大学受験難関特別コース100日

TRAINING PAPER

DAILY® PROGRAM

数学

《見本》



| 数と式、フ | 5程式・不等式 |
|--------|--|
| 第 1 日 | 整数問題4 |
| 第 2 日 | 整式·方程式15 |
| 第3日 | 2 次方程式·高次方程式······23 |
| 第 4 日 | 不等式33 |
| 第 5 日 | 演習問題41 |
| 関数とグラ | ラブ (1) (1) (1) (1) (1) (1) (1) (1) (1) (1) |
| 第6日 | 2 次関数 • 合成関数 · · · · · · · · · 49 |
| 第7日 | 関数の最大・最小59 |
| 第 8 日 | 対数関数70 |
| 第 9 日 | 三角関数78 |
| 第 10 日 | 演習問題87 |
| 解析幾何 | |
| 第11日 | 直線・円の方程式96 |
| 第12日 | 2 次曲線106 |
| 第 13 日 | 軌跡120 |
| 第 14 日 | 不等式と領域129 |
| 第 15 日 | 演習問題138 |
| 空間座標 | ・ベクトル |
| 第 16 日 | ベクトルの基本性質145 |
| 第 17 日 | ベクトルの内積154 |
| 第 18 日 | 空間のベクトル165 |
| 第 19 日 | 空間のベクトルの内積175 |
| 第20日 | 演習問題187 |

TRAINING PAPER:

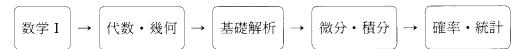
大学受験デイリープログラム (高校数学)

─難関特別コース─

効果的な使い方

⇔数学の受験対策を100日間で完成させます。

- 数学大学受験デイリープログラム―難関特別コース―100日間は,数学の受験に備えて,完全な実力を養成するために編集された特別デプロコースで,全部で5巻からなっています。 (詳しい予定は左の表を参照)
- 第1巻から第5巻まで、体系的に配列してありますが、高校数学の科目で分類すると、



の順になっています。

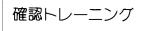
- 第1~5巻で100日の学習を完結させます。
- 最後の第5巻には、総合演習の日があります。総合演習は、実際の入学試験のつもりで取り 組む学習日です。
- 100日の中は学習のまとまりごとに 〔通常学習日〕→〔演習問題日〕

という構成で進んでいきます。

母1日の学習を効果的に進めるために

●通常学習日

確認トレーニング→例題→トレーニング→例題→トレーニングの構成になっています。



この日の学習に関連する基本問題です。ここで、基本問題の解き方、定理を確認します。答えはページの下にあります。

⇒弱点をなくします。

例 題

入試問題の中から重要な問題を選び、ていねいな解答をつけてあります。解法で注意すべきことを指摘してありますから完全に理解できます。

⇒例題は完全に理解しなさい。

実戦トレーニング

例題の内容を身につけるための練習です。例題とほとんど同じ問題を使って解法を定着させたり、実際の入試問題で実戦力を養成します。
⇒日1日と実力をつけていく。

解答

解答は別冊になっています。Advice、詳しい解答、注意、別解がついています。

⇒1問1問ていねいに答え合わせをする。

●演習問題日

問題演習

ひとまとまりの通常日のあとに、問題演習の日が1日あります。 通常日の内容を再確認するための問題や、いくつかの分野にまた がる問題をおもに扱います。

⇒実力アップの演習問題日。

●総合演習日

総合演習

第5巻の最後にある実戦形式の問題練習日です。 各分野から出題されるテスト形式の練習です。

⇒最後の総合練習。試験のつもりで取り組む。

品使い方のくふう

- ① 高1から学習した順にだいたいしたがっていますが、分野ごとにひとまとまりになっていますから、どの分野から学習をはじめてもかまいません。
- ② 問題をはじめるときは、すぐに解答をみるのではなくまず1度考えてみてからはじめること。1問解くために長時間かけることは能率的ではありませんが、解法を本当に考えてみたかどうかで力のつきかたがぐんとちがってきます。
- ③ 入試問題の類似問題が随所にはいっています。これは、解き方をしっかり定着させるためのものです。前問で解法がわかったら自力で解いてみます。
- ④ 入試では、解答を書くことも一つの重要な要素です。要領よくすじみちをたてて解答を書く練習をしなければなりません。トレーニングペーパーの解答欄には、解答を書いているつもりできちんと書きます。最後まできちんと書く練習は、本番の入試でかならず役に立ちます。

⇔入試問題を解くために必要なこと

- ① 教科書にある定理,公式は整理して理解しておくこと。(このトレーニングペーパーでの確認トレーニングは,教科書の内容での重要問題ですから,これで整理できます。)
- ② 解法での考え方をまとめること。あるパターンの問題については、まとめて解法を理解しておくこと。(解法でまとめていくと、考え方が整理されてきて、見通しがよくなります。)
- ③ 単純な計算ミスをおかさないこと。そのためには、いつも解答をきちんと書く習慣をつけておくこと。(きちんと整理して書くことによって、単純ミスは、かなり防げます。)
- ④ 実際の入試では、標準レベルの問題を確実に解くこと。(確実に得点できる問題を逃がしてはいけません。)
- ◎大学受験デイリープログラム―難関特別コース―では、これらのことが身につくように、十分な問題を用意してプログラムしました。いずれも、主要大学で出題されている問題ばかりです。これらをやりこなすことによって、あなたは自信をもって、入試にのぞめます。十分活用して合格を目指してください。

◇ 数と式, 方程式・不等式について5日間で完成させます。

数 I の中でも、常識的に知っておかなくてはならないことがこまごまとしている分野です。解法もさまざまであり一般的という性質も見い出しにくいところです。それには数多くの問題にあたり、ある程度の問題の型を知っておくことです。それにともない、数 I 的センスを養うことが一番有効です。

数と式,方程式・不等式の問題を分類すると,以下のよう に類型化できます。

- ① 整数問題に関するもの
- ② 整式, 方程式に関するもの
- ③ 判別式、高次方程式に関するもの
- ④ 不等式に関するもの このことを念頭において問題の整理,解法の整理をします。

◇ 学習のポイント

- ① 整数問題には、とくに一般的な解法はなく整数という条件をいかし、存在する可能性のある範囲をじわじわとしぼっていくしかない。
- ② 因数定理, 剰余の定理は, 整式を扱った問題を解く上で根幹となるもので, 十分に活用できるようにしておく。
- ③ 相加・相乗平均などの重要な絶対不等式は、不等式の証明の際よく使われるから、使い方を誤まらないようにする。

第 1 日

数と式, 方程式・不等式5日間①

学習日

月 日

整数問題

きょうから、来春の大学入試を突破するために、100日間デイリープログラムで実力を養成しましょう。今回は、とくに難易度の高い大学に焦点を絞って、プログラムを組んでみました。まず、最初の日は、整数です。ここでは、主役は整数であるということをうまく使うことです。整数はなんといっても、とびとびにしか存在しません。

では、確認トレーニングをしなさい。

■■■ 確認トレーニング ■■■

11 a > 0, b > 0, c > 0 $\Rightarrow ab + bc + ca = 1$ $\emptyset \ge 3$ $a + b + c \ge \sqrt{3}$

を証明しなさい。また、等号が成り立つのは、どのようなときか示しなさい。

- **2** $A = \{a-6, a^2+a-6, a^2-8a, -2\}, B = \{-5, a^2-3a, 3\}$ で、 $A \cup B = \{-7, -5, -4, -2, 3\}$ のとき、整数 a の値を求めなさい。
- **3** 整数の集合を I とするとき, $A = \{x(x+1) | x \in I\}$ は, $B = \{2x | x \in I\}$ の部分集合であることを証明しなさい。
- 4 次の命題の真偽を調べなさい。
 - (1) 1+n, 7+n をともに素数にするような自然数 n が存在する。
 - (2) x についての方程式 $4x^2-4x-(a^2-1)=0$ の解が 2 つとも整数であるような自然数 a が存在する。
 - (3) x^2+y^2 を奇数にするような奇数 x, y が存在する。

一確認トレーニングの答え。

- 「左辺²-右辺²
 - $= a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) 3$
 - 3=3(ab+bc+ca) とおいて整理すると 左辺²一右辺²
 - $= a^2 + b^2 + c^2 ab bc ca$

$$= \frac{1}{2} \left\{ (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \right\} \ge 0$$

等号が成り立つのは、 $a=b=c=\frac{\sqrt{3}}{3}$ のとき

に限る。]

2 a=1

③ (x) が偶数のときと、奇数のときに場合分けして、

x(x+1), $x \in I$ が、2x', $x' \in I$ の形に表されることを示す。]

4 (1) 真 (2) 真 (3) 偽

それでは、さっそく例題にはいります。すぐ、解答を見ないで自分の力でチャレンジしてみよ う。

■ 例題1 方程式の整数解 🗕

n, a, b, c, d は 0 または正の整数であって,

$$a^{2}+b^{2}+c^{2}+d^{2}=n^{2}-6$$

$$a+b+c+d \le n$$

$$a \ge b \ge c \ge d$$

をみたすものとする。このような数の組(n, a, b, c, d)をすべて求めよ。 (東京大-文科)

Advice まず a, b, c, d がどのような範囲の値をとるかきめましょう。

> そのために条件式から、n を含まない a, b, c, d の不等式を導きます。あとは $a \ge b \ge c \ge d$ を用いて a, b, c, d の値を 1 つずつきめていけばよいのです。

解答

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = n^2 - 6$$

$$a+b+c+d \le n$$
 ······2

$$a \ge b \ge c \ge d$$
(3)

 $(a+b+c+d)^2 \le n^2$

②の両辺は負にならないから、2乗すると $\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+d^2$ を導いて①を

展開すると

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2 \{ a(b+c+d) + b(c+d) + cd \} \le n^2$$

①を左辺に代入すると

$$n^2-6+2\{a(b+c+d)+b(c+d)+cd\} \le n^2$$

$$\emptyset \stackrel{>}{\sim} \mathbb{C} \quad a(b+c+d)+b(c+d)+cd \stackrel{\leq}{\leq} 3 \qquad \cdots \qquad \textcircled{4}$$

a, b, c, d はどれも負でないから③より

$$6d^2 \le a(b+c+d)+b(c+d)+cd$$
 $\Leftrightarrow a, b, c \in d$ におきかえる

と、もとの式より小さくなる。

 $6d^2 \le 3$ ゆえに d=0

d=0のとき、④は

この式と④から

$$a(b+c)+bc \leq 3$$

③を用いると

 $3c^2 \le a(b+c) + bc \le 3$ であるから $\Leftrightarrow a, b \in c$ におきかえる。

 $c^2 \le 1$ c は 0 または、正の整数だから、c=0、1

(i) c=0 の場合

d=c=0 であるから、④は $ab \le 3$

③を用いると

 $b^2 \leq ab \leq 3$ b は 0 または、正の整数だから、b=0、1

(7) b=0 0 $b \ge 3$

d = c = b = 0 であるから、①は $a^2 = n^2 - 6$

これを変形すると

(n-a)(n+a)=6

②より、 $a \le n$ 、 $a \ge 0$ より、 $0 \le n - a \le n + a$ であるから

$$\begin{cases} n-a=1 \\ n+a=6 \end{cases} \sharp \sharp \sharp \sharp \sharp \begin{cases} n-a=2 \\ n+a=3 \end{cases}$$

このとき、2n=7、2n=5となり、どちらの場合も整数 n は存在しない。

(イ) b=1 のとき

d=c=0, b=1 であるから, ④より $a \le 3$

 $b \le a$ であるから, a = 1, 2, 3

a=1 のとき①より、 $1^2+1^2=n^2-6$ $n^2=8$

a=2 のとき①より、 $2^2+1^2=n^2-6$ $n^2=11$

これらをみたす整数 n は存在しない。

a=3 のとき、①より、 $3^2+1^2=n^2-6$ $n^2=16$

n は 0 または、正の整数だから n=4

n=4, a=3, b=1, d=c=0 は①, ②, ③をみたすから, 求める解である。

(ii) c=1の場合

d=0, c=1 であるから④より $a(b+1)+b \le 3$

ab+*a*+*b*≤3を変形すると

 $(a+1)(b+1) \le 4$

←この変形は「整数問題」でよく

③より $a+1 \ge b+1 \ge c+1=2$ であるから

使われる。

$$\begin{cases} a+1=2 \\ b+1=2 \end{cases} \quad \text{with } \begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases}$$

このとき、①より、 $1^2+1^2+1^2=n^2-6$ $n^2=9$

nは0または、正の整数だから、n=3

n=3, a=b=c=1, d=0 は条件①, ②, ③をみたすから, 求める解である。

以上より、求める数の組(n, a, b, c, d)は

(4, 3, 1, 0, 0), (3, 1, 1, 1, 0) (3, 3, 1, 1, 1, 0)

| **注 意** | ④の左辺の文字 a, b, c を d で置きかえると

 $d(d+d+d) + d(d+d) + d \cdot d \le a(b+c+d) + b(c+d) + cd$

すなわち

 $6d^2 \le a(b+c+d) + b(c+d) + cd$

となって $6d^2 \le 3$ が導かれます。

このように、整数の問題では文字の数を減らして考えると解がみつかる場合がよくあります。

略別解 (A) b=1 のとき

d = c = 0, b = 1

このとき①より、 $a^2+1=n^2-6$ ですから

 $n^2 - a^2 = 7$

 $\left\{ egin{array}{ll} n-a=1 \ n+a=7 \end{array}
ight.$ これを解くと $\left\{ egin{array}{ll} n=4 \ a=3 \end{array}
ight.$ となります。

このようにして解けばn, a の値をより早くみつけることができます。

別解 $a^2+b^2+c^2+d^2=n^2-6$ ······①

 $a+b+c+d \le n$ ······2

 $a\!\ge\!b\!\ge\!c\!\ge\!d$

- $(\widehat{1}) \downarrow b \quad a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 6 = n^2 \quad \cdots \quad \widehat{1})'$
- ②で、左辺、右辺ともに 0 以上であるから $(a+b+c+d)^2 \le n^2$ ………②′

①', ②'より

$$a^2+b^2+c^2+d^2+6 \ge (a+b+c+d)^2$$

 $\therefore a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 6 \ge a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2(ab + ac + ad + bc + bd + cd)$

 $\therefore ab+ac+ad+bc+bd+cd \leq 3 \qquad \cdots$

a, b, c, d は 0 または正の整数で、3の条件をみたしているから

 $a = a_1 + d$, $b = b_1 + d$, $c = c_1 + d$, $a_1 \ge b_1 \ge c_1 \ge 0$

とおくことができる。これらを③に代入すると

$$(a_1+d)(b_1+d)+(a_1+d)(c_1+d)+(a_1+d)d+(b_1+d)(c_1+d)+(b_1+d)d$$
$$+(c_1+d)d \le 3$$

左辺の式を d について整理すると

$$6d^2 + 3(a_1 + b_1 + c_1)d + (a_1b_1 + a_1c_1 + b_1c_1) \le 3$$

d は 0 または正の整数である。いま,d = 0 とすると, $d \ge 1$ だから,④の左辺は $6d^2 + 3(a_1 + b_1 + c_1)d + (a_1b_1 + a_1c_1 + b_1c_1) \ge 6d^2 \ge 6$

となり、④に反する。

よって d=0

したがって、 $a=a_1$ 、 $b=b_1$ 、 $c=c_1$ である。

すると、④は、 $ab+ac+bc \le 3$ ……⑤

c, b, a を 0 から順にあてはめていく。

- (\mathcal{P}) c=b=0 0 ≥ 5
 - ⑤はどんな a の値に対しても成り立つ
 - (1), (2) \sharp) $a^2 = n^2 6$, $a \le n$

a, n は整数だから, $a \le n$ より, $n = a + n_1(n_1)$ は 0 以上の整数 とおける。

$$a^2 = (a + n_1)^2 - 6$$
$$n_1^2 + 2an_1 = 6$$

 $n_1^2 \le 6 \ \text{$\downarrow$} \ \text{$\downarrow$} \quad n_1 = 0, \ 1, \ 2$

 $n_1=0$ のとき 0=6 となり題意に適さない。

 $n_1=1$ のとき 1+2a=6 これをみたす 0 以上の整数 a は存在しない。

 $n_1=2$ のとき 4+4a=6 これをみたす 0 以上の整数 a は存在しない。

よって、c=b=0となることはない。

(イ) c=0, b=1 のとき,

⑤より, a ≤ 3,

 $b \le a \downarrow b$,

(1) *a*=1 の場合

$$d=c=0$$
, $b=a=1$ となる。①より
 $1+1=n^2-6$ ∴ $n^2=8$

これをみたす整数 n は存在しないから, 題意に適さない。

(2) *a*=2 の場合

 $1+4=n^2-6 \qquad \qquad \therefore \quad n^2=11$

これをみたす整数 n は存在しないから, 題意に適さない。

(3) *a*=3 の場合

d=c=0, b=1, a=3 となる, ①より

 $1+9=n^2-6$ ∴ $n^2=16$ $n \ge 0$ より n=4 このとき, $a+b+c+d=4 \le 4$ だから②もみたす。

- (ウ) c=0, $b \ge 2$ のとき $a \ge 2$ となるので、⑤に適さない。
- (エ) c=1, b=1 のとき, ⑤から $2a+1 \le 3$, $\therefore a \le 1$ また, $b \le a$ $\therefore 1 \le a$ よって a=1このとき, a=b=c=1, ①より $a^2+b^2+c^2+d^2=3=n^2-6$ $n \ge 0$ より n=3,

 $a^{2}+b^{2}+c^{2}+d^{2}=3=n^{2}-6 \quad n \ge 0 \text{ if } n=3,$ $20 \ge 8, \text{ 2it}$

 $a+b+c+d=3 \le 3$ となり、題意に適する。

(オ) c=1, $b \ge 2$, および $b \ge c \ge 2$ は⑤をみたさないので題意に適さない。 したがって、(イ)の(3)、と江)の場合のみが求める答えであるから、 (n, a, b, c, d)=(4, 3, 1, 0, 0)、または(3, 1, 1, 1, 0)

例題で考えたように、問題で与えられた条件と整数という条件をどのようにして組み合わせる か、手を動かす前によく考えてからとりかかりなさい。

■■■ 実戦トレーニング ■■■■

11 n, a, b, c は 0 または正の整数であって $\begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = n^2 - 6 \\ a + b + c \le n \\ a \ge b \ge c \end{cases}$

をみたすものとする。このような数の組(n, a, b, c)をすべて求めよ。

2 a_1 , a_2 , a_3 , a_4 , a_5 , a_6 は, おのおの 1, 2, 3 のどれかの値をとり, $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6=12$ である。

- (1) $a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 + a_4^3 + a_5^3 + a_6^3$ の最大値を求めよ。
- (2) $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 + a_6^2 = x$ とおくとき $a_1^4 + a_2^4 + a_3^4 + a_4^4 + a_5^4 + a_6^4 = kx + l$

となるように定数 k, l を定めよ。

(北海道大)

3 a, b を互いに素な自然数とし、 $\frac{a}{b}$ はある自然数 a_1 , a_2 , a_3 によって

$$\frac{a}{b} = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3}}$$

と表されている。 $\frac{p_1}{q_1}$ 、 $\frac{p_2}{q_2}$ は既約分数とし, $\frac{p_1}{q_1}=a_1$, $\frac{p_2}{q_2}=a_1+\frac{1}{a_2}$ であるとする。

$$xy-zw$$
 を $\begin{vmatrix} x & z \\ w & y \end{vmatrix}$ と書くとき

- (1) $\begin{vmatrix} p_2 & p_1 \\ q_2 & q_1 \end{vmatrix}$ の値を求めよ。
- (2) $\begin{vmatrix} a_3p_2+p_1 & p_2 \\ a_3q_2+q_1 & q_2 \end{vmatrix}$ の値を求めよ。
- (3) $a = a_3p_2 + p_1$ $b = a_3q_2 + q_1$ であることを示せ。

(早稲田大-理工)

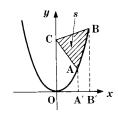
━ 例題2 整数の組み合わせによる面積 ━

曲線 $y=x^2$ 上の点 $A(a, a^2)$, $B(b, b^2)$ と y 軸上の点 C(0, c) がある。ただし、 0 < a < b, 0 < c とする。2 つの線分 AC, BC と曲線の弧 AB で囲まれる部分の面積を s とす るとき,次の問いに答えよ。

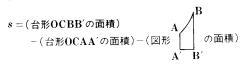
- (ア) s を a, b, c の式で表せ。
- (1) s=21 となる整数の組 a, b, c を求めよ。
- (ウ) s, a, b, c がすべて整数であるような s の最小値を求めよ。

(横浜国大-経済・経営)

Advice



求める面積 sの計算は次のようにするといいでしょう。



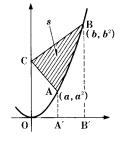
| 解 答 (P) 点 A, B から x 軸に垂線をひき,その足を A', B' とす $\xi \, \xi$, A(a, a^2), B(b, b^2), C(0, c), A'(a, 0)

B'(b, 0) であるから

台形 OCAA' の面積=
$$\frac{(a^2+c)a}{2}$$

台形 OCBB' の面積=
$$\frac{(b^2+c)b}{2}$$

直線 x = a, x = b, x 軸及び $y = x^2$ で囲まれる部分の 面積は



$$\int_{a}^{b} x^{2} dx = \left[\frac{x^{3}}{3} \right]_{a}^{b} = \frac{b^{3} - a^{3}}{3}$$

したがって、求める面積sは

$$s = \frac{(b^2 + c)b}{2} - \frac{(a^2 + c)a}{2} - \frac{b^3 - a^3}{3}$$

$$=\frac{(b-a)(a^2+ab+b^2+3c)}{6}$$

(4) $s = 21 \pm 9$

 $(b-a)(a^2+ab+b^2+3c)=6\times 21$

 $(b-a) \{ (b-a)^2 + 3(ab+c) \} = 2 \cdot 3^2 \cdot 7$

①の右辺は3の倍数であるから、左辺も3の倍数である。

 $\therefore b-a=3k$ (b>a より k は正の整数) とおける。

⇔「整数問題」ではこの考え方が

a, b, c は整数だから, b-a は 3 の倍数でなければならない。 たいせつである。

⇔このようにおくのが定跡。

これを, ①に代入して,

 $3k(9k^2+3(ab+c))=2\cdot 3^2\cdot 7$

 $k(3k^2+ab+c)=2\cdot7$ ·······2

 $k \ge 2$ とすると a, b, c はいずれも正の整数だから

 $\Leftarrow 3k^2 + ab + c > 3k^2 \downarrow 0$

 $k(3k^2 + ab + c) > 3k^3 \ge 24 > 14$

となり不適となる。

よって、k=1 であることがわかる。

したがって

$$b-a=3$$
 ·······3

k=1を②に代入すると

3 + ab + c = 14

ab+c=11

c は正の整数であるから

 $1 \le ab \le 10$ ·······(4)

- ③、④をみたす a、b の組を求めるとa=1、b=4 または a=2、b=5
- の2組がある。

a=1, b=4 のとき c=7

a=2, b=5のとき c=1

したがって,

a=1, b=4, c=7 \$\pi\tau a=2, b=5, c=1

(ウ) (ア)より

$$\frac{(b-a)(a^2+ab+b^2+3c)}{6} = s$$

$$(b-a)\{(b-a)^2+3(ab+c)\}=6s$$

右辺が3の倍数であるから、(4)と同様にして、b-aは3の倍数である。

b-a=3k (b>a より k は正の整数) とおくと

$$3k \{9k^2+3(ab+c)\}=6s$$

 $3k(3k^2+ab+c)=2s$

左辺が3の倍数であるから、sは3の倍数である。

s=3l (lは正の整数)とおくと,

 $3k(3k^2+ab+c)=6l$

 $k(3k^2+ab+c)=2l$

ここで、a、b は正の整数で、b-a=3k、すなわち b=3k+a であるから、 $ab=3k \cdot a + a^2 \ge 3 + 1 = 4$

また,

 $k^2 \ge 1$, $c \ge 1$

である。

したがって,

 $2l = k(3k^2 + ab + c) \ge (3+4+1) = 8$

 $l \ge 4$

ところで、ab=4、k=1、c=1のとき、lは最小値 4 をとる。

ゆえに, b-a=3, ab=4, c=1 から

a=1, b=4, c=1 のとき, s=3l=12, すなわち s は最小値 12 をとる。

では,実戦トレーニングで実力をためしてみよう。

■■■■ 実戦トレーニング ■■■■■

曲線 $y = 2x^2$ 上の点 $A(a, 2a^2)$, $B(b, 2b^2)$ と y 軸上の点 C(0, c) がある。ただし 0 < a < b, 0 < c とする。

2つの線分 AC, BC と曲線の弧 AB で囲まれる部分の面積を S とするとき、次の問いに答えよ。

- (1) S を a, b, c の式で表せ。
- (2) S=39 となる整数の組 a, b, c を求めよ。
- (3) S, a, b, c がすべて整数であるような S の最小値を求めよ。

- 整数 a, b を係数とする 2 次式 $f(x)=x^2+ax+b$ を考える。 $f(\alpha)=0$ となるような有理数 α が存在するとき、以下のことを証明せよ。
 - (1) α は整数である。
 - (2) 任意の整数 l と任意の自然数 n に対して,n 個の整数 f(l),f(l+1),……, f(l+n-1) のうち少なくとも l つは n で割り切れる。 (大阪大)

- **⑤** 平面上の凸多角形で、各頂点の x 座標、y 座標がすべて整数であるようなものについて、次のことを証明せよ。
 - (1) 面積の2倍は整数である。
 - (2) 内角の正接は、直角の場合を除いて、有理数である。

(一橋大)

第2日は、整数、方程式について学習します。

第2日

数と式, 方程式・不等式5日間②

学習日

月 日

整式・方程式

きょうは、整式や方程式の問題について学習しましょう。前日の問題と比べると、解法の方針は たちやすいから、とまどうことは少ないでしょう。そのとき、柱となる因数定理や剰余の定理など についての理解を整理しておくことが大切です。

では,始めに確認トレーニングをしておこう。

確認トレーニング 🕶 🕶

- **1** 整式 P(x) は、x-4 で割ると 3 余り、2x+3 で割ると -8 余ります。P(x) を $2x^2-5x-12$ で割ったときの余りを求めなさい。
- ② x についての整式 x^3-3x^2+px+q が x^2+2x-1 で割り切れるのは、p、q の値がどんなときですか。
- ③ 次の2つの方程式がx=2を共有解にもつとき、定数a、bの値を求めなさい。

 $x^2 - ax + 8 = 0$

....①

 $x^3 - ax + b = 0$

....(2)

 $\mathbf{4}$ x の 2 次方程式 $mx^2-8x+m+16=0$ が実数解をもつように、定数 m の値の範囲を定めなさい。

─── 確認トレーニングの答え -

- 1 2x 5
- **2** p = -11, q = 5
- 3 a=6, b=4
- $-8 4\sqrt{5} \le m < 0,$ $0 < m \le -8 + 4\sqrt{5}$

── 例題3 整式の除法 ──

x の多項式 f(x) があり、任意の実数 a に対して、f(x)-f(a) がつねに x^3-a^3 で割り切れるとする。このとき、ある多項式 g(x) によって、 $f(x)=g(x^3)$ と表されることを示せ。

(大阪大-理系)

Advice $f(x) = g(x^3)$ ということは,多項式 f(x) が c(定数), x^3 , x^6 , x^9 ,……のような項だけで出来ていることを表しています。

$$f(x) = (a_1 + a_2 x^3 + a_3 x^6 + \dots) + x (b_1 + b_2 x^3 + b_3 x^6 + \dots)$$
$$+ x^2 (c_1 + c_2 x^3 + c_3 x^6 + \dots)$$

のようにかけるので、f(x)-f(a)がつねに、 x^3-a^3 で割り切れる条件から、

$$b_1 = b_2 = b_3 = \cdots = 0, \quad c_1 = c_2 = c_3 = \cdots = 0$$

を導けばよいわけです。

解答 多項式 f(x) の項を分類して、 x^{3k} の項、 x^{3k+1} の項、 x^{3k+2} の項($k=0, 1, 2, \dots$)

に分けてまとめてみると、適当な多項式 g(x)、h(x)、i(x) を用いて、

$$f(x) = g(x^3) + xh(x^3) + x^2i(x^3)$$

 $(=h(x^2)=0, i(x^2)=0$ を示すの

とかくことが出来る。が目的。

いま, ①を利用して, f(x)-f(a)を作ると,

$$f(x)-f(a)$$

$$= g(x^3) - g(a^3) + xh(x^3) - ah(a^3) + x^2i(x^3) - a^2i(a^3)$$

$$= g(x^3) - g(a^3) + x \{h(x^3) - h(a^3)\} + (x - a)h(a^3)$$

$$+x^{2} \{i(x^{3})-i(a^{3})\}+(x^{2}-a^{2})i(a^{3})$$

となる。

ところで、f(x)-f(a)を x^3-a^3 で割ると、

 $g(x^3)-g(a^3)$, $h(x^3)-h(a^3)$, $i(x^3)-i(a^3)$ は, x^3-a^3 で割り切れるから, 2次式

の, $(x^2-a^2)i(a^3)+(x-a)h(a^3)$ が余りとなる。

よって、f(x)-f(a)がつねに、 x^3-a^3 で割り切れる条件は、この余りが恒等的に 0になることで、

$$i(a^3)x^2 + h(a^3)x - a^2i(a^3) - ah(a^3) \equiv 0$$

←恒等的に0になるので"≡"を

から.

