Bが壁に衝突するさいも，$e=1$ です。

4. (6), (7), (8)では，(5)の r の条件も考慮することを忘れないでください。

次に進みましょう。

応用問題8　粒子流と円盤の弾性衝突

一直線上で2個の物体が弾性衝突を行う。第1の物体の質量 M と初速度 $v(>0)$ および第2の物体の質量 m と初速度 $-u(<0)$ が与えられているとき，次の問に答えよ。ただし，M は m よりも十分大きいものとして，$\dfrac{m}{M}$ の程度の量を1に比べて無視する近似を採用せよ。



問1　質量 M の物体の運動量変化を求めよ。

問2　質量 m の物体の運動エネルギーの変化を求めよ。

この結果を基礎にして以下に述べる問題を扱う。質量 m および一定速度 $-u(<0)$ をもつ小粒子の集団が一様な質量密度 ρ の定常的な流れとなって，図のように鉛直線に沿って吹き上げ，質量 M および面積 S をもつ円盤と弾性衝突して，その円盤の自由落下を妨げている。速度の正方向は鉛直下方である。円盤は一様な組成をもつ剛体であり，円形断面を水平に保ちながら速度 v で運動する。このとき，u が十分大きいため質量 m の粒子の運動に対する重力の影響は無視できるものとして，また，粒子同士の衝突は起こらないものと仮定して，次の問に答えよ。この場合も M は m よりも十分大きいとして，問1および問2の場合と同じ近似を採用せよ。

問3　u と ρ の値が十分大きいため，適当な長さの時間間隔 τ をとれば，その時間間隔内では多数の粒子が円盤に衝突するけれども，円盤の速度変化を無視することが可能である。その時間間隔 τ 内に円盤と衝突する粒子の数を求めよ。

問4　その時間間隔 τ 内に円盤が粒子流との衝突から受ける平均的な力を求めよ。

問5　円盤の重心は，わずかなゆらぎを除けば，重力と問4の力を受ける質量 M の質点のように運動する。重力加速度を g として，その運動方程式をかけ。

問6　円盤の重心は初速度がゼロであっても，u と ρ の値に応じて，上昇または下降する。下降する場合，その速度は次第に増加し，ついには一定速度 v_0 に近づく。v_0 を求めよ。

問7　円盤を静止させるためには，すなわち，$v_0=0$ とするためには，粒子流の流れ強度 $J=u\rho$ をどのような値にすればよいか。

問8　円盤が問6の一定速度 v_0 で時間 T の間下降する場合，円盤から粒子流に与えられるエネルギーの総和を求めよ。

問9　そのエネルギーの供給源は何か。エネルギー保存則の立場から簡明に説明せよ。

（早稲田大-理工）

弾性衝突であることを念頭において，運動量保存法則，運動量と力積の関係，運動エネルギーの計算などを適用していけばけっして難解ではありません。しかし，本題のように $M \gg m$ という条件から $\dfrac{m}{M}$ を無視せよという指示のある場合，計算の途中でこれを適用するのではなく，最終の結果に

おいて適用することがポイントです。近似計算の方法に慣れておきましょう。なお，このように粒子流によって円盤が浮くといった問題は頻出されます。

〔解答欄〕

Advice　問1　運動量保存の法則および，弾性衝突のはね返りの式から，衝突後の速さを求めることが第一です。

$\dfrac{m}{M} \ll 1$ の近似は式の最後で使いましょう。

問2　問1の運動量保存の式とはねかえりの式から質量 m の物体の衝突後の速さを求め，運動エネルギーの変化を出します。

ここでも $\dfrac{m}{M} \ll 1$ の近似を用いて式を整理します。

問3　断面積 S，高さ $(v+u)\tau$ の円筒に含まれる粒子の数を考えます。

問4　運動量変化と力積の関係から求めます。ただし，時間 τ のあいだに n 個の粒子が衝突していることを忘れずに

問5　重心の加速度を α として運動方程式をたてます。

問6　一定速度に達したとき $\alpha=0$ です。

問7　問6において，$v_0=0$ として u を求めてから強度 J を出します。

問8　問2，問3および問6の結果を用いて導きだします。

問9　円盤と粒子の系全体では力学的エネルギーが保存されます。円盤の力学的エネルギーの変化を考えればわかるでしょう。

みかけが複雑そうだからといって，投げ出してはいけません。よくかみくだいてみれば基本問題の集まりであることが多いのです。

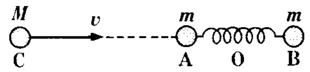
この調子で実戦トレーニングです。

実戦トレーニング

1 〈ばねで結ばれた２物体の一方への衝突による運動〉

次の文中の □ の中に適当な式または数値を入れよ。

質量 m の二つの小球 A, B が長さ l で，ばね定数 k のばねの両端につけられ，なめらかな水平板上におかれている。いま，質量 M の小球 C を図のように，速度 v で A に衝突させた。A，B 2 球のその後の運動について考える。



C が A に衝突した直後の C, A 2 球の速度をそれぞれ v_c, v_a とすると，これらと v との間には次の関係(1) □ がなりたつ。C と A とが完全弾性衝突をした場合を考えると，(1)とともに(2) □ の関係がなりたつ。(1)と(2)から，$v_a=$(3) □ が求められる。ばねで結ばれた A，B 2 球の重心 O のその後の速度は一定で，v_aの(4) □ 倍である。等速度運動をする重心 O からみると，A，B 2 球の運動は，それぞれ O を支点として，長さ $\dfrac{l}{2}$ のばねの端にとりつけられた小球の単振動になっている。この振動の周期は(5) □ である。　　　(近畿大-理工)

問題 Memo　はじめにばねでつながれた 2 つの物体の一方に他の物体が衝突し，その後ばねにつけられた 2 つの物体が重心を中心にして単振動しながら動き，その物体の運動のようすを問う問題ですが，衝突後の単振動については問題文中に条件があたえられていますから，やさしい問題となっています。

2 〈ばねによって単振動する球と壁との非弾性衝突〉

水平でなめらかな床の上に置かれた，自然長 l(m)，ばね定数 k(N/m) の重さが無視できるばねの一端 B を固定し，他端に大きさが無視できる質量 M(kg) の球 A が付けてある (図 1)。ばねは常に同一直線上を伸び縮みするものとし，x 座標を図のようにとり，ばねが自然長のときの球 A の位置 O を $x=0$ とする。以下の問いに答えよ。

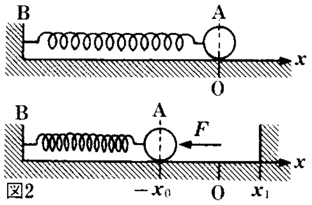


図2

(1) 球 A に x の負の向きに大きさ F(N) の力が作用しているときの球 A の平衡位置 $-x_0$(図 2) を求めよ。ただし，$F<kl$ とする。

(2) 問い(1)において，時刻 $t=0$ に球 A に作用している力 F を除いたとする。$t>0$ での球 A の位置 x を時刻 t の関数として表せ。また，このときのばねの弾性エネルギー U と球 A の運動エネルギー K とを球 A の位置 x の関数として表せ。

(3) 問い(2)において，さらに x_1 $(x_1<x_0)$ のところに反発係数 (はねかえり係数) e $(0<e<1)$ の固定された垂直な壁があるとする (図 2)。球 A がこの壁と最初に衝突した直後の球 A の運動エネルギー K はいくらか。また，この後，球 A が B に最も近づく位置 $-x_2$ を求めよ。

(4) 問い(3)において，時間の経過とともに球 A の運動はどのようになってゆくかを簡潔に述べよ。 (東北大)

問題 Memo ばねにつけた球 A の運動は，A が壁に衝突しなければ単振動をします。これを扱った問題はしばしば出題されますが，A が壁に非弾性衝突しながら振動するところがこの問題の特徴です。このような問題では，単振動の基本的な事項と，エネルギー保存の法則とを合わせて考えるようにします。

3 〈斜面での衝突と放物運動〉

図1に示すように，面OA, OBは水平面NOSとそれぞれ45°の角をなしている。水平面よりの高さ $\frac{5}{3}h$ にある点Pより，質量が m で大きさの無視できる球状の物体を自由落下させたところ，物体は水平面よりの高さ h の点Qで面OAと衝突してはねかえった。その後物体は放物線運動をして点Rで面OBと衝突してはねかえり直接水平面上の点Oに達した。

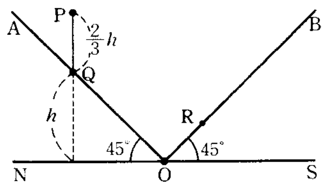


図1

物体と面OA, OBの反発(はねかえり)係数をそれぞれ，1，e，重力の加速度の大きさを g として，次の問(1)〜(6)に答えよ。

(1) 物体が面OAより受ける力積の方向と向きを図2より選び，記号(イ)〜(チ)で答えよ。

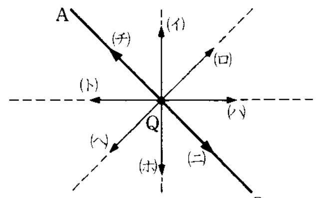


図2

(2) (1)の力積の大きさはいくらか。

(3) 物体が点Qではねかえったのち，点Rに達するまでの時間はいくらか。

(4) 点Rの水平面からの高さはいくらか。

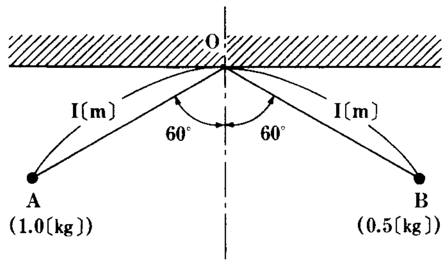
(5) 物体が点Rに衝突するとき，面OBとなす角はいくらか。

(6) 物体と面OBとの反発係数 e の値はいくらか。　　　　(大阪府大-農・総合科)

問題 Memo 計算が少々面倒ですが，設問にしたがって計算して答を求めないといけません。全体の見通しの立てにくい問題ですが，計算した結果が良い値になって次の設問に答えやすくなる問題です。45°の斜面という条件を活用するのがポイントです。

4 〈単振り子の衝突〉

図に示すように，質量1.0〔kg〕の質点Aと質量0.5〔kg〕の質点Bが，それぞれ長さ1〔m〕の伸びない糸でO点からつるされており，同一鉛直面内を運動する。糸がたるんでいない状態でA，Bが鉛直とそれぞれ60度をなす位置から静かに，また同時に離された。



以下の問いに答えよ。ただし重力加速度をg〔m/s^2〕とし，根号はそのまま答えの中で使用せよ。

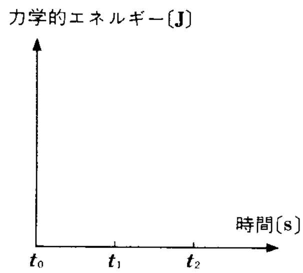
問1　Bが鉛直に対して右に30度をなす位置まで下がって来た瞬間のBの速さを求めよ。また，同時刻でBの糸にはたらく張力を求めよ。

問2　ふたつの質点は最下点で正面衝突した。はねかえり係数eを0.5として，衝突直後のA，Bの速度（右向きを正とする）を求めよ。

（注）　はねかえり（反発）係数　ふたつの質点が同一直線上を動いて衝突するとき，はねかえり（反発）係数eは，ふたつの質点の衝突後の離れる速さと，衝突前の近よる速さの比として定義される。$e=\dfrac{\text{離れる速さ}}{\text{近よる速さ}}$

問3　質点Bが衝突後に上がることのできる最高上昇角度を求めよ。

問4　質点A，Bおよびそれらをあわせた全体の力学的エネルギーが，時刻t_0からt_2(記号の意味は下記を参照せよ)の間でどのように変化するかを次のグラフに示せ。Aは点線………で，Bは一点鎖線-・-・-で，全体は実線———で表せ。もしグラフに重なる個所があれば，縦座標の値にこだわらず，わずかに離して識別できるように描くこと。なお，位置エネルギーは最下点でゼロとせよ。



グラフの時間軸上の記号の意味は次の通りである。

t_0：A，Bが離された瞬間　　t_1：A，Bが衝突した瞬間　　t_2：衝突後Bが最高上昇角度に達した瞬間

（名古屋工大-工）

問題 Memo　糸の長さが等しい単振り子は周期も等しいので最下点で衝突します。はねかえり係数が$e \neq 1$のとき，衝突前後で力学的エネルギーがどう変化するかをグラフに描かせるところに特徴があります。難易度は教科書レベルです。

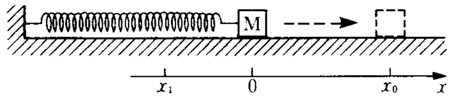
これで，力と運動について，いくつかの観点からまとめてきた学習は終わりです。

第13日は，ここまでの範囲全体を対象とする演習問題をします。

第 13 日	力と運動 13 日間 ⑬　　学習日　月　日 演習問題

きょうは，力と運動についての学習のまとめとして演習問題を行います。実力テストのつもりで取り組みなさい。

1 図のように，水平床面で一端を固定したばね（ばね定数 k）の他端に物体 M（質量 m）を取付ける。物体 M とばねの運動方向は図の x 軸方向に限られ，物体 M の位置を座標 x で表す。ばねが自然長の状態にあるとき $x=0$ とし，伸びる向きに x の正の向きを定める。物体と床面との間には摩擦がはたらくものとして次のような振動実験を行う。



まず，物体 M を x の位置まで引張って静かに手放すことを，x の値を変えて繰返し，x がある値 d より小さいときには物体は動かず，d より大きいときには滑りだすことを確かめた。

次に，物体を位置 $x_0(>d)$ まで引張って静かに手放し，その瞬間からの時間を t として物体の動きを観察した。物体ははじめ次第に速さを増し，最大の速さに達したのち減速して，速さが 0 となった。そのときの位置は $x_1(<0)$ であった。その後，物体はふたたび逆向きに動きだし，何回かの折返しを繰返したのち，ついに n 回目の折返点 x_n で停止した。

以下の設問に答えよ。結果だけでなく，考え方や途中の計算も簡単に示せ。

ただし，重力加速度は g で表し，ばねの質量や空気抵抗は無視し得るものとする。

a　物体 M と床面との間の静止摩擦係数 μ_0 と動摩擦係数 μ を求めよ。

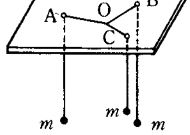
b　位置 x_1 で速さが 0 となった時間 t_1 を求めよ。

c　初めて速さが最大に達したときの位置 a とその時間 t_a を求めよ。

d　最後に位置 x_n で停止するまでに物体が運動した全行程の長さ L と x_n との関係を求めよ。

e　物体 M の位置 x と時間 t との関係をよこ軸に $\dfrac{t}{t_1}$，たて軸に $\dfrac{x}{d}$ グラフで示せ。ただし，この設問においては $x_0=3.5d$，$x_1=-2.5d$ とする。　（東京大）

2 水平に置いた平板に，どの内角も 120° 以下である 3 角形 ABC を描き，各項点に小さな穴をあける。等しい重さのおもりをつるした糸をこれらの穴に通し，板上で 3 つの糸を結び，つり合いの位置をとらせる。結び目の点 O はどんな性質をもつか。主な性質を 2 つあげて，その理由（各 42 字以内）を書け，(ア)，(イ)。



また内角の 1 つ ∠BAC が 120° をこえるとどうなるか（21 字以内），(ウ)。　（慶應義塾大-医）

3 質量 M の大砲から水平方向に質量 m の弾丸が発射される。砲身を固定した場合と反作用によって自由に後方に動き得る場合との砲口速度をそれぞれ V_1, V_2 とする。火薬の質量は無視でき，火薬の爆発のエネルギー E の40%が有効に用いられるものとする。

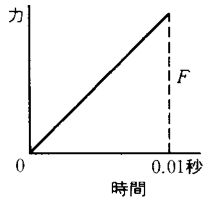
（注）「砲口速度」というのは，砲口を出るときの弾丸の速度である。

(ア) 火薬の爆発のエネルギー E を求めよ。

(イ) 大砲の後退時の最大速度 V を V_1, V_2, M, m を用いて表わせ。

(ウ) V_1/V_2 の比を求めよ。

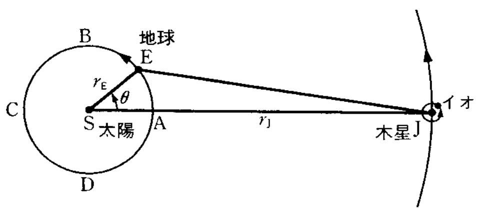
(エ) 弾丸が砲身を出るまでの時間は0.01秒で，火薬が弾丸を押す力は時間に比例して図のように増し，最大値 F に達する。弾丸に加えられた力積はいくらだと考えられるか。



(オ) 砲身を固定した場合，火薬の点火後0.01秒で弾丸の速度は V_1 となるが，0.005秒，0.0025秒では速度はいくらか。

(カ) この結果から，砲身内の弾丸の速度 v を表わす式を V_1 と時間 t を用いて書け。ただし $t=0$ で火薬が発火し，$0 \leqq t \leqq 0.01$ 秒とする。　(千葉大)

4 木星の衛星イオは一定の周期 P_0 で木星を中心とする円運動をしている。P_0 は1年にくらべて十分に短い。かりに太陽の位置から観測したとすると，イオが木星の後にかくれる現象(食)は正確に一定周期ごとに起こるはずである。しかし地球上で観測すると，あいつぐ食の時間間隔は一定ではない。地球と木星とのあいだの距離の変化のために，食をつたえる光が木星から地球に達するまでの時間が変化するからである。地球および木星はそれぞれ半径 r_E, r_J, 公転周期 T_E, T_J で等速円運動をしているものとし，すべての天体の大きさおよびイオの軌道半径を無視してこの問題を考えてみよう。光の速さを c, 円周率を π として下の文章の空欄をうめよ。必要なばあいには三角形の三辺 x, y, z および x, y のはさむ角 Z についてなりたつ余弦定理



$$z^2=x^2+y^2-2xy\cos Z$$

を用いよ。

いま，時刻 t に太陽(S)，地球(E)，木星(J)が図のような位置にあり，$\angle ESJ=\theta$ であるとする。ただし，時刻 $t=0$ においてS, E, Jは一直線上にあって，$\theta=0$ とする。時刻 t における地球と木星のあいだの距離 $\overline{EJ}$ を r_E, r_J, θ であらわすと

$\overline{EJ}=$ (イ)$\boxed{}$ ……(1)

である。したがって図のような位置関係では，地球Eで観測されるイオの食の時刻は，太陽Sでの仮想的な食の時刻より

$\tau=$ (ロ)$\boxed{}$ ……(2)

だけ早い。ここでは r_E は r_J に比べて十分小さいことから $(r_E/r_J)^2$ の項を無視し，かつ α が1に

比べて十分小さいときに成立する近似式

$(1-\alpha)^k \fallingdotseq 1-k\alpha$

を用いると

$\tau =$ (ハ)$\boxed{}$ ……(3)

となる。

さて，地球と木星の公転周期のちがい，すなわち角速度のちがいを考慮すると θ は t，T_E，T_J であらわすことができて

$\theta =$ (ニ)$\boxed{}$ ……(4)

となる。したがって，τ を t，r_E，T_E，T_J であらわすと

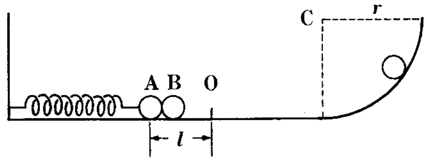
$\tau =$ (ホ)$\boxed{}$ ……(5)

である。

次に地球で観測されるあいつぐ食の間隔は，木星に対する地球の相対速度によって変わる。その最大値は(3)式を導くときに用いた近似のもとで(ヘ)$\boxed{}$である。そのときの木星に対する地球の位置を図の記号で示すと(ト)$\boxed{}$である。 (早稲田大-教育)

5 次の問題の答えを書け。

なめらかな水平面の上に，ばね定数 k のばねがあり，先端に質量 m の球 A がつけてある。ばねの自然の長さのときの位置を O とする。B 球の質量は A 球と同じであり，A 球に接触して置かれている。A も B も質点とみなす。



(1) O から l だけ縮めるのに要する仕事はいくらか。

(2) A 球を押さえていた手を突然はなす。B 球が A 球から離れる位置はどこか。

(3) 離れる位置をみつけるにはどんな着想が必要か。簡単に述べよ。(9.1cm×2.1cm の枠省略)

(4) 離れた直後の B 球の速さはいくらか。

(5) A 球は B 球をはね飛ばしたのち単振動を行うが，その振幅はいくらか。

(6) 単振動の周期はいくらか。

(7) B 球は水平面につづくなめらかな曲面(半径 r の円弧)をすべり上がり，高さ $\dfrac{r}{2}$ のところで一旦静止した。半径 r はいくらか。 (北見工大)

これで終わりです。答えあわせをきちんとしなさい。
第 14 日からは，気体の分子運動についてです。

気体の分子運動　7日間

◇　気体の分子運動では，気体の状態，分子運動と圧力，内部エネルギー，気体の比熱などについてまとめます。

気体の体積，圧力，温度の間には，一定の関係があり，状態方程式として表されます。この関係と，気体分子についての運動論とから，気体の内部エネルギーが導けます。

気体の分子運動の問題は，出題される形式や内容が比較的決まっています。気体分子の運動についてのもの，気体の混合についてのもの，気体の変化と熱やエネルギーの出入りについてのものなどです。これらに慣れ親しんでおくことが，まず第一歩です。

・例題学習日 4日
・応用問題学習日 2日
・演習問題日 1日

◇　学習上のポイント

①　気体の最初の状態や途中経過，最終状態を明確にする。
②　熱や仕事の出入りのしかた（気体が受けとるのか放出するのか）を考える。

◇　この7日間の学習で，気体の分子運動について十分な実力を身につけます。

第 14 日	気体の分子運動 7 日間 ①	学習日　月　日
	気体の分子運動と圧力	

きょうからは，気体の分子運動について学習していきます。ここでは，力と運動のところであつかったことがらを気体を構成する分子というごく小さな粒子にあてはめます。運動量，エネルギーなどをうまく使えるようにしておく必要があります。

さっそく，確認トレーニングで基本事項をチェックしなさい。

確認トレーニング

〔解答欄〕

1 〈気体の状態方程式〉

シリンダーの中に，温度 27°C，圧力 $1.01\times10^5\mathrm{N/m^2}$，体積 $1.00\times10^{-3}\mathrm{m^3}$ の分子量 32 の酸素がはいっています。このとき，次の問いに答えなさい。

(1) シリンダー内に酸素は何 mol ありますか。

(2) 酸素の分子は何個ありますか。

(3) 酸素の質量を求めなさい。

2 〈気体の分子運動〉

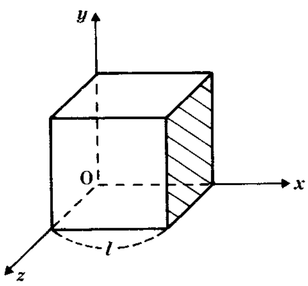
1 辺の長さが l の立方体の容器の中に，質量 m の気体分子が n 個入っています。図のように座標軸をとるとき，次の 3 つの仮定

(A) 分子は x 軸と平行な方向にのみ運動し，その速さはすべて v である。

(B) 分子と容器の壁とは完全弾性衝突を行う。

(C) 分子と分子の間には力ははたらかない。したがって，分子と分子の衝突はない。

が成り立つとして，次の問いに答えなさい。



(1) 1 個の分子が斜線をつけた壁に 1 回衝突することによって，壁に与える運動量はいくらですか。

(2) 1 個の分子は，時間 t の間に斜線をつけた壁に何回衝突しましたか。

(3) 斜線をつけた壁が受ける圧力はいくらですか。

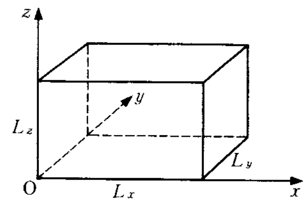
(4) y 軸に垂直な壁が受ける圧力はいくらですか。　　（九州産大）

確認トレーニングに不安なところはありませんね。

では，例題です。気体の分子についての運動量や力積を考える一方で，気体全体の状態を表す式(気体の状態方程式）とあわせてまとめていくのです。

例題 9　気体の分子運動

分子間の相互作用と分子の大きさを無視することのできるような気体を ア[　　] というが，これは イ[　　] 気体の極限と考えられる。いま，このような気体の状態を表す変数――圧力 p, 温度 T, 体積 V ――の間になりたつ関係を求めてみよう。



いま，x，y，z 方向の長さが L_x，L_y，L_z の直方体の箱に入っている気体を考える。気体の分子の質量を m とし，分子と壁との衝突は(完全)弾性的であるとする。(ウ[　　] もし衝突が(完全)弾性的でないとしたら，どうなるか。21 字以内で答えよ。)

$x=0$ の壁での衝突を考えると，一つの分子の速度は $(v_x,\ v_y,\ v_z)$ から エ[　　] になるので，x 方向の運動量変化は オ[　　] である。1 秒間にこの壁に カ[　　] 回衝突するので，この分子がこの壁に及ぼす力 = 単位時間当たりの運動量変化は キ[　　] である。箱の中の分子数を $N(i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ N)$ とすると，壁の受ける圧力 p は，$V=L_xL_yL_z$ として

$pV=$ ク[　　] $\times \sum_{i=1}^{N} v_{ix}{}^2$($v_{ix}$ は i 番目の分子の x 方向の速度成分)　………(1)

となる。$\overline{v_x{}^2}=\sum_{i=1}^{N}\dfrac{v_{ix}^2}{N}$ とおくと，(1)は　ケ[　　]　………(2)

となる。速度分布は方向によって変わらないので，

$\overline{v_x{}^2}=$ コ[　　] $\times \overline{v^2}$(v は分子の速度の大きさ)　………(3)

である。従って，(2)は　サ[　　]　………(4)

となる。$\dfrac{1}{3}m\overline{v^2}=kT$　(k：ボルツマン定数)で絶対温度 T を定義すると

$pV=NkT=nRT$　(R は気体定数)　………(5)

n は シ[　　] となり，理想気体の状態方程式がえられる。　(慶應義塾大-医)

Advice　(ア)(イ)(ウ)　理想気体とはそれを構成する気体分子の大きさが無視でき，完全弾性衝突をし，分子相互においては力をおよぼしあわないものです。また，完全弾性衝突であれば衝突によってエネルギーを失いませんが，完全弾性衝突でなければ衝突ごとに分子の速さが小さくなり，エネルギーが減少します。

(エ)　衝突前後で，x 方向の速度が反対向きになります。

(オ)　運動量はベクトルです。

(カ)　気体分子は，$2L_x$ の道のりを進むごとに，ひとつの壁に衝突します。

(キ)　単位時間あたりの運動量の変化とは，

(1 回の衝突での運動量の変化)×(単位時間あたりの衝突回数)

と考えます。

(ク)　気体の分子数を N とすれば，$x=0$ の壁におよぼす全気体による力 F は $F=fN$ です。ま

た，圧力 p は，単位面積に作用する力の大きさですから，$p=\dfrac{F}{S}$ となります。これらの条件より結果が求められます。

(ケ) 気体分子の2乗平均速度 $\overline{v_x{}^2}=\sum_{i=1}^{N}\dfrac{v_{ix}{}^2}{N}$ を(1)式に代入します。

(コ) 速度分布が方向によって変わらないということは，どの方向の2乗平均速度も同じだということを意味します。

(サ) (3)を(2)に代入すれば結果が得られます。

(シ) $k=\dfrac{R}{N_0}$ (N_0：アボガドロ数) を用いて，$n=\dfrac{N}{N_0}$ になっていることを導くとよいでしょう。

解き方 (ウ) 弾性的でない衝突においては物体は衝突するごとに運動エネルギーを失い，速度が小さくなり，ついには静止してしまう。

(エ) 気体分子の x 方向の運動の向きが変わるから，その方向の速度は，v_x から $-v_x$ に変化する。よって，$(-v_x,\ v_y,\ v_z)$ となる。

(オ) 運動量の変化は x 方向の速度変化に依存するから

$m\cdot\Delta v=m(-v_x-v_x)=-2mv_x$

(カ) 間隔 L_x のあいだを v_x で往復運動するから，$2L_x$ の距離を運動して $x=0$ の壁に1回衝突することになる。求める値は $\dfrac{v_x}{2L_x}$ となる。

(キ) 気体分子が1回衝突して $2mv_x$ の大きさの運動量変化をする。これが，1秒間に $\dfrac{v_x}{2L_x}$ 回衝突するから1分子は1秒あたりひとつの壁について，

$$2mv_x\times\frac{v_x}{2L_x}=\frac{mv_x{}^2}{L_x}$$

の運動量の変化をする。

(ク) 壁におよぼす力＝単位時間あたりの運動量の変化だから，1分子が $x=0$ の壁におよぼす力を f とすれば $f=\dfrac{mv_x{}^2}{L_x}$ である。

この分子が全体で N 個あるので，全分子による $x=0$ の壁におよぼす力 F は

$F=\sum_{i=1}^{N}\dfrac{mv_{ix}{}^2}{L_x}$ となる。ところで，圧力 p は単位面積に作用する力の大きさであり，

$x=0$ の壁の面積は $S=L_yL_z$

$$p=\frac{F}{S}=\frac{1}{L_yL_z}\sum_{i=1}^{N}\frac{mv_{ix}{}^2}{L_x}$$

となる。$V=L_xL_yL_z$ であるから

$$p=\frac{1}{V}\sum_{i=1}^{N}mv_{ix}{}^2$$

よって，$pV=m\times\sum_{i=1}^{N}v_{ix}{}^2$

(ケ) 与えられた条件 $\overline{v_x{}^2}=\sum_{i=1}^{N}\dfrac{v_{ix}{}^2}{N}$ を(ク)に代入すると，

$pV=Nm\overline{v_x{}^2}$ となる。

(コ) 速度分布は方向によって変わらないから，$\overline{v_x{}^2}=\overline{v_y{}^2}=\overline{v_z{}^2}$ の関係があり，

$\overline{v_x{}^2}+\overline{v_y{}^2}+\overline{v_z{}^2}=\overline{v^2}$ であるから

$$\overline{v_x{}^2}=\overline{v_y{}^2}=\overline{v_z{}^2}=\frac{1}{3}\times\overline{v^2}$$

となる。

(サ)　$\overline{v_x{}^2}=\dfrac{1}{3}\overline{v^2}$ を(2)式に代入すると

$$pV=\frac{1}{3}Nm\,\overline{v^2}$$

となる。

(シ)　$\dfrac{1}{3}m\overline{v^2}=kT$ を(サ)に代入すると

$$pV=NkT$$

となる。ここで，$k=\dfrac{R}{N_0}$ (N_0：アボガドロ数) であるから，

$$pV=\frac{N}{N_0}RT$$

したがって，$n=\dfrac{N}{N_0}$ となる。これから，n は気体のモル数を示している。

●解答●　(ア)　理想気体　　(イ)　希薄な

(ウ)　衝突ごとにエネルギーを失いついには静止する（21字）

(エ)　$(-v_x,\ v_y,\ v_z)$　　(オ)　$-2mv_x$　　(カ)　$\dfrac{v_x}{2L_x}$　　(キ)　$\dfrac{mv_x{}^2}{L_x}$　　(ク)　m

(ケ)　$pV=Nm\overline{v_x{}^2}$　　(コ)　$\dfrac{1}{3}$　　(サ)　$pV=\dfrac{1}{3}Nm\overline{v^2}$　　(シ)　モル数

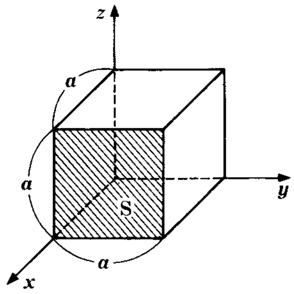
気体の分子運動論についての問題は，比較的パターンがきまっているので，よくなれておきなさい。
では，実戦トレーニングです。

実戦トレーニング

1 〈気体の分子運動〉

次の文の $\boxed{}$ の中をみたせ。

図のような一辺の長さ a の立方体の容器の中に，質量 m の理想気体の分子を N 個とじこめる。



図のように，x，y，z 軸をとり，ある分子の速度を $\vec{v}$，その x，y，z 成分を，それぞれ v_x，v_y，v_z とすると，$v^2=v_x{}^2+v_y{}^2+v_z{}^2$ である。N 個の分子の速度は，それぞれ異なるが，速度の2乗平均 $\overline{v^2}$ と速度成分の2乗平均 $\overline{v_x{}^2}$，$\overline{v_y{}^2}$，$\overline{v_z{}^2}$ の間にも $\overline{v^2}=\overline{v_x{}^2}+\overline{v_y{}^2}+\overline{v_z{}^2}$ が成り立つ。ところが，気体分子の速度分布は方向による違いがないと考えられるから，$\overline{v_x{}^2}=\overline{v_y{}^2}=\overline{v_z{}^2}=\dfrac{1}{3}\overline{v^2}$ となる。

さて，x 軸に垂直な，図の斜線で示した面Sを考える。ある分子が，速度 $\vec{v}$ で，面Sに完全弾性衝突すると，この分子の運動量は (1)$\boxed{}$ だけ変わる。一度衝突した分子が，再び面Sに衝突するまでの時間は (2)$\boxed{}$ であるから，時間 t の間には (3)$\boxed{}$ 回衝突する。したがって，この分子が時間 t の間に面Sに与える運動量の変化は (4)$\boxed{}$ であり，N 個の分子による全運動量変化は，$\overline{v_x{}^2}$ を使うと (5)$\boxed{}$ となる。これは時間 t の間に面Sが受ける力積に等しいから，結局，N 個の分子から単位時間に受ける単位面積当たりの力，すなわち圧力 P は，$\overline{v^2}$ を使うと $P=$ (6)$\boxed{}$ と書ける。温度が一定の時，$\overline{v^2}$ が一定であるとすれば，これはボイルの法則を表している。

一方，n モルの理想気体については，気体定数を R とすると，圧力 P，体積 V，温度 T の間に状態方程式 $PV=nRT$ が成り立つ。したがって，$a^3=V$ とすると気体分子1個についての運動エネルギーの平均は，$\dfrac{1}{2}m\overline{v^2}=$ (7)$\boxed{}$ となる。n モルの全分子数 N は，アボガドロ数を N_A とすると，$N=$ (8)$\boxed{}$ と書かれ，さらにボルツマン定数を k とすると，$k=$ (9)$\boxed{}$ である。したがって，分子1個の運動エネルギーは，k を使って表すと，$\dfrac{1}{2}m\overline{v^2}=$ (10)$\boxed{}$ となる。 (金沢大)

問題 Memo 気体の分子運動に関しては，出題のパターンがほとんどきまっています。たとえば——1個の分子が壁に衝突すると運動量が変化します。このことから1個の分子が壁に及ぼす力積がわかります。次に，N 個の分子が壁に及ぼす力積から，壁に与える力を求めます。力を壁の面積で割ると圧力になります。一方，気体の状態方程式と，いま求めた圧力とから，1個の分子の平均運動エネルギーが得られます。このエネルギーに気体の分子の数をかけると，気体の内部エネルギーが得られます。——こんな問題が出題されたら，しめたと思いたいものです。

2 〈分子運動論と内部エネルギー〉

気体分子が容器の中で不規則な熱運動を行いながら容器の壁と衝突をくり返すとき，壁が分子に力を及ぼすと同時に，分子は壁に同じ大きさで向きが反対の力を及ぼす。このような力を多数の分子について時間的にならしたものが気体の示す圧力と考えられる。この考えに運動の法則を適用することにより，分子1個の質量が m〔kg〕の1種類の分子 N_0 個からなる1モルの気体の圧力 p〔N/m²〕を

$$p=\frac{1}{3}\frac{N_0}{V}m\overline{v^2}=\frac{1}{3}\frac{M}{V}\overline{v^2} \qquad \text{(A)}$$

という式で表すことができる。ここで，V〔m³〕は容器の体積，$\overline{v^2}$〔m²/s²〕はそれぞれの分子の速さ v の2乗の平均値（以下では平均2乗速度という），M〔kg〕は気体1モルの質量を表す。なお，(A)式は分子相互の衝突や，分子間に働く引力，斥力などはないとして導かれた式である。

次の各問に答えよ。ただし，以下で R〔J/mol·K〕は気体定数を表す。

(1) 1モルの理想気体に対する状態方程式と(A)式とが同等の内容を表すと考えることにより，絶対温度 T〔K〕における平均2乗速度 $\overline{v^2}$〔m²/s²〕が，$\overline{v^2}=3\dfrac{R}{M}T$ と表しうることを示せ。

(2) 0℃，1気圧（$=1.013\times10^5$N/m²）のもとで気体1モルの占める体積が，気体の種類に関係なく，およそ22.4l であることを用いて，ヘリウムの27℃における平均2乗速度 $\overline{v^2}$〔m²/s²〕を有効数字3けたまで算出せよ。ただし，ヘリウム1モルの質量は4.00gであるとする。

(3) 単原子分子からなる気体の絶対温度 T〔K〕における分子1個あたりの平均運動エネルギーを R，T，N_0 を含む式で表せ。

(4) 気体の内部エネルギーが何に由来するかを述べよ。

(5) ある温度において，圧力 p〔N/m²〕，体積 V〔m³〕の理想気体の内部エネルギーを U〔J〕とするとき，$pV=\dfrac{2}{3}U$ という式が得られることを示せ。

(6) 気体に外部から加えた熱量 $\varDelta Q$〔J〕及び仕事量 $\varDelta W$〔J〕と，それらによってもたらされた内部エネルギーの増加量 $\varDelta U$〔J〕とを結びつける式を示せ。

(7) 問(6)の式を用いて，単原子分子からなる気体の定積モル比熱 C_V〔J/mol·K〕及び定圧モル比熱 C_p〔J/mol·K〕が，それぞれ $\dfrac{3}{2}R$ 及び $\dfrac{5}{2}R$ と表しうることを導け。　（弘前大）

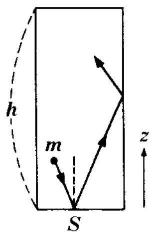
問題 Memo 気体分子は大きさをもたず（質点として扱う），分子どうしのあいだに相互作用はない（分子間力＝0）という近似をしています。この理想気体の近似と，分子と壁面は弾性衝突をするということが気体分子運動論の前提となっています。

問題文中に与えてある圧力と分子の2乗平均の速さの関係を使って，分子の運動エネルギーと気体の内部エネルギーを考えさせる標準的問題ですから，(1)〜(6)は，設問をよく理解すればそう難しくありません。(7)の定積モル比熱と定圧モル比熱を導く問題は出題頻度が高いので，導き方・考え方をよく学習しておきましょう。

3 〈重力の影響下での気体分子と壁との衝突〉

次の文中の［　　］に適当な式または数値を記入して文章を完成させよ。

上空における大気圧は，地表面における値にくらべて低いことが知られている。これは気体分子の運動におよぼす重力の影響を考慮することで説明できる。いま，図のように底面積 S〔m^2〕，高さ h〔m〕の四角柱の容器にとじこめられた気体がある。気体分子は容器の壁面と完全弾性衝突をくりかえしており，分子間の衝突はないものとする。容器の中の気体分子の総数を N 個，分子の質量を m〔kg〕，重力加速度を g〔m/s^2〕とし，鉛直方向を z 軸にとり，容器の上面および下面における分子の衝突を考えよう。



いま，下面に入射してくる1個の分子に注目する。衝突直前の z 方向の速さを v_z〔m/s〕とするとこの分子の運動量は衝突により大きさ (1)［　　］〔kg・m/s〕だけ変化する。衝突したあとこの分子は上昇するが，その速さは重力によって減少する。v_z の値により，次の(イ)，(ロ) 2つの場合がある。