用いたが、"="でもよい。

$$i(a^3)=0, h(a^3)=0$$

である。

これは、a が任意の実数であるから、 $h(x^3)=0$ 、 $i(x^3)=0$ と同じことになる。

このとき、①から、f(x)は、

$$f(x) = g(x^3)$$

とかける。

<u>注</u> 意 f(x)-f(a) の変形の中で, $xh(x^3)-ah(a^3)$ と, $x^2i(x^3)-a^2i(a^3)$ の変形は,引いて加える方法を使います。たとえば,

$$xh(x^3) - ah(a^3)$$

$$= xh(x^3) - xh(a^3) + xh(a^3) - ah(a^3)$$

$$= x \{ h(x^3) - h(a^3) \} + (x - a)h(a^3)$$

として、変形するわけです。

ところで、 $f(x^3)-f(a^3)$ は、 $x^3=t$ 、 $a^3=A$ とおくと、f(t)-f(A)となりますから、tに A を代入すると f(A)-f(A)=0 となり、因数定理から t-A すなわち、 x^3-a^3 で割り切れることは明らかです。

さあ、実戦トレーニングにはいりなさい。あくまで、自分の力で最後まで考えぬかなければいけ ません。

■■■■ 実戦トレーニング ■■■

11 x の多項式 f(x) があり、任意の実数 a に対して、f(x)-f(a) がつねに、 x^2-a^2 で割り切れるとする。このとき、ある多項式 g(x) によって、 $f(x)=g(x^2)$ と表されることを示せ。

2 0, 1のいずれとも異なる2整数a, $b(a \pm b)$ を考え,

$$f(x) = x(x-1)(x-a)(x-b)+1$$

とおく。g(x), h(x) が整数係数の多項式で f(x) = g(x)h(x) であると仮定する。このとき,

- (i) g(0)=h(0)を示せ。
- (ii) g(x), h(x)のどちらも定数でないならば g(x)=h(x) であることを示せ。
- (iii) (ii)の場合が起こるような a, bの例を一組求めよ。 (京都大-理系)

| 3 | X | くを | - 係数が | 実数であ | る <i>x</i> | の整式の | の全体と | l, | C ε | 複素数 | の全体 | とす | る。 | X | から | C | ~0 | り写 |
|---|------------|----|-------|------|------------|------|------|----|-------------------|-----|-----|----|----|---|----|---|----|----|
| | 像 <i>f</i> | を | 次のよ | うに定め | る。 | | | | | | | | | | | | | |

X の任意の要素 (元) A に対して、Aを x^2+1 で割ったときの余りが qx+p であるとき、f(A)=p+qi とする。(ただし、i は虚数単位である。)

このとき、
$$f(x^{10}+x+1)=$$
キ $+$ ク i となり、 $\frac{f(x^{10}+x+1)}{f(x^5+x+1)}$ = ケ i となる。 (慶應義塾大-商)

こんどは、実数解をもつ条件について問う例題です。入試によく出題される型の問題です。

━━━ 例題4 判別式を利用した係数の条件 ━━━━

a, b は実数の定数とする。x の 2 次方程式 $(x-1)(x-2) = m(x-a^2-b^2)$ がすべての実数 m に対して実数解をもつような a, b を座標とする点 (a, b) の存在する範囲を図示せよ。

(一橋大)

| Advice | つぎの2点に着目すれば,容易に解ける問題です。

- 2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ (a=0) が実数解をもつ条件は 判別式 $D \ge 0$
- 2次不等式 $ax^2+bx+c \ge 0$ ($a \ne 0$)がつねに成り立つ条件は a > 0 かつ判別式 $D \le 0$

|解 答│ 与えられた2次方程式を整理すると

$$x^2-(m+3)x+m(a^2+b^2)+2=0$$

これが実数解をもつための条件は、判別式を D_1 とすれば

$$D_1 = (m+3)^2 - 4 \{ m(a^2 + b^2) + 2 \} \ge 0$$
 $\Leftrightarrow D_1 \ge 0 \ \sharp \ \emptyset$

$$m^2-2\{2(a^2+b^2)-3\}m+1\geq 0$$

この不等式がすべての実数 m に対して成り立つための条件は, 左辺を m の2次式と してみると m^2 の係数が 1>0 だから判別式を D_2 とすれば

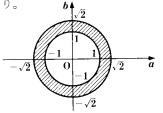
$$\frac{D_2}{4} = \{ 2(a^2 + b^2) - 3 \}^2 - 1 \le 0 \qquad (D_2 \le 0 \ \text{l}) .$$

$$\therefore \{2(a^2+b^2)-2\}\{2(a^2+b^2)-4\} \le 0$$

$$\therefore (a^2+b^2-1)(a^2+b^2-2) \leq 0$$

$$1 \le a^2 + b^2 \le 2$$

よって、点(a, b)の存在する範囲は図の斜線部 分で,境界線上の点をすべて含む。



| 注 意 | 点(a, b)の存在範囲を図示するときに、横軸にaを、縦軸にbをとって、境界線上の点は すべて含まれることに注意してください。

実戦トレーニングに進みましょう。グラフで図示するときは境界線に注意すること。

■■■ 実戦トレーニング ■■■■

4 a, b は実数の定数とする。x の 2 次方程式 $(x+1)(x-3) = m(x-a^2-b^2)$ がすべての実数 m に対して実数解をもつような a, b を座標とする点 (a, b) の存在する範囲を図示せよ。

5 x に関する方程式

 $(x^2+ax+b)(x^2+bx+a)=0$

が 4 個の異なる実数解をもつような点 (a, b) の存在する範囲を図示せよ。 (一橋大)

| 6 | 2次方程式 |
|---|-------|
|---|-------|

$$x^2-px+q=0$$
 ······①

- で、(p, q)は座標平面における点 Pの座標とする。
- (1) 方程式①が2重解をもつとき,点Pは曲線

$$q = \frac{1}{2} p$$
2

上にある。

(2) 方程式①が解x=3をもつとき,点 Pは直線

$$q = \boxed{} p - \boxed{} \cdots \cdots 3$$

上にあって、直線③は曲線②に点 A([]) で接している。

(3) 方程式①が解 x = -2 をもつとき、点 P は直線

上にあって,直線④は曲線②に点 B(- 「ケ」, 「コ」)で接している。

- (4) -2 と 3 の間 $(-2 \le x \le 3)$ に含まれる①の解の数は、点 P が曲線弧 AB の下側で直線
 - ③, ④の上側 (境界は曲線弧 AB上の点は含まず、その他は含む) の領域にあるとき サ

個で,直線③の下側で④の上側(境界は含まない)の領域にあるとき シー 個で,直線③,

④の下側(境界は含まない)にあるとき ス 個である。

(慶應義塾大-商)

よくがんばりました。これで、きょうの学習は終わりです。

第3日

数と式, 方程式・不等式5日間③

学習日

月 日

2 次方程式・高次方程式

きょうは、2次方程式・高次方程式についての学習です。中心テーマは解と係数の関係、判別式の使い方です。ここも解き方の方針はたちやすい分野です。本番では、確実に解いてほしいところです。 まず、確認トレーニングをしなさい。

確認トレーニング ■■■■

- 1 2次方程式 $x^2+2(k-2)x+k=0$ が重解をもつように実数 k の値を定めなさい。また、そのときの重解を求めなさい。
- **2** x の 2 次方程式 $x^2 + 2(a-1)x + 3 a = 0$ の 2 つの解が異符号で、負の解の絶対値が正の解より大きいとき、定数 a の値の範囲を求めなさい。
- **3** x の 2次方程式 $x^2 ax + 4a = 0$ の 2つの解がともに 3より大きいとき、定数 a の値の範囲を求めなさい。
- **4** 3次方程式 $x^3+9x^2+12x+4=0$ の 3 つの解を α , β , γ とするとき, $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$ の値を求めなさい。
- **5** x の方程式 $x^3 + ax^2 + 5x + 2a = 0$ において, x = -2 は解の 1 つです。実数 a の値と,他の 2 つの解を求めなさい。

----- 確認トレーニングの答え --

- 1 k=1, x=1 $\sharp \, c \, l \, \sharp$ k=4, x=-2
- **2** a > 3
- **3** *a* ≥ 16
- 4 57
- **5** a=3, 他の2つの解は $\frac{-1\pm\sqrt{11}i}{2}$

それでは例題にはいります。問題の意味がよくわからなかったら具体的な場合について調べてみることです。

━ 例題 5 判別式を利用した係数の条件 ■

t が範囲 $0 < t \le \frac{1}{2}$ を動くとき,t とともに変化する放物線

$$y = \frac{1}{2} \left\{ t + \frac{x(2-x)}{t} \right\}$$

が通る点(x, y)全体の集合を図示せよ。

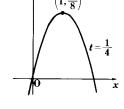
(東京工大-理・工)

Advice

tの値をきめると,放物線が1つ定まります。たとえば

いま, 平面上の点, たとえば $\left(1, \frac{17}{8}\right)$ を考えると,

与式に
$$x=1$$
, $y=\frac{17}{8}$ を代入すると, $\frac{17}{8}=\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)$



これを解くと、 $t=\frac{1}{4}$ と 4 となります。このように、平面上で 1 点を選ぶと、それに

対応して,t の値が定まります。その t の値が $0 < t \le \frac{1}{2}$ となるように点 (x, y) を選ぶのです。

解答

点 P(x, y) の値を定めたとき,

$$y = \frac{1}{2} \left\{ t + \frac{x(2-x)}{t} \right\} \qquad \dots \dots$$

について考える。

i) $x \neq 0$ かつ $x \neq 2$ の場合

←①は t の 2 次方程式になる。

 $0 < t \le \frac{1}{2}$ の範囲で①をみたす t の値が少なくとも 1 つ定まるとき,その点を通る

放物線①が存在する。したがって、この式を整理したtについての2次方程式、

$$t^2 - 2ty + x(2-x) = 0$$
(2)

が、 $0 < t \le \frac{1}{2}$ の範囲で実数解をもてばよい。

まず、 $0 < t \le \frac{1}{2}$ の範囲で、2 つの実数解 (重解を含む) をもつ条件は、②が実数解をもつから判別式 $D \ge 0$ となり

$$\frac{D}{4} = y^2 - x(2-x) \ge 0 \quad (重解は含んでもよい)$$

$$\therefore (x-1)^2 + y^2 \ge 1 \qquad \cdots \qquad (3)$$

さらに放物線の軸が t=y であるから

$$0 < y \le \frac{1}{2}$$

⇔y は (2つの実数解の和)÷2で

また, $f(t) = t^2 - 2ty + x(2-x)$ とおくと

ある

$$x(2-x)>0$$
, $-y+x(2-x)+\frac{1}{4}\geq 0$

$$\therefore \begin{cases} 0 < x < 2 & \cdots \\ y \le -(x-1)^2 + \frac{5}{4} & \cdots \end{cases}$$

したがって、②i $0 < t \le \frac{1}{2}$ の範囲で 2 つの実数解をもつ必要十分条件は③、④、

⑤である。

つぎに $0 < t \le \frac{1}{2}$ の範囲で 1 つだけ実数解をもつ条件は

$$x(2-x) > 0$$
 to $-y + x(2-x) + \frac{1}{4} \le 0$

$$x(2-x) < 0 \text{ this } -y + x(2-x) + \frac{1}{4} \ge 0$$

$$\therefore \quad 0 < x < 2 \text{ theorem } y \ge -(x-1)^2 + \frac{5}{4} \qquad \dots$$

または

$$0 > x$$
 または $x > 2$, かつ $y \le -(x-1)^2 + \frac{5}{4}$ 8

したがって、②が $0 < t \le \frac{1}{2}$ の範囲で実数解を1つだけもつ必要十分条件は⑦また は⑧である。

x=0 または x=2 の場合

=①はtの1次方程式になる。

(1)lt

$$y = \frac{1}{2}t$$

$$0 < t \le \frac{1}{2}$$
 だから

$$0 < y \le \frac{1}{4}$$

③、④、⑤、⑥をみたす領域、⑦をみたす領域、⑧をみたす領域と⑨をみたす領域 をグラフに表してみる。

円
$$(x-1)^2 + y^2 = 1$$
 と放物線 $y = -(x-1)^2 + \frac{5}{4}$ の式から x を消去して

$$\left(\frac{5}{4} - y\right) + y^2 = 1$$

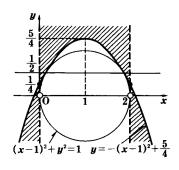
$$\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=0 \qquad \therefore \quad y=\frac{1}{2}$$

これより

$$(x-1)^2 = \frac{5}{4} - y = \frac{3}{4}$$
 $\therefore x = 1 \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\therefore x = 1 \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

すなわち、円と放物線は $\left(1\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ で接す $(x-1)^2+y^2=1$ $y=-(x-1)^2$



よって題意の領域は図の斜線部である。

ただし、境界上の点に関しては x=0 上の点と x=2 上の点は、 $0 < y \le \frac{1}{4}$ を除い て, 含まない。

また、円 $(x-1)^2+y^2=1$ 上の点と放物線 $y=-(x-1)^2+\frac{5}{4}$ 上の点は (0,0), (2,0)以外含む。

注意

ここで、2次方程式 $f(x)=x^2+ax+b$ が $\alpha < x < \beta$ の根をも

つ必要十分条件について考えましょう。

まず,2 実根をもつためには

$$\lceil D = a^2 - 4b \ge 0 \rfloor$$

軸の方程式 「
$$\alpha < -\frac{a}{2} < \beta$$
」

$$\lceil f(\alpha) > 0, f(\beta) > 0 \rfloor$$

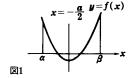
のすべてが成り立つことが必要十分条件です。

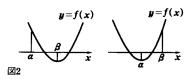
また, 1根だけをもつためには

$$\lceil f(\alpha) > 0$$
 かつ $f(\beta) < 0$

または

 $\lceil f(\alpha) < 0$ かつ $f(\beta) > 0$ 」が成り立つこと が必要十分条件です。





③, ④, ⑤, ⑥をみたす領域は, 0 < x < 2 で, 円の外側かつ放物線の下側のせまい領 域です。注意して下さい。

さあ、実戦トレーニングで実力をつけます。最後まであきらめないでがんばりましょう。

■■ 実戦トレーニング ■■

1 t が $0 < t \le 1$ を動くとき,t とともに変化する放物線 $y = t + \frac{x(x+2)}{t}$ が通る点 (x, y) 全体の集合を図示せよ。

xy 平面上に動点 P, Q がある。Q は時刻 0 のとき点 (0, -b) にあり (b>0), 速さ 1 で y 軸上を正の向きに進む。他方 P は時刻 0 のとき x 軸上の点 (-a, 0) にあり (a>0), 速さ 1 で x 軸上を正の向きに進み,ある時刻 t (≥ 0) で向きを変え,速さを $\sqrt{2}$ に変更して Q に到達するように直進するものとする。時刻 t から到達する時刻までの時間が最小になるような t を求めよ。ただし,0 < a < b とする。

3 実数 x, y, z が $\frac{\log_3(x+y+z)}{2} = \log_3\sqrt{6}$, $\log_2 xyz = 3$ をみたすとき, z のとりうる範囲を求めると, z< ① または z= ② または ③ ≤z である。(慶應義塾大-商)

答え合わせをしたら、例題にはいりなさい。次は、条件から方程式を決定させる問題です。解き始める前によく考えてみよう。

■ 例題 6 高次方程式の決定 🕶

x についての 3 次式 f(x) が次の等式をみたす:

$$f(1) = \frac{1}{2}$$
, $f(2) = \frac{1}{3}$, $f(3) = \frac{1}{4}$, $f(4) = \frac{1}{5}$

このとき f(0) の値を求めよ。

(早稲田大-教)

Advice f(x) は 3 次式ですから, $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) とおけるわけです。あとは、 ちょっと大変ですが四元一次の連立方程式を解くことになります。

解答 f(x)は3次式であるから,

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d(a \pm 0)$$

とおける。

$$f(1) = \frac{1}{2} \pm 9$$
 $a+b+c+d = \frac{1}{2}$ 2

$$f(2) = \frac{1}{3} \pm 9$$
 $8a + 4b + 2c + d = \frac{1}{3}$ 3

$$f(3) = \frac{1}{4} \pm 9$$
 $27a + 9b + 3c + d = \frac{1}{4}$

$$f(4) = \frac{1}{5} \pm 0$$
 $64a + 16b + 4c + d = \frac{1}{5}$

まず、②、③、④、⑤から、dを消去する。

←係数がすべて1なので、dがもっとも消去しやすい。

(3)-(2)
$$\sharp$$
 (1) $7a+3b+c=-\frac{1}{6}$ (6)

(5)
$$-4$$
 \ddagger 0 $37a+7b+c=-\frac{1}{20}$ (8)

つぎに, ⑥, ⑦, ⑧から, c を消去する。

←ここでは、cがもっとも消去し やすい。

$$((7-6) \div 2 \ \sharp \) \qquad 6a+b=\frac{1}{24} \qquad \cdots$$

同様にして、⑨、⑩から、bを消去する。

$$((0)-(9)\div 3 \sharp 0)$$
 $a=-\frac{1}{120}$ (1)

⑪を⑨に代入して,

$$b = \frac{1}{24} - 6a = \frac{1}{24} + \frac{1}{20} = \frac{11}{120}$$

①, ②を⑥に代入して

$$c = -\frac{1}{6} - 7a - 3b = -\frac{1}{6} + \frac{7}{120} - \frac{33}{120} = -\frac{46}{120}$$

①、②、③を②に代入して、

$$d = \frac{1}{2} - a - b - c$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{120} - \frac{11}{120} + \frac{46}{120} = \frac{4}{5}$$
ところで $f(0)$ は、 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ に $x = 0$ を代入して、
$$f(0) = d = \frac{4}{5}$$

注意 解答の②,③,④,⑤の連立方程式を作ることは容易ですが,解くのに苦労します。a, b, c の順に文字を消去していくと,かえって,計算が大変になります。

別解 2f(1)=1, 3f(2)=1, 4f(3)=1, 5f(4)=1 であるから、

$$(x+1)f(x)-1=0$$

の 4 つの解が、x=1, 2, 3, 4 ということを表している。

このことから, 左辺は,

$$(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$$

で割り切れて、f(x)がxの3次式だから、左辺はxの4次式であり、

$$(x+1)f(x)-1=a(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$$
 $(a \neq 0)$

とかける。

①にx = -1を代入すると,

$$-1 = a(-2) \cdot (-3) \cdot (-4) \cdot (-5)$$

よって,

$$a = \frac{-1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = -\frac{1}{120}$$

したがって, ①は,

$$(x+1)f(x)-1=-\frac{1}{120}(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$$

②のxに、x=0を代入して

$$f(0)-1=-\frac{1}{120}\cdot(-1)\cdot(-2)\cdot(-3)\cdot(-4)$$

ゆえに,

$$f(0)-1=-\frac{1}{5}$$

よって,

$$f(0)=1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$$

では、実戦トレーニングです。ここでは、とくに計算ミスに気をつけよう。 確実な計算力も、数学の力のひとつです。

実戦トレーニング 🕨

4 x についての 3 次式 f(x) が次の等式をみたす:

$$f(1) = \frac{1}{3}$$
, $f(2) = \frac{1}{4}$, $f(3) = \frac{1}{5}$, $f(4) = \frac{1}{6}$

このとき f(0) の値を求めよ。

 $(*) \left\{ \begin{array}{l} x+y+z=2 \\ x^2+y^2+z^2=14 \\ x^3+y^3+z^3=20 \end{array} \right.$

を満たすx, y, z を 3 根とする t の 3 次方程式は

 $t^3 + 7 \boxed{\qquad} t^2 + 4 \boxed{\qquad} t + 0 \boxed{\qquad} = 0 \text{ \vec{c} as a.}$

これから、連立方程式(*)の解は、 $x \le y \le z$ とすると、(x, x, y) である。

(慶應義塾大-工)

6
$$(*)$$

$$\begin{cases} x+y+z=4\\ x^2+y^2+z^2=14\\ x^3+y^3+z^3=34 \end{cases}$$

をみたすx, y, z を求めよ。ただし, $x \le y \le z$ とする。

第4日は、不等式について学習します。ごくろうさまでした。

第4日

数と式, 方程式・不等式5日間④

学習日 月

日

不等式

きょうは、不等式の問題です。不等式の証明のしかたには、いくつか決まったパターンがあります。その代表的なものは、相加相乗平均を使うもの、2次不等式において実数解をもたないことを示すもの、などです。どのやり方を使ったらよいか見ぬけるようにしましょう。

それでは、確認トレーニングです。

■■■ 確認トレーニング ■■■

II x の 2 次不等式 $ax^2 + (a-1)x + (a-1) \le 0$ の解の集合がすべての実数になるように、定数 a の値の範囲を定めなさい。

② 2次方程式 $x^2 + ax + 2 = 0$ ……①の 2 つの解の和と積を解とする 2次方程式は $x^2 + bx + 6 = 0$ ……②です。定数 a, b の値を求めなさい。

③ a>0, b>0 のとき、次の不等式を証明しなさい。また、(2)で等号が成り立つのは、どのようなときか示しなさい。

(1)
$$\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{a+b}$$

(2)
$$\sqrt{2(a+b)} \ge \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

4 a>0, b>0, c>0のとき

$$(a+b+c)+\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \ge 6$$

を証明しなさい。また、等号が成り立つのは、どのようなときか示しなさい。

---- 確認トレーニングの答え -

1
$$a \le -\frac{1}{3}$$

$$a=-3, b=-5$$

③ (1)
$$[左 辺^2 - 右 辺^2 = 2\sqrt{a}\sqrt{b} > 0]$$

(2) $[左 辺^2 - 右 辺^2 = (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \ge 0$
等号が成り立つのは、 $a = b$ のときに限

る。〕

$$\geq 2\sqrt{a\cdot\frac{1}{a}} + 2\sqrt{b\cdot\frac{1}{b}} + 2\sqrt{c\cdot\frac{1}{c}} = 6$$

等号が成り立つのは、a=b=c=1 のときに限る。]

まずは、2次不等式に関する例題です。がんばりましょう。

●●● 例題7 文字変数の2次不等式の証明 ●●●●

- a, b を実数として $P = a^4 4a^2b + b^2 + 6b$ とおく。
- (1) すべての実数 b に対して $P \ge 0$ となるような a の値の範囲を求めよ。
- (2) すべての実数 a に対して $P \ge 0$ となるような b の値の範囲を求めよ。

(一橋大)

- $Advice \mid (1) b$ についての 2次式とみて、 $(b \odot 1$ 次式) $^2+(b を含まない式)$ の形に変形すること を考えます。このとき、求める条件は、上の式で、(bを含まない式)≥0となりま
 - (2) a についての 4 次式ですが、 a^4 、 a^2 の項があり、残りは a を含まない項なので、 $a^2 = x$ とおいて、y = f(x) のグラフを考えます。このとき、x のとる値の範囲が $x \ge 0$ なので、放物線の軸が 0 以上の場合と負の場合とにわけなければなりません。 グラフをかいて考えましょう。

解答(1) bについて降べきの順に整理すると

$$P = b^{2} - 2(2a^{2} - 3)b + a^{4}$$

$$= \{b - (2a^{2} - 3)\}^{2} - (2a^{2} - 3)^{2} + a^{4}$$

$$= (b - 2a^{2} + 3)^{2} - 3(a^{4} - 4a^{2} + 3)$$

*←a*の値にかかわらず,

したがって、すべての実数 b について P≥0 となる条件は

 $b-2a^2+3$ は 0 になりうる。

$$-3(a^4-4a^2+3) \ge 0$$

$$\iff a^4 - 4a^2 + 3 \le 0$$

$$\iff$$
 $(a+1)(a-1)(a+\sqrt{3})(a-\sqrt{3}) \le 0$

よって、求める α の値の範囲は

$$-\sqrt{3} \le a \le -1, \ 1 \le a \le \sqrt{3}$$

(2) aについて整理すると

$$P = (a^2 - 2b)^2 - 3b^2 + 6b$$

 $\Leftarrow b < 0$ のとき、 $a^2 - 2b$ は 0 にならない。

(i) b<0 の場合, $a^2\geq 0$ であることに注意して, P は a=0 のとき最小となる。 よって、すべての実数 a について $P \ge 0$ となる条件は

$$b^2 + 6b \ge 0$$

$$\therefore b \leq -6 \qquad \cdots$$

(ii) $b \ge 0$ の場合, P は $a^2 = 2b$ のときに最小となる。よって、すべての実数 a に ついて *P*≥0 となる条件は

$$-3b^2+6b \ge 0$$

$$-3b(b-2) \ge 0$$

$$\therefore 0 \le b \le 2 \qquad \cdots$$

ゆえに、①、②より、求めるbの値の範囲は

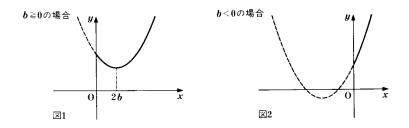
 $b \le -6$, $0 \le b \le 2$

│注 意│ (1)は、すべてのもの値とあるから、もを変数とみなすと、もについての2次関数となりま す。そこで、b について降べきの順に整理して平方を完成すれば、P の最小値が容易に求めら れて、その最小値を0以上となるように、aの値の範囲を定めればよいのです。

しかし, (2)では, $a^2 \ge 0$ であることから, $x = a^2$ とおくと,

$$f(x) = (x-2b)^2 - 3b^2 + 6b \quad (x \ge 0)$$

そこで、 $x \ge 0$ の範囲で y = f(x) のグラフをかくと、軸 x = 2b で、 $b \ge 0$ 、b < 0 の場合にわけなければならないことがわかります。



さあ,実戦トレーニングで実力をつけよう。

■ 実戦トレーニング ■■■

- **1** a, b を実数として $P = a^4 2a^2b + b^2 + 2b$ とおく。
 - (1) すべての実数 b に対して $P \ge 0$ となるような a の値の範囲を求めよ。
 - (2) すべての実数 a に対して $P \ge 0$ となるような b の値の範囲を求めよ。

2 a, b を整数として、x の 4 次方程式 $x^4 + ax^2 + b = 0$ の 4 つの解を考える。

いま、4 つの解の近似値 -3.45 -0.61 0.54 3.42 がわかっていて、これらの近似値の誤差の絶対値は 0.05 以下であるという。真の解を小数第 2 位まで正しく求めよ。

(東京大-文科)

3 a, b を整数として, x の 4 次方程式 $x^4 + ax^2 + b = 0$ の 4 つの解を考える。 いま, 4 つの解の近似値 -3.77 -0.31 0.24 3.74 がわかっていて, これらの近似値の誤差の絶対値は 0.05 以下であるという。真の解を小数第 2 位まで正しく求めよ。

こんどは、整数との融合問題です。不等式の公式のほかに、どんな条件が使えるのか、問題をよく理解してからとりかかりなさい。

━━ 例題8 整数を含んだ不等式の証明 •

正の整数 m, n が不等式 $\sqrt{n} \le \frac{m}{2} < \sqrt{n+1}$ をみたしているとする。

つぎのことを証明せよ。

- (1) m^2-4n は 0 または 1 である。
- (2) $m < \sqrt{n} + \sqrt{n+1} < m+1$

(大阪大-理系)

Advice 不等式を表す文字が整数である場合は、不等式の性質による式の変形のほかに、整数 条件による制限があることを忘れないようにしましょう。

- (1) 整数全体の集合は、4 で割った余りで分類すると、4n、4n+1、4n+2、4n+3 (n は整数) の 4 つに分けられます。
- (2) $a \ge 0$, $b \ge 0$ のとき, $a \ge b$ と $a^2 \ge b^2$ とは同値です。

解答 (1) $\sqrt{n} \le \frac{m}{2} < \sqrt{n+1}$ (m, n は正の整数)

m, n が正の整数なので

⇐不等式を2乗するとき,各辺の

各辺を2乗して、 $n \leq \frac{m^2}{4} < n+1$

正負に注意。

各辺を 4 倍して、 $4n \le m^2 < 4n + 4$

各辺に -4n を加えて $0 \le m^2 - 4n < 4$

いま, $m^2-4n=k$ とおくと, k=0, 1, 2, 3 である。

よって.

 $m^2 = 4n + k$ (k = 0, 1, 2, 3)

正の整数 m は、p を正の整数とするとき、m=2p、2p-1 のいずれかで表される。 \Leftrightarrow この場合、2p+1 とおくのは誤り。

 m^2 は,m=2p のとき $m^2=(2p)^2=4p^2$ となって 4 の倍数となり,m=2p-1 のとき $m^2=(2p-1)^2=4(p^2-p)+1$ となって 4 で割って 1 余る数となる。

よって、①から、k=0、1 すなわち、 m^2-4n は 0 または 1 である。

(2) (1)から、 $m^2-4n=0$ または1

m>0を考えて

$$m = \sqrt{4n}$$
 または $\sqrt{4n+1}$

 $\sqrt{4n} < \sqrt{4n+1}$ だから, $m < \sqrt{n} + \sqrt{n+1} < m+1$ を示すには, $m = \sqrt{4n}$, $\sqrt{4n+1}$ いずれの場合も $\sqrt{4n+1} < \sqrt{n} + \sqrt{n+1} < \sqrt{4n+1}$ を示せば十分である。

- i)まず、 $(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})^2-(\sqrt{4n+1})^2=-2n+2\sqrt{n(n+1)}=2\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})>0$ よって $(\sqrt{4n+1})^2<(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})^2$ となり、 $\sqrt{4n+1}>0$ 、 $\sqrt{n}+\sqrt{n+1}>0$ だから $\sqrt{4n+1}<\sqrt{n}+\sqrt{n+1}$
- ii)次に, $\sqrt{4n}+1=2\sqrt{n}+1$ であるから, $\sqrt{n}+\sqrt{n+1}<\sqrt{4n}+1$ を示すためには $\sqrt{n+1}<\sqrt{n}+1$

を示せばよい。

$$(\sqrt{n}+1)^2-(\sqrt{n+1})^2=2\sqrt{n}>0$$
 (n は正の整数だから) で、 $\sqrt{n+1}>0$ 、 $\sqrt{n}+1>0$ だから、 \qquad ⇔この確認も必要。 $\sqrt{n+1}<\sqrt{n}+1$ ∴ $\sqrt{n}+\sqrt{n+1}<\sqrt{4n}+1$ 以上、i)、ii)より、 $\sqrt{4n+1}<\sqrt{n}+\sqrt{n+1}<\sqrt{4n}+1$ が示された。

- 注意 (1)において、 m^2-4n の値の範囲が、 $0 \le m^2-4n < 4$ と容易に定まりますが、これは、m、nが正の数の場合であって、m、nが正の整数でありますから、この範囲はさらに制限を受けます
 - (2) (1)の結果を用いることによって、(2)の解答を導くことが容易になる場合が多いのですが、この問題もその一例です。(1)が解けない場合でも、(1)の結果を肯定して(2)を解くことも可能です。

さあトレーニングです。

実戦トレーニング

4 正の整数 m, n が,不等式 $\sqrt{n} < \frac{m}{2} < \sqrt{n+2}$ をみたしているとき, m^2-4n は,1,4,5 のいずれかであることを証明せよ。

5 無限数列 a_1 , a_2 , ……, a_n , ……が具体的に

$$a_n = \frac{1}{n^2}$$
, $n = 1, 2, 3, \dots$

で与えられている。このとき不等式

$$a_{m+n} \leq C(a_m + a_n)$$

がすべての正整数m,nについて成り立つような定数cで最小なものを求めよ。

(早稲田大-教)

6 無限数列 a_1 , a_2 , ……, a_n , …… が具体的に,

 $a_n = \sqrt[3]{n}$ $n = 1, 2, 3, \dots$

で与えられている。

このとき不等式 $a_{m+n} \ge c(a_m + a_n)$ がすべての正の整数 m, n について成立するような定数 c で最大のものを求めよ。

ごくろうさまでした。これできょうの学習は終わりです。

第5日

数と式, 方程式・不等式5日間⑤

学習日

月 日

演習問題

きょうは、整数、方程式、不等式など第1日から前日までやってきたことを演習問題でためして みましょう。本番に臨む心構えでとりくみましょう。

- 1 実数 l, m, n についての次に述べる条件(I) e(D), e(D
 - (I) 任意の実数 x, y, z に対して, $lx^2 + my^2 + nz^2 \ge 0$ であり,等号は x = y = z = 0 のとき にかぎり成り立つ。
 - (ア) 平面 lx + my + nz = 1 は点 (1, 2, 3) を通り、ベクトル (1, 1, 1) に垂直である。
 - (イ) 直線 $\frac{x-1}{l} = \frac{y-2}{m} = \frac{z-3}{n}$ はベクトル (1, 1, 1) に平行である。
 - (ウ) 関数 f(x) = (x-l)(x-m)(x-n) は f(0) < 0 をみたす。さらに、f(x) は極大値をもたないか、または極大値をもつときは極大値を正数 x においてとる。
 - (エ) 行列 $\begin{pmatrix} l & m \\ -m & n \end{pmatrix}$ で表される 1 次変換は逆変換をもつ。 (慶應義塾大-経)

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & (x \le 0) \\ \sqrt{2x - x^2} & (0 < x \le 2) \\ 2x - 4 & (x > 2) \end{cases}$$

とおき、おのおのの実数 a に対して $\mathbf{E}(a)$ は実数の集合

$$\{k \mid$$
すべての実数 x について $k(x-a)+f(a) \leq f(x)\}$

を表すものとする。このとき,次の問いに答えよ。

- (1) E(a) が空集合となる a の値の範囲を求めよ。
- (2) E(a) が 2 つ以上の元 (要素) からなる場合の a の値を求めよ。また,そのときの E(a) の元 (要素) のうち最大のものと最小のものを求めよ。 (千葉大)

- **3** 実数 α (ただし $0 \le \alpha < \frac{\pi}{2}$) と、空間の点 A(1, 1, 0)、B(1, -1, 0)、C(0, 0, 0) を与えて、次の 4条件をみたす点 P(x, y, z) を考える。
 - $(4) \quad z > 0$
 - (ロ) 2点 P, A を通る直線と, A を通り z 軸と平行な直線のつくる角は $\frac{\pi}{4}$
 - (v) 2点 P, B を通る直線と,B を通り z 軸と平行な直線のつくる角は $\frac{\pi}{4}$
 - (二) 2点 P, C を通る直線と, C を通り z 軸と平行な直線のつくる角は α このような点 P の個数を求めよ。また,P が 1 個以上存在するとき,それぞれの場合について,z の値を, α を用いて表せ。 (東京大)

- $\angle A = 90^\circ$ である直角三角形 ABC がある。頂点 B,C をそれぞれ始点として,辺 BC に垂直な半直線 l,m を頂点 A のある側にひく。つぎに辺 BC 上の任意の点 P より辺 AB,AC に垂線をひき,この延長が l,m と交わる点をそれぞれ Q,R とする。
 - (i) 3点 Q, A, R は一直線上にあることを示せ。
 - (ii) 台形 BCRQ の面積が三角形 ABC の面積の 2 倍になるとき,この台形の形を求めよ。ただし, $AB \pm AC$ とする。 (京都大)

1 辺の長さが1の正三角形 ABC の辺 BC, CA, AB 上に、それぞれ点 P, Q, R を BP=CQ=AR $<\frac{1}{2}$

となるようにとり、線分 AP と線分 CR の交点を A′、線分 BQ と線分 AP の交点を B′、線分 CR と線分 BQ の交点を C′ とする。BP=x として、次の問に答えよ。

- (1) BB', PB' を x を用いて表せ。
- (2) 三角形 A'B'C' の面積が三角形 ABC の面積の $\frac{1}{2}$ になるような x の値を求めよ。

(東京大-理科)

⑤ 平面上の点 O を中心とする半径 1 の円周上に点 P をとり、円の内部または周上に 2 点 Q,R を, \triangle PQR が 1 辺の長さ $\frac{2}{\sqrt{3}}$ の正三角形になるようにとる。このとき,

 $OQ^2 + OR^2$

の最大値および最小値を求めよ。

(東京大-理科)

7 長さ 2 の線分 NS を直径とする球面 K がある。点 S において球面 K に接する平面の上で,S を中心とする半径 2 の四分円 $\Big($ 円周の $\frac{1}{4}$ の長さをもつ円弧 $\Big)\widehat{AB}$ と線分 AB をあわせて得られる曲線上を,点 P が 1 周する。このとき,線分 NP と球面 K との交点 Q の描く曲線の長さを求めよ。

◇ 関数とグラフについて5日間で完成させます。

高校で学習する2次関数,対数関数,三角関数などの基本的な関数を扱った問題に取り組んでみます。関数の問題は,グラフと切り離しては考えられません。グラフでは,おおまかな特徴をつかむとともに,要所要所を正確につかむことがコツです。解法にまごつくことも少ない分野ですから,しっかり解答してほしいところです。

関数とグラフの問題を分類すると,以下のように類型化できます。

- ① 2次関数,合成関数に関するもの
- ② 最大値・最小値に関するもの
- ③ 対数関数に関するもの
- ④ 三角関数に関するもの これらのことが、4日間のうち1日ずつ配分されています。 1日1日、しっかりとやりましょう。

◇ 学習のポイント

- ① 最大値・最小値を求める上で代表的な解法
 - ⑦ 平方変形する
 - ② 恒等式,絶対不等式を利用する
 - ② 図形の領域から図形的に考える
- ② 対数関数,三角関数などがからんでくる関数では、つねにその定義域、値域に注意をはらう。

第6日

関数とグラフ5日間①

学習日

月 日

2次関数 • 合成関数

きょうからは、関数について学習します。その最初の日は、2次関数・合成関数です。関数の理解には、グラフを用いての把握が必要不可欠です。関数の問題では、その関数のグラフがどうなるかつかめることがキーポイントです。

さっそく始めなさい。

■ 確認トレーニング ■■■

1 次の関数の最大値・最小値を求めなさい。

(1)
$$y = 2x^2 + 4x + 2$$

(2)
$$y = -x^2 + 3x$$

2 a は定数で、 $\frac{1}{2}$ < a < 1 とします。関数 $f(x) = -x^2 + 2ax + a^2$ $(0 \le x \le 1)$ の最大値・最小値を求めなさい。

3 x についての 2 次関数 $y=x^2-3mx+2m$ について、次の問いに答えなさい。

- (1) y の最小値 y_1 を m の式で表しなさい。
- (2) m がすべての実数をとって変わるとき、m のどんな値に対して y_1 は最大となりますか。

4 2つの写像 f, g が $f:x \longrightarrow x^2+1$, $g:x \longrightarrow 2x-3$ であるとき, 次の問いに答えなさい。

- (1) $(g \circ f)(x)$ を求めなさい。
- (2) f の定義域が $\{x \mid -1 \le x \le 2\}$ であるとき、 $(g \circ f)(x)$ の値域を求めなさい。

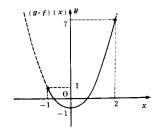
----- 確認トレーニングの答え

- (1) x=-1のとき 最小値 0 最大値はなし
 - (2) $x = \frac{3}{2}$ のとき 最大値 $\frac{9}{4}$ 最小値はなし
- x = a のとき 最大値 $2a^2$ x = 0 のとき 最小値 a^2





(2) $\{y \mid -1 \leq y \leq 7\}$



それでは、例題にはいります。2次関数の最大、最小を考えるときに、どの変数に着目するかが 大切です。まず, 自分で解いてみよう。

■ 例題9 2変数を含む2次式の最小値 ■

(1) xの2次関数

$$x^{2}-2(a-3)x+(1+b)a^{2}-12a+1$$

の最小値 A を a, b で表せ。またこの関数の $a \le x$ における最小値 B を a, b で表せ。

(2) x, y が実数全体を自由に動くとき,

$$x^2-2(y-3)x+(1+b)y^2-12y+1$$

の最小値が-bとなるbの値を求めよ。

(北海道大)

- $\mid \mathsf{Advice} \mid$ (1) x の 2 次関数ですから,平方完成すれば,容易に最小値 A は求められます。a や bの文字に迷わされないようにしましょう。次に、このxの2次関数はx=a-3で 最小で、それより x が増加すると関数値も増加します。a-3 < a ですから、 $x \ge a$ の 範囲では,x=aのとき最小になります。
 - (2) x, y の 2 変数を含む 2 次式の最小値を求める問題です。与えられた式がすでに xについて整理してありますから、このままxの2次式とみなし、yを定数とみて $(x+P)^2+Q$ の形に平方完成します。ところが(2)の式は(1)の式の a を y におきかえ たものですから、(1)の結果を使って、すぐにこの形は求められます。つづいて、Qの部分は y の 2 次式ですからこれを平方完成して

$$(x+P)^2+(y+R)^2+S$$

の形に変形すれば、x+P=0 かつ y+R=0 のとき、この 2 次式が最小値 S をとる ことがわかります

解 答 (1)

$$x^{2}-2(a-3)x+(1+b)a^{2}-12a+1$$

$$=x^{2}-2(a-3)x+(a-3)^{2}-(a-3)^{2}+(1+b)a^{2}-12a+1$$

$$=\{x-(a-3)\}^{2}-a^{2}+6a-9+a^{2}+ba^{2}-12a+1$$

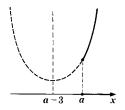
$$=(x-a+3)^{2}+ba^{2}-6a-8 \qquad \cdots \cdots \text{ }$$

よって、x=a-3のとき、この2次式は

最小値
$$ba^2-6a-8$$
 をとる

$$\therefore A = ba^2 - 6a - 8$$

a-3 < a であるから、図より $x \ge a$ のときは、この 2 次式はx = a で最小値をとる。よって、 $x \ge a$ における最 小値は, ①より



$$B = 3^2 + ba^2 - 6a - 8$$
$$= ba^2 - 6a + 1$$

(2) ①の式において a を y におきかえると与えられた x, y の 2 次式と同じになる。

$$x^{2}-2(y-3)x+(1+b)y^{2}-12y+1$$

$$=(x-y+3)^{2}+by^{2}-6y-8 \qquad \cdots \cdots (2)$$

これを y を定数として x の 2 次式とみると

 \Leftarrow まず, x だけの関数と考える。

$$x=y-3$$
 のとき この式は 最小値 by^2-6y-8 をとる。

x=y-3, b=0 とするとこの式は -6y-8 となる。y の値を大きくすれば、

-6y-8 はいくらでも大きくなるので、②は最小値を持ちえない。よって $b \pm 0$ であ

る。

そこで、新たにx=y-3としたまま、この式をyの2次式とみると

$$by^{2} - 6y - 8 = b \left\{ y^{2} - \frac{6}{b}y + \left(\frac{3}{b}\right)^{2} - \left(\frac{3}{b}\right)^{2} \right\} - 8$$
$$= b\left(y - \frac{3}{b}\right)^{2} - \frac{9}{b} - 8$$

となり、この式は $y=\frac{3}{b}$ のとき最小値 $-\frac{9}{b}-8$ をとる。ただし、最小値をとるため

にはb>0でなければいけない。

 $\leftarrow b > 0$ ならば、グラフが下に

したがって、このx, y の 2 次式は

Д.

$$y = \frac{3}{h}$$
, $x = y - 3 = \frac{3}{h} - 3$

のとき、最小値 $-\frac{9}{h}$ -8 をとる。条件より

$$-\frac{9}{b} - 8 = -b$$

$$9 + 8b = b^{2}$$

$$b^{2} - 8b - 9 = 0$$

$$(b - 9)(b + 1) = 0$$

$$b = 9, -1$$

注意(2) x についてまず平方完成し

$$(x-y+3)^2 + by^2 - 6y - 8$$
(2)

b=9

を得たとき、 $b \le 0$ とすると題意に適さないことは、まず

- (イ) b=0 とすると $(x-y+3)^2-6y-8$ となり、問題にあるように、最小値は存在しません。 たとえば、x=-3、y=0 としても -8 をとり、-b=0 より小さな値が明らかに存在します。
- (ロ) *b*<0 とすると②の式を

b>0 より

$$(x-y+3)^2 + b\left(y-\frac{3}{b}\right)^2 - \frac{9}{b} - 8$$

としたとき, $(x-y+3)^2 \ge 0$ であっても $b(y-\frac{3}{h})^2 \le 0$

ですから、y を大きくとると $b \left(y - \frac{3}{b} \right)^2$ はいくらでも小さくなりますから最小値は存在しません。

したがって、b>0 でなければならないのです。

さあ,次は実戦トレーニングです。がんばっていこう。

実戦トレーニング ■■■■

1 (1) xの2次関数

$$ba^2 - (2x - 12)a - x^2 + 6x + 1$$

の最大値 A を a, b で表せ。またこの関数の $2a \le x$ における最大値 B を, a, b で表せ。

(2) x, y が実数全体を自由に動くとき,

$$by^2 - (2x - 12)y - x^2 + 6x + 1$$

の最大値が19となるもの値を求めよ。

2 x の関数

$$f(x) = a(x^2+2x+2)^2+2a(x^2+2x+2)+b$$

は最小値 6 をもち、f(0)=11 である。このとき、a= \boxed{r} 、b= $\boxed{1}$ 、f(\boxed{p})=6、f(1)= \boxed{r} である。 (慶應義塾大-経)

- **3** (1) 関数 $f(x) = \{px + (1-x)q\} \left\{ \frac{x}{p} + \frac{1-x}{q} \right\}$ の区間 $0 \le x \le 1$ における最大値、最小値を求めよ。ただし、p、q は正の定数とする。
 - (2) x, y は変数で $0 \le x \le 1$, $1 \le y \le a$ を満たすとする。このとき

$$\left\{ xy + \frac{1-x}{y} \right\} \left\{ \frac{x}{y} + (1-x)y \right\}$$

の取りうる値の範囲を求めよ。

(慶應義塾大-医)

答え合わせをしたら、次は合成関数に関する例題です。どのようなかたちになるか、グラフの上 でつかむことが先決です。

▪ 例題 10 合成関数のグラフと面積 ■

f(x)は,区間[0, 1]において,

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \left(0 \le x \le \frac{1}{2}\right) \\ -\frac{8}{5}x + \frac{9}{5} & \left(\frac{1}{2} < x \le 1\right) \end{cases}$$

で定義される関数とする。g(x)=f(f(x))とおくとき、次の問いに答えよ。

- (1) y = g(x) のグラフをかけ。
- (2) $\int_0^1 g(x)dx$ を求めよ。

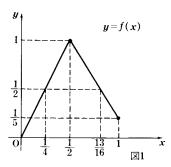
(慶應義塾大-理工)

Advice (1) f(x) のとる値の範囲によって、 $f\{f(x)\}$ はどれとどれを合成したらよいかがき まります。y=f(x)のグラフをかき,yの値が $0 \le y \le \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} < y \le 1$ になる場合に目 をつけて, x の値を, いろいろわけて考えましょう。 y=g(x)のグラフをもとにして、 $\int_0^1 g(x)dx$ を求めましょう。

|解 答 | (1)

$$y = f(x) = \begin{cases} 2x & \left(0 \le x \le \frac{1}{2}\right) \\ -\frac{8}{5}x + \frac{9}{5} & \left(\frac{1}{2} < x \le 1\right) \end{cases}$$

とおくと、



また x=1 の時 $y=\frac{1}{5}$ だから y=f(x) のグラフは図 1 のようになる。

i)
$$0 \le x \le \frac{1}{4}$$
 のとき $0 \le f(x) \le \frac{1}{2}$ だから $g(x) = f\{f(x)\} = 2(2x) = 4x$

ii)
$$\frac{1}{4} < x \le \frac{1}{2}$$
 のとき $\frac{1}{2} < f(x) \le 1$ だから
$$g(x) = f\{f(x)\} = -\frac{8}{5} \cdot 2x + \frac{9}{5} = -\frac{16}{5}x + \frac{9}{5}$$

iii)
$$\frac{1}{2} < x < \frac{13}{16}$$
 のとき、 $1 > f(x) > \frac{1}{2}$ だから
$$g(x) = f\{f(x)\} = -\frac{8}{5} \left(-\frac{8}{5}x + \frac{9}{5}\right) + \frac{9}{5} = \frac{64}{25}x - \frac{27}{25}$$

iv)
$$\frac{13}{16} \le x \le 1$$
 $0 \ge 3$ $\frac{1}{2} \ge f(x) \ge \frac{1}{5}$ $t \ge 5$

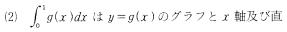
$$g(x) = f \{ f(x) \} = 2 \left(-\frac{8}{5}x + \frac{9}{5} \right) = -\frac{16}{5}x + \frac{18}{5}$$

i), ii), iii), iv) より

$$g(0)=0$$
, $g\left(\frac{1}{4}\right)=1$, $g\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{5}$,

$$g\left(\frac{13}{16}\right) = 1, \ g(1) = \frac{2}{5}$$

となり、y=g(x)のグラフは図2のようになる。



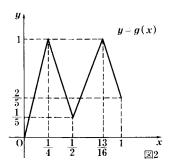
線x=1の囲む面積であるから、図3において

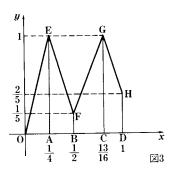
$$= \frac{1}{8} + \left(1 + \frac{1}{5}\right) \cdot \frac{1}{8} + \left(\frac{1}{5} + 1\right) \cdot \frac{5}{32} + \left(1 + \frac{2}{5}\right) \cdot \frac{3}{32}$$

$$=\frac{19}{32}$$

すなわち,

$$\int_0^1 g(x) dx = \frac{19}{32}$$





| 注 意 (1) f(x) の値域に注意して $f\{f(x)\}$ を求めます。

 $0 \le x \le \frac{1}{4}$ では $0 \le 2x \le \frac{1}{2}$ ですから、2x を、2x の x に代入します。

$$\frac{1}{4} < x \le \frac{1}{2}$$
 では $\frac{1}{2} < 2x \le 1$ ですから、 $2x$ を、 $-\frac{8}{5}x + \frac{9}{5}$ の x に代入します。

$$\frac{1}{2} \le x < \frac{13}{16} \ \text{では } 1 \ge -\frac{8}{5} x + \frac{9}{5} > \frac{1}{2} \ \text{ですから,} \ -\frac{8}{5} x + \frac{9}{5} \ \text{を,} \ -\frac{8}{5} x + \frac{9}{5} \ \text{の} \ x \ \text{ に代入しま}$$

す。

$$\frac{13}{16} \le x \le 1$$
 では $\frac{1}{2} \ge -\frac{8}{5}x + \frac{9}{5} \ge \frac{1}{5}$ ですから、 $-\frac{8}{5}x + \frac{9}{5}$ を、 $2x$ の x に代入します。

(2) 面積を求めるのだからといって、定積分を使わなければいけないということはありません。この場合は、グラフをもとにして、三角形と台形の面積を求めた方が楽です。

次は, トレーニングをしなさい。

■ 実戦トレーニング ■

4 f(x)は、区間 [0, 1] において、

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \left(0 \le x \le \frac{1}{2}\right) \\ -\frac{3}{2}x + \frac{7}{4} & \left(\frac{1}{2} < x \le 1\right) \end{cases}$$

で定義される関数とする。g(x)=f(f(x))とおくとき、つぎの問に答えよ。

- (1) y=g(x)のグラフを書け。
- (2) $\int_0^1 g(x) dx を求めよ。$

- 5 $0 \le x \le 1$ で定義された関数 f(x) = |2x-1| について、次の問いに答えよ。
 - (1) y = f(f(x)) のグラフをかけ。
 - (2) f(f(f(x)))=x となる x の個数を求めよ。

(北海道大-理 I)

- **6** f_1 , f_2 は実数係数の多項式で、どちらも定数でないとする。 $f_1 \circ f_1$, $f_1 \circ f_2$, $f_2 \circ f_1$, $f_2 \circ f_2$ のそれぞれが f_1 または f_2 のどちらかに一致するものとする。ただし、2 つの関数 f(x)、g(x) に対して、 $f \circ g$ は f と g の合成関数 f(g(x)) を表す。
 - (1) f_1 , f_2 はともに1次式であることを示せ。
 - (2) $f_1(1)=f_2(1)=1$ をみたす f_1 , f_2 の組をすべて求めよ。

(大阪大-文系)

ごくろうさまでした。第7日は、関数の最大・最小について学習します。

第7日

関数とグラフ5日間②

学習日

月 日

関数の最大・最小

きょうは、関数の最大・最小について学習します。問題の中で与えられた条件のほかに、大前提となる条件が問題の表面に出てこないことがあります。とりうる値が実数に限られるということが大前提になっていたり、三角関数がはいってきたときは、おのずととりうる値の範囲が決まっているということです。つねに、かくれている条件はないかと考えながら解いていきましょう。

では、確認トレーニングにはいりなさい。

確認トレーニング ■■■

1 次の式を, x+y, xy だけの式で表しなさい。

(1)
$$x^2 + xy + y^2$$

$$(2) \quad \frac{y^2}{x} + \frac{x^2}{y}$$

2 点 (a, -1) が,放物線 $y = 2x^2 - 3x - 3$ に関して,点 (-1, 3) と反対側にあるように,a の値の範囲を定めなさい。

3 $|x|+|y| \le 1$ のとき、 $2y-x^2$ の最大値・最小値を求めなさい。

4 $\sin\theta + \cos\theta = a$ (ただし、 $a \neq 1$)のとき、次の式の値を a を使って表しなさい。

(1)
$$\sin\theta\cos\theta$$

(2)
$$\tan\theta + \frac{1}{\tan\theta}$$

り 次の定積分を求めなさい。ただし、a は定数とします。

(1)
$$\int_{-1}^{1} (x^2 + 3x + 2) dx$$

(2)
$$\int_{-2}^{2} (3x^3 + 2x^2 - x + 3) dx$$

(3)
$$\int_{-1}^{1} \left(4x^5 + x^4 - \frac{3}{5}x^3 + x^2 \right) dx$$

(4)
$$\int_{-a}^{a} \left(x^3 + \frac{3}{2} x^2 + 5x + \frac{1}{2} \right) dx$$

----- 確認トレーニングの答え

(2)
$$\frac{(x+y)^3 - 3xy(x+y)}{xy}$$

2
$$a < -\frac{1}{2}$$
, $2 < a$

3
$$x=0$$
, $y=1$ のとき 最大値 2 $x=0$, $y=-1$ のとき 最小値-2

4 (1)
$$\frac{a^2-1}{2}$$
 (2) $\frac{2}{a^2-1}$

5 (1)
$$\frac{14}{3}$$
 (2) $\frac{68}{3}$ (3) $\frac{16}{15}$ (4) $a^3 + a$

最初の例題は、典型的な最大・最小の問題です。解き方に代表的な2通りの方法があるから、そ のどちらでも解けるようにしなければいけません。

■ 例題 11 条件つきの対称式の最大値・最小値 ━

点(x, y)が円周 $x^2+y^2=1$ の上を動くとき、次の式の値の範囲を求めよ。

- (1) x+y
- (2) $x^4 + y^4$
- (3) $x^3 + y^3$

(一橋大)

Advice (1) 条件 $x^2+y^2=1$ から x+y の値の範囲を求める方法としては, x+y=k とおいて 2 次方程式の判別式を利用するのがもっとも一般的です。

> (2) まず、条件 $x^2+y^2=1$ を利用して、 x^4+y^4 をつぎのように変形しておきます。 $x^4 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 = 1 - 2x^2y^2$ そこで、(1)の結果を利用して、 x^2y^2 の値の範囲を求めるように考えればよいでし よう。

(3) 条件 $x^2 + y^2 = 1$ より $|x| \le 1$, $|y| \le 1$ となることを利用して $|x^3+y^3| \le |x^3|+|y^3| \le |x|^2+|y|^2=1$ が示されます。

|解答|(1) $x^2+y^2=1$ (1) x+y=k(2)

とおいて、②より y=k-x として、これを①に代入すると

$$x^2 + (k-x)^2 = 1$$

$$\therefore 2x^2 - 2kx + k^2 - 1 = 0 \quad \cdots \quad 3$$

③が実数解をもつ条件は、3の判別式をDとすれば

$$\frac{D}{4} = k^2 - 2(k^2 - 1)$$
$$= -(k^2 - 2) \ge 0$$

⇐実数を扱うとき、D ≥ 0 をよく

$$\therefore -\sqrt{2} \leq k \leq \sqrt{2}$$

利用する。

ゆえに、x が実数の時、2より y も実数になるから x+y がとる値の範囲は

$$-\sqrt{2} \leq x + u \leq \sqrt{2}$$
(4)

ここで④の左右の等号が成り立つのは

③より
$$x = \frac{k}{2}$$
, つまり $x = \mp \frac{\sqrt{2}}{2}$, また $y = k - x = \mp \frac{\sqrt{2}}{2}$

よって,点(x, y)が $\left(\mp\frac{\sqrt{2}}{2}, \mp\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ (複号同順)の場合である。

(2) ①を利用して、 x^4+y^4 を変形すると

$$x^4 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2$$

= 1 - 2x²y²(5)

⇔対称式の変形の基本。

また、①から

$$(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$$

$$=1+2xy$$

ここで、④より

$$0 \le (x+y)^2 \le 2$$

したがって

 $0 \le 1 + 2xy \le 2$

$$\therefore \quad -\frac{1}{2} \leq xy \leq \frac{1}{2}$$

$$\therefore \quad 0 \leq x^2 y^2 \leq \frac{1}{4}$$

⇔0≦ を忘れないよう注意!

 $\hat{\phi} \gtrsim C$, $\frac{1}{2} \le 1 - 2x^2y^2 \le 1$

$$\therefore \quad \frac{1}{2} \leq x^4 + y^4 \leq 1$$

ここで、上式の左側の等号が成り立つのは $x^2y^2 = \frac{1}{4}$ 、 $x^2 + y^2 = 1$ より $x^2 = y^2 = \frac{1}{2}$

であるから点(x, y)が

$$\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$
, $\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \mp\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ (複号同順)

のときである。また,右側の等号が成り立つのは $x^2y^2=0$, $x^2+y^2=1$ より

$$\begin{cases} x^2=1 \\ y^2=0 \end{cases}$$
 または $\begin{cases} x^2=0 \\ y^2=1 \end{cases}$ であるので点 (x, y) が $(1, 0), (-1, 0), (0, 1), (0, -1)$

のときである。

(3) $|x| \le 1, |y| \le 1$

 $\ \ \, \downarrow \ \, \supset \, \, \subset (1) \, \downarrow \ \, | \ \, | \ \, x \, |^3 \leq | \ \, x \, |^2, \ \, | \ \, y \, |^3 \leq | \ \, y \, |^2$

したがって

$$|x^{3}+y^{3}| \le |x^{3}| + |y^{3}|$$

= $|x|^{3} + |y|^{3}$
 $\le |x|^{2} + |y|^{2}$ 6
= $x^{2} + y^{2} = 1$

⇐一般に,

 $|a+b| \leq |a|+|b|$

 $\therefore -1 \leq x^3 + y^3 \leq 1 \qquad \cdots$

⑥で等号が成り立つのは,

$$\begin{cases} |x|^3 = |x|^2 \\ |y|^3 = |y|^2 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = 0 \end{cases} \text{ \sharp t it } \begin{cases} x = 0 \\ y = \pm 1 \end{cases} \text{ \emptyset $\&$ t $\to δ o.}$$

よって、⑦の左側の等号が成り立つのは、点(x, y)が

$$(-1, 0), (0, -1)$$

のときである。また、右側の等号が成り立つのは、点(x, y)が

(1, 0), (0, 1)

のときである。

注意 (1)(2)(3)の答えとしては、ただ単に、式の値の範囲を不等式で表すだけでなくて、限界の値を とるときの点 (x, y) を実際に示しておくのがよいでしょう。

また、(3)では、つぎの絶対不等式が使われています。公式としておぼえてください。

 $|a+b| \leq |a|+|b|$

ここで、上式の等号が成り立つのは、 $ab \ge 0$ の場合です。

別解(1)点
$$(x, y)$$
は円 $x^2+y^2=1$ の上を動くのだから,

$$\begin{cases} x = \cos \theta \\ y = \sin \theta \end{cases} \quad (0 \le \theta < 2\pi)$$

とおける。

$$x + y = \sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$$
ここで $\frac{\pi}{4} \le \theta + \frac{\pi}{4} < \frac{9}{4}\pi$ であるから $-1 \le \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \le 1$
∴ $-\sqrt{2} \le \sqrt{2}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \le \sqrt{2}$

ここで、左側の等号が成り立つのは $\theta=2n\pi+\frac{5}{4}\pi$ の時、

右側の等号が成り立つのは $\theta=2n\pi+\frac{1}{4}\pi$ の時である。

(但し, n は整数)

したがって $-\sqrt{2} \le x + y \le \sqrt{2}$

ここで、左側の等号が成り立つのは
$$(x, y) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$
の時、

右側の等号が成り立つのは $(x, y) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ の時である。

(2) (1)と同様に
$$x = \cos\theta$$
, $y = \sin\theta$ とおくと,

$$x^{4} + y^{4} = \cos^{4}\theta + \sin^{4}\theta$$
$$= (\sin^{2}\theta + \cos^{2}\theta)^{2} - 2\sin^{2}\theta\cos^{2}\theta$$
$$= 1 - 2\left(\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)^{2}$$

 $\texttt{ZZC}, \ 0 {\leq} 2\theta {<} 4\pi \ \texttt{Cbabb} \\ -1 {\leq} \sin 2\theta {\leq} 1$

 $\therefore 0 \le \sin^2 2\theta \le 1$

ここで、左側の等号が成り立つのは $2\theta = n\pi$ の時、

右側の等号が成り立つのは $2\theta=n\pi+\frac{\pi}{2}$ の時である。(但し,n は整数)

したがって
$$\frac{1}{2} \le 1 - 2\left(\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)^2 \le 1$$

$$\therefore \quad \frac{1}{2} \leq x^4 + y^4 \leq 1$$

ここで、左側の等号が成り立つのは $(x, y) = \left(\pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$$\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \mp\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$
の時(複号同順)

右側の等号が成り立つのは、 $(x, y)=(\pm 1, 0)$ 、 $(0, \pm 1)$ の時である。

(3) (1)と同様に $x = \cos\theta$, $y = \sin\theta$ とおくと,

$$x^{3} + y^{3} = \cos^{3}\theta + \sin^{3}\theta$$

$$= (\cos\theta + \sin\theta)(\cos^{2}\theta - \cos\theta\sin\theta + \sin^{2}\theta)$$

$$= (\cos\theta + \sin\theta)(1 - \cos\theta\sin\theta)$$

ここで
$$\cos\theta + \sin\theta = t \left(-\sqrt{2} \le t \le \sqrt{2} \right)$$
 とおくと

$$t^2 = \cos^2\theta + 2\cos\theta\sin\theta + \sin^2\theta$$

 $=1+2\cos\theta\sin\theta$

$$\therefore \quad \cos\theta \sin\theta = \frac{t^2 - 1}{2}$$

$$x^3+y^3=I$$
 とおくと

$$I = t\left(1 - \frac{t^2 - 1}{2}\right) = \frac{3}{2}t - \frac{1}{2}t^3$$

$$\frac{dI}{dt} = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}t^2 = \frac{3}{2}(1+t)(1-t)$$

増減表を書くと,

| t | $-\sqrt{2}$ | | -1 | | 1 | | $\sqrt{2}$ |
|-----------------|-----------------------|----|----|---|---|----|----------------------|
| $\frac{dI}{dt}$ | | _ | 0 | + | 0 | _ | |
| I | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | `` | -1 | / | 1 | `, | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ |

したがって $-1 \le I \le 1$

但し,左側の等号は
$$t=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=-1$$
 の時であり,

$$\theta = (2n+1)\pi$$
, $2n\pi + \frac{3\pi}{2}$ の時である。

右側の等号は
$$t=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=1$$
 の時であり、

$$\theta = 2n\pi$$
, $2n\pi + \frac{\pi}{2}$ の時である。

$\therefore -1 \leq x^3 + y^3 \leq 1$

但し、左側の等号は
$$(x, y)=(-1, 0)$$
, $(0, -1)$

右側の等号は
$$(x, y)=(1, 0), (0, 1)$$

の時に成り立つ。

実戦トレーニング ■■■■

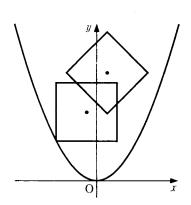
且 $\dot{a}(x, y)$ が円周 $x^2 + y^2 = 2$ の上を動くとき,次の式の値の範囲を求めよ。

(1) x+y

(2) $x^4 + y^4$

xy 平面上の $y \ge x^2$ で表される領域を D とする。D に 含まれる 1 辺の長さ t の正方形で,各辺が座標軸と平行または 45° の角をなすものをすべて考える。

このとき、これらの正方形の中心の y 座標の最小値を t の関数として表し、そのグラフをかけ。 (東京大-理科)



3 xy 平面上の $y \ge 2x^2$ で表される領域を D とする。D に含まれる 1 辺の長さ t の正方形で、各辺が座標軸と平行または 45° の角をなすものをすべて考える。

このとき、これらの正方形の中心の y 座標の最小値を t の関数として表し、そのグラフをかけ。

こんどは, とりうる値の範囲を一度にしぼりきれない問題です。どのように考えたらよいか, まずは自分で解くこと。

■ 例題 12 三角関数の増減 ■

x の関数 $\left(1-\frac{a}{2}\cos^2x\right)\sin x$ の最大値が 1 となるような a の範囲を求めよ。

(東京工大-理・工)