(イ)　v_z が (2)［　　］〔m/s〕より小さい分子は，容器の下面と衝突したあと，上面に到達することができず，下面とのみ衝突をくりかえす。その衝突から衝突までの時間は (3)［　　］〔s〕である。したがって，この分子は1秒間に容器の下面に (4)［　　］〔N・s〕，上面に (5)［　　］〔N・s〕の大きさの力積をあたえる。

(ロ)　分子が容器の上面に到達することができる場合には，上面に入射する直前の z 方向の速さは (6)［　　］〔m/s〕で，上面との衝突による運動量の変化の大きさは (7)［　　］〔kg・m/s〕である。以後，この分子は上面と下面との間を往復し，往復に要する時間は (8)［　　］〔s〕である。したがって，この分子は1秒間に容器の下面に (9)［　　］〔N・s〕，上面に (10)［　　］〔N・s〕の大きさの力積をあたえる。

以上の考察から，1個の分子が1秒間に容器の下面にあたえる力積の大きさと上面にあたえる力積の大きさの差は，(イ)，(ロ)いずれの場合も (11)［　　］〔N・s〕であることがわかる。したがって，容器の下面における気体の圧力 P_0〔N/m^2〕と上面における圧力 P_h〔N/m^2〕の差 P_0-P_h は (12)［　　］〔N/m^2〕となり，下面における圧力は上面における圧力より大きいことがわかる。

（山口大）

問題 Memo　一般に閉じ込められた気体のおよぼす圧力は，どの面に対しても等しいと考えるのですが，この問題では重力の影響を考慮して上下に圧力の差ができることをとりあげているところに特徴があります。

答えあわせをしなさい。

●ここに注目ノ● **気体の分子運動と圧力**

① **気体の分子運動**

気体の分子は高速で運動していて容器の壁に衝突する。このとき壁にあたえる力積によって，圧力が生じる。重力の影響は無視してかまわない。

② **分子運動と圧力**

$$\boldsymbol{P=\frac{1}{3}\cdot\frac{Nm}{V}\cdot\overline{v^2}=\frac{2}{3}\cdot\frac{N}{V}\cdot\frac{1}{2}m\,\overline{v^2}}$$

③ **内部エネルギー**

単原子分子の気体では，分子の運動エネルギーがすべてのエネルギーである。この内部エネルギーは，

$$\boldsymbol{U=\frac{3}{2}nRT}$$

と表されるように，温度だけで定まる。

気体の分子運動についてまとまったところできょうは終わりです。

第 15 日	気体の分子運動７日間 ②	学習日　　月　　日
	気体の熱平衡	

第15日のきょうは気体の熱平衡についてです。気体にみられる現象でも，エネルギーの保存はたいせつな考え方です。さっそくはじめましょう。

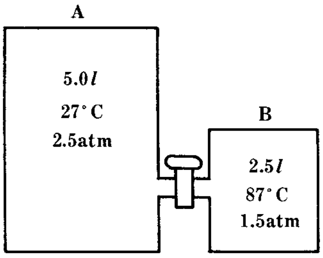
まず，自分に弱点がないかどうか，確認トレーニングでチェックです。

確認トレーニング

〔解答欄〕

1 〈気体の法則〉

容積5.0lの容器Aと容積2.5lの容器Bがコックのついた細い管でつながっています。Aには，27℃，2.5atmの酸素がはいっており，Bには，87℃，1.5atmの酸素がはいっています。次の問いに答えなさい。ただし，気体定数はRとします。

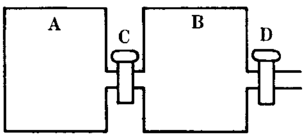


(1) コックを開く前のA，B内にはいっていた気体のモル数の比を求めなさい。

(2) コックを開いて，全体の温度を37℃で一様にすると圧力はいくらになりますか。

2 〈気体の内部エネルギーと比熱〉

図のように，内容積がともにVの容器A，BをコックCのついた細い管でつなぎ，また，Bにはさらにコック Dのついた細い管がつけてあります。最初にコックC，Dを開いて，それぞれの容器に圧力$1.0\times10^5 \mathrm{N/m^2}$，温度27℃の気体を入れ，コックC，Dを閉じました。Aの温度を0℃，Bの温度を100℃にしてからコックCを開くと，十分時間がたった後の圧力はいくらになりますか。ただし，コックCを開いたあとは外部との熱の出入りはないものとします。



3 〈気体の分子運動〉

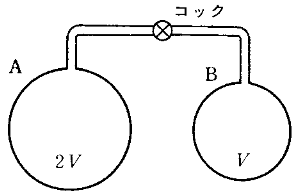
気体の分子は，それぞれいろいろな方向に，いろいろな速さで運動していますが，分子運動の速さの2乗の平均値$\overline{v^2}$は，その気体の絶対温度T〔K〕に比例し，$\overline{v^2}=\dfrac{3RT}{M}$〔m²/s²〕と表されます。ただし，$R$は気体定数($8.3\times10^3$ J/kmol·K)，Mは気体1kmol当たりの質量〔kg〕とします。

(1) 質量m〔kg〕の分子がn個含まれる気体があります。この気体の温度T〔K〕における，分子の運動エネルギーの総和はどう表されますか。

(2) 77℃における分子量28の窒素の2乗平均速度を求めなさい。

例題 10　連結容器と気体の状態方程式，内部エネルギー

体積 $2V$〔m^3〕と V〔m^3〕の 2 つの容器 A と B を，図に示したような中央にコックのある細いガラス管で連結し，その全体に単原子分子の理想気体を n〔mol〕だけ封入した。コックを開いたまま，A と B を温度 T〔K〕の恒温槽に入れ熱平衡状態にした。下記の問に答えよ。ただしガラス管内の体積は V にくらべて無視でき，また容器の熱膨張も無視できるものとする。



問 1　気体定数を R〔J/mol·K〕とするとき，この気体の圧力はいくらか。その大きさと単位をかけ。

問 2　容器 B は温度 T〔K〕の恒温槽につけたまま，容器 A だけ温度 $\frac{4}{3}T$〔K〕の恒温槽につけたところ，充分時間がたった後，定常状態に達した。このときの圧力と A に含まれる気体のモル数はいくらか。

問 3　問 2 でおこなった操作により，容器 A と B の内部エネルギーはそれぞれ何ジュールだけ変化したか。増加した場合を正，減少した場合を負として，符号を含めて答えよ。

問 4　つぎにコックを閉じてから，容器 A を温度 T〔K〕の恒温槽にもどして熱平衡状態にした。このときの A の圧力と，A からとり出された熱量はいくらか。ただし熱の仕事当量を J〔J/cal〕とする。

問 5　そうしてさらに容器 A と B を恒温槽からとり出し，全体を断熱材で囲んでから，コックを開いた。気体の正味の流れはどうなるか。以下の文章から正しいと思われるものを選べ。

1　A から B へ流れる。　2　正味の流れはない。　3　B から A へ流れる。

問 6　また，問 5 の操作をおこなってから，充分時間がたった後の気体の絶対温度はいくらになるか。　（早稲田大-教育）

Advice　問 1　A，B 全体積で状態方程式をたてます。

問 2　A 中のモル数を n_A として，A および B について状態方程式をたてこの 2 式から求めます。

問 3　単原子分子の理想気体 1mol の内部エネルギーがどのように表されたかを考えましょう。はじめの温度，あとの温度において，容器中に何モルの気体が入っているかを考えることを忘れずに。

問 4　ボイル・シャルルの法則および問 2 の結果を用いて圧力をだします。熱量を求めるとき，問題中に熱の仕事当量が書かれているのでこれを用いるようにします。その際単位を明記しておくことも大切です。

問 5　コックを閉じた状態で入っている気体のモル数と，温度 T で入り得る気体のモル数を比較します。

問 6　全体が断熱材で囲まれていることがヒントです。

解き方　問 1　理想気体の状態方程式より，求める圧力を P_1 とすると，

$$P_1(2V+V)=nRT$$

$$\therefore\quad P_1=\frac{nRT}{3V}\text{〔N/m}^2\text{〕}$$

問2　圧力を P_2，容器A中のモル数を n_A とすると

Aについては体積 $2V$，温度 $\frac{4}{3}T$ であるから状態方程式は

$$P_2 \times 2V = n_A R \times \frac{4}{3}T$$

Bについては体積 V，温度 T，モル数 $(n-n_A)$ であるから状態方程式は

$$P_2 \times V = (n-n_A)RT$$

これら2式より n_A を消去すると

$$P_2 = \frac{2}{5}\frac{nRT}{V}\,[\mathrm{N/m^2}]$$

したがって

$$n_A = \frac{3}{5}n\,[\mathrm{mol}]$$

問3　単原子分子の理想気体1[mol]あたりの内部エネルギーは絶対温度を T として，$U = \frac{3}{2}RT$ で与えられる。したがって n[mol]の内部エネルギーは $U = \frac{3}{2}nRT$ である。これを用いると

Aについて：はじめの温度 T においてAの中には $\frac{2}{3}n$[mol]の気体が入っており，温度 $\frac{4}{3}T$ のときは n_A[mol]の気体が入っているのだから

$$\Delta U_A = n_A \times \frac{3}{2}R \times \frac{4}{3}T - \frac{2}{3}n \times \frac{3}{2}R \times T$$

$$= \frac{6}{5}nRT - nRT$$

$$= \frac{1}{5}nRT\,[\mathrm{J}]$$

Bについて：Aの温度を $\frac{4}{3}T$ にしたときBの中には $n-n_A$[mol]の気体が入っているのだから

$$\Delta U_B = (n-n_A) \times \frac{3}{2}RT - \frac{1}{3}n \times \frac{3}{2}RT$$

$$= \frac{3}{5}nRT - \frac{1}{2}nRT$$

$$= \frac{1}{10}nRT\,[\mathrm{J}]$$

問4　平衡状態での圧力を P_A とすると，ボイル・シャルルの法則により

$$\frac{P_A V}{T} = \frac{P_2 V}{\frac{4}{3}T}$$

$$\therefore\quad P_A = \frac{3}{4}P_2$$

$$= \frac{3}{4} \times \frac{2}{5}\frac{nRT}{V}$$

$$= \frac{3}{10}\frac{nRT}{V}\,[\mathrm{N/m^2}]$$

体積一定であるから，気体は外部に仕事をしない。したがってエネルギー保存則（熱力学第1法則）から，放出した熱量 Q[cal]は内部エネルギーの変化に相当する。つまり，

$$Q=\frac{1}{J}(-\Delta U)$$

温度が $\frac{4}{3}T \to T$ と $-\frac{1}{3}T$ 変化しているから

$$\Delta U=\frac{3}{2}n_{A}R\left(-\frac{1}{3}T\right)$$

$$=-\frac{1}{2}n_{A}RT$$

$n_{A}=\frac{3}{5}n$ を代入して

$$Q=\frac{3nR}{10J}T$$

問5　容器A内の圧力 P_{A} は，問4より

$$P_{A}=\frac{3}{10}\frac{nRT}{V}$$

容器B内の圧力 P_{B} は，問2より

$$P_{B}=\frac{2}{5}\frac{nRT}{V}$$

$P_{A}<P_{B}$ であるから，コックを開けると，BからAに気体が入ってくる。

問6　外部との熱の出入りがなく，全体の体積も変化しないから $\Delta U=0$。よって $\Delta T=0$ となるので，絶対温度は変わらない。

●解答●　問1　$\frac{nRT}{3V}$〔N/m²〕

問2　圧力：$\frac{2}{5}\frac{nRT}{V}$〔N/m²〕，モル数：$\frac{3}{5}n$〔mol〕

問3　A：$\frac{1}{5}nRT$〔J〕　　B：$\frac{1}{10}nRT$〔J〕

問4　圧力：$\frac{3}{10}\frac{nRT}{V}$〔N/m²〕　　熱量：$\frac{3}{10}\frac{nRT}{J}$〔cal〕

問5　3

問6　T〔K〕

例題の内容はきちんと身につきましたか。気体の状態方程式（ボイル・シャルルの法則）をあてはめること，系全体のエネルギーに注目することがポイントです。

実戦トレーニング

1 〈ボイル・シャルルの法則〉

次の ア□ ～ カ□ に適切なものを㋐～㋢のうちから選び，その符号をマークせよ。ただし，数値は4捨5入により有効数字1けたで答えよ。

可動ピストンのついたシリンダーに n[mol] の理想気体を封入し，1.00[atm] の外気圧と温度 T[°C]，体積 V[l] でつりあっている。

いま，この気体を加熱して，その温度を $T+100$[°C] にすると，気体の体積は 3.30[l] 増加する。また，はじめの状態でピストンを固定しておいて気体を加熱し，その温度を再び $T+100$[°C] にすると，気体の圧力は 36.1% 増加する。

この実験により，

$T=$ ア□ $\times 10^{\text{イ}□}$ [°C]

$V=$ ウ□ $\times 10^{\text{エ}□}$ [l]

$n=$ オ□ $\times 10^{\text{カ}□}$ [mol]

であることがわかる。ただし，1[atm]$=1.01\times10^5$[N/m^2]，気体定数 $R=8.31$[J/K·mol] とする。

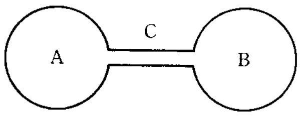
㋐ −9	㋑ −8	㋒ −7	㋓ −6
㋔ −5	㋕ −4	㋖ −3	㋗ −2
㋘ −1	㋙ 0	㋚ 1	㋛ 2
㋜ 3	㋝ 4	㋞ 5	㋟ 6
㋠ 7	㋡ 8	㋢ 9	

（立命館大-理工）

問題 Memo ボイル・シャルルの法則によって，温度と体積を求めます。圧力一定か体積一定かがわかればあとは簡単に解けます。答えは，桁数を10の n 乗の形で求めさせているので，単位に注意する必要があります。

2 〈連結管でつながれた2容器内の空気密度〉

図のように容積の等しい2つの容器A，Bが細い管Cで連結されている。これらにはじめ15(℃)，1.00気圧の空気を満たしたのちAを300(℃)，Bを15(℃)に保ち，容器内の空気の状態が変化しなくなるまで放置した。ただし，熱による容器の体積変化，A，B間の対流およびCの容積は無視できる。答を小数で表わしたときは，有効数字の桁数は2桁で十分である。



(1) A内の空気の密度はB内のそれの何倍か。

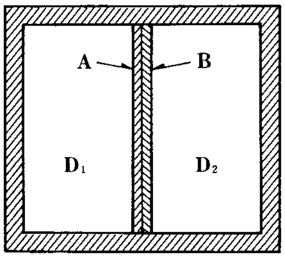
(2) 容器内の空気の圧力は何気圧か。

(3) B内の空気の密度は，はじめにくらべて何％増加したか。　　（千葉大）

問題 Memo　2つの容器が細い連結管でつながれ，両容器の空気の温度が異なるという設定の問題です。高温の空気は低温の空気より密度が小さいということは定性的にすぐわかりますが，それを具体的に計算で求めるようになっています。今までにもいろいろ出題されてきた問題といえましょう。

3 〈気体の状態変化－2室問題〉

次の文を読み，設問に計算や説明をつけて答えよ。ただし問6については$\boxed{}$の中に適当な語句を入れよ。



断熱壁で囲まれた容器が，図のように2重の仕切り板A，Bで2つの部分D_1，D_2に分けられている。板Aは熱を通さないが，板Bは熱のみを通す。D_1の容積はV_1〔m^3〕で，その内部には温度T_1〔K〕の理想気体がn_1〔mol〕封入されている。また，D_2の容積はV_2〔m^3〕で，その内部には温度T_2〔K〕の同じ気体がn_2〔mol〕封入されている。

ここで板Bを固定したままで板Aを瞬間的に取り除く。取り除かれた瞬間の気体全体の状態をS_Iとする。この状態は板Aを取り除く以前の状態と同じであるとする。板Aを取り除いてから十分時間が経つと容器内の気体の温度は一様になり，D_1，D_2内の気体の圧力はそれぞれ一定になる。この状態をS_Aとする。ここでさらに板Bも取り除く。再び十分時間が経つと容器内の気体全体の圧力は一定になる。この状態をS_Bとする。

この気体の定積モル比熱をC_v〔J/(mol·K)〕とする。必要ならば気体定数をR〔J/(mol·K)〕，アボガドロ数（モル分子数）をN_0〔1/mol〕で表せ。なお容器の容積変化と熱容量，および板の厚さと熱容量を無視し，板を取り除くとき外部との仕事のやりとりはないものとする。

問1　状態S_IでD_1内にある気体分子1個当たりの平均の運動エネルギーK_1〔J〕を求めよ。

問2　状態S_Aでの気体の温度T_A〔K〕を求めよ。

問3　状態がS_IからS_AになるまでにD_1からD_2に移る熱量Q〔J〕を求めよ。

問4　状態S_Bでの気体の圧力P_B〔N/m^2〕を，状態S_IでのD_1内の圧力P_1〔N/m^2〕とD_2内の圧力P_2〔N/m^2〕，およびV_1，V_2を用いて表せ。

問5　状態S_IでD_2内が真空であるとするとき，状態S_Bでの容器内の気体の温度T_0〔K〕，圧力P_0〔N/m^2〕を求めよ。

問6　状態S_Iから状態S_Aへの変化は起こるが，外部に何の変化も残さずにS_AからS_Iへの変化が起こることはない。S_IからS_Aへのような状態の変化を物理学では$\boxed{}$変化と呼ぶ。

（北海道大）

問題 Memo　断熱容器内の，2重板の仕切りでわけられた気体の挙動について考えさせるという典型的な問題です。気体の内部エネルギーがどんなものであり，どうやって表されるかを知っていれば解ける標準的な問題です。

4 〈気体の状態変化——2 室問題〉

以下の文章中の $\boxed{}$ に適当な答を記入せよ。ただし，温度 T[K]，モル数 n[mol] の理想気体の内部エネルギーは $\frac{3}{2}nRT$[J] で与えられるものとする。ここで R[J/mol·K] は気体定数である。

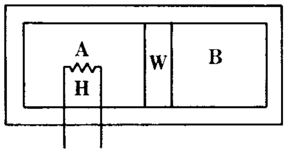


図1

図1のように断熱壁からなる容器の中央に壁 W があり，その両側の部分 A，B の容積は等しく V[m^3] である。B は真空であるが，A にはモル数 n[mol] の理想気体が入っていて温度は T_0[K]，圧力は p_0[N/m^2] である。壁 W に仕掛けをしてこの理想気体の体積を2倍にし，圧力を p_0 にする方法として，次の二通りの異なる方法を考えてみる。

(1) 壁 W に穴をあけると，A にある理想気体は B の真空中に流れ込む (図2)。この時容器内の理想気体は外に対して仕事をしないし，また外から仕事を受けない。じゅうぶん時間がたつと，A と B とにある理想気体の圧力は等しくなり平衡状態に達する。この時の温度は (イ)$\boxed{}$[K] で，また圧力は (ロ)$\boxed{}$[N/m^2] である。A に封入されているヒーター H によってこの理想気体に (ハ)$\boxed{}$[J] だけ熱を加えると圧力が p_0[N/m^2] になる。

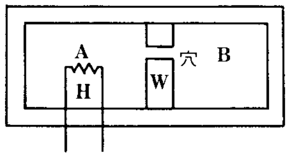


図2

(2) 壁 W は A の理想気体をもらすことなく，滑らかに動くことができるものとする (図3)。外から壁 W を支えながらゆっくりと壁 W を右側へ (図3) 移動させて A の理想気体の体積を増してゆく。この時ヒーター H によって理想気体に熱を加え，圧力を常に p_0[N/m^2] に保つようにする。理想気体の体積が2倍になるまでに加えるべき熱量は (ニ)$\boxed{}$[J] である。　　　　(静岡大)

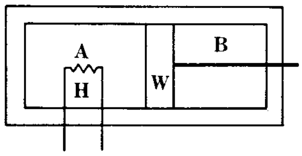


図3

問題 Memo 理想気体の体積を，圧力を変えることなく増加させる問題です。外から与える熱，内部エネルギーの変化など，ボイル・シャルルの法則とあわせて検討しなければなりません。

では，きょうの重点事項をまとめて終わりにしましょう。

●ここに注目！● **気体の熱平衡**

① **ボイル・シャルルの法則**

$$\frac{PV}{T} = 一定$$

② **気体の状態方程式**

$$PV = nRT$$

R は気体定数で，標準状態（0°C，1atm）での体積をボイル・シャルルの法則にあてはめると求められる。

③ **気体の混合とエネルギー保存**

外部との間で熱や仕事のやりとりがなければ，系全体のエネルギーは保存される。

第16日

気体の分子運動7日間③　　学習日　月　日

気体の変化と仕事・エネルギー

気体の分子は激しく運動しており，容器の壁に衝突します。このときの力積が，気体の圧力の本体です。気体が膨張すると，気体は壁をおして動かすことになります。このとき気体は仕事をします。きょうは，こういった気体の変化にともなう仕事やエネルギーについて考えていきます。

最初は，いつものように確認トレーニングです。

確認トレーニング

〔解答欄〕

1 〈気体のする仕事〉

ピストンのついた円筒に，27℃，3.0×10^5N/m^2 の理想気体が 2.0×10^{-3}m^3 はいっています。この気体の圧力を 3.0×10^5N/m^2 に保ったまま，温度を 57℃ にしたとき，次の問いに答えなさい。

(1)　気体は外部に対して，仕事をしましたか。それとも仕事をされましたか。また，それはいくらですか。

(2)　このときの気体の内部エネルギーの変化量はいくらですか。

(3)　この変化において，気体はどれだけの熱量を吸収しましたか。それとも放出しましたか。

2 〈定積モル比熱〉

3mol の理想気体を体積一定のまま温度を 20K 上昇させるとき，次の問いに答えなさい。

(1)　気体のする仕事はいくらですか。

(2)　内部エネルギーの変化はいくらですか。

(3)　気体の得る熱量はいくらですか。

(4)　定積モル比熱はいくらですか。

3 〈定圧モル比熱〉

3mol の理想気体を圧力一定のまま温度を 5K 上昇させるとき，次の問いに答えなさい。

(1)　内部エネルギーの変化はいくらですか。

(2)　気体のする仕事はいくらですか。

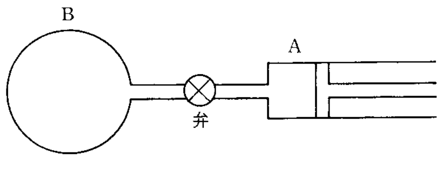
(3)　気体の得る熱量はいくらですか。

(4)　定圧モル比熱はいくらですか。

気体は仕事をするのかされるのか，熱の出入りはどうなっているかなどに気をつけて例題に取り組みなさい。

例題 11　ピストンと連結された容器内の気体の断熱変化

図のように，シリンダーとピストンからなる容器Aと，一定容積の容器Bがあり，その間がごく細い管とそれを開閉できる弁で連結されている。すべての部分は断熱材料でできており，細い管と弁の容積は無視できるほど小さいとして，以下の設問に答えよ。結果だけでなく，途中の計算や考え方も簡単に示せ。



a．はじめに弁を閉じ，容器Aは圧力 P_1，温度 T_1，体積 V_1 の単原子分子の理想気体で満たし，容器Bは真空にしておく。次に弁を開くと気体はゆっくりと容器Bに移りはじめるが，そのとき容器A内の圧力を P_1 に保つようにピストンを移動させる。容器Bの容積 V_0 は V_1 に比べて十分に大きく，全部の気体を容器Bに移すことができたとする。この過程で気体に対してなされた仕事はいくらか。

b．その結果，個個の気体分子の平均の運動エネルギーはどれだけ増加したか。

c．全部の気体が容器Bに移ったとき，B内の気体の圧力と温度はいくらか。

d．次に弁を閉じ，ピストンを後退させて容器Aの容積を V_2 にしたのち弁を開く。気体はゆっくり管を通って容器Aに入り，長い時間ののち容器A，B内の圧力が同じになって気体の移動が終わる。このとき気体の圧力と温度はいくらか。　（東京大）

Advice　a．ピストンは気体に対して，圧力 P_1 で体積 V_1 を移動したぶんの仕事をします。

$$(\text{圧力})\times(\text{体積})=\frac{(\text{力})}{(\text{面積})}\times(\text{体積})=(\text{力})\times(\text{距離})=(\text{仕事})$$

となることに注意しましょう。

b．断熱変化ですから，外からなされた仕事がそのまま内部エネルギーの増加となります。

c．気体の移動の前後での内部エネルギーを考えてまず温度を求めて，そののち状態方程式より圧力を求めます。単原子分子の理想気体の運動エネルギーは，絶対温度 T，ボルツマン定数 k とすると，$\dfrac{3}{2}kT$ で与えられます。これとbの結果を用いればよいのです。

d．2つの体積の変わらない容器間で気体が移動しても，気体は外に対して仕事をしません。断熱変化ですから内部エネルギーも変化しません。

解き方　a．ピストンは気体に対して圧力を加えながら移動するので，気体に対して仕事をする。ピストンが加える圧力の大きさは気体の圧力に等しく，つねに P_1 である。この圧力を加えながら，ピストンは体積 V_1 を移動する。求める仕事を W_a とすると

$$W_a=P_1V_1 \quad \cdots\cdots①$$

（ピストンの断面積を S，移動距離を l とすると $lS=V_1$，ピストンが加える力は P_1S であるから，$W_a=P_1S\cdot l$）

b．aの過程は断熱的であるから，熱の形でのエネルギーの増減はなく，したがって気体の内部エネルギーの増加 ΔU は，気体に対してピストンがした仕事に等しい。よって，①より

$\Delta U = P_1 V_1$ ………②

ここで気体のモル数を n，気体定数を R とすると，最初の状態について，状態方程式は

$P_1 V_1 = nRT_1$ ………③

②，③より

$\Delta U = nRT_1$ ………④

ここでアボガドロ数を N とすると，気体全体の分子の総数は nN。内部エネルギーは個々の分子の運動エネルギーの総和である。したがって個々の分子の平均の運動エネルギーの増加を ΔE とすれば　$\Delta U = nN\Delta E$ ………⑤

④，⑤より　$\Delta E = \dfrac{\Delta U}{nN} = \dfrac{R}{N} T_1$

ここで $\dfrac{R}{N}$ はボルツマン定数であり，これを k とすれば

$\Delta E = kT_1$ ………⑥

（注）ボルツマン定数は与えられていないので，これを用いないで解答を表現することを考えると，最初の状態の平均運動エネルギーは次のcで与えるように $\dfrac{3}{2}kT_1$ であるから，『最初の平均運動エネルギーの $\dfrac{2}{3}$ だけ増加した』とできる。

c．単原子分子理想気体の分子の平均の運動エネルギー E は，絶対温度 T に比例し，

$E = \dfrac{3}{2}kT$　（k はボルツマン定数）

で与えられる。したがってA内，B内での平均の運動エネルギーをおのおの E_1，E_2，B内の温度を T_2 とすれば，

$E_1 = \dfrac{3}{2}kT_1$　　$E_2 = \dfrac{3}{2}kT_2$ ………⑦

ここでbの結果から　$E_2 = E_1 + \Delta E = \dfrac{5}{2}kT_1$

⑦により　$\dfrac{3}{2}kT_2 = \dfrac{5}{2}kT_1$　　$\therefore\ T_2 = \dfrac{5}{3}T_1$ ………⑧

次に，B内の圧力を P_2 とすると，状態方程式から

$P_2 V_0 = nRT_2$

⑧を代入して

$P_2 V_0 = \dfrac{5}{3}nRT_1$

さらに③を代入すると

$P_2 V_0 = \dfrac{5}{3}P_1 V_1$　　$\therefore\ P_2 = \dfrac{5P_1 V_1}{3V_0}$

d．定体積への自由な拡散であるから，気体は仕事をしない。また，断熱的変化であるから，出入りする熱量は0である。よって，気体の内部エネルギーは変化しないから，温度は変化せず T_2 のままである。圧力を P_3 とすると体積は $V_0 + V_2$ となるから，状態方程式は

$P_3(V_0 + V_2) = nRT_2$

③，⑧を代入して整理すると

$P_3 = \dfrac{5P_1 V_1}{3(V_0 + V_2)}$

（注）温度がcと等しく一定であるから（なぜなら，内部エネルギーが一定だから），ボイルの法則を用いて

$P_3(V_0 + V_2) = P_2 V_0$　　$\therefore\ P_3 = \dfrac{P_2 V_0}{V_0 + V_2}$

これにcの結果を代入して求めてもよい。

●解答●　a．ピストンは圧力 P_1 で体積 V_1 だけ移動するから，気体になされた仕事は

(力)×(移動距離)＝{(圧力)×(面積)}×(移動距離)＝(圧力)×{(面積)×(移動距離)}

＝(圧力)×(体積の増加量)＝P_1V_1

b．気体全体の内部エネルギーの増加 $\varDelta U$ は a で求めた仕事に等しいから

$$\varDelta U=P_1V_1$$

個々の分子の平均運動エネルギーの増加 $\varDelta E$ は，アボガドロ数を N とすると

$$\varDelta E=\frac{\varDelta U}{nN}=\frac{P_1V_1}{nN}$$

状態方程式 $P_1V_1=nRT_1$ より

$$\varDelta E=\frac{nRT_1}{nN}=\frac{R}{N}T_1=kT_1 \qquad \left(\because\ \frac{R}{N}=k：\text{ボルツマン定数}\right)$$

一方，はじめの状態の分子の平均運動エネルギーは $\frac{3}{2}kT_1$ である。よって，エネルギーの増加量ははじめの状態のエネルギーの $\frac{2}{3}$ 倍である。

c．絶対温度 T における理想気体の単原子分子個々の平均運動エネルギー E は

$$E=\frac{3}{2}kT$$

A，B 内の分子の平均運動エネルギーを E_1，E_2 とすると，エネルギー保存則は

$$E_1+\varDelta E=E_2$$

$$\frac{3}{2}kT_1+k_1T=\frac{3}{2}kT_2 \qquad \therefore\quad T_2=\frac{5}{3}T_1$$

B 内の圧力 P_2 は

$$P_2V_0=nRT_2=\frac{5}{3}nRT_1=\frac{5}{3}P_1V_1 \qquad \therefore\quad P_2=\frac{5V_1}{3V_0}P_1$$

d．気体の温度は $T_2=\frac{5}{3}T_1$ のまま変わらない。圧力を P_3 として状態方程式は

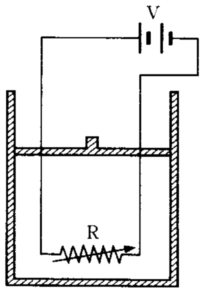
$$P_3(V_0+V_2)=nRT_2=\frac{5}{3}P_1V_1 \qquad \therefore\quad P_3=\frac{5V_1}{3(V_0+V_2)}P_1$$

例題がすっかり理解できたら，実戦トレーニングです。

実戦トレーニング

1 **〈理想気体の状態変化とジュール熱〉**

絶対温度が T〔K〕のとき，単原子分子の理想気体1分子あたりの運動エネルギーは，ボルツマン定数を k〔J/K〕とすると，$\frac{3}{2}kT$〔J〕である。また，1〔mol〕中に含まれている分子の数を N とする。図のような断熱材でできた容器にこの気体1〔mol〕を封入する。ピストンは断熱材でできていて，どこにでも固定することができる。また，図のように可変抵抗Rが電圧を自由に変えることのできる電源Vに接続してあり気体を熱することができる。次の問いに答えよ。



〔1〕 外気圧と釣り合う位置にピストンを固定し，この気体の温度を1〔K〕上げるために1秒間だけ電流を流すものとする。抵抗が R〔Ω〕のとき電圧をいくらにするとよいか。そのときの電圧を V〔V〕とし，k，N，R を用いて表わせ。

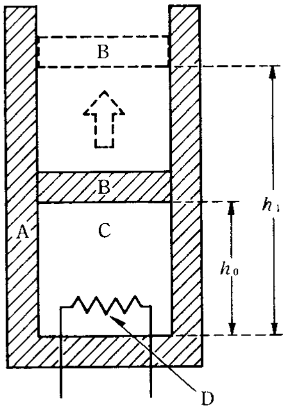
〔2〕 そこで，ピストンを固定したまま，抵抗を R〔Ω〕，電圧を $2V$〔V〕にして電流を2秒間流す。この2秒間に気体の温度は何度上昇するか。

〔3〕 また，ピストンが自由に動ける状態で，抵抗を $3R$〔Ω〕とし，電圧を $2V$〔V〕として電流を2秒間流す。この2秒間に気体の温度は何度上昇するか。 (立命館大-理工)

問題 Memo 理想気体の内部エネルギーと電流による発熱とをミックスした問題です。気体の定圧比熱，定積比熱などもわかっていないと，この問題は難しい部類に入る問題です。

2 <気体の定圧膨張>

図のように，なめらかに動くことのできる質量 m〔kg〕，断面積 S〔m^2〕のピストンBをそなえたシリンダーAがある。いま，シリンダー内に n モルの理想気体Cを閉じ込めたところ，ピストンBはシリンダーAの底面より h_0〔m〕のところで静止した。Cの温度は外気と等しく絶対温度 T_0〔K〕であった。外気の圧力を p_0〔N/m^2〕，重力の加速度を g〔m/s^2〕，気体定数を R〔J/K・モル〕として，次の問に答えよ。



(a)　Cの圧力はいくらか。

(b)　h_0 を n，R，T_0，p_0，S，m，g であらわせ。

つぎに，シリンダー内にとりつけられたヒーターDによって，Cにゆっくりと熱を加えていったところ，Bは底面より h_1〔m〕のところまで押し上げられて，Cの温度は T_1〔K〕になった。このような操作によるCの状態の変化について次の問に答えよ。ただし，熱はAおよびBから外気に逃げないとし，Cの圧力の変化は無視する。

(c)　h_1 を T_0，T_1，h_0 であらわせ。

(d)　Cの1モルあたりの定圧比熱を C_p〔J/K・モル〕とすると，ヒーターにより与えられた熱量 Q はいくらか。

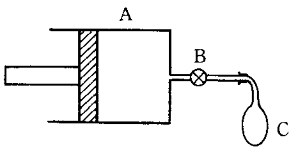
(e)　Cのなした仕事 W はいくらか。

(f)　Cの内部エネルギーの変化はいくらか。　　　　（千葉大-理 <物理>）

問題 Memo　ヒーターから与えられる熱によって，定圧膨張する気体について，気体が吸収した熱，気体のする仕事，気体の内部エネルギーの変化などを求める問題です。気体の熱力学の基本的な問題といえましょう。

3 〈ゴム風船につながれたシリンダー内の気体の変化〉

銅のシリンダーAに摩擦もなく，もれもないピストンがはまっており，その中に理想気体2.00molが封じ込められている。シリンダーの一端には，バルブBとゴム風船Cが図のようについている。Bは内部の圧力が1.50×10^5 Pa($1\text{Pa}=1\text{N/m}^2$)以上の時だけ開くようになっている。また風船Cの張力は無視し，気体定数は近似的に8.30 J/(mol·K)とし，外の大気の温度は常に300Kで，圧力は1.00×10^5Paとする。以下の問に答えよ。答は有効数字3けたまで求めよ。



(1) 最初，A内の圧力は1.00×10^5Paで，気体の温度は300Kであった。A内の気体の体積V_1はいくらか。

(2) 上記(1)の状態から，Bが開く直前の状態までゆっくりピストンを押して変化させた。A内の気体の体積V_2はいくらになったか。

(3) つぎに，上記(2)の状態でピストンを固定し，A内の気体の温度を350Kにゆっくり上昇させた。A内に残っている気体のモル数nはいくらか。

(4) 上記(3)の変化の際，Bから放出された気体のなす仕事Wはいくらか。

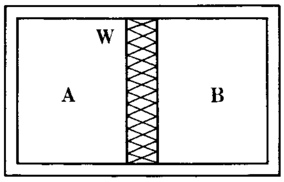
(5) 上記(3)の変化の間に，気体に与えられた正味の熱量Qはいくらか。

この理想気体のモル比熱を20.0J/(mol·K)とする。　　　　(慶應義塾大-理工)

問題 Memo　シリンダー内に閉じこめられた一定量の気体の状態を変化させたときに，圧力，体積，温度の関係と，さらに気体のなす仕事や気体に与えられた熱量を求めるという一般的な問題です。標準問題ですから，確実に解答しましょう。

4 〈断熱壁でしきられた2種類の気体の変化〉

図のように，両端が閉じられた円筒容器が，なめらかに動くことのできる断熱壁Wによって，二室にしきられている。この一方には，定容（定積）モル比熱21〔J/mol·K〕の理想気体Aが，また，他方には，定容モル比熱12〔J/mol·K〕の理想気体Bが，あらかじめ密封されている。以下の問に答えよ。必要があれば，気体（ガス）定数8.3〔J/mol·K〕を用いよ。



(a) 気体A，Bの体積，温度，圧力は，ともに等しく，それぞれ，1.0〔m^3〕，300〔K〕，1.0〔気圧〕，（$=1.0\times10^5$〔N/m^2〕）に保たれている。このとき，気体Aのモル数は(イ)［　　］〔mol〕である。

(b) 気体A，Bの体積をそれぞれ，V_A，V_Bとする。A，Bの圧力をともに一定に保ちながら，(a)の状態から$\dfrac{V_A}{V_B}=3.0$になるまで，Wを静かに動かした。このとき，気体Aが他へなした仕事は(ロ)［　　］〔J〕であり，また，気体Aの温度は(ハ)［　　］〔K〕である。このWの移動によって，気体A，Bのそれぞれの内部エネルギーの変化量と，A，Bがそれぞれ吸収（または放出）した熱量を求め，表のようにまとめて(ニ)［　　］に示せ。ただし，有効数字2けたで示し，内部エネルギーの増加，および熱量を吸収する場合を正，また，内部エネルギーの減少，および熱量を放出する場合を負とせよ。

	内部エネルギー〔J〕	熱〔J〕
気体A		
気体B		

（芝浦工大-工）

問題 Memo 熱力学第1法則を用いるときは，考えている系が，熱量を吸収したのか仕事をしたのかを表す符号が重要です。それさえまちがえなければ，基本的な問題です。また，数値が与えられていますが，まず文字におきかえて考える方がよいでしょう。

●ここに注目／● **気体の変化と仕事・エネルギー**

① **気体のする仕事**

$$W=P\varDelta V$$

体積が増加するとき，気体が外部に仕事をし，体積が減少するとき，気体は外部から仕事をされる。

② **モル比熱**

$$Q=nC_v\cdot\varDelta T$$

$$Q=nC_p\cdot\varDelta T$$

定圧変化では，気体が外部に仕事をする分だけ，比熱も大きくなる。

$$C_v=\frac{3}{2}R$$ （単原子分子気体の定積モル比熱）

$$C_p=C_v+R=\frac{5}{2}R$$ （単原子分子気体の定圧モル比熱）

③ **熱力学第1法則**

$$Q=W+\varDelta U$$

熱や仕事の出入りの向きに気をつけること。

答えあわせをしたら，きょうの学習を終わりましょう。

第 17 日

気体の分子運動７日間④　　学習日　　月　　日

熱サイクル

気体の分子運動についての問題もきょうの熱サイクルをすませると一段落です。

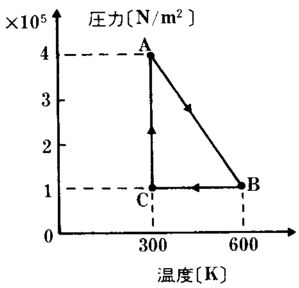
気体に熱を加えると膨張し仕事をします。これを冷やすと最初の状態にもどり，また熱を加えると，仕事をさせることができるようになります。これが熱サイクルです。