Advice まず、 $\sin x = t(ただし、-1 \le t \le 1)$ とおくと、与式は、 $f(t) = \left\{1 - \frac{a}{2}(1 - t^2)\right\} t$ と

なりますから、f(t) を微分して増減を調べ、その最大値を求めればよいことがわかります。しかし、この問題では、a による場合わけが複雑で、この考え方では、計算がとても大変です。そこで、与式から1 をひいた式が、

$$f(x) = \left(1 - \frac{a}{2} \cdot \cos^2 x\right) \sin x - 1 \le 0$$

となる条件を求めることを考えましょう。

 $1-\sin x \ge 0$ という関係があることに着目し、 $\sin x = t$ とおくと、実質的には t の 2 次関数の最大、最小の問題に帰着します。

解答 題意の条件は $\left(1-\frac{a}{2}\cos^2x\right)\sin x-1$ の最大値が 0 になることと同値である。

$$f(x) = \left(1 - \frac{a}{2}\cos^2 x\right)\sin x - 1$$

とおくと
$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$
, また

$$f(x) = \left\{ 1 - \frac{a}{2} (1 - \sin^2 x) \right\} \sin x - 1 = -\frac{a}{2} (1 - \sin^2 x) \sin x + \sin x - 1$$
$$= -\frac{a}{2} (1 + \sin x) (1 - \sin x) \sin x - (1 - \sin x)$$
$$= -(1 - \sin x) \left\{ \frac{a}{2} (1 + \sin x) \sin x + 1 \right\}$$

 $f(x) \le 0$ となるのだから

$$-(1-\sin x)\left\{1+\frac{a}{2}(1+\sin x)\right\}\sin x \le 0 \qquad \cdots$$

となるように a を定める。

 $1-\sin x \ge 0$ だから①が成り立つためには,

$$1 + \frac{a}{2}(1 + \sin x)\sin x \ge 0$$

となればよい。

$$\sin x = t$$
 $(-1 \le t \le 1)$ とおくと $g(t) = \frac{a}{2}t^2 + \frac{a}{2}t + 1 \ge 0$ が $-1 \le t \le 1$ のとき成り立

つ。

$$g(t) = \frac{a}{2} \left(t + \frac{1}{2} \right)^2 + 1 - \frac{a}{8}$$
 $t \in \mathbb{R}$

(i) a>0 の時 g(t) の最小値は

$$t = -\frac{1}{2} \mathcal{O} 時 \quad 1 - \frac{a}{8} \ge 0 \qquad \qquad \therefore \quad 0 < a \le 8 \qquad \qquad \Leftrightarrow t = -\frac{1}{2} \text{ は, } \quad -1 \le t \le 1 \text{ をみたす}.$$

- (ii) a=0の時 $g(t)=1 \ge 0$
 - ∴ a=0 の時も成り立つ

←「常に1」という関数なので,

- $-1 \le t \le 1$ でもとうぜん成立。
- (iii) a < 0 の時 $t = -\frac{1}{2}$ が軸だから $g(-1) \ge g(1)$ となり, $g(1) \ge 0$ ならよい。
 - $\therefore g(1) = a + 1 \ge 0 \qquad \therefore -1 \le a < 0$

⇔a<0 を忘れないこと。

(i), (ii), (iii)より求める範囲は

-1≤*a*≤8 である。

注意

$$f(x) = \left(1 - \frac{a}{2}\cos^2 x\right) \sin x = \left\{1 - \frac{a}{2}(1 - \sin^2 x)\right\} \sin x$$

とおいて $f(x) \le 1$ となる範囲を求めると計算量がだいぶ増えます。

次は,実戦トレーニングです。

■■■ 実戦トレーニング ■■■■

4 x の関数 $\left\{1+\frac{a}{4}(1-\sin x)-\frac{a}{2}\cos^2 x\right\}\sin x$ の最大値が 1 となるような a の範囲を求めよ。

- **5** a, b, c, d を実数の定数として、関数 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ を考える。
 - (1) 関数 f(x) が3条件
 - $(4) \quad f(-1) = 0$
 - $(\Box) f(1) = 0$
 - $\langle v \rangle \mid x \mid \leq 1 \ \mathcal{O} \ \xi \ \delta \ f(x) \geq 1 \mid x \mid$

をみたすのは、定数 a, b, c, d がどのような条件をみたすときか。

(2) 条件(イ), (ロ), (\prime)をみたす関数 f(x) のうちで、積分

$$\int_{-1}^{1} \{ f'(x) - x \}^{2} dx$$

の値を最小にするものを求めよ。

(東京大-理科)

- 「点 A は原点を出発してx 軸上を正の方向に一定の速さvで進む。点 B は (0, -2) を A と同時に出発して,ある方向に A と同じ速さで進む。A,B 間の最短距離は 1 であるという。
 - (1) B の進む方向とx 軸の正の方向とのなす角 θ を求めよ。
 - (2) A, B間の距離が最短になるときのA, Bの座標を求めよ。

(慶應義塾大-工)

第8日は、対数関数です。ごくろうさまでした。

第8日

関数とグラフ5日間③

学習日 月 日

対数関数

きょうは、対数関数について学習します。対数関数で気をつけてほしいことが2つあります。1 つは、真数条件であり、もう1つは、底の値が1を境にして、そのグラフは別々に考えなくてはい けないということです。この2つをつねに頭にいれておいて下さい。

それでは、確認トレーニングで基礎をためしてみます。

■■■ 確認トレーニング ■■■

1 次の値を求めなさい。

$$\log_2 \left(2\log_4 16 + \log_{\frac{1}{2}} \frac{3}{8} + \log_4 36 \right)$$

- 2 次の各組の数の大小を調べなさい。
 - (1) $4\log_9 2$, $\log_3 6$
 - (2) 0 < b < a < 1 < c \mathcal{O} ≥ 3 , $\log_a c$, $\log_b c$
 - (3) 0 < a < 1, 0 < b < 1 \emptyset $\geq 3, \log_a b, \log_a b^2, \log_a 2b$
- 3 次の方程式を解きなさい。
 - (1) $3^{2x} 2 \cdot 3^x 3 = 0$

- (2) $2^{2x} 3 \cdot 2^x 4 = 0$
- **4** 次の不等式をみたす *x* の値の範囲を求めなさい。
 - (1) $\log_2(x+1) + \log_2(x-1) > 3$

(2) $\log_2(x+1)(x-1) > 3$

─── 確認トレーニングの答え ──

1 3

 $2 (1) \log_3 6 > 4\log_9 2$

- (2) $\log_b c > \log_a c$
- (3) $\log_a b^2 > \log_a b > \log_a 2b$
- 3 (1) x = 1
- (2) x = 2
- 4 (1) x > 3
- (2) x < -3, x > 3

対数関数を扱った基本問題です。まず, 自分で解きなさい。

🖚 例題 13 対数関数を含む不等式 💳

- (1) t が t>1 の範囲を動くとき、関数 $f(t)=\log_2 t + \log_t 4$ の最小値を求めよ。
- (2) t>1 なるすべての t に対して、不等式

 $k\log_2 t < (\log_2 t)^2 - \log_2 t + 2$

が成り立つような kの範囲を求めよ。

(北海道大-文系)

- $\boxed{\mathsf{Advice}}$ (1) まず,対数の底を 2 にそろえて, $\log_2 t$ で表すようにします。そして, t > 1 ですか $\log_2 t > 0$ であることを用い、相加平均と相乗平均の関係を使えば、f(t) の最小値 が求められます。
 - (2) $\log_2 t = x$ とおくと t > 1 より x > 0 で、この不等式は x の 2 次不等式になります。 そこで、x>0 の範囲でつねに成り立つように k の範囲を定めることもできます。し かし、ここでは $\log_2 t > 0$ より、両辺を $\log_2 t$ で割ると、(1)の結果を使うことができま す。この方がずっと楽です。

解 答 (1)

 $f(t) = \log_2 t + \log_t 4$

$$= \log_2 t + \frac{\log_2 4}{\log_2 t}$$
$$= \log_2 t + \frac{2}{\log_2 t}$$

t>1 より、 $\log_2 t>0$ よって、相加平均と相乗平均の関係を用いることができる。

$$\therefore \log_2 t + \frac{2}{\log_2 t} \ge 2\sqrt{\log_2 t} \times \frac{2}{\log_2 t} = 2\sqrt{2}$$

等号が成り立つのは

$$\log_2 t = \frac{2}{\log_2 t}$$

のときである。したがって,

 $(\log_2 t)^2 = 2$

 $\log_2 t > 0 \text{ is } 0 - \log_2 t = \sqrt{2}, t = 2^{\sqrt{2}}$

以上より

最小値 $2\sqrt{2}$ ($t=2^{\sqrt{2}}$ のとき)

(2) t>1 より $\log_2 t>0$, 与えられた不等式の両辺を $\log_2 t$ で割ると \hookrightarrow 正の数で割るので、不等

号の向きは変うない。

⇔問題文は「最小値を求めよ」で あるが、最小値を与えるtの値

も求めておくことがたいせつで

ある。

$$k < \log_2 t - 1 + \frac{2}{\log_2 t}$$
 ①

(1)より $\log_2 t + \frac{2}{\log_2 t}$ の最小値は $2\sqrt{2}$ であるから,①の右辺の最小値は $2\sqrt{2}-1$ で

ある。したがって、t>1 なるすべての t に対して成り立つような k の範囲は

 $k < 2\sqrt{2} - 1$

| 注 意 (1) AとBの相加平均と相乗平均の関係

$$\frac{A+B}{2} \ge \sqrt{AB}$$
 $\Rightarrow t \Rightarrow b \Rightarrow A+B \ge 2\sqrt{AB}$

は、 $A \ge 0$ 、 $B \ge 0$ のときに成り立つ性質です。ここでは、 $\log_2 t > 0$ をきちんと示してから用 いることが必要です。

別解 (2) 少し、遠まわりになるが $\log_2 t = x$ とおいて、x の 2 次不等式が x > 0 の範囲で成り立つような k の範囲を求めてみる。

log₂
$$t = x$$
 とおくと $t > 1$ より $x > 0$
 $kx < x^2 - x + 2$
 $x^2 - (k+1)x + 2 > 0$ ①

①ix > 0 の範囲でつねに成り立つための必要十分条件は $g(x) = x^2 - (k+1)x + 2$ とおくと

②は,k > -1 のとき $-2\sqrt{2} < k+1 < 2\sqrt{2}$

$$1 - 1 - 2\sqrt{2} < k < 2\sqrt{2} - 1$$

ゆえに $-1 < k < 2\sqrt{2} - 1$ ②

③は、 $k \le -1$ のとき $g(0) = 2 \ge 0$ より常に成立 ………③

②', ③'より kの範囲は

 $k < 2\sqrt{2} - 1$

対数が混じっている方程式,不等式を解くときは,その対数を1つの変数のように考えるとわかりやすいでしょう。

では,次の実戦トレーニングを解いてみよう。

■■■■ 実戦トレーニング ■■■■■

t>1 なるすべての t に対して、不等式

 $k\log_3 t < (\log_3 t)^2 - 2\log_3 t + 3$

が成り立つような k の範囲を求めよ。

2 $x^{xyz}=y^2$, $y^{xyz+1}=z^3$, $z^{xyz+2}=x^4$ を満たす正数 x, y, z の値を求めよ。 (早稲田大-教)

 $A = \frac{1}{6} (\sqrt{10})^{\log_{10} 2}, \quad B = -\log_{10} \sqrt[3]{0.1}, \quad C = \log_{5} \left(25(5^{-\frac{3}{5}})^{3} \right), \quad D = \sin\frac{3\pi}{7}, \quad E = \cos\left(\sin\frac{3\pi}{7} \right),$ $F = \log_{10} \left(\tan \frac{\pi}{7} \right)$, $G = \log_{9} \sqrt{6}$ とする。 次の \bigcirc の中に $A \sim G$ までの適当な記号を記入せよ。

0より小さい数はア______, 0より大きく0.3より小さい数はイ_____とゥ_____, 0.3 より大きく 0.5 より小さい数は ェ と ォ 0.5 より大きく 0.8 より小さい数は カーである。

こんどは、対数関数のグラフに関係した問題です。わからなかったら、いくつか具体的な場合について調べてみるとよいのです。

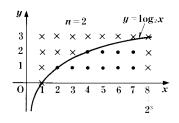
■ 例題 14 対数関数と整数問題 ━

条件 $1 < x < 2^{n+1}$ および $0 < y \le \log_2 x$ をみたす整数 x, y を座標とする点 (x, y) の個数を求めよ。 (大阪大-理系)

Advice 不等式 $1 < x < 2^{n+1}$, $0 < y \le \log_2 x$ を満たす点 (x, y) は、曲線 $y = \log_2 x$ と直線 x = 1, $x = 2^{n+1}$, y = 0 で囲まれた図形の内部 (曲線上の一部の点を含む) にあります。まず、n = 2 の場合を例に考えてみましょう。

与えられた不等式を満足する整数 (x, y) の組の個数は、y=1 のとき 6 個、y=2 のとき 4 個で合計 10 個です。このように、y をきめて数えるというやり方で自然数 n について考えてみましょう。

ところで、この問題ではnがどういう値であるか示されていないのですが、自然数と考えても差し支えないでしょう。



解答 不等式 $1 < x < 2^{n-1}$, $0 < y \le \log_2 x$ を満たす領域は,曲線 $y = \log_2 x$ と,直線 x = 1, $x = 2^{n+1}$, y = 0

は、 曲線 $y - \log_2 x$ と、 直線 x = 1, $x = 2^{-n}$, y = 0 で囲まれた図形である。(ただし、直線上の点を除く。)

y=k とすると、(ただし、 $k=1, 2, \dots, n$) $y \le \log_2 x \iff 2^y \le x$

であるから、与えられた不等式を満たす整数 x は、

$$x=2^k$$
, 2^k+1 , $2^k+2\cdots\cdots 2^{n+1}-1$ であり, 点 (x, y) の組は $\{(2^{n-1}-1)-2^k\}+1=2^{n+1}-2^k$ (個)

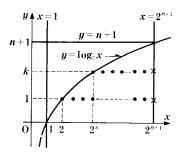
よって、求める点の個数は $\sum_{k=1}^{n} (2^{n+1}-2^k)$ である。

$$\sum_{k=1}^{n} (2^{n+1} - 2^k) = \sum_{k=1}^{n} 2^{n+1} - \sum_{k=1}^{n} 2^k$$

$$= n \cdot 2^{n+1} - \frac{2(2^n - 1)}{2 - 1}$$

$$= n \cdot 2^{n+1} - (2^{n+1} - 2)$$

$$= (n-1)2^{n+1} + 2$$



⇔nとkの違いに注意。

別解 $2^k \le x < 2^{k-1}$ を満たす整数 x は $(2^{k+1}-2^k)$ 個あっ て、そのおのおのに対して y 座標が整数となるの は, y=1, 2, ……kの場合で, k個ある。 したがって、求める点(x, y)の総数は

$$\sum_{k=1}^{n} k(2^{k-1} - 2^k) = \sum_{k=1}^{n} k \cdot 2^k (2 - 1) = \sum_{k=1}^{n} k \cdot 2^k$$

この値をSとおき、S-2Sを作ると

$$S = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \dots + n \cdot 2^n$$

$$2S = 1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2^3 + \dots + (n-1) \cdot 2^n + n \cdot 2^{n+1}$$

辺々引くと,

$$-S = (2+2^2+2^3+\cdots+2^n) - n \cdot 2^{n+1}$$

かっこ内は初項 2,公比 2 の等比数列の初めの n 項の和であるから

$$-S = \frac{2(2^{n}-1)}{2-1} - n \cdot 2^{n+1} = 2^{n+1} - 2 - n \cdot 2^{n-1}$$

$$S = (n-1)2^{n+1} + 2$$

グラフを使う問題は、グラフの様子を正確につかまえることが必要ですね。 それでは、次の実戦トレーニングでがんばってみよう。

実戦トレーニング ■■■■

自然数 n について、 $0 < x < (n+1)^2$ 、 $0 < y \le \sqrt{x}$ を満たす整数 x、y を座標とする点 (xy)の個数を求めよ。

- **5** xy 平面上に関係式 $\frac{\log_{10}(4-|x-2|)}{\log_{10}2y} = \frac{1}{2}$ $(2y \pm 1)$ をみたす点 (x, y) のえがく図形 C と,直線 $l: y = a(x+1) + \frac{1}{2}$ とがある。ただし,a は定数とする。次の問いに答えよ。
 - (P) C を図示せよ。
 - (イ) C と l との交点がただ l つであるような a の範囲を求めよ。 (横浜国大-教)

- **6** xy 平面上に関係式 $\frac{\log_{10}(5-|x-2|)}{\log_{10}3y} = \frac{1}{2}$ $(3y \pm 1)$ を満たす点 (x, y) の描く図形 C と,直線 l; $y = a(x-6) + \frac{1}{3}$ とがある。a は定数とする。このとき
 - (1) Cを図示せよ。
 - (2) C と l との交点がただ一つであるような a の範囲を求めよ。

ごくろうさまでした。第9日は、三角関数について学習します。

第9日

関数とグラフ5日間④

学習日 月 日

三角関数

きょうは、三角関数を学習します。三角関数の問題を解くときには、公式をうまく活用すること が大きなポイントです。試験場で公式を忘れても、自分で導きだせるようにしておきたいものです

まずは、確認トレーニングにとりくんでみなさい。

■■■ 確認トレーニング ■■■■

1 \triangle ABC において、b=3、c=4、A=60° のとき、a を求めなさい。

2 \triangle ABC において,b=5,c=8,面積 $S=10\sqrt{3}$ であるとき,A を求めなさい。

3 $0 \le \theta < 2\pi$ のとき、次の不等式を解きなさい。

$$-\frac{1}{2} < \sin\theta \le \frac{\sqrt{3}}{2}$$

4 直線 x+y=1 を原点のまわりに 60° 回転して得られる直線の方程式を求めなさい。

5 次の2直線のつくる角 θ の大きさを求めなさい。ただし、0°< θ <90°とします。

$$y = 2x y = \frac{1}{3}x$$

---- 確認トレーニングの答え -

1
$$a=\sqrt{13}$$

$$A = 60^{\circ}, 120^{\circ}$$

3
$$0 \le \theta \le \frac{\pi}{3}$$
, $\frac{2}{3}\pi \le \theta < \frac{7}{6}\pi$, $\frac{11}{6}\pi < \theta < 2\pi$

4
$$(1-\sqrt{3})x+(1+\sqrt{3})y=2$$

では、例題にはいります。問題は何を要求しているのか、どんな形に式を変形していけばよいのか、じっくり考えてからとりくみなさい。

━━━ 例題 15 三角関数と恒等式 **━━**

a, b, c はすべて零でない定数とし, x の関数 f(x) が

 $f(x) = [(a^2+b)\cos x - 2ab]^2 + (a^2-b)^2\sin^2 x + c[2a\cos x - (a^2+1)]^2$

で定義されている。この f(x) が定数関数となるように b の値を定めよ。

(早稲田大-教)

Advice

まず①の式を正確に展開しなければなりません。このように長い式は変形するときに、間違えやすいので注意しましょう。

また、 $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ とおくと、①の式は、すべて、 $\cos x$ で表すことができますので、この式が任意の x で成立するように定数 a, b, c を決めればよいわけです。

解 答

①で、 $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ とおいて、 $\cos x$ について整理する。

 $f(x) = [(a^2 + b)\cos x - 2ab]^2 + (a^2 - b)^2(1 - \cos^2 x) + c(2a\cos x - (a^2 + 1))^2$

 $= (a^2 + b)^2 \cos^2 x - 4ab(a^2 + b)\cos x + 4a^2b^2 + (a^2 - b)^2 - (a^2 - b)^2 \cos^2 x$

 $+4a^2c\cos^2x-4ac(a^2+1)\cos x+c(a^2+1)^2$

= { $(a^2+b)^2-(a^2-b)^2+4a^2c$ } $\cos^2 x - 4a$ { $b(a^2+b)+c(a^2+1)$ } $\cos x$

 $+4a^2b^2+(a^2-b)^2+c(a^2+1)^2$

 $=4a^{2}(b+c)\cos^{2}x-4a\{b(a^{2}+b)+c(a^{2}+1)\}\cos x$

 $+4a^2b^2+(a^2-b)^2+c(a^2+1)^2$

ここで、これがつねに定数になるためには、

 $4a^{2}(b+c)=0$ (2)

 $-4a \{b(a^2+b)+c(a^2+1)\}=0$ (3)

が成立しなければならない。

⇐cosx についての2次関数と考

える。

よって、a = 0 より②から、

b = -c ········

④を③に代入して,

 $-4a \{ba^2+b^2-ba^2-b\}=0$

よって,

 $b^2 - b = 0$

tabs, b(b-1)=0

 $b \neq 0$ であるから、

b = 1

逆に、このとき②、③が成立し、確かに f(x) は定数関数となる。

注 意

一般にxが任意の実数とするとき、

 $A\cos^2 x + B\cos x + C = 0$

が成立するための条件は,

 $x=0 \ge \cup \subset$

A+B+C=0

 $x=\frac{\pi}{2}$ \(\tau_{\tau},

C = 0

A-B+C=0

これから、A=B=C=0となります。逆にこのとき⑤が成立することがわかります。したがって、解答の②、③の条件が得られます。

さらに、①の式を変形するとき、 $\sin 2 \cos 0$ 両方が出て来ますので、 $\sin 2 \cos 0$ に直す方針でいくべきです。

三角関数にまどわされないで、三角関数を1つの変数とみるようにしましょう。次は、実戦トレーニングです。

実戦トレーニング ■■■■

1 a, b, c はすべて零でない定数とし,x の関数 f(x) が $f(x) = [(a^2+b)\cos x - 2ab]^2 + (a^2-b)^2 \sin^2 x - c[2a\cos x + (1-a^2)]^2$ で定義されている。この f(x) が定数関数となるように b の値を定めよ。

2 $f(x)=1+2\cos x+3\sin x$ とする。すべての x に対して af(x)+bf(x-c)=1 が成り立つように、定数 a, b, c を定めよ。

(京都大)

3 行列:
$$\left(\begin{array}{cc} \frac{3}{\sqrt{2}}+\sin\theta & \sin\theta \\ \cos\theta & \frac{3}{\sqrt{2}}+\cos\theta \end{array}\right)$$
で表される 1 次変換を f とする。ただし, $0 \le \theta < 2\pi$ とす

る。このとき次の問に答えよ。

- (1) 直線 x+y=1 が f によって写される直線 l の方程式を求めよ。
- (2) 原点 O を中心とする半径 1 の円 C と直線 l が共有点をもつような θ の範囲を求めよ。
- (3) 円 C と直線 I で囲まれた図形で原点を含まない部分の面積 S を最大にする θ の値を求め S よ。

答え合わせをしたら例題です。次は、図形的な問題とからみあわせてある問題です。問題のいっている状況を正確に把握しよう。

■ 例題 16 直線と三角関数 ■

xy 平面上の曲線 $y=x^2$ 上の 3 点を,x 座標の小さいものから順に A,B,C とする。A と B との x 座標の差は a(a は正の定数),B と C との x 座標の差は 1,という関係を保ちながら 3 点 A,B,C が動く。 \angle CAB が最大になるときの,点 A の x 座標を a で表せ。また, \angle CAB が最大になるときに, \angle ABC が直角になるような a の値を求めよ。 (東京大-文科)

Advice

3点 A, B, C を曲線上で左から右へ動かしてみると \angle CAB はまず増加し、それから減少します。これより \angle CAB が最大になるときがあることがわかります。

直線 AB, AC の傾きをそれぞれ m, m' とすると $\tan \angle CAB = \frac{m'-m}{1+mm'}$ となりま

す。これを用いて ∠CAB が最大になる場合を調べましょう。

点 A O x 座標を t とすると、点 B、C O x 座標はそれぞれ t+a、t+a+1 となりますから AB、AC の傾き m、m' は t、a で表すことができます。

解答

点 A O x 座標を t とすると、 $A(t, t^2)$

B(
$$t+a$$
, $(t+a)^2$)
C($t+a+1$, $(t+a+1)^2$)

となる。

 \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} と x 軸の正の向きとのなす角をそれぞれ a, β とすると, a > 0, $a \neq -1$ だから,

$$\tan \alpha = \frac{(t+a)^2 - t^2}{t+a-t} = 2t + a$$

$$\tan \beta = \frac{(t+a+1)^2 - t^2}{t+a+1-t} = 2t + a + 1$$

$$\left(\ \, \ \, \ \, tz \not z \cup -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}, \ \, -\frac{\pi}{2} < \beta < \frac{\pi}{2} \right)$$

 $\tan \beta > \tan \alpha$ であるから $\beta > \alpha$

ゆえに $\angle CAB = \beta - \alpha$ となる。

 $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}, \quad -\frac{\pi}{2} < \beta < \frac{\pi}{2} \ \ge \ \beta > \alpha \ \ \verb""> り 0 < \beta - \alpha < \pi \ \ge \ \verb""なるが①で tan(\beta - \alpha) > 0$

であるから $0<\beta-\alpha<\frac{\pi}{2}$ となる。

⇔周期関数なので β−α の範囲をおさえておく。

よって $\angle CAB = \beta - \alpha$ が最大になるのは、 $0 < \angle CAB < \frac{\pi}{2}$ で $tan \angle CAB$ は増加関数 となるので、 $tan \angle CAB$ が最大になるときである。

 $t = -\frac{2a+1}{4}$ のとき①の分母は最小になるから $tan \angle CAB$ が最大となる。

したがって $\angle \mathsf{CAB}$ が最大となるのは、点 A の x 座標が $-\frac{2\alpha+1}{4}$ のときである。

00 a 10 - 0000 - 10 a 00000-0000

$$t = -\frac{2a+1}{4} \mathcal{O} \succeq \tilde{\Xi}$$

ABの傾きは
$$\tan \alpha = 2t + a = 2\left(-\frac{2a+1}{4}\right) + a = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{(t+a+1)^2-(t+a)^2}{t+a+1-(t+a)} = 2t+2a+1 \ \ \sharp \ \ \eta,$$

$$2t+2a+1=a+\frac{1}{2}$$

ゆえに ∠ABC が直角になるための条件は傾きの積が -1 となることであるから

$$-\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{2}\right)=-1$$

これを解いて
$$a=\frac{3}{2}$$

よって、 \angle ABC が直角になるような a の値は $\frac{3}{2}$ となる。

∠CAB が最大になる場合を調べるとき、余弦定理を用いて cos∠CAB を計算するのは複雑 です。

また \angle ABC が直角になるための条件として $AB^2 + BC^2 = AC^2$ を使うこともないでしょう。 できるだけ簡単に解けるよう工夫してください。

略別解
$$t = -\frac{2a+1}{4}$$
 のとき $\overrightarrow{AB} = \left(a, -\frac{a}{2}\right)$ $\overrightarrow{BC} = \left(1, a+\frac{1}{2}\right)$ となります。

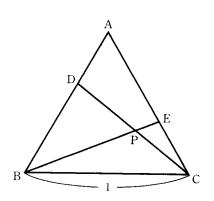
 $\angle ABC$ が直角になるための条件は $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ となることですから、これを用いて \angle ABC が直角になるような a の値を求めることができます。

例題をもとにして,次の実戦トレーニングをやりなさい。

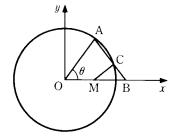
■■ 実戦トレーニング ■■■

4 xy 平面上の曲線 $y=\frac{1}{2}x^2$ 上の 3 点を,x 座標の小さいものから順に A,B,C とする。A と B との x 座標の差は a(a は正の定数),B と C との x 座標の差は 1,という関係を保ちながら 3 点 A,B,C が動く。 \angle CAB が最大となるときの,点 A の x 座標を a で表せ。また, \angle CAB が最大になるときに, \angle ABC が直角になるような a の値を求めよ。

⑤ 図のように、1 辺の長さが1の正三角形 ABC の辺 AB、AC 上に AD=CE となるように 2 点 D、E をとり、線分 BE と線分 CD の交点を P とする。AD=x のとき、三角形 PCE の面積を x の式で表せ。(早稲田大-教)



- **6** xy 平面において、点 A は原点 O を中心とする半径 1 の円周の第 1 象限にある部分を動き、点 B は x 軸上を動く。ただし、線分 AB の長さは 1 であり、線分 AB は両端 A、B 以外の点 C で円周と交わるものとする。
 - (1) $\theta = \angle AOB$ の取りうる値の範囲を求めよ。
 - (2) BC の長さを θ で表せ。
 - (3) 線分 OB の中点を M とするとき、線分 CM の長さの 範囲を求めよ。 (東京大-理科)



きょうで、関数についての学習は終わりです。第10日は、演習問題です。

第 10日

| 関数とグラフ5日間⑤ | 学習日 | 月 | 日 |
|------------|-----|---|---|
| 演習問題 | | | |

いままで、2次関数、対数関数、三角関数などの関数について学習してきました。きょうは、それらの学習のしあげとして、演習問題にとりくんでみましょう。

| 1 | $f(x)=x^2-6x+13$, $g(x)=\frac{1}{x}$ とする。 f と g との合成関数 $(g\circ f)(x)=g(f(x))$ | (x)) は |
|---|---|------------|
| | $x=$ ア \bigcirc のとき最大値 イ \bigcirc をとる。 g と f との合成関数 $(f \circ g)(x)=f$ | f(g(x)) if |
| | $x=$ ウ \square のとき最小値 エ \square をとり,区間 オ \square において減少関数で | である。 |
| | | (慶應義塾大-経) |

2 2つの関数

$$y = (x) - \sqrt{x - (x)}$$

$$y = ax - 1$$

を $x \ge 0$ において考える。ただし,[x] は x を超えない最大の整数 (すなわち $m \le x < m+1$ をみたす整数 m) を表す記号である。

- (1) $y = [x] \sqrt{x [x]}$ のグラフの $0 \le x < 4$ の部分をかけ。
- (2) $x \ge 0$ において、2 つの関数のグラフの交点が1 個であるような a の値の範囲を求めよ。
- (3) $x \ge 0$ において、2 つの関数のグラフの交点が n 個 $(n \ge 2)$ であるような a の値の範囲を求めよ。 (慶應義塾大-経)

- **3** x 軸上の点 A(a, 0) から 2 次関数 $y=x^2+1$ のグラフへ接線を引くとき、次の問いに答えよ。
 - (1) 接線は2本引けて、その一方の傾きは正で、他方の傾きは負であることを示せ。
 - (2) a < 0 で、正の傾きをもつ接線が、負の傾きをもつ接線と x 軸のなす角を 2 等分するという。 a を求めよ。 (広島大-文系)

4(i) 変数 t が t>0 の範囲を動くとき

$$f(t) = \sqrt{t} + \frac{1}{\sqrt{t}} + \sqrt{t + \frac{1}{t} + 1}$$
$$g(t) = \sqrt{t} + \frac{1}{\sqrt{t}} - \sqrt{t + \frac{1}{t} + 1}$$

について、f(t)の最小値は $2+\sqrt{3}$ 、g(t)の最大値は $2-\sqrt{3}$ であることを示せ。

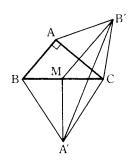
(ii)
$$a = \sqrt{x^2 + xy + y^2}$$
, $b = p\sqrt{xy}$, $c = x + y$

とおく。任意の正数 x, y(>0) に対して,a, b, c を 3 辺の長さとする三角形がつねに存在するような,p の値の範囲を定めよ。 (京都大-理系)