ここでのポイントを確認トレーニングでチェックしなさい。

確認トレーニング

〔解答欄〕

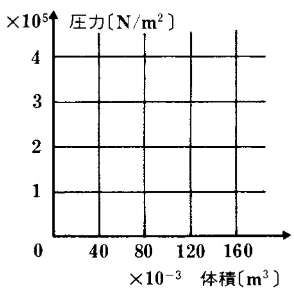
1 〈気体の法則〉



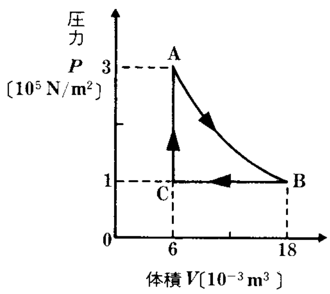
図のように，一定量の理想気体を状態Ａ(体積20l)から，Ａ→Ｂ→Ｃ→Ａの順に変化させました。このとき，次の問いに答えなさい。

(1)　この気体のモル数はいくらですか。

(2)　横軸を体積，縦軸を圧力として，この変化の圧力と体積の関係をグラフで表しなさい。



2 〈気体の内部エネルギーと比熱〉



一定量の理想気体を容器の中に封入し，圧力と体積を図のようにＡ→Ｂ→Ｃ→Ａの順序でゆっくり変化させました。ただし，Ａ→Ｂの過程は900Kの等温変化です。気体の定積モル比熱 C_v の値は $\dfrac{3}{2}R$ として，次の問いに答えなさい。

(1)　状態Ｃの温度はいくらですか。

(2)　理想気体は何モル封入されていますか。

(3)　(ア)　Ｂ→Ｃの過程で気体が外部にする仕事はいくらですか。

　(イ)　Ｃ→Ａの過程で気体が外部にする仕事はいくらですか。

(4)　(ア)　Ａ→Ｂの過程における気体の内部エネルギーの変化量はいくらですか。

　(イ)　Ｂ→Ｃの過程における気体の内部エネルギーの変化量はいくらですか。

(5)　Ｃ→Ａの過程で気体に与えられる熱量はいくらですか。　(北見工大)

3 〈気体の内部エネルギーと比熱〉

次の文章の $\boxed{}$ の中に適当な数式または数値を記入し，(　)の中の正しいものを○でかこみなさい。

(1) 理想気体1モルの圧力を P，体積を V，絶対温度を T とし，ガス定数を R とすると，これらの間には，

$\boxed{ア}$ ………①

の関係があります。また理想気体1モルの内部エネルギー U は次式で与えられます。

$$U=\frac{3}{2}RT \quad \cdots\cdots\cdots ②$$

(2) 温度 T_1，体積 V_1 の理想気体が，なめらかに動くピストンをへだてて外圧 P_1 とつりあっています。外圧を突然に P_2 まで下げ，気体をこの外圧に抗して断熱的に(熱遮断が完全で，熱の出入りがないこと)膨張させたところ，最終的に体積が V_2，温度が T_2 になったとします。この未知量 T_2，V_2 を既知量 P_1，P_2，T_1 の関数として求めてみましょう。

まず，理想気体が定圧 P_2 のもとで V_1 から V_2 まで膨張するのに要する仕事 W は，$W=\boxed{イ}$ であり，①式を用いて V_1，V_2 を消去すると，

$W=\boxed{ウ}$ ………③

となります。一方この膨張により，内部エネルギー U は㊁(増加　減少)し，その変化の大きさ ΔU は②式により，

$\Delta U=\boxed{オ}$ ………④

となります。断熱的に膨張するときには，$\Delta U=-W$ であるので，③，④式を用いると，膨張後の温度 T_2 および体積 V_2 はそれぞれ次式で求められます。

$T_2=\boxed{カ}$　　$V_2=\boxed{キ}$

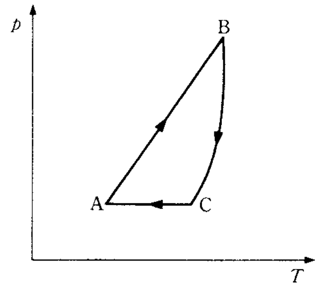
(3) 理想気体の定積比熱 C_v (体積を一定に保ったまま1モルの気体の温度を1K上げるのに必要な熱量)は，②式より，$C_v=\boxed{ク}$ で与えられ，定圧比熱 C_p(圧力を一定に保ったまま1モルの気体の温度を1K上げるのに必要な熱量)については，気体がさらに外圧に抗して膨張しなければならないことを考慮して②式を利用すると，C_p と C_v との間に次の関係式 $\boxed{ケ}$ が成立し，したがって，$C_p/C_v=r$ とおくと，理想気体に対しては，$r=\boxed{コ}$ となるはずです。　(京都府医大)

では，連続的な気体の変化についての例題です。

例題 12　理想気体の循環過程

次の文の □ の中にあてはまる式または数値を，また，｛　　｝の中の正しいものの番号を記入せよ。

なめらかに動くピストンを備えたシリンダーに 1 モルの理想気体が入れられている。この気体が，図のように状態 A から矢印の順に，体積一定の変化，断熱変化，圧力一定の変化をゆるやかに行って，ふたたび元の状態 A にもどるサイクルを考える。状態 A，B，C における温度を，それぞれ T_A，T_B，T_C〔K〕と表し，温度 T〔K〕におけるこの理想気体の内部エネルギーは $U=aT$〔J/mol〕で与えられるものとする（a は定数）。



(1)　A → B は体積一定の変化であるから，この間にこの気体が外部から受け取る熱量は (イ) □〔J〕であり，気体が外部に対してする仕事は (ロ) □〔J〕である。

(2)　B → C は断熱変化であるから，この間にこの気体が外部に対してする仕事は (ハ) □〔J〕となり，気体の体積は (ニ) □｛（i）　増加する。（ii）　減少する。（iii）　変化しない。｝

(3)　C → A は圧力一定の変化であるから，気体定数を R〔J/K･mol〕とすると，この間にこの気体が外部に対してする仕事は (ホ) □〔J〕，外部へ放出する熱量は (ヘ) □〔J〕である。

従って，この気体の定圧モル比熱が $C_p=\left(\frac{7}{2}\right)R$〔J/K･mol〕ならば，定数 a は (ト) □〔J/K･mol〕となる。この間に気体の体積は (チ) □｛（i）　増加する。（ii）　減少する。（iii）　変化しない。｝

(4)　以上の結果を用いて，問題の図にならって，サイクル A → B → C → A を，圧力 p（縦軸）－体積 V（横軸）のグラフとして描け。

(5)　このサイクルの熱効率は，〔気体が外部から受け取る熱量〕に対する〔気体が外部に対してする全仕事量〕の比で与えられるので，温度 T_A，T_B，T_C を用いて表すと (ヌ) □ となる。

（京都大）

Advice　(1)　体積一定のため，気体は仕事をせず，吸収した熱は内部エネルギーを増加させます。

(2)　断熱変化のため，外部との熱の出入りはありません。外部に仕事をすると内部エネルギーが減少します。

(3)　圧力一定のときに，吸収した熱量を求めるには，外部にした仕事と内部エネルギーの増加をそれぞれ計算して加えます。

(4)　断熱変化 p—V 曲線に注意しましょう。

(5)　熱機関は 1 サイクルのあいだに，高温熱源から熱 Q を吸収し，低温熱源に熱 Q' を放出した結果 $W=Q-Q'$ の仕事をします。このとき，熱効率は $\frac{W}{Q}(<1)$ で与えられます。

解き方　以下において，A → B，B → C，C → A の各過程で，気体が外部から吸収する熱量をそれぞれ Q_{AB}，Q_{BC}，Q_{CA} と表し，気体が外部に対してする仕事を W_{AB}，W_{BC}，W_{CA} で表す。また，状態 A，B，C での内部エネルギーをそれぞれ U_A，U_B，U_C とする。

(1) A → B は体積一定であるから，気体は外部に対して仕事をしない。

$W_{AB}=0$ ………①

したがって，熱力学第1法則 ($Q=\Delta U+W$) より，Q_{AB} は内部エネルギーの増加にひとしい。与えられた条件から，$U_A=aT_A$, $U_B=aT_B$ であるから

$Q_{AB}=U_B-U_A=a(T_B-T_A)$ ………②

(2) B → C は断熱変化であるから，外部との熱の出入りはない。

$Q_{BC}=0$ ………③

したがって，熱力学第1法則より，外部にした仕事 W_{BC} 分だけ内部エネルギーが減少する。$U_B=aT_B$, $U_C=aT_C$ より，

$W_{BC}=U_B-U_C=a(T_B-T_C)$ ………④

ここで，$W_{BC}>0$ のときは外部に仕事をする，すなわち，膨張することを意味し，このとき④より $T_B>T_C$，すなわち温度は下がる。逆に $W_{BC}<0$ のときは外部から仕事をされる，すなわち，圧縮されることを意味し，このとき④より $T_B<T_C$，つまり温度は上がる。問題のグラフをみると，B → C の過程で温度が下がっており，断熱膨張 ($W_{BC}>0$) であることがわかる。すなわち B → C のとき，気体の体積は増加する。

(3) C → A は圧力一定であるから，W_{CA} は圧力と体積の変化の積で与えられる。いま，一定の圧力を p とし，状態 A と C の体積を V_A, V_C とする。1モルのばあいの状態方程式 $pV=RT$ より，

$V_A=\dfrac{RT_A}{p}$,　　$V_C=\dfrac{RT_C}{p}$ ………⑤

したがって　$W_{CA}=p(V_A-V_C)=p\left(\dfrac{RT_A}{p}-\dfrac{RT_C}{p}\right)=R(T_A-T_C)$ ………⑥

一方，過程 C → A における内部エネルギーの増加は，$U_A-U_C=a(T_A-T_C)$ で与えられる。したがって熱力学の第1法則より，吸収した熱量 Q_{CA} は

$Q_{CA}=W_{CA}+U_A-U_C=R(T_A-T_C)+a(T_A-T_C)=(R+a)(T_A-T_C)$ ………⑦

グラフより，$T_C>T_A$ のため $Q_{CA}<0$ になるが，これは $-Q_{CA}$ の熱を放出していることを意味する。

$-Q_{CA}=(R+a)(T_C-T_A)$ ………⑧

定圧モル比熱 $C_p=\dfrac{7}{2}R$ を用いると，C → A で放出した熱量は $C_p(T_C-T_A)$ $=\dfrac{7}{2}R(T_C-T_A)$ で与えられるので，⑧より，

$(R+a)(T_C-T_A)=\dfrac{7}{2}R(T_C-T_A)$

したがって　$a=\dfrac{5}{2}R$ ………⑨

過程 C → A の体積の変化については，⑤において，$p=$ 一定で $T_C>T_A$ であることからわかるように，$V_C>V_A$ である。すなわち体積は減少する。同じことは，⑥からも判断できる。

(4) 以上の結果を，圧力と体積の変化に着目して整理すると，

$$A \xrightarrow[\text{体積一定}]{\text{圧力増加}} B \xrightarrow[\text{体積増加}]{\text{圧力減少}} C \xrightarrow[\text{体積減少}]{\text{圧力一定}} A$$

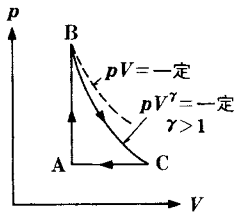


図1

まずわかることは，V—p 座標系で，A→B は p 軸に平行（$V=$ 一定），C→A は V 軸に平行（$p=$ 一定）であることである。B→C は断熱変化であり $pV^{\gamma}=$ 一定（ポアソンの法則）という曲線になる。ただし γ は比熱比で，$\gamma=\dfrac{C_p}{C_V}>1$ である。厳密な図が要求されているわけではないが，少なくとも等温変化のばあいの $pV=$ 一定（双曲線）との違いはわかる程度に描く必要はあろう。また p—V 図中の A，B，C の各点の p 軸の値は，問題で与えられた p—T 図の p 軸の値と同じようにとらなければならない。以上より，図1のごとく描ける。

(5) 気体が外部から熱を吸収するのは，過程 A→B のみで，②の Q_{AB} で与えられる。一方，外部に対してする全仕事量 W は，①，④，⑥および⑨より

$$\begin{aligned} W &= W_{AB}+W_{BC}+W_{CA} \\ &= 0+a(T_B-T_C)+R(T_A-T_C) \\ &= \frac{5}{2}R(T_B-T_C)+R(T_A-T_C) \qquad \cdots\cdots\cdots ⑩ \end{aligned}$$

②，⑨より $Q_{AB}=\dfrac{5}{2}R(T_B-T_A)$ であるから，熱効率は，

$$\begin{aligned} n &= \frac{W}{Q_{AB}} = \frac{\frac{5}{2}R(T_B-T_C)+R(T_A-T_C)}{\frac{5}{2}R(T_B-T_A)} = \frac{\frac{5}{2}(T_B-T_A)+\frac{7}{2}(T_A-T_C)}{\frac{5}{2}(T_B-T_A)} \\ &= 1-\frac{7(T_C-T_A)}{5(T_B-T_A)} \qquad \cdots\cdots\cdots ⑪ \end{aligned}$$

念のため，1サイクルのあいだに出入りした熱量の総和 Q を，②③⑦⑨より求め，⑩の W と比較すると，次のように $Q=W$ である事が確認できる。

$$\begin{aligned} Q &= Q_{AB}+Q_{BC}+Q_{CA} \\ &= a(T_B-T_A)+0+(R+a)(T_A-T_C) \\ &= \frac{5}{2}R(T_B-T_A)+\frac{7}{2}R(T_A-T_C) \\ &= R\left(T_A+\frac{5}{2}T_B-\frac{7}{2}T_C\right)=W \end{aligned}$$

●解答● (イ) $a(T_B-T_A)$　(ロ) 0　(ハ) $a(T_B-T_C)$

(ニ) (i)　(ホ) $R(T_A-T_C)$

(ヘ) $(R+a)(T_C-T_A)$　(ト) $\dfrac{5}{2}R$　(チ) (ii)

(リ) 図1参照　(ヌ) $1-\dfrac{7(T_C-T_A)}{5(T_B-T_A)}$

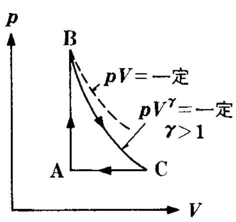


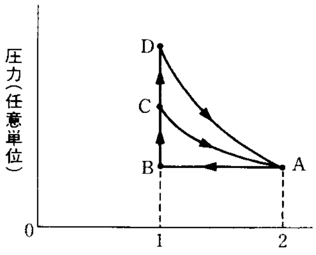
図1

実戦トレーニングに進みましょう。気体がどんな変化をするのか，等温変化か定圧変化か定積変化かなどをチェックして問題に取り組みなさい。

実戦トレーニング

1 〈気体の状態変化と内部エネルギー〉

単原子分子からなる1molの理想気体の状態を，図の矢印にそって変化させる。ここでA→Bは等圧過程，B→C，およびB→Dは等積過程，C→Aは等温過程，D→Aは断熱過程である。これらの各過程を素過程と呼ぶことにする。気体の状態が変化する間に，外部から気体に加えられる熱量をΔQ[J]，気体が外部にする仕事をΔW[J]とし，状態変化による気体の内部エネルギーの変化量をΔU[J]とする。



体積(任意単位)

次の問に答えよ。ただし，断熱過程では，気体の圧力Pと体積Vとの間に，$PV^{\gamma}=$一定の関係が成立する。ここでγは，定圧比熱と定積比熱との比で与えられる定数であり，$2^{\gamma}=3.2$とする。また，状態Bでの体積は，状態Aでの体積の半分に等しく，状態Aでの温度をT_A[K]，気体定数をR[J/K·mol]とする。

(a) ① ΔQ，ΔW，ΔUの間に成立する関係式を示せ。

② 素過程の中から，$\Delta U=0$のものを選び出し，その理由も述べよ。

③ 素過程の中から，$\Delta W>0$のものを選び出し，その理由も述べよ。

(b) 状態B，C，Dでの温度T_B，T_C，T_Dのそれぞれを，T_Aを用いて表せ。

(c) ① 素過程A→BにおけるΔQを，RおよびT_Aを用いて表せ。

② 素過程B→DにおけるΔQを，RおよびT_Aを用いて表せ。

③ 循環過程A→B→C→AにおけるΔWをΔW_0とする。素過程C→AにおけるΔQを，ΔW_0，R，およびT_Aで表せ。（東京工大）

問題 Memo 気体の内部エネルギー，気体に加える熱，気体のする仕事の関係を表すエネルギー保存則（熱力学第1法則）についての基本的な理解を確かめる問題です。気体の内部エネルギーは温度だけによってきまり，気体のする仕事は（圧力）×（体積の変化量）で求められます。それらの知識とエネルギー保存則，ボイル・シャルルの法則を気体の状態変化に対応して用いる必要があります。特徴は断熱変化の条件を与えて，断熱過程を扱っている点にあります。全般的にやや難しい問題です。

2 〈断熱変化の $P-V$ グラフの分析〉

理想気体の 1mol を，図1に示すシリンダーとピストンの系に閉じ込め，適当に加熱または冷却し，ピストンをなめらかに移動させる。気体の圧力を P〔N/m²〕，体積を V〔m³〕とし，図2に示すような状態の変化 A→B→C→A を得た。ここで，状態の変化 A→B は，断熱変化である。

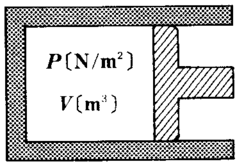


図1

変化 A→B→C→A の3通りの過程 A→B，B→C，C→A について，気体の内部エネルギーの変化 ΔU〔J〕，気体に出入りする熱 Q〔J〕，および気体がするまたはされる仕事 W〔J〕を，状態 A，B の圧力および体積，すなわち P_1，P_2，V_1，V_2，気体の定積（定容）モル比熱 C_v〔J/mol·K〕，および気体（ガス）定数 R〔J/mol·K〕を用いてあらわせ。ここで，気体の内部エネルギーの増加を正，その減少を負，気体に入る熱を正，気体から出る熱を負，およびピストンが気体にする仕事を正，気体がピストンにする仕事を負となるように正負の符号を選び，得られた ΔU，W，Q について，正負の符号（＋ または －）と絶対値（正の値であらわされる数式）とに分けて答えよ。また変化のない場合は，0(零)とのみ答えよ。　（長崎大-工）

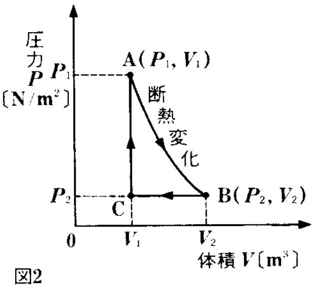
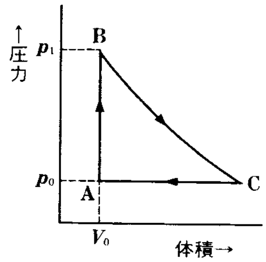


図2

問題 Memo　断熱変化の $P-V$ グラフが特徴です。とくに最近は，断熱変化の出題頻度が増加傾向にあります。この問題で，断熱の考え方や，定積モル比熱 C_v の使い方をよく理解してください。

3 〈***P***－***V*** **グラフの分析**〉

図のように，一定量の理想気体が，圧力 p_0〔N/m²〕，体積 V_0〔m³〕，温度 T_0〔K〕の状態Aから，体積を一定に保ったまま圧力が p_1〔N/m²〕の状態Bになり，次に，Bから温度を一定に保ったまま圧力 p_0〔N/m²〕の状態Cになり，最後に，Cから圧力を一定に保ったまま状態Aにもどった。このサイクルについて，次の各問いに答えよ。



(1) Bの温度を求めよ。

(2) Cの体積を求めよ。

(3) A→B，B→C，C→Aの各過程で，気体は熱を吸収したか，放出したかを答えよ。

(4) A→B，B→Cの各過程で，気体は仕事をしたか，しないか，されたかを答えよ。

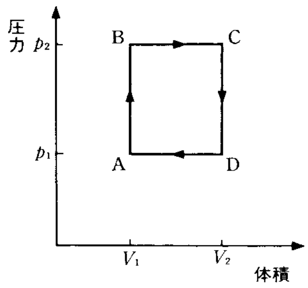
(5) C→Aの過程で気体がされた仕事の大きさを求めよ。

(6) A→B→C→Aの1サイクルの間に気体がした仕事の大きさは，図のどの部分で表されるか，図の該当する部分に斜線をほどこして示せ。

(7) A→B，B→C，C→Aの各過程で気体の内部エネルギーは増加するか，減少するか，変わらないかを答えよ。　(弘前大)

問題 Memo　*P*－*V* グラフは，熱力学の問題によく出題されますから，読みとり方をよく理解しておかなければいけません。このグラフから何が分析できるかを，問題を通じて研究しておきましょう。グラフには，理想気体の典型的な特徴がひそんでいます。

4 〈定積・定圧変化のみからなる気体の熱サイクル〉



シリンダーとピストンとの装置に満たされた理想気体とみなされる1モルの気体がある。その圧力をp，体積をV，絶対温度をTとしよう。図のように，はじめAの状態$(p_1,\ V_1,\ T_1)$にある気体を体積一定のまま熱して，Bの状態$(p_2,\ V_1,\ T_2)$にし，次に圧力一定で体積が変化するよう熱して，Cの状態$(p_2,\ V_2,\ T_3)$にした。次に体積一定のまま冷却して，Dの状態$(p_1,\ V_2,\ T_2)$にし，さいごに圧力一定で体積が変化するよう冷却して，はじめのAの状態$(p_1,\ V_1,\ T_1)$にもどした。どの過程も十分ゆっくりと変化させたものとする。気体定数をR，1モルあたりの定圧比熱および定積比熱を，それぞれC_p，C_vとして，次の問に答えよ。ただし熱量および比熱はジュール単位ではかるものとする。

問1　C_p，C_v，p_1，p_2，V_1，V_2，T_1，T_2，T_3を適宜用いて，この気体の内部エネルギー変化を，以下の過程について熱量と仕事で表せ。

1. A→Bの過程の内部エネルギー変化 $U_B - U_A$
2. B→Cの過程の内部エネルギー変化 $U_C - U_B$
3. C→Dの過程の内部エネルギー変化 $U_D - U_C$
4. D→Aの過程の内部エネルギー変化 $U_A - U_D$

問2　1周の過程A→B→C→D→Aで，この気体がピストンにしたさしひきの仕事を

1. Rと温度で表せ。
2. C_p，C_vと温度で表せ。

問3　T_2をT_1とT_3で表せ。

問4　1周の過程A→B→C→D→Aは熱機関としての働きをする。熱機関の効率は

$$\text{効率}=\frac{\text{気体がピストンにしたさしひきの仕事}}{\text{気体が熱せられたときの吸収熱量}}$$

で定義される。この場合の効率を，C_p，C_v，T_1，T_2，T_3で表せ。　(早稲田大-教育)

問題 Memo　理想気体の熱サイクルにおいて，内部エネルギーの変化や気体のした仕事そして効率を求めさせています。熱力学第1法則やボイル・シャルルの法則を用いて指示どおりの記号で表すこと。けっして難しい問題ではありません。記号を混乱しないように十分注意しながら解くことです。

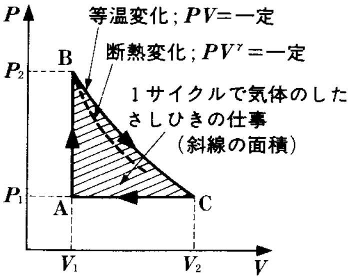
●ここに注目！● 熱サイクル

① ***P*－*V* グラフと気体の変化**

グラフと横軸で囲まれた面積が仕事を表す。

等温変化では，最初と最後で内部エネルギーは等しい。

気体に加えた（あるいは失った）熱量は，内部エネルギーの変化と仕事の出入りとを合わせて考えなければならない。



これで終わりです。第18日からは，気体の分子運動についての応用問題をします。

第 18 日

気体の分子運動７日間⑤　　学習日　　月　　日

応用問題 (1)　―気体の圧力―

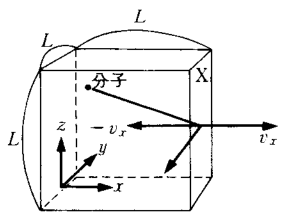
きょうは気体の分子運動についての応用問題をします。
最初は総合的な問題からです。

応用問題 9　気体の分子運動・熱機関

次の文および図の□の中にあてはまる式を，また，{　　}の中の正しいものの番号を記入せよ。

一定容器内の気体が示す圧力 p は気体分子が容器の壁に個々に弾性衝突しておよぼす力全体のあらわれである。単原子（1 原子）分子の理想気体では，1 分子当たりの平均の運動エネルギーを ε，容器内の分子の総数を N，容器の体積を V とすると，p はこの 3 つの量だけで定まる。

質量 m[kg] の分子 N 個のうち第 i 番目の分子（i-分子）の速度を $\overrightarrow{v_i}$[m/s]，その直交座標成分を v_{ix}，v_{iy}，v_{iz} とする（x 軸は壁面 X に垂直）。



i-分子が t 秒間に X に弾性衝突する回数＝(イ)□

i-分子が t 秒間に X に及ぼす力積＝(ロ)□[N·s]

(1) 図は，1 辺の長さ L[m] の立方体の容器の場合に p と ε，N，V との関係を導くためのものである。

ここで，分子の 2 乗平均速度

$$\overline{v^2}=\frac{1}{N}(v_1{}^2+v_2{}^2+\cdots\cdots+v_N{}^2)$$

を用いると

$$\varepsilon=\frac{1}{2}m\overline{v^2}$$

であり，また，x 成分につき

$$\overline{v_x{}^2}=\frac{1}{N}(v_{1x}{}^2+\cdots\cdots+v_{Nx}{}^2)$$

（y，z 成分についても同様）および

$$\overline{v^2}=\overline{v_x{}^2}+\overline{v_y{}^2}+\overline{v_z{}^2}$$

である。そして，非常に多数の分子がどの方向にも同じ割合で運動していることから

$$\overline{v_x{}^2}=\overline{v_y{}^2}=\overline{v_z{}^2}$$

とすることができる。その結果，圧力を ε，N，V を用いて表すと，$p=$(ハ)□[N/m²] が得られる。

(2) 単原子分子気体は，十分(ニ){ (a)　高密度　(b)　低温　(c)　低密度 }の場合その内部エネルギーが分子の運動エネルギーのみで定められ，理想気体とみなすことができる。そのような状態で気体は一定の比熱をもち，定圧モル比熱は定積（定容）モル比熱より大きい。この理由を説明するため，気体をある圧力と体積の状態から

Ⅰ　固定壁で囲まれた容器内でゆっくり加熱し温度1〔K〕上昇させる場合，と

Ⅱ　滑らかなピストンにより体積が自由に変えられる容器内で外圧を一定に保ちながらゆっくり温度1〔K〕上昇させる場合

とについて考える。それぞれの場合の終状態で気体の(ホ){(a)　内部エネルギー　(b)　圧力および体積　(c)　なした仕事}は等しいが，一方，Ⅱの場合の気体の温度上昇には(ヘ){(a)　可逆的な断熱圧縮　(b)　可逆的な膨張　(c)　不可逆変化}のため，余分の熱量が必要である。

(3)　この気体は単原子理想気体であるとし，ある状態O(p_0，V_0)から始まって2つの状態A，Bを経て再びOにもどる次のような過程

$$\mathrm{O} \xrightarrow{\text{体積一定}} \mathrm{A}(p_A(>p_0),\ V_0) \xrightarrow{\text{断熱}}$$

$$\mathrm{B}(p_0,\ V_B(>V_0)) \xrightarrow{\text{圧力一定}} \mathrm{O}$$

をたどるとき，各過程で気体が吸収する熱量Qをp_0，V_0，p_A，V_Bを用いて表すと

過程O→Aで　$Q(\mathrm{O}\to\mathrm{A})=$(ト)$\boxed{}$〔J〕

過程A→Bで　$Q(\mathrm{A}\to\mathrm{B})=$(チ)$\boxed{}$〔J〕

過程B→Oで　$Q(\mathrm{B}\to\mathrm{O})=$(リ)$\boxed{}$〔J〕

となる。したがってこの過程全体は，気体が熱源から$Q(\mathrm{O}\to\mathrm{A})$の熱をとり仕事$W$に変えて働く熱機関の1サイクルとみなすことができて，その効率は

$\dfrac{W}{Q(\mathrm{O}\to\mathrm{A})}=1-$(ヌ)$\boxed{}$で定められる。　（京都大）

気体の分子運動論，定積過程と定圧過程における熱と仕事，熱機関等の教科書レベルの基本的な問題です。したがって確実に解けることが望まれます。

〔解答欄〕

Advice (1) 気体分子運動論を用いて，気体の圧力を導きます。ほとんど教科書どおりなので，確実にできることが必要です。

(2) 定積過程では，気体は仕事をせず加えられた熱は内部エネルギーの増加のみに使われます。また定圧過程では，気体のする仕事は **(圧力)×(体積変化)** で与えられます。

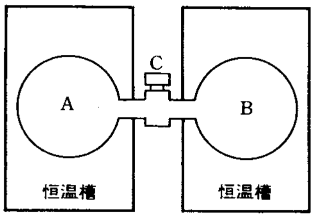
(3) 定積過程で吸収する熱量は，内部エネルギーの増加から，求められます。定圧過程で吸収する熱量は，内部エネルギーの増加分と気体が外部にした仕事の和から求められます。また断熱過程では熱の出入りはありません。内部エネルギーは個々の分子の運動エネルギーの総和で与えられます。必要な公式が，(1)の結果から導けます。

(4) 1サイクルで行った仕事量は，熱力学第1法則 $Q=\Delta U+W$ の式で $\Delta U=0$ とおくと，$W=Q$ で求められます。

気体の混合はよくあつかわれる題材です。条件をよく見極めてから取りかかるようにしなさい。

応用問題10　水蒸気を含んだ気体の混合

次の文中の□に有効数字2けたの数を記入し，(c)□では正解を選択記入せよ。また(f)□の枠内には文章を記入せよ。



図に示すように容積が10.0lの2個の容器A, Bが，それぞれ恒温槽に入っており，互いに細い管で連結され，中間にコックCがある。

コックCを閉じた状態で，A，Bを入れた恒温槽は，ともに10℃に保たれている。Aの中には窒素ガスが入っており，底には5.00×10^{-2}molの水が液体となってたまっている。A内の圧力は4.00×10^{3} N/m^{2}で平衡状態にある。また，Bの中は真空である。

1)　10℃における水の飽和蒸気圧（飽和蒸気の示す圧力）は1.23×10^{3}N/m^{2}であるから，ガス定数Rを8.31J/K·molとすると，容器Aの中の窒素ガスの量は(a)□molである。

2)　ここでコックCを開いた後，じゅうぶん時間がたつと，AおよびBの中の圧力は(b)□N/m^{2}となった。

3)　窒素ガスのもつ内部エネルギーは，コックを開く前と後とで変化して(c)□（いる。いない。）コックを開いた後の窒素ガスの内部エネルギーの値は，それが0℃であるときの値より(d)□Jだけ大きい。ただし窒素ガスの定積モル比熱（または定容モル比熱）は2.5Rであるとした。

4)　コックCを開いたまま，A, Bをともに200℃に温度を上げたとき，圧力は(e)□N/m^{2}となる。

5)　上記の解答(a)，(b)，(d)および(e)を算出するに際して使用した仮定を，思いつくかぎりあげよ。(100字以内)　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　（大阪大）

容器内の飽和水蒸気圧は，温度によってきまった値になります。したがって，容器に水があるかぎり，水蒸気のモル数nが変化するため，ボイル・シャルルの法則を使うわけにはいきません。まずこの点に注意して問題を解くのがカギです。もうひとつは，5)で，使用した仮定を思いつくかぎりあげることです。このような出題には，気体の性質についての深い知識が必要になります。

〔解答欄〕

Advice

1. 容器内にいくつかの気体が入っていると，容器内の圧力はそれぞれの気体の圧力の和になります。これを気体の分圧の法則といいます。1)では，窒素ガスだけの圧力を使って，窒素ガスのモル数を求めなければなりません。
2. 2)では，A，Bの温度は10[°C]で等しいですから，コックCを開くと，A内の底にある水から水蒸気が蒸発し，A，Bの中は等しく飽和水蒸気圧になります。一方，A内の窒素ガスの一部がB内にも入って，A，B内の窒素ガスの圧力は等しくなります。A(およびB)の圧力は，飽和水蒸気圧と窒素ガスの圧力の和になります。
3. 3)では，気体の内部エネルギーは温度の関数であることに注意しましょう。コックを開いた後の窒素ガスの内部エネルギーの変化は，熱力学の第1法則 $Q=\varDelta U+W$ から求めるとよいでしょう。Q は，定積モル比熱 C_v を使って $Q=nC_v(T'-T)$ と表すことができます。気体のする仕事 W は，気体の圧力 P が一定のときは $W=P\varDelta V$($\varDelta V$ は体積変化)となりますが，$\varDelta V=0$ であると，$W=0$ となります。
4. 4)では200[°C]において水がすべて水蒸気になっているかどうか調べなくてはなりません。このとき，水の沸点は1気圧($\fallingdotseq 1\times10^5$[N/m²])で100[°C]ということを知っていると解くことができます。すなわち，水がすべて蒸発したと仮定したとき100[°C]では水蒸気圧がいくらになるかを求め，これが100[°C]の水の飽和蒸気圧 1×10^5[N/m²]より小さければ，100[°C]より高い温度において水はすべて蒸発して水蒸気となります。
5. 5)では，どんな仮定があるかと考えるよりも，出題文にあるように，〝算出する際に使用した〟仮定は何かと考えるとよいでしょう。

答えは別冊にあります。答えあわせをしてあやふやな点のないようにしてから，実戦トレーニングに進みなさい。

実戦トレーニング

1 〈気体の分子運動論〉

つぎの問題の□の中に入れるべき正しい答，または正しい答に最も近い数値を問題末尾の解答表の中から選び，その番号を解答用マーク・カードの指定された欄にマークしなさい（番号の中の0という数字も必ずマークすること。同じ番号を何回用いてもよい）。

x 軸に垂直な面積 S〔$\mathrm{m^2}$〕の壁に，x 方向より速さ v_x〔m/s〕，質量 m〔kg〕の粒子が飛んで来て壁と完全弾性衝突をする。面積 S〔$\mathrm{m^2}$〕の壁への一秒間当りの粒子の衝突回数を n 回とすれば，衝突によって受ける壁の平均の圧力は(ア)□〔$\mathrm{N/m^2}$〕である。一方単原子分子の理想気体では，粒子の質量を m〔kg〕，ボルツマン定数を k〔J/K〕とすれば，粒子の速さの二乗平均 $<v^2>$〔$\mathrm{m^2/s^2}$〕と温度 T〔K〕との関係は，$<v^2>=$(イ)□〔$\mathrm{m^2/s^2}$〕である。x，y，z 方向について等方的であるとすると，$<v_x{}^2>=\dfrac{1}{3}<v^2>$ が成立する。したがって質量 4.14×10^{-27}〔kg〕の単原子分子の温度300〔K〕における x 方向の平均の速さ $\overline{v_x}$ は，$\overline{v_x}=\sqrt{<v_x{}^2>}=$(ウ)□〔m/s〕となる。ただし，$k=1.38\times10^{-23}$〔J/K〕である。この気体の圧力が 1.00×10^5〔$\mathrm{N/m^2}$〕のとき，x 軸に垂直な1〔$\mathrm{m^2}$〕の面積の片面に粒子が1個当る平均の時間は，(エ)□〔s〕である。地球より高さ100〔km〕の空間では，温度が200〔K〕，圧力は 10^{-1}〔$\mathrm{N/m^2}$〕である。この単原子分子気体が上記の空間と同じ条件におかれたとき，1〔$\mathrm{m^2}$〕の面積の片面に1秒間に粒子が当る平均の個数は(オ)□個である。またこのときの単原子分子気体の密度は(カ)□〔$\mathrm{kg/m^3}$〕である。アボガドロ数 N_0 は $N_0=6.02\times10^{23}$〔個/mol〕である。

〔解答表〕

01. $\dfrac{nmv_x{}^2}{S}$	02. nSm	03. $\dfrac{2v_xm}{S}$
04. $\dfrac{2nmv_x}{S}$	05. $2nmv_xS$	06. $\dfrac{3}{2}nkTv_x$
07. $\dfrac{3kT}{m}$	08. $\dfrac{kT}{m}$	09. $\dfrac{nv_x{}^2}{mS}kT$
10. $\sqrt{\dfrac{kT}{m}}$	11. $\sqrt{\dfrac{nmv_x{}^2}{S}}$	12. $\dfrac{S}{nmv_x}$
13. 8.28×10^{-29}	14. 1.05×10^{-24}	15. 6.03×10^{-22}
16. 1.38×10^{-16}	17. 1.50×10^{-7}	18. 7.89×10^{-4}
19. 4.32×10^{-3}	20. 8.16×10^{2}	21. 1.00×10^{3}
22. 6.03×10^{7}	23. 3.81×10^{10}	24. 5.21×10^{11}
25. 4.89×10^{12}	26. 6.55×10^{15}	27. 8.1×10^{16}
28. 5.62×10^{20}	29. 1.48×10^{22}	30. 1.17×10^{24}

（東京理科大-理工〈機械工・情報科〉）

問題 Memo 気体分子運動論の問題ですが，見慣れない形式です。通常のパターンでは，最終結果を導く過程でのみ登場する壁との衝突回数や衝突間の平均時間をおもに計算させています。そのために，誘導型の問題とは逆に，結果に対する知識を用いる必要が出てくるところが特徴といえるでしょう。

2 〈気体の断熱変化から音速を導く方法〉

(1) 気体中の音波は疎密の波であり，音波に伴う媒質の伸び縮みは，熱の出入りのない断熱変化である。気体が理想気体であれば，断熱変化に対し，圧力 $p(\mathrm{N/m^2})$ と体積 $v(\mathrm{m^3})$ の間に，$pv^{\gamma}=$ 一定 の関係がある。ここに γ は，定圧比熱と定積比熱の比である。以下の問いに答えよ。

(A) 断熱変化により，気体の圧力と体積が，それぞれ，平均の値 p および v から，$p+\Delta p$ および $v+\Delta v$ となったとすると，Δp と Δv の間にどのような関係が成り立つか。
Δp，Δv は，それぞれ，p，v に比べて十分小さいとして，Δp，Δv について1次の項のみを残せ。なお，末尾の注を参考にせよ。

(B) 気体中の音速度 $V(\mathrm{m/s})$ は，体積弾性率を $\kappa(\mathrm{N/m^2})$，密度を $\rho(\mathrm{kg/m^3})$ とすると，$V=\sqrt{\dfrac{\kappa}{\rho}}$ で与えられ，体積弾性率 κ は $\dfrac{\Delta p}{\left(-\dfrac{\Delta v}{v}\right)}$ で定義される。(A)の結果から κ を求め，音速度 V を p と ρ を用いて表せ。

(2) 上の結果に基づき，理想気体の音速度の温度依存性を求めることができる。以下の問いに答えよ。

(A) 理想気体 $m(\mathrm{kg})$ に対する圧力 $p(\mathrm{N/m^2})$，体積 $v(\mathrm{m^3})$ および温度 $T(\mathrm{K})$ の関係式を記せ。ただし，この気体1モルの質量を $M(\mathrm{kg})$，また，気体定数を $R(\mathrm{J/mol\cdot K})$ とする。

(B) 理想気体の音速度 V は，温度だけで定まり，圧力にはよらないことを示せ。

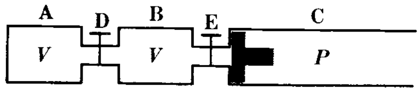
(C) 温度を，$T(\mathrm{K})$ のかわりに $t(^\circ\mathrm{C})$ で表すこととして，$V=V_0(1+at)$ と記すと，a はいくらか。注を参考にして，有効数字3桁(けた)まで求めよ。ここに，V_0 は $0^\circ\mathrm{C}$ における音速度である。

〔注〕 ある量 x の小さな変化 Δx に対し，$\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)^{\beta}\fallingdotseq 1+\beta\dfrac{\Delta x}{x}$ と近似できる。 （東北大）