⑤ 凸四辺形 ABCD の辺 AB、BC、CD、DA 上をそれぞれ一定速度で動く動点 P、Q、R、S が、時刻 t=0 のときそれぞれ A、B、C、D を出発し、時刻 t=1 のときそれぞれ B、C、D、A に達するものとする。

| 6 | 一辺の長さ a の正方形 $ABCD$ の i | 辺AB, BC | , CD, | DA上に, | それぞれ点 | E, F, G, | Ηを |
|---|-----------------------------|---------|-------|--------|-----------------|----------|-------|
| | AE=BF=CG=DH となるようにと | こる。正方刑 | 多 EFG | H の面積の | 最小値は ア[| であ | る。三 |
| | 角形 AEH の内接円の半径を r とし | , rをAE | AH, | EHによっ | て表せば , r | = 1 |]とな |
| | る。 r の最大値は ウ である。 | | | | | (慶應義 | 塾大-経) |

7 直角三角形 ABC がある。 \angle A= 90° で AB=c, CA=bである。図 のごとく,辺 BC,CA 上に正三角形 BA'C,CB'A を作る。辺 BC の中点を M としたとき,三角形 MA'B' の面積を b,c で表せ。 (早稲田大-教)



圏 傾いた平面上で,もっとも急な方向の勾配(傾き)が $\frac{1}{3}$ であるという。いま南北方向の勾配を 測ったところ $\frac{1}{5}$ であった。東西方向の勾配はどれだけか。 (東京大-文科)

解 析 幾 何

◇ 解析幾何について5日間で完成させます。

問題に与えられた条件を、数学の言葉ともいえる数式におきかえ、点が動く軌跡や領域を求めます。その過程は、式の変形による答えの誘導です。そのとき、計算に流されず、式の意味をしっかりとつかんでおかなくてはなりません。

解析幾何の問題を分類すると,以下のように類型化できます。

- ① 直線の方程式に関するもの
- ② 2次曲線に関するもの
- ③ 軌跡に関するもの
- ④ 不等式と領域に関するもの これらの内容が、1日ずつ 4日間にわたって配列してあります。1日1日,しっかりがんばりましょう。

◇ 学習のポイント

- ① 直線の方程式や2次曲線に関する公式は忘れても導き出せるようにしておく。
- ② 軌跡では、与えられた条件とともに定義域に十分な注意をはらう。
- ③ 領域での最大・最小に関する問題は、境界線上にその最大・最小がある場合が多いから注意する。

第 1 1 日

解析幾何5日間①

学習日

月 \mathbf{H}

直線・円の方程式

きょうからは、直線、2次曲線、軌跡、それに領域について学習します。最初の日は、直線の方 程式,円の方程式です。内容は1次変換とからみあわせたもの,図形の存在範囲を考えるものな ど、バラエティに富んでいます。問題のいわんとしていることは、どういうことに帰着されるかと いうことを念頭に置きながら考えを進めていきましょう。

では、確認トレーニングです。

■ 確認トレーニング ■■■

 \blacksquare 1次変換fの行列が $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ のとき、fによる次の各点の像を求めなさい。

(1) (1, 0)

(2) (0, 1)

(3) (-2, 4)

(4) (5, -6)

2 直線 (a+3)x+(2a-1)y+7=0 は、定数 a の値に関係なく、定点を通ることを示し、その 定点の座標を求めなさい。

3 次の問いに、⑦~国の記号で答えなさい。

- (1) $4x^3+24x^2+29x-21$ の因数はどれですか。
- (2) $6x^4+19x^3-x^2+19x-7$ の因数はどれですか。

- \bigcirc x-2 \bigcirc x+3 \bigcirc 3x-1 \bigcirc 2x+7

4 a が定数のとき, 関数 $f(x) = -x^2 + 2ax + a^2$ ($0 \le x \le 1$) の最大値・最小値を求めなさい。

---- 確認トレーニングの答え

- **1** (1) (2, 3) (2) (1, 4)

 - $(3) \quad (0, 10) \qquad (4) \quad (4, -9)$

2 〔与式より (3x-y+7)+a(x+2y)=0, この ()内=0とおいた連立方程式を解く。] (-2, 1)

- **3** (1) ①, ① (2) ②, ②
- 4 a≤0 の場合

x=0 のとき 最大値 a^2

x=1 のとき 最小値 a^2+2a-1

 $0 < a < \frac{1}{2}$ の場合

x = a のとき 最大値 $2a^2$

x=1 のとき 最小値 a^2+2a-1

 $a=\frac{1}{2}$ の場合

 $x = \frac{1}{2}$ のとき 最大値 $\frac{1}{2}$

x=0, 1のとき 最小値 $\frac{1}{4}$

 $\frac{1}{2} < a < 1$ の場合

x = a のとき 最大値 $2a^2$

x=0 のとき 最小値 a^2

a≥1 の場合

x=1 のとき 最大値 a^2+2a-1

x=0 のとき 最小値 a^2

まずは、1次変換と組み合わされた例題です。最初は解答を見ないで自分で解いてみよう。

━ 例題 17 角の 2 等分線 ■

行列 $\binom{1}{0}$ の表す 1 次変換による点 P の像を Q とし, P が原点 O と異なるとき,

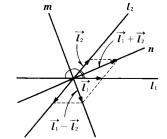
$$f(P) = \frac{\overline{OQ}^2}{\overline{OP}^2}$$

とする。

- (1) f(P)=1 となる点 P の集合は原点を通るある 2 直線に含まれることを示し、これら 2 直線の方程式を求めよ。
- (2) f(P) の最大値および最小値を求めよ。
- (3) (1)の 2 直線を l_1 , l_2 とする。f(P) を最大または最小にする点 P は, l_1 と l_2 のなす角の 2 等分線上にあることを証明せよ。 (千葉大-文系)

Advice (1) P(x, y), $Q(x', y') \succeq \bigcup$,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
 から求まる $x' = x - y$, $y' = 2y$ を、 $\overline{OQ}^2 = x'^2 + y'^2$ に代入します。 それ と、 $\overline{OP}^2 = x^2 + y^2$ を条件の式に代入して, x の関係式を求めます。



(2) は(3)の準備です。f(P)は,実数であるx,y によって定まるわけですから,f(P)がどういう値をとるときx,y は実数になるかと考えましょ

う。x, y が実数となる条件として 2 次方程式の判別式と結びつけることを考えます。

(3) 2直線 l_1 , l_2 は(1)を解きますと、ともに原点を通る直線になります。ですから、原点と点 P を結ぶ直線を考えます。そして、 l_1 , l_2 の方向ベクトル $\overrightarrow{l_1}$, $\overrightarrow{l_2}$ を大きさ等しくとり、この直線の方向ベクトルが、 $\overrightarrow{l_1} \pm \overrightarrow{l_2}$ の実数倍であることを示すと、この直線が l_1 , l_2 のなす角の 2 等分線であるといえます。

解答 (1) P(x, y), Q(x', y') とすると,

 $f(P)=1 \downarrow 0$

$$(x-y)^2 + (2y)^2 = x^2 + y^2$$
 $-2xy + 4y^2 = 0$

$$\therefore y(2y-x)=0 \qquad \therefore y=0 \quad \text{\sharp total} \quad 2y-x=0$$

よって、f(P)=1 を満たす点(x, y)は、2 直線 y=0、2y-x=0 上にあり、この 2 本の直線は原点を通る。 \Leftrightarrow 原点を通ることに必ず触れる。

よって、求める 2 直線の方程式は、y=0、 $y=\frac{1}{2}x$ である。

(2) f(P) = k とおくと, ③ より,

$$k = \frac{x^2 - 2xy + 5y^2}{x^2 + y^2}$$

この式を満たすx, y が実数であるためのkの値の範囲を求める。

点 P は原点 O と異なる点であるから、 $x^2+y^2 \neq 0$ したがって、両辺に x^2+y^2 をかけて整理すると、

$$(k-1)x^2+2xy+(k-5)y^2=0$$

この式を満たすx, y が実数であるためのkの値の範囲を求める。

(i) k=1 のとき

(4) It
$$2xy-4y^2=2y(x-2y)=0$$

この方程式をみたすx, y の値はx=y=0 以外に, たとえば, x=2, y=1 がある。したがって, f(P) は

$$f(P)=1$$

毎原点以外に1組でもあればよ

という値をとることができる。

120

(ii) k = 1 $0 \ge 3$,

k, y を実数とすると、④はx の 2次方程式とみることができて、各係数は実数になるから、この方程式が実数の解をもつ条件は、

$$\frac{D}{4} = y^2 - (k-1)(k-5)y^2 \ge 0$$

$$y^2 \{1-(k-1)(k-5)\} \ge 0$$

ここで、y=0 とすると、④は、 $(k-1)x^2=0$ となるが、今 k+1 と仮定したのだから、x=0 となり、P が原点と異なるという仮定に矛盾。よって $y^2>0$ そこで、⑤の両辺を y^2 で割ると、

$$1-(k-1)(k-5) \ge 0$$

$$k^2 - 6k + 4 \le 0$$

$$\therefore 3-\sqrt{5} \le k \le 3+\sqrt{5}$$
 (ただし, $k \ne 1$)

(i), (ii)より, kのとりうる値の範囲は,

$$3 - \sqrt{5} \le k \le 3 + \sqrt{5}$$

 $\Leftarrow 3 - \sqrt{5} < 1 < 3 + \sqrt{5}$ r $\Rightarrow 3$

したがって、
$$f(P)$$
の $\left\{ \begin{array}{l} 最大値 3+\sqrt{5} \\ 最小値 3-\sqrt{5} \end{array} \right.$

(3) (2)で、 $k=3\pm\sqrt{5}$ は④の判別式が0のときで、このとき④は重複解をもち、その解

は、
$$x = \frac{-y}{k-1} = \frac{-y}{(3\pm\sqrt{5})-1} = \frac{-y}{2\pm\sqrt{5}}$$
 (複号同順)

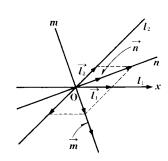
よって,最大値 $3+\sqrt{5}$ を与える点は,直線 $m:y=-(\sqrt{5}+2)x$ 上にあり,最小値 $3-\sqrt{5}$ を与える点は,直線 $n:y=(\sqrt{5}-2)x$ 上にある。

いま,
$$(1)$$
の直線を, $l_1: y=0$, $l_2: y=\frac{1}{2}x$ と

し、それぞれの方向ベクトルを $\vec{l_1}$ 、 $\vec{l_2}$ とする。 そこで、 $|\vec{l_1}| = |\vec{l_2}|$ となるように、 $\vec{l_2} = (2, 1)$ に対し、 $\vec{l_1}$ を、 $\vec{l_1} = (\sqrt{5}, 0)$ ととる。

このとき、直線 m、n はともに、 l_1 と l_2 の交点である原点を通り、それぞれの方向ベクトル \overrightarrow{m} 、 \overrightarrow{n} は $\overrightarrow{l_1}$, $\overrightarrow{l_2}$ を用いて、

$$\overrightarrow{m} = (1, -\sqrt{5} - 2) = \frac{1}{\sqrt{5} - 2} (\sqrt{5} - 2, -1)$$



$$= \frac{1}{\sqrt{5} - 2} (\overrightarrow{l_1} - \overrightarrow{l_2})$$

$$\overrightarrow{n} = (1, \sqrt{5} - 2) = \frac{1}{\sqrt{5} + 2} (\sqrt{5} + 2, 1)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5} + 2} (\overrightarrow{l_1} + \overrightarrow{l_2})$$

ゆえに、直線 m は、 $\overrightarrow{l_1}$ と $-\overrightarrow{l_2}$ を隣り合う 2 辺とするひし形の対角線になり、直線 n は、 $\overrightarrow{l_1}$ と $\overrightarrow{l_2}$ を隣り合う 2 辺とするひし形の対角線になっている。

すなわち、f(P)を最大または最小にする点Pは、 l_1 と l_2 のなす角の2等分線上にある。

$oxed{oxed{\dot{z}}}$ (2)で、④をyについての2次方程式と考えても、同様に解くことができます。判別式は、2次方程式に適用されるわけですから、解答のように、④が2次方程式であるときと、そうでないときに分けなければなりません。

さらに、2直線のなす角の2等分線になっていることの証明に、ひし形を作ることは空間に おける場合にも利用できる有効な方法です。その手法は会得しておくことでしょう。

別解(3)(2)で、 $k=3\pm\sqrt{5}$ は4の判別式が0のときで、このとき4は重複解をもち、その解

は、
$$x = \frac{-y}{k-1} = \frac{-y}{(3\pm\sqrt{5})-1} = \frac{-y}{2\pm\sqrt{5}}$$
 (複号同順)

よって、最大値 $3+\sqrt{5}$ を与える点は、直線 $m:y=-(\sqrt{5}+2)x$ 上にあり、最小値 $3-\sqrt{5}$ を与える点は、直線 $n:y=(\sqrt{5}-2)x$ 上にある。

いま、直線m、n がx 軸の正の方向となす角を、それぞれ α 、 β とすると、直線の傾きから、

$$\tan \alpha = -(\sqrt{5} + 2) \quad \left(-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0 \right) \qquad \dots \dots \oplus$$

$$\tan \beta = \sqrt{5} - 2 \quad \left(0 < \beta < \frac{\pi}{2} \right) \qquad \dots \dots \oplus$$

また、(1)の 2 直線のうち、y=0 は x 軸を表すから、 $y=\frac{1}{2}x$ が x 軸の正の方向となす角を、 $\theta_1(-\pi<\theta_1<0)$ 、 $\theta_2(0<\theta_2<\pi)$ とすると、いずれも

$$\tan \theta_1 = \frac{1}{2} \quad (-\pi < \theta_1 < 0) \quad \dots \\
\tan \theta_2 = \frac{1}{2} \quad (0 < \theta_2 < \pi) \quad \dots \\$$

を満たす。

そこで, 2倍角の公式を用いて,

(6) \(\psi \),
$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{-2(\sqrt{5} + 2)}{1 - (\sqrt{5} + 2)^2} = \frac{1}{2}$$

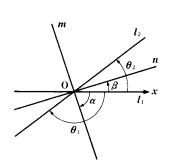
いま, $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$ であるから, $-\pi < 2\alpha < 0$ よって, ⑧と一致し,

$$2\alpha = \theta_1$$
 $\therefore \quad \alpha = \frac{1}{2}\theta_1$

また、⑦より、
$$\tan 2\beta = \frac{2\tan\beta}{1-\tan^2\beta}$$

$$= \frac{2(\sqrt{5}-2)}{1-(\sqrt{5}-2)^2}$$

$$= \frac{1}{2}$$



 $0<\beta<\frac{\pi}{2}$ であるから、 $0<2\beta<\pi$

よって、⑨と一致し、 $2\beta = \theta_2$

$$\therefore \quad \beta = \frac{\theta_2}{2}$$

以上より、2直線 m、nは、2直線 l_1 と l_2 のなす角の 2等分線である。 すなわち、f(P)を最大または最小にする点は、 l_1 と l_2 のなす角の 2 等分線上にあ る。

次は、実戦トレーニングです。例題をもとにして、解きなさい。

■■■ 実戦トレーニング ■■■

行列 $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ の表す 1 次変換による点 P の像を Q とし, P が原点 O と異なるとき,

$$f(P) = \frac{\overline{OQ}^2}{\overline{OP}^2}$$

とする。

- (1) f(P)=5となる点 Pの集合は原点を通るある 2 直線に含まれることを示し、これら 2 直 線の方程式を求めよ。
- (2) f(P)の最大値および最小値を求めよ。
- (3) (1)の 2 直線を l_1 , l_2 とする。f(P) を最大または最小にする点 P は、 l_1 と l_2 のなす角の 2等分線上にあることを証明せよ。

| 2 | R にとのような他を与えても, 直線 |
|---|--|
| | l:(x-2y+3)+k(x-y-1)=0 |
| | はつねに定点ア を通る。点 P, Q を P(1, 3), Q(5, 1) とするとき, 線分 PQ と直線 |
| | l が交わるような k の値の範囲は、 $\sqrt{}$ である。また、線分 \mathbf{PQ} 上の点で l との交点と |

(慶應義塾大-経)

なり得ない点の座標は、ゥ____である。

3 曲線 $y=x^3+3x^2$ 上に 3 点 $O(0,\ 0)$, $P(-2,\ 4)$, $Q(1,\ 4)$ をとり、曲線および線分 PQ で 囲まれた領域を D とする (D は境界を含む)。点 R を第 1 象限、点 S を第 2 象限にとり、 \triangle ORS が D に含まれるように点 R, S を動かすとき、 \triangle ORS の面積の最大値を求めよ。 (東京工大-理・エ)

こんどの例題は、共有点の数を考える問題です。決め手となる条件をみつけだせれば、しめたものです。まずは、自分で考えてみよう。

━ 例題 18 円と双曲線の共有点の数 ━

Advice 点(a, a)を中心とし、点(1, 1)を通る円の方程式を作ります。これと $y=\frac{1}{r}$ との

連立方程式が (x, y)=(1, 1) のみを実数解としてもつ条件を求めればよいことに着目します。そこで、y を消去して、x の方程式を作り、それが x=1 だけを実数解としてもつ条件を求めます。しかし、できる x の方程式が 4 次方程式になりますから因数定理などを用いて、因数分解することを考えますが、

$$(x-1)^2(x の 2 次式)=0$$

の形に変形できれば,

(x 0 2 次式) = 0

がx=1を重解としてもつか、または実数解をもたないことが必要十分条件です。

解 答 点(a, a)を中心とし、点(1, 1)を通る円の半径をrとすると、rは 2点(a, a)と (1, 1)との距離に等しいから、

$$r^2 = (a-1)^2 + (a-1)^2 = 2(a-1)^2$$

したがって, この円の方程式は

$$(x-a)^2 + (y-a)^2 = 2(a-1)^2$$

これと, 双曲線

る。ゆえに

$$y = \frac{1}{x}$$

との共有点の x 座標は、②より $y=\frac{1}{x}$ を①へ代入してできた x の方程式の実数解であ

$$(x-a)^2 + \left(\frac{1}{x} - a\right)^2 = 2(a-1)^2$$

両辺を x^2 倍して $(x \neq 0)$

$$x^{2}(x-a)^{2}+(1-ax)^{2}=2(a-1)^{2}x^{2}$$

$$\therefore x^4 - 2ax^3 + a^2x^2 + 1 - 2ax + a^2x^2 = (2a^2 - 4a + 2)x^2$$

$$\therefore x^4 - 2ax^3 + 2(2a-1)x^2 - 2ax + 1 = 0 \qquad \cdots 3$$

左辺を f(x) とおくと

⇔高次方程式では,因数定理の利

$$f(1)=1-2a+2(2a-1)-2a+1=0$$

用をまず考える。

であるから、f(x)はx-1を因数にもつ。組立除法によってf(x)をx-1で割った商を求める。

よって, ③は

$$(x-1) \{ x^3 - (2a-1)x^2 + (2a-1)x - 1 \} = 0$$

さらに, 因数分解すると

$$(x-1)\{(x^3-1)-(2a-1)x(x-1)\}=0$$

$$(x-1)^{2} \{ (x^{2}+x+1)-(2a-1)x \} = 0$$

$$(x-1)^2 \{x^2-2(a-1)x+1\} = 0$$

と変形できる。

円①と双曲線②が点(1,1)のみを共有するための必要十分条件は、④より

$$x^2-2(a-1)x+1=0$$

が、重解x=1をもつか、1 個も実数解をもたないことである。

まず、⑤が重解 x=1 をもつときは、⑥が $(x-1)^2=0$ のように変形できるときであるから、

$$a-1=1$$
 ゆえに $a=2$ ·······⑥

また、⑤が実数解をもたないときは、判別式 D<0 のときであるから、

$$\frac{D}{4} = (a-1)^2 - 1 < 0$$

- $\therefore a^2-2a<0$
- $\therefore a(a-2) < 0$
- \therefore 0 < a < 2 \cdots (7)

よって、求める a の範囲は条件の $a \neq 1$ と⑥、⑦より

⇐a≠1を忘れないように。

$0 < a < 1, 1 < a \le 2$

<u>注意</u> ①と②からy を消去して、4次方程式③を作ったとき、これが、x=1 だけを実数解としてもつ条件を考えるところが大切です。このとき、左辺の因数分解を考えることになりますが、まず、x-1 を因数にもつことがわかっていますから、組立除法を使うのが便利でしょう。x-1 をくくり出した後の3次方程式が、さらに因数分解できることはすぐに気がつくでしょう。

ところで、この問題を、グラフを使って考えてみましょう。 点 (a, a) は直線 y=x 上にありますから、問題の双曲線と円とは図のような関係になります。このことから、

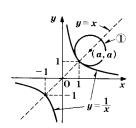
 $a \le 0$ の場合は、不適。

0<a<1の場合は,適する。

a=1 の場合は,不適。

a>1 の場合は、円と双曲線の曲率によって場合分けが必要。

がわかります。このことは、答を確かめる上で役立ちます。



では, 実戦トレーニングに進みなさい。

実戦トレーニング

4 双曲線 $y = \frac{1}{x-2}$ と,点 (a, a-2) を中心とし点 (1, -1) を通る円とが,点 (1, -1) のみを共有するような a の範囲を求めよ。ただし $a \neq 1$ とする。

きょうはこれで終わります。第12日は、2次曲線について学習します。

第12日

解析幾何5日間②

学習日 月 日

2次曲線

きょうは、2次曲線の問題について学習します。2次曲線の基本的性質について、しっかり押さえておくことが大切です。それさえやっておけば、問題のパターンはある程度決まっているから難しくないはずです。まずは確認トレーニングで基本的知識を確認しておこう。

■■ 確認トレーニング ■■■■

- 1 次の点と直線との距離を求めなさい。
 - (1) (3, 3), -4x+3y-2=0
 - (2) (0, -5), 7x+1=0
- **2** だ円 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上の点 (x_0, y_0) における接線の方程式は

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$$

であることを示しなさい。

- **③** 点 $P_0(\overrightarrow{p_0})$ を通り, \overrightarrow{d} に平行な直線上の任意の点を $P(\overrightarrow{p})$ とすると,この直線は $\overrightarrow{p} = \overrightarrow{p_0} + t \overrightarrow{d}$ t は実数 と表されることを証明しなさい。
- 4 半角の公式を利用して、次の値を求めなさい。
 - (1) $\cos \frac{\pi}{8}$

(2) cos15°

---- 確認トレーニングの答え

1 (1) 1 (2)

- **4** (1) $\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ (2) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$
- ② 〔直線 $y-y_0=m(x-x_0)$ とだ円 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ が接するときの m の値を求める。そして, (x_0, y_0) がだ円上の点であるから, $\frac{{x_0}^2}{a^2}+\frac{{y_0}^2}{b^2}=1$ になることを使って整理する。〕
- ③ $[\overrightarrow{P_0P} \succeq \overrightarrow{d} \text{ は平行であるから, } t$ を実数として, $\overrightarrow{P_0P} = t \overrightarrow{d}$ が成り立つことに注目する。]

━ 例題 19 だ円上の点と直線との距離 ■

- (1) 直線 x-2y+a=0 ……①と、だ円 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ ……②とが共有点をもつとき、a の範囲を 求めよ。
- (2) 直線①と、だ円②とが交わるとき、だ円②上の点から直線①に下した垂線の長さの最大値 を求めよ。

 $oxed{\mathsf{Advice}}$ (1) 直線と 2 次曲線の方程式から、x または、y を消去して得られる 2 次方程式の判別 式をDとしたとき,直線と2次曲線について

共有点をもつ ⇔ 判別式 D≥0

となることに着目しましょう。

(2) 点 $P(x_0, y_0)$ から直線 ax + by + c = 0 にひいた垂線の長さ

$$\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

をもとにして考えます。

解答 (1) ①より x=2y-a

これを②に代入すると

$$\frac{(2y-a)^2}{4} + y^2 = 1$$
 すなわち $8y^2 - 4ay + (a^2 - 4) = 0$ ③

直線①とだ円②とが共有点をもつとき、③は実数解をもつ。

③の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4} = 4a^2 - 8(a^2 - 4) \ge 0$$
$$-4a^2 + 32 \ge 0$$
$$a^2 - 8 \le 0$$

 $\sharp \supset 7 \qquad -2\sqrt{2} \leqq a \leqq 2\sqrt{2}$

(2) だ円②上の任意の点を (x_0, y_0) とすると

$$x_0 = 2\cos\theta$$
, $y_0 = \sin\theta$

⇔変数が θ だけになるので扱い やすい。

とおくことができる。

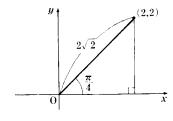
また、点 (x_0, y_0) から直線x-2y+a=0にひいた垂線の長さをdとおくと

$$d = \frac{\left| \frac{x_0 - 2y_0 + a}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} \right|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}}$$

$$= \frac{\left| \frac{2\cos\theta - 2\sin\theta + a}{\sqrt{5}} \right|}{\sqrt{5}}$$

$$= \frac{\left| \frac{2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta\right) + a}{\sqrt{5}} \right|}{\sqrt{5}}$$

$$= \frac{\left| \frac{2\sqrt{2}\left(\sin\frac{\pi}{4}\cos\theta - \cos\frac{\pi}{4}\sin\theta\right) + a}{\sqrt{5}} \right|}{\sqrt{5}}$$



$$=\frac{\left|2\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)+a\right|}{\sqrt{5}}$$

22, $-1 \le \sin\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) \le 1$ $\cos 3$

$$-2\sqrt{2} \le 2\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) \le 2\sqrt{2}$$

また, (1)の結果より

$$-4\sqrt{2} \le 2\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) + a \le 4\sqrt{2}$$

よって、d のとる値の範囲は $0 \le d \le \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$

したがって, 垂線の長さの最大値は

$$\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{10}}{5}$$

←無関係なので、単純に合算でき る。

注意 解答では、だ円 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上の点は

 $(a\cos\theta, b\sin\theta)$

と表せることを使っています。このことを証明してみましょう。

$$a>b>0$$
 のとき,だ円 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上の点 P を通り, y 軸に

平行な直線と円との交点をRとし、ORとx軸とのなす角を θ とすると

 $R(a\cos\theta, a\sin\theta)$

だ円
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$
 は円 $x^2 + y^2 = a^2$ を上下に $\frac{b}{a}$ 倍してできる

曲線ですから、P の座標は

$$P\left(a\cos\theta, \frac{b}{a}\cdot a\sin\theta\right)$$

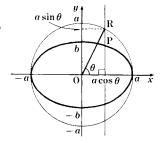
と表すことができます。

b>a>0 のとき、だ円 $\frac{x^2}{\sigma^2}+\frac{y^2}{h^2}=1$ は、円 $x^2+y^2=b^2$ を左右に $\frac{a}{h}$ 倍してできる曲線ですか

ら, 同様にして

 $P(a\cos\theta, b\sin\theta)$

と表すことができます。



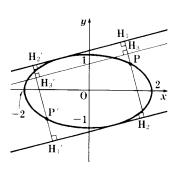
|略別解|(2) だ円②は,原点 O について対称ですから,だ円②

上の点Pと原点に関して対称な点をP'とすると、P'もだ円②上にあります。

また、2本の接線も傾きが等しいから、やはり原点

そこで、P, P'から、2本の接線に、垂線をひくと

 $PH_1 = P'H_1', PH_2 = P'H_2'$



となります。

また、交わる直線にひいた垂線の長さよりも、接線の一方にひいた垂線の長さのほうが長くなります。(図で、 $PH_3 < PH_1$ 、 $P'H_3' < P'H_2' = PH_2$)

ところで、(1)の結果より、直線①とだ円②が接するとき

$$a = \pm 2\sqrt{2}$$

ですから、点 P がだ円②の周全体を動くとき、接線 $x-2y+2\sqrt{2}=0$ にひいた垂線の長さの最大値が、求める垂線の長さの最大値に等しくなります。

だ円②上の点 $P(x_0, y_0)$ から、直線 $x-2y+2\sqrt{2}=0$ にひいた垂線の長さ d は

$$d = \frac{|x_0 - 2y_0 + 2\sqrt{2}|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}}$$

$$\sqrt{5}d = |x_0 - 2y_0 + 2\sqrt{2}|$$

よって、 $x_0-2y_0+2\sqrt{2}=\pm\sqrt{5}d$ となります。

ここで、 $\pm\sqrt{5}d=p$ とおくと

$$x_0 = 2y_0 + (p - 2\sqrt{2})$$

となり、点 $P(x_0, y_0)$ はだ円②上にあるから、これを②に代入すると

$$\frac{\{2y_0 + (p - 2\sqrt{2})\}^2}{4} + y_0^2 = 1$$

となります。

そこで,この方程式の分母を払って整理すると

$$8y_0^2 + 4(p-2\sqrt{2})y_0 + \{(p-2\sqrt{2})^2 - 4\} = 0$$

となり、この y_0 についての 2次方程式は実数解をもたねばならないから、判別式を Dとすると

$$\frac{D}{4} = 4(p - 2\sqrt{2})^2 - 8\{(p - 2\sqrt{2})^2 - 4\} \ge 0$$

これを整理すると

$$-4(p-2\sqrt{2})^2 + 32 \ge 0$$
$$(p-2\sqrt{2})^2 - 8 \le 0$$

よって、 $-2\sqrt{2} \le p - 2\sqrt{2} \le 2\sqrt{2}$ となります。

すなわち、 $0 \le p \le 4\sqrt{2}$ ですから、 $d \ge 0$ より

$$0 \le d \le \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$$

となり、d の最大値は $\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{10}}{5}$ であることがわかります。

では,次の実戦トレーニングにはいりなさい。

■ 実戦トレーニング ■

- 11 だ円 $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$ と直線 y = x + k が 2 つの共有点 P, Q をもつとき、次の各問いに答えよ。
 - (1) kのとる値の範囲を求めよ。
 - (2) 線分 PQ の中点 R のえがく図形の方程式を求めよ。

(山形大-理系)

- a = 0 に対し、点 A(-a, 0) と直線 l: x = 2a が与えられている。
 - (1) l からの距離が、A からの距離の 2 倍に等しい点 P(x, y) のえがく曲線の方程式を求め、概形をかけ。
 - (2) (1)で求めた曲線と、直線 $y=-\frac{1}{2}x+3$ の交点の個数を調べよ。 (金沢大-経済・教育)

③ xy 平面上で、曲線 $y=x^2-4$ と x 軸とで囲まれた図形 (境界を含む) に含まれる最長の線分の長さを求めよ。 (名古屋大-理系)

次は、だ円の性質に関する例題です。とくに2次曲線上の動点が登場するときは、その動点をどんなふうに設定するかがキーポイントです。

━ 例題 20 だ円の性質 ━━

だ円 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (a > b > 0) の焦点 F(c, 0) (c > 0) を通る 2 つの弦 PQ, RS が直交するとき、次の値を求めよ。

$$\frac{1}{PF \cdot QF} + \frac{1}{RF \cdot SF}$$

\overrightarrow{Advice} 点 A を通り、 $\overrightarrow{0}$ でないベクトル \overrightarrow{d} に平行な直線

は,なを実数として

$$\overrightarrow{p} = \overrightarrow{a} + t\overrightarrow{d}$$
 $\overrightarrow{r} \approx \overrightarrow{a} = \overrightarrow{OA}$

と表せます。

ここで、 $\overrightarrow{d}=(\cos\theta,\ \sin\theta)$ とおくと、 $|\overrightarrow{d}|=1$ ですから、 $t=t_0$ に対応する点 Pに対して、有向線分 APの長さは

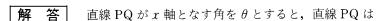
$$AP = |\overrightarrow{p} - \overrightarrow{a}| = |t_0 \overrightarrow{d}| = |t_0|$$

となります。

そこで、点 $\mathbf{F}(c, 0)$ を通る直線 \mathbf{PQ} の方程式を

$$(x, y)=(c, 0)+t(\cos\theta, \sin\theta)$$

とおいて考えましょう。



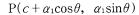
点 F(c, 0) を通るから、その方程式は、t を実数として

$$x = c + t\cos\theta$$
, $y = t\sin\theta$ ①

直線 PQ がだ円

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \cdots$$

と点 P, Q で交わるときの t の値をそれぞれ α_1 , β_1 とすると



$$Q(c+\beta_1\cos\theta, \beta_1\sin\theta)$$

このとき

$$PF = \sqrt{(\alpha_1 \cos \theta)^2 + (\alpha_1 \sin \theta)^2} = |\alpha_1|$$

$$QF = \sqrt{(\beta_1 \cos \theta)^2 + (\beta_1 \sin \theta)^2} = |\beta_1|$$
.....3

ところで、①を②に代入すると

$$\frac{(c+t\cos\theta)^2}{a^2} + \frac{(t\sin\theta)^2}{b^2} = 1$$

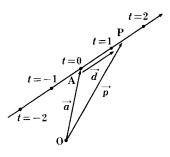
両辺に a^2b^2 をかけると

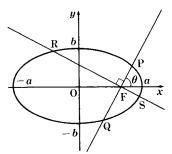
$$b^{2}(c+t\cos\theta)^{2}+a^{2}(t\sin\theta)^{2}=a^{2}b^{2}$$

これを t について整理すると

$$(a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta)t^2 + 2b^2ct\cos\theta + b^2(c^2 - a^2) = 0$$

F(c, 0)は、だ円②の焦点であるから





る。

⇔PF·QF は αιβι から求められ

よって

 $(a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta)t^2+2b^2ct\cos\theta-b^4=0$ ………④ \Leftrightarrow この 2 次方程式の解が α_1 , β_1 。 a>0, b>0 であるから, $a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta>0$ で,また,定数項は $-b^4<0$ であるから,④は,正,負 2 つの実数解をもつ。

④の解は直線 PQ とだ円が交わるときの t の値、すなわち、 α_1 、 β_1 であるから

$$\alpha_1\beta_1 = \frac{-b^4}{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta} < 0$$

③より

直線 RS は直線 PQ と垂直であるから、それがx 軸となす角は $\theta + \frac{\pi}{2}$ である。

よって、直線 RS の方程式は、t を実数として

 \leftarrow 以下同様に、RF・SF ϵa 、b、 θ で表す。

$$x = c + t\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = c - t\sin\theta$$

$$y = t\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = t\cos\theta$$
.....(6)

直線 RS がだ円②と点 R、S で交わるときの t の値をそれぞれ α_2 、 β_2 とすると

$$RF = |\alpha_2|, SF = |\beta_2|$$

ところで、⑥を②に代入して整理すると

 $(a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta)t^2 - 2b^2ct\sin\theta - b^4 = 0$

この方程式の解は、 α_2 、 β_2 であるから

$$\alpha_2\beta_2 = \frac{-b^4}{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta}$$

(7)より

$$RF \cdot SF = |\alpha_2 \beta_2| = \frac{b^4}{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta} \qquad \dots \dots \otimes$$

⑤, ⑧より

$$\begin{aligned} \frac{1}{\text{PF} \cdot \text{QF}} + \frac{1}{\text{RF} \cdot \text{SF}} &= \frac{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta}{b^4} + \frac{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta}{b^4} \\ &= \frac{a^2 + b^2}{b^4} \end{aligned}$$

| 注 意 | 図形を方程式で解く問題は、計算がめんどうなものが多くなります。そこで、いろいろなく ふうが必要になってきます。この問題では

媒介変数 t の値と距離との関係

解と係数の関係

を利用しています。

別解 直線 PQ の方程式を y = m(x - c) ($m \neq 0$)とし、これを

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

に代入すると

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{m^2(x-c)^2}{b^2} = 1$$

両辺に a^2b^2 をかけると

$$b^2x^2 + a^2m^2(x-c)^2 = a^2b^2$$

これをxについて整理すると

$$(a^2m^2+b^2)x^2-2a^2cm^2x+a^2(c^2m^2-b^2)=0$$

この方程式の2つの解は直線PQとだ円 \mathbb{Q} の交点のx座標である。

よって、直線 PQ とだ円①の交点のx 座標を x_1 、 x_2 とすると

$$x_1+x_2=\frac{2a^2cm^2}{a^2m^2+b^2}$$
, $x_1x_2=\frac{a^2(c^2m^2-b^2)}{a^2m^2+b^2}$

ゆえに

$$(x_1-c)(x_2-c)=x_1x_2-(x_1+x_2)c+c^2$$

$$=\frac{a^2(c^2m^2-b^2)}{a^2m^2+b^2}-\frac{2a^2c^2m^2}{a^2m^2+b^2}+c^2=\frac{b^2(c^2-a^2)}{a^2m^2+b^2}$$

ここで、F(c, 0)はだ円①の焦点であるから

$$c^2 = a^2 - b^2$$
 $tabbox{ } c^2 - a^2 = -b^2$

よって

$$(x_1-c)(x_2-c) = -\frac{b^4}{a^2m^2+b^2}$$

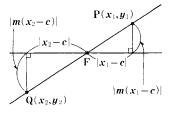
したがって

$$PF \cdot QF$$

$$= \sqrt{(x_1 - c)^2 + m^2(x_1 - c)^2} \times \sqrt{(x_2 - c)^2 + m^2(x_2 - c)^2}$$

$$= (1 + m^2) | (x_1 - c)(x_2 - c) |$$

$$= \frac{(1 + m^2)b^4}{a^2m^2 + b^2} \qquad \cdots \cdots \textcircled{2}$$



 $m \neq 0$ のとき,直線 RS の方程式は $y = -\frac{1}{m}(x-c)$ となるから,RF・SF は②の m

$$\varepsilon - \frac{1}{m}$$
 でおきかえたものになる。

ゆえに

RF·SF=
$$\frac{\left(1+\frac{1}{m^2}\right)b^4}{a^2\cdot\frac{1}{m^2}+b^2} = \frac{(1+m^2)b^4}{a^2+b^2m^2}$$
3

②, ③より

$$\frac{1}{\text{PF} \cdot \text{QF}} + \frac{1}{\text{RF} \cdot \text{SF}} = \frac{a^2 m^2 + b^2}{(1 + m^2)b^4} + \frac{a^2 + b^2 m^2}{(1 + m^2)b^4}$$
$$= \frac{(a^2 + b^2)(1 + m^2)}{(1 + m^2)b^4}$$
$$= \frac{a^2 + b^2}{b^4}$$

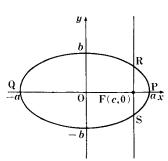
m=0 のとき、すなわち、直線 PQ がx 軸に重なるとき、直線 RS はx 軸と垂直になる。

このとき、
$$F(c, 0)$$
は焦点であるから

$$PF \cdot QF = (a-c)(c+a)$$
$$= a^2 - c^2 = b^2$$

$$x = c$$
 を①に代入すると

$$\frac{c^2}{a^2} + \frac{y^2}{h^2} = 1$$



すなわち
$$y=\pm\sqrt{b^2\left(1-\frac{c^2}{a^2}\right)}$$

であるから

RF·SF=
$$\left\{\sqrt{b^2\left(1-\frac{c^2}{a^2}\right)}\right\}^2 = \frac{b^2(a^2-c^2)}{a^2} = \frac{b^4}{a^2}$$

ゆえに

$$\frac{1}{PF \cdot QF} + \frac{1}{RF \cdot SF} = \frac{1}{b^2} + \frac{a^2}{b^4} = \frac{a^2 + b^2}{b^4}$$

また, 直線 PQ がx 軸に垂直になるとき, 直線 RS はx 軸と重なる。

よって

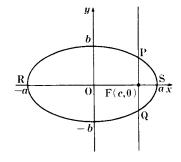
$$PF \cdot QF = \frac{b^4}{a^2}, RF \cdot SF = b^2$$

ゆえに

$$\frac{1}{\text{PF} \cdot \text{QF}} + \frac{1}{\text{RF} \cdot \text{SF}} = \frac{a^2}{b^4} + \frac{1}{b^2} = \frac{a^2 + b^2}{b^4}$$

したがって, 求める値は

$$\frac{a^2+b^2}{b^4}$$



例題をもとにして, 実戦トレーニングをやってみなさい。

実戦トレーニング ■■■

図 双曲線 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上の点を P とし,原点 O を通り OP に直交する直線が双曲線 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ と交わる点の 1 つを Q とするとき, $\frac{1}{\mathrm{OP}^2} - \frac{1}{\mathrm{OQ}^2}$ は点 P の位置によらず一定 であることを証明せよ。

5 だ円 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上に、3 直線 OP、OQ、OR がたがいに $\frac{2}{3}\pi$ の角をなすようにだ円上の 3 点 P、Q、R をとるとき、 $\frac{1}{\mathrm{OP}^2} + \frac{1}{\mathrm{OQ}^2} + \frac{1}{\mathrm{OR}^2}$ は一定であることを証明せよ。

- **6** 放物線 $y^2 = 6x$ において、次の問いに答えなさい。
 - (1) この放物線上の原点と異なる点 A(a, b) における法線 (接点を通り接線に垂直な直線) とx 軸との交点の座標を a で表せ。
 - (2) この放物線の焦点を通る任意の弦 AB の両端 A,B における法線が x 軸と交わる点をそれぞれ P,Q とするとき, $\frac{1}{\mathrm{AP}^2} + \frac{1}{\mathrm{BQ}^2}$ の値を求めよ。

きょうは、これで終わりです。第13日は、軌跡についてです。

第13日

解析幾何5日間③

学習日 月 日

軌 跡

きょうは、軌跡についてです。よく知っているように、軌跡はある条件を満たす点の動いた集合ということですね。だから、最初に、問題で与えられた条件とは何か頭の中で整理して、それをうまく式で表すことがポイントです。あとは、単なる計算問題になります。条件や制限を見落としていないか、もう一度ふりかえってみましょう。

■■■ 確認トレーニング ■■■■

1 直線 l:3x-4y-3=0 に関して、点 A(-2, 4) と対称な点 B の座標を求めなさい。

② 円 $x^2+y^2=50$ の、次の点における接線の方程式を求めなさい。

$$(1)$$
 $(-5, 5)$

(2)
$$(5\sqrt{2}, 0)$$

3 2次関数 $y=-x^2+2x$ のグラフと直線 y=-x+b の共有点の個数を調べなさい。

4 次の計算をしなさい。

$$(1) \quad {2 \choose 7} \quad {1 \choose 4} {7 \quad -11 \choose -12 \quad 19} {2 \choose 1}$$

(2)
$$(x \ y) \begin{pmatrix} a & h \\ h & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$(3) \quad {1 \choose 1} \quad {0 \choose 2} \quad {2 \choose 0} \quad {1 \choose 1} \quad {0 \choose 1} \quad {1 \choose 1}$$

- 確認トレーニングの答え

$$(4, -4)$$

2 (1)
$$-x+y=10$$

(2)
$$(ax^2+2hxy+by^2)$$

(2) $x = 5\sqrt{2}$

$$(3) \quad \left(\begin{array}{cc} 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{array}\right)$$

$$b < \frac{9}{4}$$
 のとき 2 個 $b = \frac{9}{4}$ のとき 1 個 $b > \frac{9}{4}$ のとき なし

━ 例題 21 対称点を利用した軌跡の方程式 ━━

平面の 2 定点を A(1, 0), B(2, 0) とし、直線 $y = mx(m \pm 0)$ を l とする。

- (1) 直線 l に関する点 B の対称点を求めよ。
- (2) 直線 l上に点 P を、線分の長さの和 AP+PB が最小となるようにとる。m が変化すると (北海道大) き、点Pのえがく図形を求めよ。

- Advice (1) 直線 l に関して B と対称な点を C(a, b)とし,BC の中点が l 上にあることと, BC と lとが直交することから a, bを m で表します。
 - (2) 直線 AC と l との交点を P とすると, AP+PB=AP+PC=AC となり, 最小と なります。AC の方程式を m で表し、これと l の方程式とから、P の座標を m の式 で表します。次にmを消去すればPがえがく図形の方程式が得られます。

| 解 答 (1) 直線 I に関して、点 B(2,0) と対称な点を C(a,b) とすると、BC の中点

$$\left(\frac{a+2}{2}, \frac{b}{2}\right)$$
は直線 l 上にあるから

$$\frac{b}{2} = m \cdot \frac{a+2}{2} \qquad \dots \dots \dots$$

(⇒①, ②の2つの条件から求める のがセオリー。

直線BCはlに垂直であるから

$$\frac{b}{a-2} \cdot m = -1 \qquad \cdots \cdots 2$$

①より

$$b = m(a+2) \qquad \cdots$$

③を②に代入して変形すると

$$m^2(a+2) = -(a-2)$$

a について解くと

$$a = \frac{2(1-m^2)}{1+m^2}$$
4

④を③に代入すると

$$b = \frac{4m}{1+m^2} \qquad \cdots$$

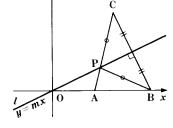
したがって, 点Bの対称点は

$$\left(\frac{2(1-m^2)}{1+m^2}, \frac{4m}{1+m^2}\right)$$

(2) P は、y = mx つまり BC の垂直 2 等分線上に あるので PB=PC となる。よって

$$AP+PB=AP+PC$$

の最小を考えてもよい。A,Bは原点を通る直線 である x 軸の上の正の部分にあるため、 $A \geq B$ は1に対して同じ側にある。したがってAとC はlに対して反対側にあるため, AP+PCは, A, P, Cが一直線上に並んだ時もっとも, 小さ くなる。よって,直線 l と AC の交点を P とす



C の座標を(a, b)とすると、AC の方程式は a=1 のとき x=1

④より

$$m = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$a = 1$$
 のとき
$$y = \frac{b}{a-1}(x-1)$$

すなわち、 $m = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ のとき、AC の方程式は(1)の④、⑤を代入して

$$y = \frac{4m}{1 - 3m^2}(x - 1) \qquad \cdots$$

これと, 1の方程式

$$y = mx$$
 ······· 7

から P の座標 (x, y) を m で表す。

⑥, ⑦
$$\sharp$$
 り
$$mx = \frac{4m}{1 - 3m^2}(x - 1)$$

$$m \neq 0 \; \sharp \; 0$$

$$(1 - 3m^2)x = 4(x - 1)$$

$$(1-3m^2)x = 4(x-1)$$

$$x = \frac{4}{3(m^2 + 1)} \qquad \dots$$

⑧, ⑨より, 以下のようにmを消去する。

←この消去法もよく用いる。

$$\left(\frac{3}{4}x\right)^{2} + \left(\frac{3}{4}y\right)^{2} = \left(\frac{1}{m^{2}+1}\right)^{2} + \left(\frac{m}{m^{2}+1}\right)^{2}$$
$$\left(\frac{3}{4}x\right)^{2} + \left(\frac{3}{4}y\right)^{2} = \frac{1}{m^{2}+1}$$

(8) より、
$$\frac{1}{m^2+1} = \frac{3}{4}x$$
 だから
$$\left(\frac{3}{4}x\right)^2 + \left(\frac{3}{4}y\right)^2 = \frac{3}{4}x$$

$$x^2 - \frac{4}{3}x + y^2 = 0$$

$$\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+y^2=\left(\frac{2}{3}\right)^2$$

$$m = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$
 Ø $\geq \stackrel{*}{>} (1)$ $x = 1, y = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$

円
$$\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+y^2=\left(\frac{2}{3}\right)^2$$
 ただし、 $y=0$

略別解 ⑥、⑦から⑧、⑨を求めなくとも⑩を求めることができます。⑦より $m = \frac{y}{x}$ これを⑥に代入すると m が消去されて、整理すれば⑩が得られます。

例題はうまくとけましたか。次は,実戦トレーニングです。

実戦トレーニング ■■■■

- 1 平面の 2 定点を A(1, 0), B(3, 0) とし, 直線 y = mx $(m \neq 0)$ を l とする。
 - (1) 直線 l に関する点 B の対称点を求めよ。
 - (2) 直線 l 上に点 P を、線分の長さの和 AP+PB が最小となるようにとる。m が変化するとき点 P のえがく図形をもとめよ。

実数 t が $0 \le t \le \pi$ の範囲を動くとき、座標が $x = \frac{\cos t - a}{1 - 2a\cos t + a^2}$ 、 $y = \frac{\sin t}{1 - 2a\cos t + a^2}$ で 与えられる平面上の点 P(x, y) はどのような図形をえがくか。ただし、a は定数で、|a| < 1 とする。 (大阪大)

実数 t が $-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき,座標

$$x = \frac{\cos t}{1 - 2a\sin t + a^2}, \quad y = \frac{\sin t - a}{1 - 2a\sin t + a^2}$$

で与えられる平面上の点 P(x, y) は、どのような図形をえがくか。その図形を図示せよ。たたし、a は定数で、|a|<1 とする。

答え合わせをしたら, 例題にはいります。軌跡のグラフをかくときは, 曲線の存在する範囲, 関 数の増減と極大、極小、座標軸との交点などのポイントを押さえることです。

➡ 例題 22 円の接線と軌跡 •

曲線 $x^2+(y-1)^2=1$ について、次の問いに答えよ。

- (1) 曲線上の点 $P(x_0, y_0)$ におけるこの曲線の接線が、x 軸および y 軸と交わるとき、その 交点をそれぞれ Q, R とする。線分 QR の中点 M の座標を x_0 , y_0 を用いて表せ。
- (2) 点 P がこの曲線上を動くとき,点 M はどのような曲線をえがくか。その方程式を求め (大阪府大-総) よ。また、その概形をかけ。

(1) 円, $x^2+y^2=1$ の上の点 (x_0, y_0) における接線は,

 $x_0x + y_0y = 1$

であることを利用すれば, 簡単に接線の方程式は求められます。

(2)は M の座標 (x, y) とするとき、(1)で x, y が x_0, y_0 で表わされているのでこの 式から、 x_0 、 y_0 を消去すれば、求める方程式が得られます。

| 解 答 (1) X=x, Y=y-1 とおけば、曲線は $X^2+Y^2=1$ の円となる。

この円周上の点 (X_0, Y_0) における接線の方程式は $X_0X + Y_0Y = 1$ だから,これ に $X_0 = x_0$, $Y_0 = y_0 - 1$, X = x, Y = y - 1 を代入して初めの座標系にもどすと, 点 $P(x_0, y_0)$ における接線の方程式は,

$$x_0x + (y_0-1)(y-1) = 1$$

⇐公式の利用として知っておく。

となる。ここで $x_0=0$ または $y_0=1$ の場合は、それぞれ題意に適さないので、 $x_0 = 0$, $y_0 = 1$ cap = 3

点 Q の座標は $\left(\frac{y_0}{r_0}, 0\right)$ (ただし $x_0 \neq 0$)

点Rの座標は $\left(0, \frac{y_0}{y_0-1}\right)$ (ただし $y_0 \neq 1$)

ゆえに、点 \mathbf{M} の座標は $\left(\frac{\mathbf{y}_0}{2\mathbf{x}_0}, \frac{\mathbf{y}_0}{2(\mathbf{y}_0-1)}\right)$

(2) まず、中点 M の存在範囲について考える。

 $x^2+(y-1)^2=1$ 上の点 (0, 0), (1, 1), (0, 2), (-1, 1) における接線は、軸に 平行になるので, 中点 M は存在しない。

円の上半分における接線は、x軸とは、|x|>1、y軸とは y>2 の範囲で交わるの で、中点 M は、 $|x| > \frac{1}{2}$ 、y > 1 の範囲で存在する。

円の下半分についても同様にして、中点 M は、 $|x| < \frac{1}{2}$ 、y < 0 の範囲で存在す

る。 ·····(A)

(1)より

$$x = \frac{y_0}{2x_0} \qquad \cdots \qquad y = \frac{y_0}{2(y_0 - 1)} \qquad \cdots \cdots 2$$

これらの式から x_0 , y_0 を消去して, x, y の関係式を求める。まず②より

$$2y(y_0-1)=y_0$$

 $\therefore y_0(2y-1)=2y$

$$\therefore y_0 = \frac{2y}{2y-1} \left((A) \downarrow 0 \quad y \neq \frac{1}{2} \right) \quad \dots \dots 3$$

①より

$$x_0 = \frac{y_0}{2x}$$
 $\therefore x_0 = \frac{y}{x(2y-1)} \left((A) \downarrow b \quad x \neq 0, y \neq \frac{1}{2} \right)$

点 (x_0, y_0) は円 $x^2+(y-1)^2=1$ の上にあるから $x_0^2+(y_0-1)^2=1$ をみたしてい

る。③, ④を代入すると

$$\left(\frac{y}{x(2y-1)}\right)^2 + \left(\frac{2y}{2y-1} - 1\right)^2 = 1$$

となる。これを整理すると、y = 0 に注意して

$$y \{ (4x^2-1)y-4x^2 \} = 0$$

$$y = \frac{4x^2}{4x^2 - 1} \left(tzt = 0, \pm \frac{1}{2} \right)$$

 $y' = -\frac{8x}{(4x^2-1)^2}$ であるから増減表をつくると、次のようになる。

| x | ••• | $-\frac{1}{2}$ | ••• | 0 | ••• | $\frac{1}{2}$ | |
|----|-----|----------------|-----|---|-----|---------------|---|
| y' | + | / | + | 0 | _ | / | _ |
| y | / | / | 7 | / | `, | / | ` |

⇔x ≠0 に注意。

$$\lim_{x \to \frac{1}{2} \to 0} y = +\infty, \quad \lim_{x \to \frac{1}{2} \to 0} y = -\infty$$

よって
$$x = \frac{1}{2}$$
 は漸近線である。

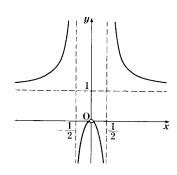
$$\lim_{x \to -\frac{1}{2} + 0} y = -\infty$$
, $\lim_{x \to -\frac{1}{2} - 0} y = +\infty$

よって $x = -\frac{1}{2}$ は漸近線である。

$$\lim_{x \to \infty} \frac{4x^2}{4r^2 - 1} = 1$$

よって y=1 は漸近線である。

したがってグラフは図のようになる。



注意

(2)でグラフの概形をかく時

$$x = 0, \pm \frac{1}{2}$$

で不連続となっていることに注意して下さい。特にx=0は落としがちです。

例題で学んだことを, 実戦トレーニングでためしてみよう。

実戦トレーニング ■■■■

- **4** 曲線 $y = \sqrt{x} (x > 0)$ について、次の問に答えよ。
 - (1) 曲線上の点 $P(x_0, \sqrt{x_0})$ におけるこの曲線の法線が、x 軸および y 軸と交わるとき、その 交点をそれぞれ Q、R とする。線分 QR の中点 M の座標を x_0 を用いて表せ。
 - (2) 点 P がこの曲線上を動くとき、点 M はどのような曲線をえがくか。その方程式を求めよ。

- 直線 y = mx + 1 が放物線 $y^2 = 4x$ と交わる点を P, Q とし、線分 PQ の中点 M の座標を (X, Y) とする。このとき、次の問いに答えよ。
 - (1) X, Y ε m で表せ。
 - (2) m が変わるとき、点 M(X, Y) の軌跡の方程式を求めよ。

6 だ円 $\frac{x^2}{4}$ + y^2 = 1 と定点 A(a, 0) がある。ただし,0 < a < 2 とする。点 A を通る直線 l と このだ円との交点を P,Q とし,線分 PQ の中点を M とする。l を動かすときに M の描く曲線 (軌跡) を求めよ。 (名古屋大-文系)

ごくろうさまでした。第14日は、領域です。

第 1 4 日

解析幾何5日間④

学習日 月 日

不等式と領域

きょうは、領域について学習します。領域の求め方は、軌跡の場合とにています。問題で与えられた条件をもとにして、図形や点の存在する範囲をしぼっていくからです。これも、最初に問題の中の条件をもれなく式におきかえることです。

では、最初に確認トレーニングです。

確認トレーニング ■■■■

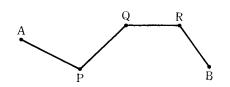
- 1 2x+y=1, $x \ge 0$, $y \ge 0$ のとき, x^2+y^2 の最大値・最小値を求めなさい。
- ② x がどんな実数値をとっても $x^2 + (a-3)x + a > 0$ が成り立つとき、定数 a のとる値の範囲を求めなさい。
- ③ x についての 2 次方程式 $x^2 + ax + 1 = 0$ が、0 より大きく 1 より小さい解をただ 1 つもち、それが重解でない条件を求めなさい。
- 4 $|x|+|y|\leq 1$ のとき、 $2y-x^2$ の最大値・最小値を求めなさい。

─ 確認トレーニングの答え -

- **1** x=0, y=1 のとき 最大値 1 $x=\frac{2}{5}, y=\frac{1}{5}$ のとき 最小値 $\frac{1}{5}$
- **2** 1< a< 9
- a < -2
- 4 x=0, y=1 のとき 最大値 2 x=0, y=-1 のとき 最小値 -2

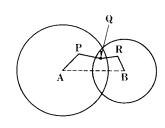
━ 例題 23 条件を満足する点の集合と面積 ■

平面上に2定点A,Bがあり、線分ABの長さABは $2(\sqrt{3}+1)$ である。この平面上を動く3点P, Q, R があ って、つねに $\overline{AP} = \overline{PQ} = 2$ 、 $\overline{QR} = \overline{RB} = \sqrt{2}$ なる長さを保 ちながら動いている。このとき、点 Q が動きうる範囲を 図示し、その面積を求めよ。 (東京大-文科)



Advice $AQ \le 4$, $BQ \le 2\sqrt{2}$ ですから、点 Q が A を中心 とする半径 4 の円と点 B を中心とする半径 $2\sqrt{2}$ の 円の共通部分の点であることは, すぐにわかりま

> 2円の交点のうちの1つをCとして △ABC を作 ってみると



 $AB = 2\sqrt{3} + 2$, $BC = 2\sqrt{2}$, CA = 4

これから ∠CAB, ∠ABC の大きさがどうなるか考えましょう。

解 答

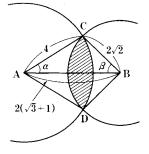
 $AQ \le AP + PQ = 4$, $BQ \le BR + RQ = 2\sqrt{2}$

ゆえに点 Q は点 A を中心とする半径 4 の円と点 B を中心とする半径 $2\sqrt{2}$ の円の共通部分の点であ

逆にこの共通部分の任意の点を Q とすると

$$AQ \le 4$$
, $BQ \le 2\sqrt{2}$ \mathcal{C} \mathcal{C} \mathcal{C} \mathcal{C} \mathcal{C} \mathcal{C} \mathcal{C}

AP=PQ=2, $QR=BR=\sqrt{2}$ となる点 P, R を 平面上にとることができる。



⇔必要条件と十分条件を示す。

よって点 Q の動きうる範囲は、図斜線の部分全 体である(ただし境界を含む)。

点 A を中心とする半径 4 の円と点 B を中心とする半径 $2\sqrt{2}$ の円の交点を C, D とす る。

 \triangle ABC で \angle CAB= α とおいて余弦定理を適用すると

$$\cos\alpha = \frac{AB^{2} + CA^{2} - BC^{2}}{2AB \cdot CA} = \frac{4(\sqrt{3} + 1)^{2} + 16 - 8}{2 \cdot 2(\sqrt{3} + 1) \cdot 4}$$
$$= \frac{8\sqrt{3}(\sqrt{3} + 1)}{16(\sqrt{3} + 1)} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

ゆえに
$$\alpha = \frac{\pi}{6}$$

$$\sharp \supset \mathsf{T}, \ \angle \mathsf{CAD} = 2\alpha = \frac{\pi}{3}$$

同様に $\angle ABC = \beta$ とおくと,

$$\cos\beta = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB \cdot BC} = \frac{4(\sqrt{3} + 1)^2 + 8 - 16}{2 \cdot 2(\sqrt{3} + 1) \cdot 2\sqrt{2}}$$

$$=\frac{8(\sqrt{3}+1)}{8\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

ゆえに
$$\beta = \frac{\pi}{4}$$
 $\angle DBC = 2\beta = \frac{\pi}{2}$

これより、求める面積は

(おうぎ形 ADC の面積)+(おうぎ形 BCD の面積)-(四角形 ADBC の面積)

$$\begin{split} &= \frac{1}{6} \times \pi \times 4^2 + \frac{1}{4} \times \pi \times (2\sqrt{2})^2 - 2(\sqrt{3} + 1) \times 4 \times \sin\frac{\pi}{6} \\ &= \frac{8}{3} \pi + 2\pi - 4(\sqrt{3} + 1) \\ &= \frac{14}{3} \pi - 4(\sqrt{3} + 1) \end{split}$$

よって,求める面積は $\frac{14}{3}\pi$ $-4(\sqrt{3}+1)$ となる。

この共通部分のどの点も Q となりうることを示しましょう。

略別解 $\angle CAD$, $\angle DBC$ の大きさを、次のような方法で求めることもできます。

直線 AB を x 軸,点 A を通り AB に垂直な直線を y 軸にとります。ただし,点 B は x 軸の正の部分にあるようにしておきます。

円 A, Bの方程式は

$$x^2 + y^2 = 16$$
(1)
 $(x - 2(\sqrt{3} + 1))^2 + y^2 = 8$ (2)

となりますから 2 円の交点 C, D の x 座標は

①-2より $4(\sqrt{3}+1)x=8\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)$, $x=2\sqrt{3}$ となります。

これより $\triangle ADC$ は正三角形、 $\triangle DBC$ は $\angle B = \angle R$ の直角二等辺三角形であることがわかります。

したがって $\angle CAD = \frac{\pi}{3}$, $\angle DBC = \frac{\pi}{2}$ となります。

例題にならって,次の実戦トレーニングを解いてみよう。

■■■■ 実戦トレーニング ■■■■

平面上に 2 定点 A, B があり,線分 AB の長さ AB は $2(\sqrt{3}+1)$ である。この平面上を動く 3 点 P, Q, R があって,つねに AP=PQ=2, $QR=RB=\sqrt{6}$ なる長さを保ちながら動いている。このとき,点 Q が動きうる範囲を図示し,その面積を求めよ。

2 つの円 $x^2+y^2=4$, $(x-a)^2+y^2=4$ が交わるとき,その共通弦を直径とする円周を C_a とする。a が 0 < a < 4 を動くとき, C_a に属する点の存在範囲を図示せよ。 (北海道大-理 I)

3 すべての $t(-\infty < t < \infty)$ について不等式

 $(x-t)^2+(y-t)^2 \ge (t+1)^2$

を満足する点(x, y)の存在範囲を示す不等式を導いてのち、その範囲を斜線を引いて図示せよ。 (早稲田大-教)

こんどの例題は、絶対値を含む不等式の表す領域についての問題です。場合分けを誤らないよう にしよう。

━━ 例題 24 絶対値を含む不等式の表す領域 ━━

- (1) $|X| + |Y| \le 2$ をみたす点 P(X, Y) の存在する範囲を XY 平面に図示せよ。
- (2) x=X-Y, y=XY とおく。点 P(X, Y) が(1)の範囲を動くとき、点 Q(x, y) の動く (北海道大-文系) 範囲を求め、これを xy 平面に図示せよ。

- $\begin{bmatrix} \mathsf{Advice} \mid (1) & X, & Y & \text{の正負により,} & (i) & X \ge 0, & Y \ge 0, & (ii) & X \ge 0, & Y < 0, & (iii) & X < 0, \end{bmatrix}$ $Y \ge 0$, (iv) X < 0, Y < 0 の 4 つの場合に分けて絶対値の記号をはずします。
 - (2) x=X-Y, y=XY から X(または Y) を消去して得られる Y(または X) の 2 次 方程式で Y(または X) が実数である条件を使います。次に, $|X|+|Y| \le 2$ を x, y の不等式になおす必要がありますが,両辺を 2 乗して左辺を X-Y と XY で 表すように変形します。このとき、|XY|の絶対値をはずすには $XY \ge 0$ の場合と XY < 0 の場合に分けます。