問題 Memo 大気中を伝わる音速 $V=331.5+0.6t$〔m/s〕は，空気の断熱変化から得られることを段階を追って解くように問題が構成されています。大学1年の物理の本に出てくる問題を，高校のレベルまで解きほぐして出題しています。発展的な内容を扱ってありますが，かみくだいてあるのでけっして難しい問題とはいえません。ただし，近似式の使い方がポイントです。

3 〈断熱された連結容器内の気体の混合〉

図のように容器Aと容器Bとが弁Dのついた管で接続され，容器Bとピストン・シリンダーCとが弁Eのついた管で接続されている。この装置全体と外部とは断熱されており，ピストンの外部側の圧力は大気圧 P〔N/m^2〕である。容器AとBの容積は等しく V〔m^3〕であり，はじめピストンは押しこまれ，シリンダーC内の容積は0である。容器Aには圧力 $5P$〔N/m^2〕，温度 $5T$〔K〕で定積モル比熱が $\frac{3}{2}R$〔J/K・mol〕(R は気体定数)の理想気体 G_1 が入っている。容器Bには圧力 P〔N/m^2〕，温度 T〔K〕で定積モル比熱が $\frac{5}{2}R$〔J/K・mol〕の理想気体 G_2 が入っている。装置のすべては断熱材でできており，またその熱容量は無視してよい。管および弁の持っている容積は無視できるほど小さい。



(1) このとき，

(a) 気体 G_1 のモル数は気体 G_2 のモル数の何倍か。

(b) 気体 G_1 の内部エネルギーは気体 G_2 の内部エネルギーの何倍か。

(2) さて，弁Eは閉じたまま，弁Dをゆっくり開き，気体 G_1 と G_2 とを混合する。両気体は互いに反応しないものとする。十分に時間がたって平衡に達したとき，

(a) 混合気体の温度は T の何倍か。

(b) 圧力は P の何倍か。

(3) さらに，弁Eをゆっくり開き，混合気体をシリンダーC内に膨張させる。このときシリンダーC内の圧力が常に P に保たれたままピストンは移動するものとする。全体が平衡に達したとき，

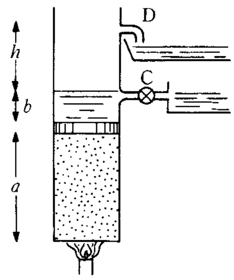
(a) シリンダーC内にある混合気体の体積は V の何倍か。

(b) 温度は T の何倍か。 (横浜国大-工)

問題 Memo この問題の特徴は，容器内の気体を混合させたとき，外から熱の出入りがない(断熱だから)のに，容器内の温度が変わるところにあります。熱はエネルギーですから，エネルギーの出入りがなくて温度が変わるということは，内部エネルギーの大きな気体から内部エネルギーの小さな気体へエネルギーが移動したと考えられます。しかし，エネルギーの合計は変化しないのですから，エネルギー保存の法則が適用できます。

4 〈熱機関による水のくみ上げ過程〉

図は気体の熱膨張を利用して水をくみ上げる装置である。はじめ円柱に高さ a まで単原子分子の理想気体が入れてあり，ピストンの上に注水口Cまで深さ b の水がたまってつり合っている。この状態をⅠとよぶ。注水口Cを閉じて気体を加熱すると水面はゆっくり上がり，高さ h の排水口Dに達する（状態Ⅱとよぶ）。さらに加熱するにしたがって水は排水口Dからあふれ出し，ピストンがDに達して排水を終る（状態Ⅲ）。ここで加熱を止めると，気体が冷えるにしたがってピストンは下がり，注水口Cに達する（状態Ⅳ）。注水口Cを開くと，水はピストンの下がるにつれて注入され，気体が外気と等温になったところで止まり，状態Ⅰにもどる。



外気の圧力を p_0，その絶対温度を T_0，円柱の断面積を S，水の密度を ρ，重力加速度を g，ピストンの重さは無視できるものとしてつぎの設問に答えよ。

1. 状態Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳにおける気体の圧力 p_1，p_2，p_3，p_4 およびその絶対温度 T_1，T_2，T_3，T_4 を求めよ。
2. Ⅰ→Ⅱ→Ⅲ→Ⅳ→Ⅰの一巡で，気体が外部にする仕事 W はいくらか。
3. 状態ⅠからⅡまでの間に気体が吸収する熱量 Q_1 はいくらか。
4. 状態ⅡからⅢまでの間に気体が吸収する熱量 Q_2 はいくらか。　　（東京大）

問題 Memo　熱機関で水のくみ上げを行うという変わった問題です。4つの異なる状態のそれぞれにおける気体の体積，圧力，温度が求められればあとは普通の熱機関の問題とかわりがありません。断熱過程がないぶん，考えやすいかもしれません。

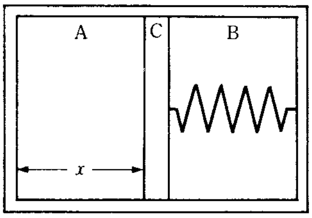
これで終わりです。

第 19 日	気体の分子運動 7 日間 ⑥ 　　学習日　　月　　日
	応用問題 (2) —気体の変化—

きょうも気体の分子運動についての応用問題に挑戦します。
最初は気体の系にばねを組みあわせた問題です。

応用問題 11　バネと気体の系でのエネルギー保存

図に示すように，両端が閉じられたシリンダーの内部が，なめらかに移動できるピストン C によって左右に仕切られている。A の部分には 1mol の単原子分子からなる理想気体が封じられている。B の部分は真空で，ピストンはバネ（バネ定数は k）でシリンダーの右端に結ばれている。いま，ピストンの左端からシリンダーの左端までの長さが x になったところで，気体の圧力 P による力とバネの力がつり合った。A の部分がかりに真空である場合には，$x=0$ で，またこのときのバネの長さは自然の長さに一致するとして，つぎの問に答えよ。



(a)　シリンダーの断面積を S として，気体の圧力による力とバネの力とのつり合いの式を求めよ。

(b)　上で求めた関係式を使って，気体の内部エネルギー U をバネの弾性エネルギー E で表わせ。

(c)　図に示した装置全体が絶対温度 T に保たれているとき，気体定数を R として U を T で表わし，さらに(b)の結果を用いて E も T で表わせ。

(d)　A の部分に封じられている気体の温度をゆっくり t だけ上昇させるとき，気体が吸収する熱量はいくらか。

(e)　気体の質量が 4.0×10^{-2}kg，$k=2.0\times10^{4}$N/m のとき，$x=3.5\times10^{-1}$m であった。このときの気体の分子の二乗平均平方根速度（速度の二乗の平均値の平方根）と気体の絶対温度の値を求めよ。ただし，$R=8.3$J/K·mol とする。　（東京工大）

気体の状態方程式から気体の内部エネルギー，エネルギー保存，バネの弾性エネルギー，気体の分子運動まで幅広く総合力が必要とされる問題です。力のつりあい条件と気体の状態方程式，気体の内部エネルギーなどから，バネのエネルギーを絶対温度で表すところに特徴があります。全体の見とおしがつけばそれほど難しい問題ではありません。

〔解答欄〕

Advice (a) 気体からピストンが受ける力は，(気体の圧力)×(ピストンの面積)となります。

(b) 温度 T〔K〕の単原子分子気体１モルの内部エネルギーは $\frac{3}{2}RT$〔J〕です。気体の状態方程式を用いて RT とバネのエネルギーを関係づけます。

(c) ここではじめて気体の温度が与えられますから，(b)での関係式より E を T で表します。

(d) 気体のする仕事はバネのエネルギーの増加になります。気体の内部エネルギー U とバネの弾性エネルギー E が温度の関数になっていますから，気体の内部エネルギーの増加と気体のする仕事が求まります。

(e) 気体分子の運動エネルギーと k，x の関係を求めます。

もうひとつ応用問題をしましょう。

応用問題 12　等温変化・断熱変化のある熱サイクル

次の文中の空欄にあてはまる答を記入せよ。

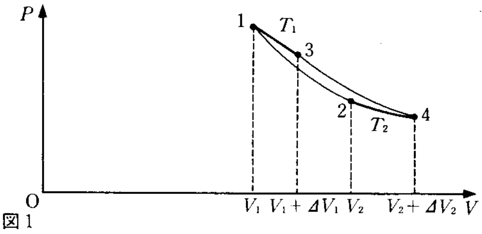


図 1

シリンダーとなめらかに動くピストンからなる装置の中に，n モルの理想気体を閉じ込めた。この気体を図 1 の [1 → 3 → 4] と [1 → 2 → 4] の 2 つの経路をたどって状態 1 から状態 4 へゆっくり変化させた場合について考える。

(a)　経路 [1 → 3 → 4] の場合：まず状態 1(体積 V_1，絶対温度 T_1) から状態 3($V_1+\Delta V_1$，T_1) への移行は，温度 T_1 の熱源を接触させた等温変化である。このとき気体が熱源から吸収する熱量 $\Delta Q_{1\to3}$ を求めよう。気体定数を R とし，経路 [1 → 3] の途中での圧力を P，体積を V とすると，P，V の関係は

(イ)$\boxed{}$

で与えられる。ΔV_1 は V_1 にくらべて十分小さく，圧力の変化が無視できる場合，状態 1 と状態 3 で与えられた変数を使って表わすと

$\Delta Q_{1\to3}=$ (ロ)$\boxed{}$

となる。状態 3 から状態 4($V_2+\Delta V_2$，T_2) への移行は断熱変化であり，温度は T_1 から T_2 まで下がる。この理想気体の定圧比熱と定積比熱の比を γ とすると，経路 [3 → 4] の途中では，P，V について

(ハ)$\boxed{}$ ＝一定

の関係が成立する。このため経路 [3 → 4] では絶対温度 T と V の関係は

(ニ)$\boxed{}$ ＝一定

と表わすことができる。

(b)　経路 [1 → 2 → 4] の場合：状態 1 から状態 2(V_2，T_2) までは断熱変化であり，温度は T_1 から T_2 へ下がる。状態 2 から状態 4 までは温度 T_2 の熱源に接触させた等温変化である。ΔV_2 が V_2 にくらべて十分小さい場合，この経路 [2 → 4] の過程で気体の吸収した熱量 $\Delta Q_{2\to4}$ も(a)と同様に計算できる。

以上求めてきた関係式を用いて(a)の経路 [1 → 3 → 4] に沿っての $\dfrac{\Delta Q}{T}$ と(b)の経路 [1 → 2 → 4] に沿っての $\dfrac{\Delta Q}{T}$ を比較してみよう。(a)の経路に沿っては

$$\left[\frac{\Delta Q}{T}\right]_{1\to3\to4}=\left[\frac{\Delta Q}{T}\right]_{1\to3}+\left[\frac{\Delta Q}{T}\right]_{3\to4}=\text{(ホ)}\boxed{}$$

となり，一方，(b)の経路に沿っては

$$\left[\frac{\Delta Q}{T}\right]_{1\to2\to4}=\left[\frac{\Delta Q}{T}\right]_{1\to2}+\left[\frac{\Delta Q}{T}\right]_{2\to4}=\text{(ヘ)}\boxed{}$$

となる。ここで4つの量 V_1 と $\varDelta V_1$, V_2, $\varDelta V_2$ の間には，(ニ)の関係を考えると

$$\frac{V_2}{V_1} = \text{(ト)}\boxed{}$$

の関係がある。したがって

$$\left[\frac{\varDelta Q}{T}\right]_{1\to3\to4} - \left[\frac{\varDelta Q}{T}\right]_{1\to2\to4} = \text{(チ)}\boxed{}$$

となる。　(早稲田大-教育)

シリンダーとなめらかに動くピストンからなる装置中の気体を状態1から状態4にゆっくり変化させるのに2つの経路を想定し，それぞれについて吸収する熱量や気体の体積，さらに $\dfrac{\varDelta Q}{T}$ を求めさせています。このうち，$\dfrac{\varDelta Q}{T}$ という量については高校では扱いませんが題意にしたがって解き進めれば答えられます。問題文をよく理解しながら条件を間違えないように一歩ずつ解答しましょう。

〔解答欄〕

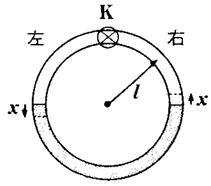
Advice
(イ)　状態方程式を用います。
(ロ)　等温変化では内部エネルギーは変化しません。
(ニ)　(ハ)の式より導きだします。
(ホ)　〔$3\to4$〕の過程は断熱変化なので $\varDelta Q=0$ です。
(ヘ)　〔$2\to4$〕の過程については(ロ)と同様に考えます。〔$1\to2$〕は断熱過程です。
(ト)　(ニ)の式を (V_1, T_1) と (V_2, T_2) について適用します。
(チ)　(ホ), (ヘ), (ト)の結果から導きだします。

応用問題の解答は別冊にあります。答えをきちんと確認してから，実戦トレーニングに進みなさい。

実戦トレーニング

1 〈気体の状態量の微少変化〉

最上部にコックKをもち，半径 l の円環状をした，一様な断面積 S をもつ熱を通さない管が，図のように鉛直面内に固定されている。その下半分には水銀が，上半分には圧力 p の単原子分子の理想気体 $2n$ モルが封入されている。この水銀が一体となって管内を微少振動するとき，気体定数を R として，以下の問に答えよ。ただし，水銀の表面張力，粘性，蒸気圧，および水銀と管壁との摩擦は，無視できるものとし，また気体と水銀との間では熱のやりとりはないものとする。



(1) コックKを開き，管の左右の気体を自由に出入りできるようにして，水銀を微小振動させる。このときこの気体の内部エネルギーは不変である。その理由を述べよ。また，この内部エネルギーを求めよ。

(2) 気体を左右 n モルずつに分けてコックKを閉じ，水銀を微小振動させる。左右の液面の下降分がそれぞれ x，$-x(x \ll l)$ であるとき

(i) 左右の気体の内部エネルギーのそれぞれの増加分 Δu_1，Δu_2 を求めよ。

(ii) 左右の気体の圧力および温度のそれぞれの増加分 Δp_1，Δp_2 および ΔT_1，ΔT_2 を求めよ。

(明治大-工)

問題 Memo 気体の体積，圧力，温度，内部エネルギーがそれぞれわずかに変化するときの変化量を求める問題です。近似の方法にとまどうかもしれません。水銀の微少振動はそれぞれの量に微少変化をあたえるためだけのものです。

2 <状態変化を含む気体の定圧冷却>

この問題では，小問(1)，(2)の文中の $\boxed{}$ の中に入る式，(3)の説明文，(4)で選んだ記号などを，解答用紙の指定された欄に記入せよ。

図4に示すように，面積が S〔m²〕で質量が無視できるようなピストンを持つ円筒容器に，質量 M〔kg〕の気体を封入して低温の冷却機に接触させたところ，気体は全体で一様な温度を保ちながらゆっくりと冷却された。ピストンは大気圧 p_0〔N/m²〕のもとでなめらかに動くことができる。冷却機と接している面以外で熱の出入はない。熱量の単位はJ(ジュール)とし，気体または液体の内部エネルギー u が増加するとき，その増加量 Δu を正，外部から容器内に入る熱量 ΔQ を正とし，また，大気圧が気体に仕事をするようにピストンが動くとき，ピストンの移動量 Δl を正とする。

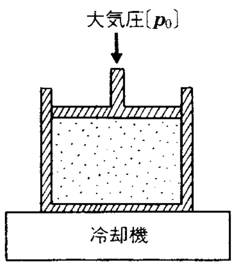


図4

(1) ある時間内に，気体の温度が ΔT〔K〕だけさがり，ピストンが Δl〔m〕移動した。このとき，気体が大気圧から受けた仕事は(ﾅ) $\boxed{}$〔J〕で，定圧比熱 C_p〔J/kg·K〕を使えば内部エネルギー u の変化は(ﾆ) $\boxed{}$〔J〕となるから，気体から冷却機に流れた熱量は(ﾇ) $\boxed{}$〔J〕である。

(2) 気体の温度が T_0〔K〕にさがったとき液化がはじまり，全部液体に変るまで全体が T_0〔K〕の一定温度に保たれた。この温度における気体と液体の密度をそれぞれ D_1〔kg/m³〕，D_2〔kg/m³〕とおけば，M〔kg〕の気体がすべて液体に変る間に大気圧がした仕事は(ﾈ) $\boxed{}$〔J〕である。この物質が T_0〔K〕で気化する時には，逆に外部に仕事をする。圧力 p_0〔N/m²〕における気化熱を q〔J/kg〕であらわし，T_0〔K〕の液体1kgがすべて気化するときの内部エネルギーの変化を Δu〔J〕とおけば，q を D_1，D_2，Δu などであらわして $q=$ (ﾉ) $\boxed{}$〔J/kg〕である。したがって，M〔kg〕の気体が液化しはじめてから，すべて T_0〔K〕の液体に変るまでに冷却機に流れ込んだ熱量を，q を使わずに，Δu，D_1，D_2，p_0 などを使ってあらわせば(ﾊ) $\boxed{}$〔J〕となる。

(3) 気体が液化する時や，液体が気化するときは，その全体の温度を一定に保つと，熱の放出や吸収がある。この理由を「分子間の位置エネルギー」または「分子の平均運動エネルギー」のどちらか(または両方)の言葉を使って60字以内で説明せよ。

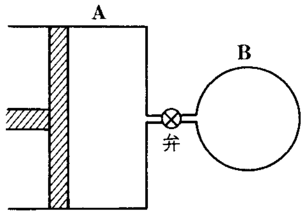
(4) 上の(1)，(2)の経過の中に，次のⓐ～ⓖに列記するような物理現象がある。これらの中に含まれる不可逆現象を一つえらび，その記号を書け。

ⓐ 大気圧が気体にする仕事
ⓑ ピストンのなめらかな移動
ⓒ 気体の液化
ⓓ 高温の気体や液体から冷却機への熱の伝導
ⓔ 気体や液体の体積変化
ⓕ 熱や仕事の内部エネルギーへの転換
ⓖ 液体内で高温部から低温部への熱の伝導　　(東京理科大-工〈機械工・経営工〉)

問題 Memo 気体の液化，および液体の気化にともなう熱や仕事の出入りを，おもに取り上げています。記述式の問題や，不可逆変化に関する問題も含まれており，やや毛色が変わっています。

3 〈連結容器と気体の内部エネルギー〉

図のように，ピストンをもつ円筒容器Aが弁をもつ細管で容器Bと連結されている。すべての部分は熱の出入りがないように断熱材でできており，容器Aの容積は容器Bの容積に比べて十分大きく，細管と弁の容積は無視できる。初め弁は閉じられていて，容器A，Bはいずれも温度T〔K〕の2原子分子の理想気体で満たされており，容器A内の気体の圧力はP_A〔N/m^2〕，容器B内の気体の圧力はP_B〔N/m^2〕$(P_B<P_A)$である。次に弁を開いて容器A内の気体がゆっくり容器Bの方へ流れるようにする。そのとき容器A内の圧力P_Aを一定に保つようにピストンを移動させ，流れが止まったとき弁を閉じる。



次の問に答えよ。ただし，容器Bの容積をV〔m^3〕，気体定数をR〔J/mol·K〕，定積モル比熱を$\frac{5}{2}R$〔J/mol·K〕とする。

(1) この過程で気体になされた仕事W〔N·m〕はいくらか。また，このとき容器A，B内の気体の内部エネルギーの増加ΔU〔J〕はいくらか。ただし，容器Aから容器Bへ移動した気体のモル数Δnを用いて表せ。

(2) 容器Aから容器Bへ移動した気体のモル数ΔnをR，T，V，P_A，P_Bで表せ。

(3) 容器B内の気体の温度変化ΔT〔K〕をT，P_A，P_Bで表せ。

(4) 気体の移動が終わった後の容器B内の気体の温度を，初めの温度Tにするためには，容器Bからいくらの熱量を取り去ればよいか。この熱量Q〔J〕をV，P_A，P_Bで表せ。

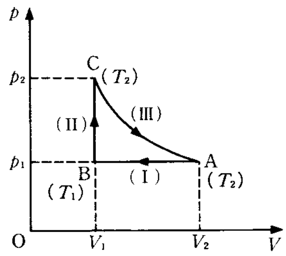
(長崎大-工)