解答 (1) $X \ge 0$, $Y \ge 0$ のとき

 $X + Y \leq 2$ $Y \leq -X+2$ $X \ge 0$, Y < 0 のとき $X - Y \leq 2$ $Y \ge X - 2$ $X < 0, Y \ge 0$ のとき $-X+Y \leq 2$ $Y \leq X + 2$ X < 0, Y < 0 のとき

 $Y \ge -X-2$ したがって、P(X, Y) の存在する範囲は、図の境界を含む斜線部分である。

(2) X - Y = x $\downarrow 0$

$$X = Y + x$$

 $-X-Y \leq 2$

これを XY = y に代入して

$$Y(Y+x)=y$$

$$Y^2 + xY - y = 0 \qquad \cdots$$

①を Y の 2 次方程式とみなすと、実数解 Y が存在する条件は、判別式 ≥ 0 ゆえに

 $x^2+4y \ge 0$

$$y \ge -\frac{x^2}{4} \qquad \dots 2$$

次に

$$|X| + |Y| \le 2$$
 ······3

*□*③を *X* − *Y* , *XY* で表す。

よりx, yの関係を導く。

③の両辺は負でないから、両辺を2乗しても同値である。

$$|X|^2 + 2|X||Y| + |Y|^2 \le 4$$

$$|X|^2 = X^2$$
, $|Y|^2 = Y^2$, $|X||Y| = |XY|$ \downarrow 0

$$X^2 + Y^2 + 2 | XY | \le 4$$

$$(X-Y)^2 + 2XY + 2|XY| \le 4$$

$$(X-Y)^2+2(XY+|XY|) \le 4$$

④に、
$$X-Y=x$$
、 $XY=y$ を代入して

- ⑤はyの値によって、2つの場合に分けられる。
- (i) y≥0のとき

$$x^2 + 2(y+y) \le 4$$

$$x^2 + 4y \le 4$$

$$\therefore y \le -\frac{1}{4}x^2 + 1 \quad (y \ge 0)$$
(6)

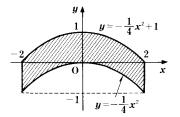
(ii) y<0のとき

$$x^2 + 2(y - y) \le 4$$

$$x^2 \leq 4$$

$$\therefore -2 \le x \le 2 \quad (y < 0) \qquad \cdots$$

よって、②および⑥、⑦より Q(x, y)の動く範囲は図の境界を含む斜線部分である。



例題を理解したら、次の実戦トレーニングにうつりなさい。

実戦トレーニング

4 x=X+Y, y=XY とする。X, Y が $|X|+|Y| \le 2$ をみたしながら変化するときに,点 Q(x, y) の動く範囲を求めよ。

5 xy 平面に 3 点 A(2, 1), B(-3, 0), C(-1, -2) が与えられている。点 P(x, y) が三角 形 ABC の内部または周上を動くとき,

$$k = -\frac{x^2}{2} - |y|$$

の最大値および最小値を求めよ。

(千葉大-文系)

- **⑤** 点 (x, y) が連立不等式 $x-3y \ge -6$, $x+2y \ge 4$, $3x+y \le 12$ の表す領域 D 内を動くとき, 次の問いに答えよ。
 - (ア) D を図示せよ。
 - (イ) x^2+y^2 の最大値と最小値を求めよ。
 - (ウ) x^2-y^2 の最大値と最小値を求めよ。

(横浜国大-経済・経営)

きょうはこれで終わりです。第15日は、演習問題です。

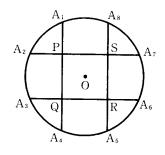
第 15 日

| 解析幾何5日間⑤ | 学習日 | 月 | 日 |
|----------|-----|---|---|
| 演習問題 | | | |

前の日まで、直線や2次曲線、軌跡、それに領域について学習してきました。順調に進んできたでしょうか。この辺で、それらのことを、演習問題でふりかえってみましょう。 時間も考えて、やってみよう。

1 図のように、半径 a の円 O の周を 8 等分する点を順に A_1 , A_2 , ……, A_8 とし、弦 A_1A_4 と弦 A_2A_7 , A_3A_6 との 交点をそれぞれ P, Q とし、弦 A_5A_8 と弦 A_3A_6 , A_2A_7 との交点をそれぞれ R, S とする。

このとき、正方形 PQRS の面積を求めよ。また、線分 A_1P 、 A_2P と弧 A_1A_2 とで囲まれる図形の面積を求めよ。 (東京大-文科)



2 上底の半径 2a,下底の半径 5a,高さ $3\sqrt{35}a$ の直円錐台がある。次の図のように,中心線 EF を含む平面による切り口を台形 ABDC とする。

いま,この円錐台の側面を線分 AB に沿って切り開き,これを xy 平面上に,点 C が原点,線分 CD が x 軸の正の部分に重なるように展開すると,線分 AB は,方程式

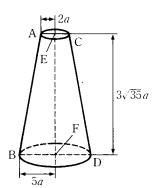
$$y=()$$
 および $y=($ タ $)$

で表される2つの直線上にくる。

また、上の展開図を考えることにより、円錐台の側面上を 点Bから一回りして点Aに至る曲線の長さの最小値は (チ) であり、最小値を与える曲線は、展開図上で方程式

$$y=(?)$$
 および $y=(テ)$

と表される図形の一部分である。



(立命館大-理工)

3 a は 0 または正数とし、実数 x, y に関する命題 p(x, y), q(x, y) を次のように定める。

$$p(x, y): |x-3| + |y-2| \le 10,$$

 $q(x, y): x^2 + y^2 - 2x - 6y \le a^2 - 10$

このとき

「すべてのx, y について, q(x, y) ならば p(x, y)」が真であるとすれば、a のとりうる範囲は

(慶應義塾大-商)

4 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x & z \\ y & w \end{pmatrix}$ とする。いま行列 A を固定して,等式 AXA = A を満足する行列 X の集合 $S = \{X \mid AXA = A\}$ を考える。ただし,行列の成分はすべて実数とする。このとき,S がただ 1 つの要素からなる集合であるための条件は,① であり,S が 2×2 行列全体の集合であるための条件は,② である。また,A がこれら 2 つの条件のいずれをも満足しないとき,S の任意の要素 X の成分と A の成分の間には,③ という関係がある。

次の性質をもつ実数 a は、どのような範囲にあるか。 2次方程式 $t^2-2at+3a-2=0$ は実根 α 、 β をもち、 $\alpha \ge \beta$ とするとき、不等式 $y \le x$ 、 $y \ge -x$ 、 $ay \ge 3(x-\beta)$ で定まる領域は、三角形になる。 (京都大-理系)

 \triangle ABC を角 A が 60° である鋭角三角形とする。 \triangle ABC の内部にあって $\overline{PA} \le \overline{PB}, \ \overline{PA} \le \overline{PC}$

を同時に満たす点 P の全体がつくる領域を G とする。 \triangle ABC の面積が領域 G の面積の 3 倍であるとき, \triangle ABC はどのような三角形か。 (大阪大)

- ア 座標平面上に 2 定点 $A\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, $B\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ がある。
 - (1) 次の不等式をみたす点 P の存在する範囲を図示せよ。

$min(PA, PB) \le 1 \le max(PA, PB)$

ただし、実数 a, b に対し、 $\min(a, b)$ は a, b のうちの大きくない方、 $\max(a, b)$ は小さくない方を表す。

(2) (1)の範囲の面積を求めよ。

(一橋大)

◇ 空間座標・ベクトルについて5日間で完成します。

ベクトルに関する問題は、入試では頻出の分野です。ベクトルは、座標をもちださないで図形の性質を調べることができます。しかも、座標をもとにする場合より、簡潔で明快です。ベクトルの生きた有効な使い方を十分身につけて本番の入試にのぞみましょう。

ベクトルの問題を分類すると、以下のような問題に類型化できます。

- ① ベクトルと平面図形に関するもの
- ② 空間座標と三垂線の定理に関するもの
- ③ ベクトルと空間図形に関するもの このことを念頭において、問題に取り組みます。

◇ 学習のポイント

① 2次元の任意のベクトル \overrightarrow{p} は、次のようにベクトル \overrightarrow{a} 、 \overrightarrow{b} を用いて1通りにしか表せない。

$$\overrightarrow{p} = \alpha \overrightarrow{a} + \beta \overrightarrow{b} \quad (\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b})$$

同様に、3次元の任意のベクトル \overrightarrow{b} は、同じ平面に平行でない3つのベクトル \overrightarrow{a} , \overrightarrow{b} , \overrightarrow{c} を用いて1通りにしか表せない。

$$\overrightarrow{p} = \alpha \overrightarrow{a} + \beta \overrightarrow{b} + \gamma \overrightarrow{c}$$

② 三垂線の定理は重要であるから、十分に理解しておきたい。

第16日

空間座標・ベクトル5日間①

学習日

月 日

ベクトルの基本性質

きょうからは、ベクトルについて学習します。最初は、ベクトルの基本性質です。中学校で苦労 していた幾何の問題も,ベクトルを使えば、単なる計算問題になってしまいます。それには、ベク トルの基本的性質を十分理解して, 使い方を誤らないことが大切です。

そこのところを確認トレーニングでためしてみよう。

確認トレーニング ■■■■

1 $2 \le A(\overrightarrow{a})$, $B(\overrightarrow{b})$ を結ぶ線分 AB を、次の比に内分する点の位置ベクトルを求めなさい。

(1) 3:2

(2) 1:4

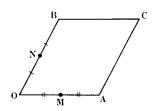
2 \triangle ABC の 3 つの頂点 A, B, C の位置ベクトルをそれぞれ \overrightarrow{a} , \overrightarrow{b} , \overrightarrow{c} とします。 \triangle ABC の重心をG, $\triangle ABG$ の重心をG' とするとき, 点G' の位置ベクトルを求めなさい。

3 図の平行四辺形で、辺OA、OBの中点をそれぞれM、N とします。

 $\pm O$ を基準とする点 A,B の位置ベクトルをそれぞれ \overrightarrow{a} , \overrightarrow{b} とするとき、次の直線のベクトル方程式を、媒介変数 t を 使って表しなさい。

(1) 直線 MN

(2) 直線 CM



― 確認トレーニングの答え

$$(2) \quad \frac{b'+4a}{5}$$

$$(3) \quad \frac{\overrightarrow{b} + \overrightarrow{a}}{2}$$

$$2 \qquad \frac{4\overrightarrow{a} + 4\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}}{9}$$

$$(1) \quad \overrightarrow{p} = \frac{1-t}{2} \overrightarrow{a} + \frac{t}{2} \overrightarrow{b}$$

(2)
$$\overrightarrow{p} = \frac{2-t}{2} \overrightarrow{a} + (1-t) \overrightarrow{b}$$

次の例題で、ベクトルの図形への応用を身につけよう。

■ 例題 25 ベクトルの図形への応用 ■

平面上に6つの定点 A_1 , A_2 , A_3 , A_4 , A_5 , A_6 があって, どの3点も一直線上にはない。この6点のうちから3点を任意にえらぶ。えらんだ3点を頂点とする三角形の重心と,残りの3点を頂点とする三角形の重心とを通る直線は、3点のえらびかたに無関係な一定の点を通ることを示せ。 (京都大-文系)

| Advice | △ABC の重心 G の位置ベクトル OG は

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3} (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$$

と表せます。また2点 G_1 , G_2 を通る直線のベクトル表示は

$$\overrightarrow{OP} = (1-t)\overrightarrow{OG_1} + t\overrightarrow{OG_2}$$

です。選んだ3点を B_1 , B_2 , B_3 とし,残りの3点を B_4 , B_5 , B_6 とおいて,2つの三角形の重心を通る直線が定点を通ることを示します。

解答 A_1 , A_2 , A_3 , A_4 , A_5 , A_6 のうちから選んだ 3 点を, B_1 , B_2 , B_3 とし,残りの 3 点を, B_4 , B_5 , B_6 とする。

 $\triangle B_1B_2B_3$ の重心を G_1 , $\triangle B_4B_5B_6$ の重心を G_2 とする。

このとき

$$\overrightarrow{OG_1} = \frac{1}{3} (\overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OB_2} + \overrightarrow{OB_3}), \overrightarrow{OG_2} = \frac{1}{3} (\overrightarrow{OB_4} + \overrightarrow{OB_5} + \overrightarrow{OB_6})$$

(ア) G₁ と G₂ が一致しないとき

2点 G_1 , G_2 を通る直線のベクトル表示は

$$\overrightarrow{OP} = (1 - t)\overrightarrow{OG_1} + t\overrightarrow{OG_2}$$

$$= \frac{1 - t}{3} (\overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OB_2} + \overrightarrow{OB_3}) + \frac{t}{3} (\overrightarrow{OB_4} + \overrightarrow{OB_5} + \overrightarrow{OB_6})$$

いま, $\frac{1-t}{3} = \frac{t}{3}$ すなわち $t = \frac{1}{2}$ のときの直線上の点を Q とすると,

$$\overrightarrow{OQ} = \frac{1}{6} (\overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OB_2} + \overrightarrow{OB_3} + \overrightarrow{OB_4} + \overrightarrow{OB_5} + \overrightarrow{OB_6})$$

$$= \frac{1}{6} (\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3} + \overrightarrow{OA_4} + \overrightarrow{OA_5} + \overrightarrow{OA_6})$$

となり点Qは三点の選び方と無関係な定点になる。

←Q は線分 G₁G₂ の中点。

(イ) G1, G2 が一致するとき,

$$\overrightarrow{OG_1} = \overrightarrow{OG_2} \downarrow 0$$

$$\overrightarrow{OG_1} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{OG_1} + \overrightarrow{OG_2})$$

$$= \frac{1}{6} (\overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OB_2} + \overrightarrow{OB_3} + \overrightarrow{OB_4} + \overrightarrow{OB_5} + \overrightarrow{OB_6})$$

$$= \frac{1}{6} (\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3} + \overrightarrow{OA_4} + \overrightarrow{OA_5} + \overrightarrow{OA_6})$$

となる。

(7)、(4)より、 G_1 、 G_2 を通る直線は3点の選び方とは無関係に、位置ベクトル \overrightarrow{OQ} が

$$\overrightarrow{OQ} = \frac{1}{6} (\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3} + \overrightarrow{OA_4} + \overrightarrow{OA_5} + \overrightarrow{OA_6})$$

である定点 Q を通る。

注意 この問題は三角形の重心 G の位置ベクトル,2 点 G_1 , G_2 を通る直線のベクトル表示等の基本的事項を理解していることが必要です。

3点の選び方によらない定点という条件から、求める定点は点の番号について対称的な式で表されます。

 G_1 , G_2 が一致する場合も考えられるから分けて考える必要があります。

例題が理解できたら, 実戦トレーニングに進みなさい。

■■■■ 実戦トレーニング ■■■■

- 平面上に四辺形 ABCD があって、どの頂点も、残りの頂点の作る三角形の外部にある。 \triangle BCD の重心を A_1 、 \triangle CDA の重心を B_1 、 \triangle DAB の重心を C_1 、 \triangle ABC の重心を D_1 とする。
 - (i) 線分 AA₁, BB₁, CC₁, DD₁ は 1 点 P を共有することを示せ。
 - (ii) (i)において,点Pは各線分をどのような比に分けるか。

(京都大-文系)

 \triangle ABC の辺 BC を 3 等分する点を D, E とし, さらに k, l を実数として $\overrightarrow{AP} = k\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AQ} = l\overrightarrow{AE}$

となるように点 P, Q をとる。線分 PQ 上に \triangle ABC の重心が存在するようなk, l を座標にもつ点 (k, l) のえがく曲線を図示せよ。 (一橋大)

- 平面上に四辺形 ABCD があって、どの頂点も、残りの頂点の作る三角形の外部にある。 $\triangle BCD$ の重心を A_1 、 $\triangle CDA$ の重心を B_1 、 $\triangle DAB$ の重心を C_1 、 $\triangle ABC$ の重心を D_1 として、四辺形 $A_1B_1C_1D_1$ を作る。これを 1 回目とし、同様の手続きをくり返して、n 回目にえられる四辺形を $A_nB_nC_nD_n$ とする。このとき、次のことを示せ。
 - (i) 線分 AA₁, BB₁, CC₁, DD₁ は 1 点 P を共有する。
 - (ii) 点 $A_n(n=1, 2, 3, \dots)$ は 1 直線上にある。
 - (iii) A_n と P の距離 $\overline{A_nP}$ について、 $\lim_{n\to\infty}\overline{A_nP}=0$ である。 (京都大-理系)

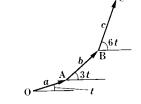
━━ 例題 26 平面上のベクトルと三角関数の応用 ━━

O を原点とする座標平面上に3つの動点 A, B, C がある。時刻 t におけるベクトル \overrightarrow{OA} , \overline{AB} , \overline{BC} の成分表示は次のとおりである。

 $\overrightarrow{OA} = (a\cos t, a\sin t), \overrightarrow{AB} = (b\cos 3t, b\sin 3t), \overrightarrow{BC} = (c\cos 6t, c\sin 6t)$ ただし、a, b, c は正の定数とし、t は任意の実数をとりうるものとする。

- (i) 原点 O から C までの距離 OC が最大になるのは,t= ______のときである。
- (ii) $t=\frac{\pi}{c}$ のとき、O から Bまでの距離 OB と、B から C までの距離 BC とが等しかったと いう。このとき,c は a,b を用いて c= ここと表される。さらに,3 辺の長さが a, b, c の 3 角形の面積 S を a, b を用いて表すと, $S = \square$ である。 (慶応義塾大-医)

Advice (i) 3つのベクトル \overrightarrow{OA} , \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{BC} は, それぞれ, 大き さが一定ですから、 \overrightarrow{OA} 、 \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{BC} が同じ向きになる、 すなわち O, A, B, C がこの順に一直線上にならぶこと があれば、そのときに OC の距離は最大になります。



(ii) $t=\frac{\pi}{6}$ のときの OB, BC の長さを, それぞれ, a, b, c を使って表してみましょう。

三角関数を用いた図形の問題ですから, 正弦定理や余弦 定理は、いつでも使えるようにしておきましょう。

解答(i) 3つのベクトル \overrightarrow{OA} , \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{BC} の大きさは, a>0, b>0, c>0 であるから,

$$|\overrightarrow{OA}| = \sqrt{a^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t} = a$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{b^2 \cos^2 3t + b^2 \sin^2 3t} = b$$

$$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{c^2 \cos^2 6t + c^2 \sin^2 6t} = c$$

となり、一定である。だから、もし、 \overrightarrow{OA} 、 \overrightarrow{AB} 、 \overrightarrow{BC} が、同じ向きになることがあ

るとすれば、その時に OC は最大となる。

もし、 $t=\theta$ のとき、 \overrightarrow{OA} 、 \overrightarrow{AB} 、 \overrightarrow{BC} は同じ向きになったとすると、

$$\begin{cases} 3\theta = \theta + 2m\pi \\ 6\theta = \theta + 2n\pi \end{cases}$$
 (m, n は整数)

これから
$$2\theta = 2m\pi$$
 \therefore $\theta = m\pi$ ………①

$$5\theta = 2n\pi$$
 ·······(2)

①を②に代入して、

$$5m\pi = 2n\pi$$
 \therefore $5m = 2n$ 3

したがって、n=5k、m=2k (k は整数)のとき、③は成りたつ。

よって、 $t=2k\pi$ (kは整数)

のとき, \overrightarrow{OA} , \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{BC} は同じ向きになり,そのとき OC の距離は最大となる。

(ii) $t=\frac{\pi}{c}$ のときは

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \left(a\cos\frac{\pi}{6}, a\sin\frac{\pi}{6}\right) + \left(b\cos\frac{\pi}{2}, b\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \left(a\cos\frac{\pi}{6} + b\cos\frac{\pi}{2}, a\sin\frac{\pi}{6} + b\sin\frac{\pi}{2}\right)$$
$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a, \frac{a}{2} + b\right)$$

 $\overrightarrow{BC} = (c\cos\pi, c\sin\pi) = (-c, 0)$

OB=BC より $|\overrightarrow{OB}|^2 = |\overrightarrow{BC}|^2$ であるから

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 + \left(\frac{a}{2} + b\right)^2 = c^2$$
$$a^2 + ab + b^2 = c^2$$

仮定より c>0 だから、 $c=\sqrt{a^2+ab+b^2}$ ……④

a, b, c を 3 辺とする三角形を作り、a, b, c に対する角をそれぞれ A, B, C と すると, 余弦定理より

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C \qquad \cdots$$

⑤, ⑥より c を消去すると $a^2 + ab + b^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

$$\cos C = -\frac{1}{2}$$

$$0 < C < \pi \downarrow 0$$
 $C = \frac{2\pi}{3}$

$$S = \triangle ABC = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}ab\sin\frac{2}{3}\pi$$
$$= \frac{1}{2}ab \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}ab$$

したがって
$$c=\sqrt{a^2+ab+b^2}$$
, $S=\frac{\sqrt{3}}{4}ab$

[注 意 (i) この問題では、3つのベクトル \overrightarrow{OA} 、 \overrightarrow{AB} 、 \overrightarrow{BC} が同じ向きになることがあるかどうかが ポイントです。実は t=0 のとき, \overrightarrow{OA} , \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{BC} は同じ向きになっています。だから, 同 じ向きになることが"ある"ことを示すにはそれだけで十分です。

> なお、同じ向きになる場合がない時には、また別の考え方で解かねばなりません。たとえ ば、 $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ の成分を計算して $|\overrightarrow{OC}|^2$ を求めてもよいのですが、その最大値 の計算は,一般には簡単ではありません。

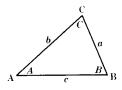
(ii) $\triangle ABC$ の 3 辺を a, b, c とすると $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$ (余弦定理) が成り立ちます。ここで, $0 < C < \pi$ です。

また、 $\triangle ABC$ の面積 S は

$$S = \frac{1}{2}ab\sin C$$

で求められます。 $\cos C$ から $\sin C$ を直接求めたいときは 0 < $C < \pi$ より

 $\sin C > 0$ で $\sin C = \sqrt{1 - \cos^2 C}$ で計算します。



別解

(ii)は,次のようにも解ける。

 $t = \frac{\pi}{6}$ のとき図のようになる。

 $OB = BC \downarrow 0 \quad OB = c$

$$\angle OAB = \frac{2}{3}\pi$$
 $\updownarrow \vartheta$

△OAB に余弦定理を用いて

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\frac{2\pi}{3}$$

$$\therefore c = \sqrt{a^2 + b^2 + ab}$$

このとき $\triangle OAB$ は 3 辺の長さが a, b, c の三角形になっていることがわかる。

$$\therefore S = \frac{1}{2} \times b \times \frac{\sqrt{3}}{2} a = \frac{\sqrt{3}}{4} ab$$

次は, 実戦トレーニングです。

■■ 実戦トレーニング ■

4 O を原点とする座標平面上に 3 つの動点 A, B, C がある。時刻 t におけるベクトル \overrightarrow{OA} , \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{BC} の成分表示は次のとおりである。

 $\overrightarrow{OA} = (a\cos 6t, \ a\sin 6t)$ $\overrightarrow{AB} = (b\cos 2t, \ b\sin 2t)$ $\overrightarrow{BC} = (c\cos 3t, \ c\sin 3t)$ 但し、a、b、c は正の定数とする。 $t = \frac{\pi}{12}$ のとき、O から B までの距離 OB と、B から C までの距離 BC とが等しかったという。このとき c は a と b を用いて c = と表され、さらに、3 辺の長さが a、b、c の a 角形の面積 a0 は a0 を用いて表すと a0 に、a0 である。

- 5 xy 平面上に 3点 O(0, 0), A(1, 0), B(t, 1) をとり、 $\triangle OAB$ の垂心を H とする。
 - (1) $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{b}$ とし、 \overrightarrow{OH} を $\overrightarrow{OH} = p\overrightarrow{a} + q\overrightarrow{b}$ と表すとき、p, q を t の式で表せ。
 - (2) 点 B が直線 y=1 の上を動くとき、点 H のえがく曲線の方程式を求めよ。 (広島大)

6 \triangle ABC の垂心 H に対して、 $\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{a}$ 、 $\overrightarrow{HB} = \overrightarrow{b}$ 、 $\overrightarrow{HC} = \overrightarrow{c}$ とおく。 \triangle ABC の外心を O と するとき、 \overrightarrow{OH} を \overrightarrow{a} 、 \overrightarrow{b} 、 \overrightarrow{c} で表せ。

ベクトルの初日は、これで終わりです。第17日は、ベクトルの内積です。

第17日

空間座標・ベクトル5日間②

学習日 月 B

ベクトルの内積

きょうは、ベクトルの内積について学習します。ベクトルに内積が加わることによって、その利 用範囲はぐんと広がります。そのとき,内積の計算規則に加えて,その図形的意味がしっかり理解 できていることが大切です。

確認トレーニングで,内積の基本を確かめてみよう。

■■■■ 確認トレーニング ■■■■

 \blacksquare 2つのベクトル \overrightarrow{a} , \overrightarrow{b} の大きさとそのなす角 θ が、次のように与えられているとき、内積 $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}$ を求めなさい。

(1) $|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = 2, \theta = 60^{\circ}$

(2) $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 4, \theta = 90^{\circ}$

(3) $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = \sqrt{3}, \theta = 150^{\circ}$

(4) $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = \sqrt{2}$, $\theta = 135^{\circ}$

2 次のベクトル \overrightarrow{a} , \overrightarrow{b} の内積を求めなさい。

(1) $\overrightarrow{a} = (1, 2), \overrightarrow{b} = (3, 4)$

(2) $\overrightarrow{a} = (\sqrt{2} - 1, -4), \overrightarrow{b} = (\sqrt{2} + 1, 2)$

3 $\overrightarrow{0}$ でない 2 つのベクトル \overrightarrow{a} , \overrightarrow{b} について, 次のことを証明しなさい。

 $(1) \quad \overrightarrow{a} / / \overrightarrow{b} \Longleftrightarrow |\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}| = |\overrightarrow{a}| |\overrightarrow{b}|$

(2) $\overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{b} \iff \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = 0$

4 次の2つのベクトル \overrightarrow{a} , \overrightarrow{b} が垂直になるようなx の値を求めなさい。

(1) $\overrightarrow{a} = (2, 1), \overrightarrow{b} = (1, x)$

(2) $\vec{a} = (2, -3), \vec{b} = (2x, 1+x)$

---- 確認トレーニングの答え -

1 (1) 1

(2) = 0

(3) $-\frac{9}{2}$

(4) -4

2 (1) 11 (2) -7

3 〔内積の定義を使って証明する。〕

4 (1) x = -2 (2) x = 3

最初の例題は、内積を利用した基本問題です。問題の内容をうまくベクトルに置きかえることが 先決です。解答を見ないで, 自分で解いてみること。

━━ 例題 27 分点を示すベクトルと内積の計算 **━**

三角形 ABC において、 $\angle A=135^\circ$ 、AB=5、AC=2 とする。線分 BC を k:(1-k) に内分 する点をPとする。ただし,0 < k < 1とする。

次の問いに答えよ。

- (1) ベクトル \overrightarrow{AP} を \overrightarrow{AB} と \overrightarrow{AC} を用いて表せ。
- (2) \overrightarrow{AP} と \overrightarrow{BC} が垂直になるように k の値を定めよ。
- (3) 三角形 ABP が二等辺三角形になるようにkの値を定めよ。

(横浜国大-教)

2つのベクトル \overrightarrow{a} , \overrightarrow{b} が垂直になる条件は \overrightarrow{a} と \overrightarrow{b} の内積(\overrightarrow{a} , \overrightarrow{b})が0となること Advice

等しいベクトルどうしの内積 (\vec{a}, \vec{a}) は

$$(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{a}) = |\overrightarrow{a}|^2 \sharp \mathfrak{h}$$

そのベクトルの大きさの2乗になることに着目し,

また
$$(\overrightarrow{ka}, \overrightarrow{b}) = (\overrightarrow{a}, \overrightarrow{kb}) = k(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$$
 $(k は実数)$

$$(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) = (\overrightarrow{a}, \overrightarrow{c}) + (\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$$

$$(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}) = (\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) + (\overrightarrow{a}, \overrightarrow{c})$$

などの関係を使って、内積の計算をします。

解答 (1) BP:CP=k:(1-k)であるから

$$\overrightarrow{AP} = \frac{(1-k)\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AC}}{k+(1-k)}$$
$$= (1-k)\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AC}$$

(2) $\overrightarrow{AP} \perp \overrightarrow{BC}$ となる条件は,

$$(\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{BC}) = 0$$

(1)より
$$\overrightarrow{AP} = (1-k)\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AC}$$

ここで

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$$

であるから,

$$(\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{BC}) = ((1-k)\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})$$

$$=(k-1)(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB})+(1-2k)(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})+k(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC})=0$$

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB}) = |\overrightarrow{AB}|^2 = 25, (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC}) = |\overrightarrow{AC}|^2 = 4$$

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}| \cos 135^\circ = -5\sqrt{2}$$

であるから,

$$25(k-1)-5\sqrt{2}(1-2k)+4k=0$$

$$(29+10\sqrt{2})k=25+5\sqrt{2}$$

$$k = \frac{25 + 5\sqrt{2}}{29 + 10\sqrt{2}} = \frac{625 - 105\sqrt{2}}{641}$$

⇔有理化する。

BP:CP = k:(1-k)

(3) 三角形 ABP が二等辺三角形であるのは,

AP=BP または、AB=BP の2つの場合である。

(i) AP=BPのとき,

$$\overrightarrow{AP} = (1-k)\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AC}$$
 $|\overrightarrow{AP}|^2 = (\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AP})$
 $= (1-k)^2 |\overrightarrow{AB}|^2 + 2(1-k)k(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + k^2 |\overrightarrow{AC}|^2$
 $= 25(1-k)^2 - 10\sqrt{2}(1-k)k + 4k^2$
 $= (29+10\sqrt{2})k^2 - 10(5+\sqrt{2})k + 25$
 $\overrightarrow{BP} = k\overrightarrow{BC}$ から $|\overrightarrow{BP}|^2 = k^2 |\overrightarrow{BC}|^2$
ここで、余弦定理より $\overrightarrow{BC}^2 = \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AC}^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \cos 135^\circ$
 $= 29+10\sqrt{2}$
よって
 $|\overrightarrow{BP}|^2 = (29+10\sqrt{2})k^2$

$$|\overrightarrow{BP}|^2 = (29 + 10\sqrt{2})k^2$$

$$|\overrightarrow{AP}|^2 = |\overrightarrow{BP}|^2$$
であるから

$$(29+10\sqrt{2})k^2-10(5+\sqrt{2})k+25=(29+10\sqrt{2})k^2$$

$$10(5+\sqrt{2})k=25$$

$$\therefore k = \frac{25}{10(5+\sqrt{2})} = \frac{25-5\sqrt{2}}{46}$$

(ii) AB=BPのとき,

ところで
$$BP = kBC$$

$$BC^2 = 29 + 10\sqrt{2} \pm 9$$

$$\therefore k = \frac{BP}{BC} = \frac{5}{\sqrt{29 + 10\sqrt{2}}}$$

⇔有理化可能だが, このままでよ

(i), (ii)
$$\sharp$$
 \mathfrak{h} , $k = \frac{25 - 5\sqrt{2}}{46}$, $\frac{5}{\sqrt{29 + 10\sqrt{2}}}$