問題 Memo 連結した容器中の気体のエネルギーについての問題です。解くときに使うのは，熱力学第1法則，内部エネルギーの式，状態方程式ぐらいですが，程度はやや高い問題です。容器Aが大きいことから，どんな近似をすればよいかを含めて，式の変形，整理に気を使います。(2)がポイントです。

4 〈熱サイクル〉

つぎの文中の □ の中に入るべき最も適当な答を記せ。

なめらかなピストンを持つシリンダーの中に圧力 $p=p_1$，体積 $V=V_2$，絶対温度 $T=T_2$ の理想気体1モルを入れ，その状態を図のように A → B → C → A とゆっくり変えた。ただし C → A は等温変化とする。



(a) 気体の圧力，体積，絶対温度は状態 A で $(p_1,\ V_2,\ T_2)$，B で $(p_1,\ V_1,\ T_1)$，C で $(p_2,\ V_1,\ T_2)$ であり，気体定数を R とすると気体の状態方程式は，A では (ア) □，B では (イ) □，C では (ウ) □ と表される。

(b) それぞれの状態の内部エネルギーを U_A，U_B，U_C としこの気体の定積モル比熱を C_v，定圧モル比熱を C_p とする。

状態 A から B への過程 (I) は定圧変化であり，この変化の間に気体のする仕事は $W_{\mathrm{I}}=$ (エ) □ で $Q_{\mathrm{I}}=$ (オ) □ の熱を放出し，内部エネルギーの変化は

$U_B-U_A=$ (カ) □ $\times(T_2-T_1)$

である。

(c) 状態 B から C への過程 (II) は定積（容）変化であり，この変化の間に気体のする仕事は $W_{\mathrm{II}}=$ (キ) □ で $Q_{\mathrm{II}}=$ (ク) □ の熱を吸収し，内部エネルギーの変化は $U_C-U_B=$ (ケ) □ である。

(d) 状態 C から A への過程 (III) は等温変化であり，内部エネルギー $U_C=$ (コ) □ である。この変化の後，気体は初めの状態にもどるから，1サイクルの内部エネルギーの全変化量 (サ) □ $\times(T_2-T_1)$ は 0 に等しい。

(e) このことから2つの比熱の差 $C_p-C_v=$ (シ) □ が得られる。　　（慶應義塾大-医）

問題 Memo　なめらかなピストンをもつシリンダー内に一定量の気体を入れて，圧力と体積を変化させたとき出入りする熱量や気体のなす仕事の関係を求める問題です。$p-V$ グラフの問題としては典型的出題ですから，完全にマスターしましょう。

気体の分子運動についての応用問題はこれで終わりです。第20日は演習問題です。

第 20 日	気体の分子運動7日間 ⑦　　　　学習日　　月　　日
	演習問題

きょうは気体の分子運動についての演習問題をします。ここまでのまとめをするつもりで，取り組みなさい。

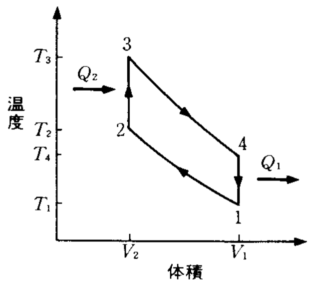
1 水中に潜ると深さ 10(m) ごとに1気圧ずつ圧力が増す。水面上の空気は 300(K)，1気圧である。この空気をビニールの袋に $V(\mathrm{m^3})$ 詰めて十分重いおもりをつけて $D(\mathrm{m})$ 沈めた。空気は理想気体とみなす。

(a) 袋の中の空気の体積はいくらになるか。空気の温度は変わらないものとして計算せよ。

(b) いま $0.05(\mathrm{m^3})$ の空気を詰めて，袋に 9.94(kg) のおもりをつけて水中に沈める。これでは浮力のため沈まないからもっとおもりを増さないと沈まない。ところがある深さを越えると 9.94(kg) のおもりでも沈むようになる。その深さはいくらか。空気の温度は変わらないとして計算せよ。空気の密度は $1.2(\mathrm{kg/m^3})$ とし，袋の重さとおもりの体積は無視できるものとする。

(c) もし水中で空気の温度が 280(K) に低下するものとすると，いくら以上の深さで沈むようになるか。有効数字2桁で答えよ。　　　　（千葉大）

2 1モルの理想気体が図のような状態変化を行うものとする。状態1から状態2への過程は断熱圧縮であり，体積と温度がそれぞれ $(V_1,\ T_1)$ から $(V_2,\ T_2)$ まで変化する。状態2から状態3への過程では，体積が一定であり，かつ外から加えられた熱量 Q_2 の影響によって，温度が T_2 から T_3 まで上昇する。状態3から状態4への過程は断熱膨張であり，状態4における体積と温度はそれぞれ $(V_1,\ T_4)$ である。最後の過程では，体積が一定に保たれて熱量 Q_1 が外へ放出され，その結果温度が T_4 から T_1 まで下降する。



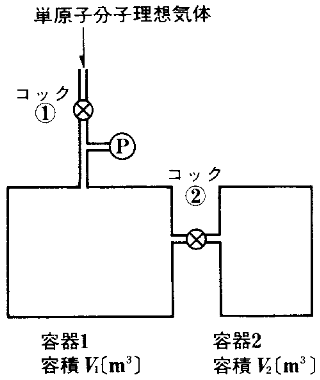
さて，この1サイクルが全体として外へ行なった仕事を W とすれば，$W=$ (1)□ という関係が成りたつ。また，この理想気体の定積モル比熱を C_V とすれば，$Q_2=$ (2a)□，$Q_1=$ (2b)□ と表される。したがって，W と Q_2 との比 η は，$\eta=$ (3)□ と得られる。

上記の断熱圧縮または断熱膨張の過程では，$TV^{\gamma-1}=$一定 という式が，ボイル・シャルルの法則とともに成りたつ。ここに，T と V は理想気体の温度と体積であり，γ は定数である。いま，理想気体の状態が $(V,\ T)$ から $(V+\Delta V,\ T+\Delta T)$ へ断熱的にわずかに変化したとして，この γ を求めてみよう。ただし，$\dfrac{\Delta V}{V}$ および $\dfrac{\Delta T}{T}$ は1に比べて十分小さく，その2次以上の項は無視できるものとする。まず，理想気体の内部エネルギーが温度だけで定まり，体積によらないことに注意すると，$\dfrac{\Delta T}{\Delta V}=$ (4)□ と得られる。ただし気体定数を R

とする。一方，x が1に比べて十分小さいときに成りたつ近似式 $(1+x)^{\alpha} \fallingdotseq 1+\alpha x$ を用いて，$TV^{\gamma-1}=$一定 の式から $\dfrac{\Delta T}{\Delta V}$ を計算すると，$\dfrac{\Delta T}{\Delta V}=$ (5)[　　　] と得られる。したがって，$\gamma=$ (6)[　　　] と表されることがわかる。理想気体の定圧モル比熱を C_p とすれば，$C_V=$ (7)[　　　] という関係が成りたつから，(6)の γ はさらに $\gamma=$ (8)[　　　] と書き直される。

結局，$TV^{\gamma-1}=$一定 の式を用いて(3)の η を書き直すと，$\eta=$ (9)[　　　] となる。$\dfrac{V_1}{V_2}=10$，$\gamma=1.4$ の場合には，η の値は約0.6である。　　（早稲田大-理工）

3 図のように細管でつながれたふたつの容器1，2と圧力計Pとからなる装置がある。はじめ両容器内部は真空にされ，コック①②は閉じられており，全体は温度 T[K] に保たれている。装置の体積変化，および細管部，圧力計部の体積は無視できるものとして，下記の文中の[　　　]の中にあてはまる数字，文字，式または語句を記入せよ。ただし理想気体の状態方程式は $PV=nRT=NRT/A$ である。ここで気体の圧力は P[N/m²]，体積は V[m³]，気体定数は R[J/K·mol]，アボガドロ数は A[個/mol]，n はモル数，N は分子数とする。



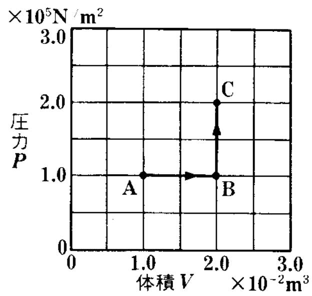
1) いまコック①をひらき1原子分子の理想気体を入れ，圧力計が圧力 P_1[N/m²] をしめしたところでコック①をとじた。このとき容積 V_1[m³] の容器1の中には (イ)[　　　][mol] の気体が入っており，この分子数 N_1 は (ロ)[　　　] 個である。

2) コック①をとじたままでコック②をひらき，充分に時間がたった後では両容器中の気体の (ハ)[　　　] は等しくなる。全体の温度は T[K] に保たれているから容積 V_2[m³] の容器2の中の気体の圧力 P_2 は (ニ)[　　　][N/m²] となる。このときの容器2の中の気体分子数 N_2 は (ホ)[　　　] 個である。

3) さらにコック②をとじ，容器2の中の気体分子が容器の壁と完全弾性衝突をしているものとして，この分子運動を考えてみる。温度 T[K] にある分子1個あたりの平均の運動エネルギーは，1分子の質量を m[kg]，平均速度を v[m/s] とすれば，(ヘ)[　　　][J] とあらわせる。体積 V[m³]，分子数 N 個の気体のおよぼす全圧力 P は $P=\dfrac{mNv^2}{3V}$[N/m²] で与えられるので，容器2の中の気体の全運動エネルギーは，T，N_2，R，A を用いて (ト)[　　　][J] とあらわされる。この式は，気体分子の全運動エネルギーが気体の内部エネルギーに対応することを考えると，分子数が一定の場合，内部エネルギーが (チ)[　　　] のみによって決定されることを意味する。したがってこの関係から，容器2の温度が1[K]上昇すると気体の内部エネルギーは (リ)[　　　][J] だけ増加することになる。　　（東海大-工）

4 単原子分子理想気体がある。その1モルあたりの分子の運動エネルギーの総和は $\frac{3}{2}RT$(J)となり，これがこの気体1モルのもつ内部エネルギーをあたえる。ただし，T は絶対温度，R はガス定数(気体定数)で8.3J/mol·K である。いま，この気体の1モルについて，状態を図の矢印に沿ってAからCまで変化させるものとしてつぎの問いに答えよ。結果だけでなく，途中の計算の過程も記せ。また，答えの数値は有効数字2けたまで求めよ。

(1) 理想気体1モルの，圧力 P，体積 V，温度 T の関係をあらわす方程式を書き，図のA，B，Cにおける絶対温度 T_A，T_B，T_C の値を求めよ。



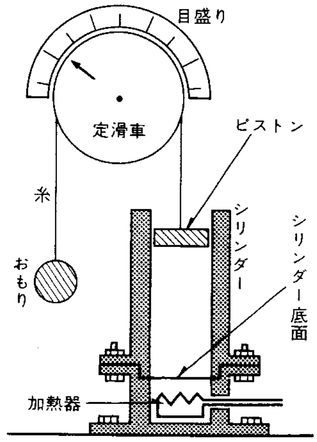
(2) この理想気体がAからBへゆっくり変化した場合の，
 (A) 気体の内部エネルギーの増加量，
 (B) 気体が外部に対してした仕事，
 (C) 気体に加えられた熱量
 を求めよ。

(3) この気体がBからCへゆっくり変化した場合の，気体に加えられた熱量を求めよ。

(東北大)

5 次の文の $\boxed{}$ の中に記入すべき式または値を，また，{　　}の中の正しいものの番号一つまたは一つ以上を，それぞれの解答欄に記入せよ。

図のように，摩擦なくすべるピストンによって，地上に鉛直に固定したシリンダー内に，あるモル数の理想気体が密封されている。ピストン下面とシリンダー底面はいずれも水平である。上部の定滑車にかけた糸の一端がピストンに固定されていて，他端にはおもりをつるすことができ，滑車の回転角は図に示すように目盛りと滑車面上の矢印とで読みとることができる。シリンダー底面の下部には加熱器が設けてあり，これを作動させてシリンダー内の気体をゆっくり加熱することができる。



加熱器の発生熱量はすべてシリンダー内の気体に伝えられ，シリンダー，ピストン，周囲大気や大地などと気体との間には熱のやりとりはなく，糸の質量とその伸縮は無視でき，また糸と滑車の間のすべりはないものとする。また，シリンダー外部の大気圧は P〔N/m²〕，定滑車の半径は r〔m〕，重力加速度は g〔m/s²〕，気体定数は R〔ジュール/モル·K〕，熱の仕事当量は J〔ジュール/カロリー〕である。

まずA君は次のような実験をした。

(a) 最初に，あるおもりをつるして，気体の温度と滑車の回転角の関係を調べたところ，温度が T_0〔K〕のとき回転角が θ_0〔ラジアン〕，$2T_0$〔K〕のとき $2\theta_0$〔ラジアン〕であった。したがって，気体封入前(ピストン下面がシリンダー底面に接触している状態)の滑車の回転角の指示値は(イ) $\boxed{}$〔ラジアン〕であると考えられる。

(b) つぎに，おもりの質量を M_1〔kg〕とし，気体を加熱してその温度を T_1〔K〕にしたところ，気体の圧力は $\frac{4}{3}P$〔N/m²〕，滑車の回転角は θ_1〔ラジアン〕となった。さらに，おもりをふやして質量 $2M_1$〔kg〕とし，気体を加熱してその温度を $\frac{5}{4}T_1$〔K〕にしたところ，滑車の回転角は $\frac{5}{3}\theta_1$〔ラジアン〕となった。このときの気体の圧力は (ロ)$\boxed{}$〔N/m²〕となっているはずである。また，ピストンの断面積は (ハ)$\boxed{}$〔m²〕，質量は (ニ)$\boxed{}$〔kg〕であり，したがって封入されている気体のモル数は (ホ)$\boxed{}$〔モル〕であることがわかる。

(c) おもりの質量を $2M_1$〔kg〕にすえ置いた状態で，気体をさらに加熱したところ，滑車の回転角は $3\theta_1$〔ラジアン〕となった。この間に気体が外部に対してなした仕事は (ヘ)$\boxed{}$〔ジュール〕である。また，加熱後の気体の温度は (ト)$\boxed{}$〔K〕である。

(d) 問(c)において，加熱に要した熱量が Q〔カロリー〕であったとすると，気体の内部エネルギーの増加は (チ)$\boxed{}$〔カロリー/モル〕であるから，この気体の定積モル比熱は (リ)$\boxed{}$〔カロリー/モル・K〕，また定圧モル比熱は (ヌ)$\boxed{}$〔カロリー/モル・K〕である。

(e) 以上(a)—(d)の A 君の実験に対して，B 君は同様の実験装置を用いて，まず A 君と同様の方法で気体封入前の滑車の回転角を推定し，A 君と同じ値を得た。その後，質量がそれぞれ M_1〔kg〕，$2M_1$〔kg〕，$3M_1$〔kg〕の 3 種類のおもりを用意し，各おもりをつるす場合に対して，封入された気体の圧力と滑車の回転角のみを測定した。B 君はこの測定値を用いて，A 君が求めた量のうちのいくつかを求めようとしている。B 君が決定できるのは (ル)｛(1) ピストンの断面積 (2) ピストンの質量 (3) 気体のモル数｝である。

(f) また，C 君も A 君，B 君と同様な実験装置を用いて実験している。C 君も気体封入前の滑車の回転角については，A 君，B 君と同じ方法で推定し，両君と同じ値を得た。つぎに，やはり質量が M_1〔kg〕，$2M_1$〔kg〕，$3M_1$〔kg〕の 3 種類のおもりを用意した。おもりをとりかえて状態が平衡になった後の気体の温度を比較すると，各場合でそれぞれ異なるはずであるので，C 君は気体を適宜加熱して各場合の気体温度をあらかじめ設定した温度 T_C〔K〕に一致させて，そのときの滑車の回転角を読みとろうと考えている。このためには，最初に行うべき実験は，おもりの質量が (ヲ)｛(1) M_1〔kg〕の場合 (2) $2M_1$〔kg〕の場合 (3) $3M_1$〔kg〕の場合｝である。また，C 君がこの測定をおえた後に，その測定量を用いて決定できるのは (ワ)｛(1) ピストンの断面積 (2) ピストンの質量 (3) 気体のモル数｝である。

（京都大）

これで終わりです。答えあわせをして，どのくらい実力がついたか調べてみましょう。

大学受験デイリープログラム－難関特別コース－物理80日間

巻	章	日数	タイトル
第1巻	力と運動	第１日	物体の運動と力
		第２日	重力による運動
		第３日	円運動
		第４日	単振動
		第５日	運動とエネルギー
		第６日	人工衛星の運動
		第７日	運動量
		第８日	エネルギー保存と運動量保存
		第９日	応用問題 (1)－重力による運動－
		第10日	応用問題 (2)－重力とエネルギー－
		第11日	応用問題 (3)－円運動と単振動－
		第12日	応用問題 (4)－運動量－
		第13日	演習問題
	気体の分子運動	第14日	気体の分子運動と圧力
		第15日	気体の熱平衡
		第16日	気体の変化と仕事・エネルギー
		第17日	熱サイクル
		第18日	応用問題 (1)－気体の圧力－
		第19日	応用問題 (2)－気体の変化－
		第20日	演習問題
第2巻	波動	第21日	波の式
		第22日	音波の干渉
		第23日	ドップラー効果
		第24日	光の屈折
		第25日	ヤングの干渉実験
		第26日	回折格子
		第27日	薄膜の干渉
		第28日	応用問題 (1)－波の式と定常波－
		第29日	応用問題 (2)－ドップラー効果－
		第30日	応用問題 (3)－光の進み方－
		第31日	応用問題 (4)－光の干渉－
		第32日	演習問題
	電界と電流(1)	第33日	電　界
		第34日	コンデンサー
		第35日	コンデンサーの接続
		第36日	コンデンサーのある直流回路
		第37日	電気抵抗
		第38日	電流計・電圧計
		第39日	キルヒホッフの法則
		第40日	非線形抵抗

巻	章	日数	タイトル
第3巻	電界と電流(2)	第41日	応用問題 (1)－静電気－
		第42日	応用問題 (2)－コンデンサー－
		第43日	応用問題 (3)－コンデンサーと直流回路－
		第44日	応用問題 (4)－直流回路－
		第45日	演習問題
	電界と磁界	第46日	電流が磁界から受ける力
		第47日	誘導起電力
		第48日	コイルの電磁誘導
		第49日	磁界中の導体棒の運動
		第50日	電動機の原理
		第51日	電界中の荷電粒子の運動
		第52日	磁界中の荷電粒子の運動
		第53日	コンデンサー・コイルと交流
		第54日	共振回路
		第55日	応用問題 (1)－電流と磁界－
		第56日	応用問題 (2)－電磁誘導－
		第57日	応用問題 (3)－荷電粒子の運動①－
		第58日	応用問題 (4)－荷電粒子の運動②－
		第59日	応用問題 (5)－交流回路－
		第60日	演習問題
第4巻	原子	第61日	光子のエネルギー
		第62日	光子の運動量
		第63日	ブラッグ反射
		第64日	水素原子の構造
		第65日	原子核の衝突
		第66日	放射性崩壊
		第67日	質量欠損とエネルギー
		第68日	応用問題 (1)－波動性と粒子性－
		第69日	応用問題 (2)－水素原子の構造－
		第70日	応用問題 (3)－原子核反応－
		第71日	演習問題
	総合問題	第72日	総合問題 (1)
		第73日	総合問題 (2)
		第74日	総合問題 (3)
		第75日	総合問題 (4)
	総合演習	第76日	総合演習 (1)
		第77日	総合演習 (2)
		第78日	総合演習 (3)
		第79日	総合演習 (4)
		第80日	総合演習 (5)

第5巻	補充演習編	力と運動
		気体の分子運動
		波　動
		電界と電流
		電界と磁界
		原　子

※ 一部変更することがあります。

TRAINING PAPER
DAILY PROGRAM
大学受験難関特別コース80日

発行人　加藤　譲
発行所　株式会社 教育社

物理 第1巻