(3)の解答では $\frac{5}{\sqrt{29+10\sqrt{2}}}$ という,根号の中にさらに根号が入った形が出てきます。

 $\sqrt{m\pm2\sqrt{n}}$ の形の平方根は $\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$ (a, b は a+b=m, ab=n をみたす正の整数)の形に直 せる場合もありますが、 $\sqrt{29+10\sqrt{2}}$ はできません。

また三角形 ABP が二等辺三角形である場合に、AB=AP はありえないことは三角形 ABC の形を考えればすぐにわかります。

例題が理解できたら,次の実戦トレーニングをやってみなさい。

実戦トレーニング

- **1** 三角形 ABC において、 \angle A=120°、AB=6、AC=3 とする。線分 BC を k:(1-k) に内分する点を P とする。ただし、0 < k < 1 とする。次の問いに答えよ。
 - (1) ベクトル \overrightarrow{AP} を \overrightarrow{AB} と \overrightarrow{AC} を用いて表せ。
 - (2) \overrightarrow{AP} と \overrightarrow{BC} が垂直になるように、k の値を定めよ。
 - (3) 三角形 ABP が二等辺三角形になるように、k の値を定めよ。

- 平面上に AB=AC である二等辺三角形 ABC がある。この平面上で 2 辺 AB, BC の外側に それぞれ正方形 ABDE, BCFG を作り、2 直線 AF, CE の交点を P とする。 $\theta=\angle$ BAC, $k=\cos\theta$, $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{b}$ とするとき、次の問いに答えよ。
 - (\ref{P}) \overrightarrow{AE} , \overrightarrow{AF} を \overrightarrow{a} , \overrightarrow{b} , k で表せ。
 - (イ) $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AF})=0$ となるとき、k の値を求めよ。ただし、 $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AF})$ は \overrightarrow{AD} と \overrightarrow{AF} との内積を表す。
 - (ウ) (イ)で得られた k の値に対して、 \overrightarrow{AP} を \overrightarrow{a} 、 \overrightarrow{b} で表せ。

(横浜国大-工)

3 一辺の長さが 1 である正 5 角形 ABCDE において $\overrightarrow{AD \cdot AC}$ の値を求めよ。ただし、 $\overrightarrow{AB \cdot AC}$ は 2 つのベクトル \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} の内積を表す。 (千葉大)

答え合わせをしたら例題をします。こんどは,証明問題です。わかりにくかったら,具体的に考えることです。

■ 例題 28 ベクトルの内積の性質 ━━

平面内に定点 Q と三角形 ABC が与えられている。三角形 ABC の内部または周上の点からなる集合を T とする。 T の点 P に対して

$$m(P) = \frac{1}{2} |\overrightarrow{OP}|^2 - \overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{OP}$$

とおく。ただし、O は座標の原点、 $\overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{OP}$ は 2 つのベクトル \overrightarrow{OQ} , \overrightarrow{OP} の内積を表すものとする。点 P が T 上を動くときの m(P) の最小値を m_0 とする。このとき、T の点 P_0 についてつぎの 2 つの命題 (i), (ii) はたがいに同値であることを証明せよ。

- (i) $m(P_0)=m_0$
- (ii) Tに属する任意の点 Pに対して

$$(\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP_0}) \cdot (\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_0}) \leq 0$$

(千葉大-理系)

Advice (i), (ii)が同値であることを証明するには, (i), (ii)の意味することをもっとわかりやすくすることです。

$$m(\mathbf{P}) = \frac{1}{2} (|\overrightarrow{\mathbf{OP}}|^2 - 2\overrightarrow{\mathbf{OQ}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{OP}})$$

$$= \frac{1}{2} (|\overrightarrow{\mathbf{OP}}|^2 - 2\overrightarrow{\mathbf{OQ}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{OP}} + |\overrightarrow{\mathbf{OQ}}|^2) - \frac{1}{2} |\overrightarrow{\mathbf{OQ}}|^2$$

$$= \frac{1}{2} |\overrightarrow{\mathbf{OP}} - \overrightarrow{\mathbf{OQ}}|^2 - \frac{1}{2} |\overrightarrow{\mathbf{OQ}}|^2 = \frac{1}{2} |\overrightarrow{\mathbf{QP}}|^2 - \frac{1}{2} |\overrightarrow{\mathbf{OQ}}|^2$$

Q は定点より、 $|\overrightarrow{QP}|^2$ は一定ですから、m(P) が最小になるのは、 $|\overrightarrow{QP}|$ が最小のときです。ですから、(i)の意味すること、すなわち、m(P) を最小にする P が P_0 であるということは、 $|\overrightarrow{QP_0}|$ が最小である、ということです。

また、(ii)の不等式の意味することは、 $\overrightarrow{P_0Q} \cdot \overrightarrow{P_0P} \leq 0$ と同値ですから、

∠QP₀P≧90°ということです。

ですから、結局、Qが定点であるとき、Tの点 P_0 に対して、

- (i) $|\overrightarrow{QP_0}|$ が最小である。
- (ii) $\angle QP_0P \ge 90^{\circ}$
- の2つが同値であることを示せばよいことになります。

解答

$$\begin{split} m(\mathbf{P}) &= \frac{1}{2} \mid \overrightarrow{\mathrm{OP}} \mid^2 - \overrightarrow{\mathrm{OQ}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{1}{2} (\mid \overrightarrow{\mathrm{OP}} \mid^2 - 2\overrightarrow{\mathrm{OQ}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}}) \\ &= \frac{1}{2} (\mid \overrightarrow{\mathrm{OP}} \mid^2 - 2\overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OQ}} + \mid \overrightarrow{\mathrm{OQ}} \mid^2) - \frac{1}{2} \mid \overrightarrow{\mathrm{OQ}} \mid^2 \\ &= \frac{1}{2} \mid \overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OQ}} \mid^2 - \frac{1}{2} \mid \overrightarrow{\mathrm{OQ}} \mid^2 \\ &= \frac{1}{2} \mid \overrightarrow{\mathrm{QP}} \mid^2 - \frac{1}{2} \mid \overrightarrow{\mathrm{OQ}} \mid^2 \\ &= \frac{1}{2} \mid \overrightarrow{\mathrm{QP}} \mid^2 - \frac{1}{2} \mid \overrightarrow{\mathrm{OQ}} \mid^2 \end{split}$$

$$\Leftrightarrow |\overrightarrow{a}|^2 - 2\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} + |\overrightarrow{b}|^2 \\ &= |\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}|^2 \mathcal{O} |\overrightarrow{\mathrm{PMP}}|. \end{split}$$

と変形でき、Q は定点であるから、 $|\overrightarrow{OQ}|$ は一定である。 よって、m(P) が最小になるのは、 $|\overrightarrow{QP}|$ が最小のときである。 初めに、(i)が成り立つとする。m(P)の最小値 $m_0 = m(P_0)$ より、 $|\overrightarrow{QP_0}|$ が最小である。

Q \oplus T のときは,図のように,点 P_0 は三角形の周上にあり T に属する任意の点 P に対して, \angle $QP_0P \ge 90^\circ$ である。

よって、 $\overrightarrow{P_0Q} \cdot \overrightarrow{P_0P} \leq 0$

$$\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP_0} \cdot (\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_0}) \leq 0$$

 $Q \in T$ のときは、 $|\overrightarrow{QP}|$ を最小にする T の点 $P_0 = Q$ であるから、

$$(\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP_0}) \cdot (\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_0}) = \overrightarrow{0} \cdot (\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_0}) = 0$$

したがって, (i)が成り立てば, (ii)が成り立つ。

逆に、(ii)が成り立つとき、すなわち、Tに属する任意の点Pに対して、

$$(\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP_0}) \cdot (\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_0}) \leq 0$$
(1

が成り立つとき,

$$\begin{split} m(\mathbf{P}) - m(\mathbf{P}_0) &= \left(\frac{1}{2} | \overrightarrow{\mathbf{OP}}|^2 - \overrightarrow{\mathbf{OQ}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{OP}}\right) - \left(\frac{1}{2} | \overrightarrow{\mathbf{OP}_0}|^2 - \overrightarrow{\mathbf{OQ}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{OP}_0}\right) \\ &= \frac{1}{2} (|\overrightarrow{\mathbf{OP}}|^2 - |\overrightarrow{\mathbf{OP}_0}|^2) - \overrightarrow{\mathbf{OQ}} \cdot (\overrightarrow{\mathbf{OP}} - \overrightarrow{\mathbf{OP}_0}) & \cdots & \cdots & @ \end{split}$$

 $\overline{CCC}, \quad \overline{OL}, \quad \overline{OQ} \cdot (\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_0}) - \overrightarrow{OP_0} \cdot (\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_0}) \leq 0$

$$\therefore \overrightarrow{OQ} \cdot (\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_0}) \leq \overrightarrow{OP_0} \cdot (\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_0}) \qquad \dots \dots \dots 3$$

②, ③より,

$$m(P) - m(P_0) \ge \frac{1}{2} (|\overrightarrow{OP}|^2 - |\overrightarrow{OP_0}|^2) - \overrightarrow{OP_0} \cdot (\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_0})$$

$$= \frac{1}{2} (|\overrightarrow{OP}|^2 - |\overrightarrow{OP_0}|^2) - \overrightarrow{OP_0} \cdot \overrightarrow{OP} + |\overrightarrow{OP_0}|^2$$

$$= \frac{1}{2} (|\overrightarrow{OP}|^2 - 2\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OP_0} + |\overrightarrow{OP_0}|^2)$$

$$= \frac{1}{2} |\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_0}|^2 \ge 0$$

よって、T に属する任意の点 P に対して、 $m(P) \ge m(P_0)$ となるから、m(P) を最小にする T の点は P_0 である。すなわち、 $m(P_0) = m_0$ よって、(i) が成り立つ。

以上より, (i), (ii)は同値である。

⇔逆の証明がないと、同値とはいえない。

注意 m(P) の表す図形的意味がとらえられるかどうかがカギでしょう。それに、内積の式変形が自由自在にできる必要もあります。

 $|\overrightarrow{a} \pm \overrightarrow{b}|^2 = |\overrightarrow{a}|^2 \pm 2\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} + |\overrightarrow{b}|^2 \quad ($ 複号同順)

 $(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) \cdot (\overrightarrow{c} + \overrightarrow{d}) = \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c} + \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{d} + \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c} + \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{d}$

などの式の、左辺から右辺へ、右辺から左辺へ変形すること、

また, $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos\theta$ から

 $0 < \theta < 90^{\circ} \text{ } \text{ } \text{ } \text{ } \text{ } \text{ } \vec{a} \cdot \vec{b} > 0$

 $90^{\circ} < \theta < 180^{\circ}$ なら $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} < 0$

 $\theta = 90^{\circ} \ \text{tb} = 0$

さらに、基本的なことでは、 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ についても、左辺から右辺へ、右辺から左辺への変形など、ベクトルについては、図形的意味を常に考えながら、式変形に習熟しておきましょう。

例題をもとにして, 実戦トレーニングの問題を考えてみなさい。

■■ 実戦トレーニング ■■■

- 4 中心が O である定円の周上に相異なる 6 つの定点 A_1 , A_2 , A_3 , A_4 , A_5 , A_6 がある。このとき
 - (i) $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3} = \overrightarrow{OH}$ となるように点 H をとれば、点 H は $\triangle A_1A_2A_3$ の垂心であることを示せ。
 - (ii) 6点 $A_k(k=1, 2, 3, 4, 5, 6)$ のうちから 3点を任意にえらぶ。えらんだ 3点を頂点とする三角形の垂心と,残りの 3点を頂点とする三角形の重心とを通る直線は,3点のえらびかたに無関係な一定の点を通ることを示せ。
 - 注 三角形の各頂点からその対辺にひいた3つの垂線は1点で交わる。この交点をその三角形の垂心という。 (京都大-理系)

平面上の原点 O を中心とする半径 1 の円 C の周上に、同一直径上にない異なる 2 点 A、 B をとる。A、B の位置ベクトルをそれぞれ \overrightarrow{a} 、 \overrightarrow{b} とし、

$$L = \{ m\overrightarrow{a} + n\overrightarrow{b} \mid m, n$$
 は整数 $\}$

とする。

- (1) 零ベクトルでない L の元の大きさの最小値 r は 1, $|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}|$, $|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}|$ のうちの最小のものに等しいことを証明せよ。

平面上の曲線 $y=x^2-x$ の y<0 の部分を C とする。C 上の 1 点 P から曲線 $y=x^2$ に 2 本の接線を引き,その接点を Q,R とする。2 つのベクトル \overrightarrow{PQ} , \overrightarrow{PR} の内積を最大または最小にする点 P があれば,その座標を求めよ。 (大阪府大-農・経)

きょうはこれで終わりです。第18日は、空間のベクトルです。

第18日

空間座標・ベクトル5日間③

学習日

日 月

空間のベクトル

第17日までは、平面におけるベクトルについて学習してきました。きょうからは、空間における ベクトルについて学習します。まず、四面体に空間ベクトルを使ってみます。

四面体には、外接球や内接球がかけ、重心があるなどいくつかの基本的性質があります。その性 質をひととおり頭にいれておくことも大切です。それでは、確認トレーニングにはいります。

■■■ 確認トレーニング ■■■■

■ 次の方程式はどんな球を表しますか。その中心と半径をいいなさい。

- (1) $x^2 + y^2 + z^2 = 16$
- (2) $(x-2)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 4$

2 次のベクトルの大きさを求めなさい。

(1) $\vec{a} = (2, -3, 6)$

(2) $\overrightarrow{b} = (1 + \sqrt{3}, 3, \sqrt{3} - 1)$

③ 空間の 3 点 A,B,C の位置ベクトルをそれぞれ \overrightarrow{a} , \overrightarrow{b} , \overrightarrow{c} とするとき,次のベクトルを \overrightarrow{a} , \overrightarrow{b} , \overrightarrow{c} で表しなさい。

- (1) \overrightarrow{AB}
- (2) ABを2:1に内分する点の位置ベクトル
- (3) BC の中点の位置ベクトル
- (4) CA を 3:2 に外分する点の位置ベクトル
- (5) △ABC の重心の位置ベクトル

----- 確認トレーニングの答え -

- 11 (1) 中心は原点, 半径は4
 - (2) 中心は(2, -2, 1), 半径は2
- **2** (1) 7 (2) $\sqrt{17}$

(1)
$$\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}$$
 (2) $\frac{2\overrightarrow{b} + \overrightarrow{a}}{3}$ (3) $\frac{\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}}{2}$ (4) $3\overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{c}$

$$(2) \quad \frac{2\overrightarrow{b} + \overrightarrow{a}}{3}$$

(3)
$$\frac{\overline{b} + \overline{c}}{2}$$

(4)
$$3\overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{c}$$

$$(5) \quad \frac{\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}}{3}$$

最初の例題は、空間ベクトルの四面体への応用の基本問題です。正四面体には、一般の四面体のなかでも特別な性質があるから、確認しておきましょう。

■ 例題 29 正四面体の頂点の座標 ■

4点 P(a, 0, 0), Q(0, a, 0), R(x, y, 0), S(u, v, w) を頂点とする正四面体がある。 x, y, u, v, w を a を用いて表せ。ただし,a, x, y, w はすべて正の数とする。

(北海道大-理II)

Advice 正四面体は 4 個の合同な正三角形で構成されています。したがって、PQ=PR=PS です。また頂点 S から xy 平面にひいた垂線の足を H とすれば、H は正三角形 PQR の重心になっています。

解答 原点を O とすると、P(a, 0, 0)、Q(0, a, 0)、R(x, y, 0) であるから $OP = OQ = a \quad (a > 0)$

で, $\triangle PQR$ は正三角形であるから, $\overrightarrow{PQ} \perp \overrightarrow{OR}$ である。したがって

 $\overrightarrow{PQ} = (-a, a, 0), \overrightarrow{OR} = (x, y, 0) \overrightarrow{c} \overrightarrow{b} \overrightarrow{b}$

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{OR} = -ax + ay = 0$$

$$a > 0 \downarrow 0$$
 $x = y$ ·······(1)

 $\exists t$, $\overrightarrow{PR} = (x - a, y, 0) \overrightarrow{c} | \overrightarrow{PR}|^2 = | \overrightarrow{PQ}|^2 \overrightarrow{c}$ \overrightarrow{a}

$$(x-a)^2+y^2=(-a)^2+a^2$$

$$\therefore x^2 + y^2 - 2ax - a^2 = 0 \qquad \cdots$$

よって、①、②より

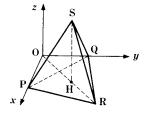
$$2x^2-2ax-a^2=0$$

$$\therefore x = \frac{a \pm \sqrt{3}a}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}a$$

zz, x>0 z

$$x = \frac{1+\sqrt{3}}{2}a \qquad \dots$$

よって、①より
$$y = \frac{1+\sqrt{3}}{2}a$$
④



つぎに,頂点S(u,v,w)からxy平面にひいた垂線の足をHとすれば,

 $\mathbf{H}(u, v, 0)$ である。 \mathbf{H} は正三角形 PQR の重心であるから

←自明としてよい。

$$\overrightarrow{OH} = \frac{\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR}}{3}$$

ゆえに

$$(u, v, 0) = \frac{1}{3} \left\{ (a, 0, 0) + (0, a, 0) + \left(\frac{1 + \sqrt{3}}{2} a, \frac{1 + \sqrt{3}}{2} a, 0 \right) \right\}$$
$$= \frac{1}{3} \left(\frac{3 + \sqrt{3}}{2} a, \frac{3 + \sqrt{3}}{2} a, 0 \right)$$
$$= \left(\frac{3 + \sqrt{3}}{6} a, \frac{3 + \sqrt{3}}{6} a, 0 \right)$$

$$\therefore u = \frac{3 + \sqrt{3}}{6}a \qquad \dots \dots \text{ }$$

$$v = \frac{3+\sqrt{3}}{6}a$$

また,
$$\overrightarrow{\mathrm{PS}} = (u-a, v, w)$$
で, $|\overrightarrow{\mathrm{PS}}|^2 = |\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2$ であるから

$$(u-a)^2+v^2+w^2=(-a)^2+a^2$$

したがって、⑤、⑥より

$$\begin{split} w^2 &= 2a^2 - \left\{ \left(u - a \right)^2 + v^2 \right\} \\ &= 2a^2 - \left\{ \left(\frac{-3 + \sqrt{3}}{6} a \right)^2 + \left(\frac{3 + \sqrt{3}}{6} a \right)^2 \right\} \\ &= 2a^2 - \frac{a^2}{36} \left\{ \left(\sqrt{3} - 3 \right)^2 + \left(\sqrt{3} + 3 \right)^2 \right\} \\ &= 2a^2 - \frac{a^2}{36} \times 24 = \frac{4}{3} a^2 \end{split}$$

よって、
$$w > 0$$
 より $w = \frac{2}{\sqrt{3}}a = \frac{2\sqrt{3}}{3}a$

以上より
$$x=y=\frac{1+\sqrt{3}}{2}a, u=v=\frac{3+\sqrt{3}}{6}a, w=\frac{2\sqrt{3}}{3}a$$

注意 空間図形のこのような問題では、ベクトルを用いて処理するのがよいでしょう。また、a、x, y, w はすべて正の数であるという条件に注意して、計算をすすめてください。

略別解 この正四面体を xy 平面に正射影した図をかいて

みると図のようになります。

S' は S を xy 平面に射影した点, また

S(u, v, w) とします。

正四面体なので対称性を考えて,

$$x = y$$
, $u = v$

ここで、(u, v, 0)が $\triangle PQR$ の重心ですから、

$$u=\frac{a+x}{3}$$
, $v=\frac{a+y}{3}$

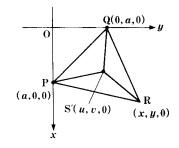
△PQR が正三角形なので

$$PR^2 = PS^2 = PQ^2$$
 ········

⑦より

$$\begin{cases} (x-a)^2 + y^2 = 2a^2 \\ (u-a)^2 + v^2 + w^2 = 2a^2 \end{cases}$$

以上より、x, y, u, v, w の値を求めればよいのです。



例題を理解したら、次の実戦トレーニングに進みなさい。

実戦トレーニング 🗪

1 4点 P(2, 1, 0), Q(1, 2, 0), R(x, y, 0), S(u, v, w) を頂点とする正四面体がある。 x, y, u, v, w を求めよ。ただし,x, y, w はすべて正の数とする。

- 一辺の長さが1の正四面体の内部にたがいに外接する2つの球P, Qがある。球Pは正四面体の4面全部に接し,球Qは正四面体の3面に接しているとする。
 - (1) 球 P の半径を求めよ。
 - (2) 球 Q の半径を求めよ。

(大阪大-理系)

■ 正四面体 ABCD において、辺BC と辺AD は垂直であることを証明せよ。

━━ 例題 30 ベクトルの図形への応用 ━━

四面体 OABC において、点 P を辺 AB の中点、点 Q を線分 PC の中点、点 R を線分 OQ の中点とする。直線 AR が 3 点 O、B、C を通る平面と交わる点を S とし、直線 OS と直線 BC の交点を T とする。 $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{a}$ 、 $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{c}$ とするとき、次の問いに答えよ。

- (1) \overrightarrow{OS} を \overrightarrow{a} , \overrightarrow{b} , \overrightarrow{c} で表せ。
- (2) BT:CT を求めよ。

(神戸大)

Advice (1)は,位置ベクトル \overrightarrow{a} , \overrightarrow{b} , \overrightarrow{c} を使って,点 P, Q, R, S の位置ベクトルを順に表していってみましょう。

点 Pが ABの中点ですから,

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$$

とあらわせます。更に、点QはPCの中点、点RはQ0の中点ですから、 \overrightarrow{OR} を \overrightarrow{a} 、 \overrightarrow{b} 、 \overrightarrow{c} であらわすことができます。

一般に、3 点 X、Y、Zが一直線上にある条件は

$$\overrightarrow{XY} = k\overrightarrow{XZ}$$
, (k は実数)

とかけることですから、3点A、R、Sが一直線上にあることから

$$\overrightarrow{AS} = k \overrightarrow{AR}$$
, (k は実数)

となります。このことより、 \overrightarrow{OS} を \overrightarrow{a} , \overrightarrow{b} , \overrightarrow{c} , k であらわせます。

次に、点Sが平面OBC上にあることから、 \overrightarrow{OS} は、 \overrightarrow{OB} 、 \overrightarrow{OC} だけであらわせますから、 \overrightarrow{a} の係数が0に等しくなり、kの値が求まります。

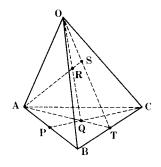
(2)は,点 T が OS 上にあることと,BC 上にあることから, \overrightarrow{OT} を 2 通りにあらわします。 \overrightarrow{b} , \overrightarrow{c} は $\overrightarrow{0}$ でなく, \overrightarrow{b} と \overrightarrow{c} が平行ではないことから, \overrightarrow{OT} の表し方は 1 通りだけです。よって 2 つの式を比べると, \overrightarrow{OT} が求まり, \overrightarrow{BT} : \overrightarrow{CT} の値がわかります。

|解 答 | (1) 点 P は AB の中点だから

$$\overrightarrow{OP} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2} = \frac{\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}}{2}$$

点 Q は PC の中点だから

$$\overrightarrow{OQ} = \frac{\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OC}}{2} = \frac{\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}}{2} + \overrightarrow{c}$$
$$= \frac{\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + 2\overrightarrow{c}}{4}$$



点RはOQの中点だから

$$\overrightarrow{OR} = \frac{\overrightarrow{OQ}}{2} = \frac{\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + 2\overrightarrow{c}}{8}$$

点 S は AR の延長上にあるから、3 点 A、R、S は一直線上にある。

よって

$$\overrightarrow{AS} = k \overrightarrow{AR}$$
 (k は実数)

←同一直線上にあることはこう表 す。

とかける。

このとき

$$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AS}$$

$$= \overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{AR}$$

$$\overrightarrow{AR} = \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{AR}$$

$$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OA} + k(\overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OA})$$

$$= (1 - k)\overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{OR}$$

①を代入すると

$$\overrightarrow{OS} = (1 - k)\overrightarrow{a} + \frac{k(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + 2\overrightarrow{c})}{8}$$
$$= \left(1 - \frac{7}{8}k\right)\overrightarrow{a} + \frac{k}{8}\overrightarrow{b} + \frac{k}{4}\overrightarrow{c}$$

ここで、点Sが平面OBC上にあるから、 \overrightarrow{OS} は \overrightarrow{OB} , \overrightarrow{OC} , すなわち、 \overrightarrow{b} , \overrightarrow{c} , のみで表され、 \overrightarrow{a} の係数は0に等しい。よって

$$1 - \frac{7}{8}k = 0$$

$$\therefore k = \frac{8}{7}$$

したがって

$$\overrightarrow{OS} = \frac{1}{7}\overrightarrow{b} + \frac{2}{7}\overrightarrow{c}$$

(2) 点TはOS上にあるから、3点O、S、Tは一直線上にある。

よって,(1)の結果より

$$\overrightarrow{OT} = t\overrightarrow{OS} \quad (t \text{ は実数})$$

$$= t\left(\frac{1}{7}\overrightarrow{b} + \frac{2}{7}\overrightarrow{c}\right)$$

$$= \frac{t}{7}\overrightarrow{b} + \frac{2}{7}t\overrightarrow{c} \quad \cdots \cdots 2$$

とかける。

また、点 T は BC 上にあるから、BT:CT=s:(1-s)(s は実数) とすると

$$\overrightarrow{OT} = (1-s)\overrightarrow{OB} + s\overrightarrow{OC}$$

= $(1-s)\overrightarrow{b} + s\overrightarrow{c}$ 3

とかける。

ここで、 \overrightarrow{b} と \overrightarrow{c} は、ともに $\overrightarrow{0}$ でなく、 \overrightarrow{b} と \overrightarrow{c} が平行ではないことから、 \overrightarrow{OT} の \overrightarrow{b} , \overrightarrow{c} による表し方は1通りしかない。つまり、 \overrightarrow{b} , \overrightarrow{c} の係数が、それぞれ等しいから、②、③より

である。

$$\begin{cases} \frac{t}{7} = 1 - s \\ \frac{2}{7}t = s \end{cases}$$

$$\therefore \quad s = \frac{2}{3}, \quad t = \frac{7}{3}$$

よって

BT: CT =
$$s$$
: $(1-s)$
= $\frac{2}{3}$: $\frac{1}{3}$
= 2 : 1

注意

同一平面上にない異なる4点O,A,B,Cに対し,

 $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{c}$ とすると, 空間内の任意の点 P に対し, \overrightarrow{OP} は

 $\overrightarrow{OP} = \alpha \overrightarrow{a} + \beta \overrightarrow{b} + \gamma \overrightarrow{c}$ (a, β , γ is γ .

の形に, ただ1通りの形で表せます。

特に、Pが平面 OAB上の点ならば、 $\gamma=0$ となります。

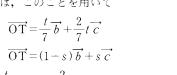
(1)では、このことを用いて kの値を求めます。

 $\sharp c, \overrightarrow{OP} = \alpha \overrightarrow{a} + \beta \overrightarrow{b} + \gamma \overrightarrow{c}, \overrightarrow{OP} = \alpha' \overrightarrow{a} + \beta' \overrightarrow{b} + \gamma' \overrightarrow{c} O \sharp$

うに、 \overrightarrow{OP} が 2 通りに表されれば、 $\alpha = \alpha'$ 、 $\beta = \beta'$ 、 $\gamma = \gamma'$ となります。

(2)では、このことを用いて

から、 $\frac{t}{7}=1-s$ 、 $\frac{2}{7}t=s$ を導いています。



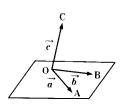
次の実戦トレーニングをやってみなさい。

■■ 実戦トレーニング ■■■

四面体 OABC において、点 P を辺 AB を 1:2 に内分する点、点 Q を線分 PC の中点、点 R を線分 OQ の中点とする。直線 AR が 3 点 O,B,C を通る平面と交わる点を S とし、直線 OS と直線 BC の交点を T とする。

 $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{c}$ とするとき, 次の問いに答えよ。

- (1) \overrightarrow{OS} を \overrightarrow{a} , \overrightarrow{b} , \overrightarrow{c} で表せ。
- (2) BT:CT を求めよ。



- 国面体 PABC がある。ベクトル \overrightarrow{PQ} を $\overrightarrow{PQ} = p\overrightarrow{PA} + q\overrightarrow{PB} + r\overrightarrow{PC}$ とする。
 - (1) 点 Q が三角形 ABC の内部にあるための p, q, r の満たすべき条件を求めよ。
 - (2) (1)のとき、四面体 PABQ、PBCQ、PCAQ の体積を V_1 、 V_2 、 V_3 とする。比 $V_1:V_2:V_3$ を求めよ。

(千葉大)

- 回面体 PABC において、 $\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{a}$ 、 $\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{b}$ 、 $\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{c}$ とする。L,M,N をそれぞれ線分 PA,PB,PC 上に,PL:LA=1:1,PM:MB=2:1,PN:NC=3:1 となるようにとる。 このとき,次の問いに答えよ。
 - (1) ベクトル $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{pa} + q\overrightarrow{b} + r\overrightarrow{c}$ で表される点 Q が三角形 LMN の内部にあるための p, q, r のみたすべき条件を求めよ。
 - (2) (1)のとき、四面体 PLMQ、PMNQ、PNLQ の体積をそれぞれ V_1 、 V_2 、 V_3 とする。比 $V_1:V_2:V_3$ を求めよ。

ごくろうさまでした。第19日は、空間のベクトルの内積について学習します。

第19日

空間座標・ベクトル5日間④

学習日

月 日

空間のベクトルの内積

第18日は、四面体にベクトルを使うことで、空間でのベクトルの使い方になれたと思います。き ょうは、四面体に限らず、一般的な空間ベクトルについて学習します。問題を解くときは、空間に おけるイメージを豊かにして考えることが解決をはやくします。

それでは、確認トレーニングにはいりなさい。

確認トレーニング ■■■■

11 $\vec{a} = (2, 3, -6)$ と平行な単位ベクトルを成分表示しなさい。

2 次のベクトル \overrightarrow{a} , \overrightarrow{b} の内積を求めなさい。

- (1) $\overrightarrow{a} = (2, 3, 1), \overrightarrow{b} = (4, -2, 3)$
- (2) $\overrightarrow{a} = (\sqrt{3} 1, \sqrt{2}, \sqrt{3} + 1), \overrightarrow{b} = (\sqrt{2}, -2\sqrt{3}, \sqrt{2})$

③ 次の2つのベクトル \overrightarrow{a} , \overrightarrow{b} が垂直になるようなx の値を求めなさい。

- (1) $\overrightarrow{a} = (2, -2, 4), \overrightarrow{b} = (-1, 5, x)$
- (2) $\overrightarrow{a} = (x, 4, 1+x), \overrightarrow{b} = (2, 2x, -5)$

4 2 平面 y+z+3=0, 2x-2y-z-1=0 のなす角 θ を求めなさい。

---- 確認トレーニングの答え -

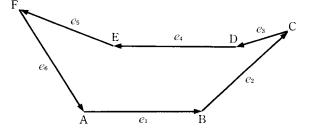
1
$$\left(\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, -\frac{6}{7}\right), \left(-\frac{2}{7}, -\frac{3}{7}, \frac{6}{7}\right)$$

- **2** (1) 5 (2) 0
- 4 45°

■ 例題 31 空間ベクトルと内積 ■

空間内に6個の単位ベクトル e_1 , e_2 ,

- …, e₆で構成された図のような図形があ
- り,次の3つの条件(a),(b),(c)を満たして いる。
 - (a) 互いに隣り合う 2 つのベクトルの内 積は $\frac{1}{3}$ である。



すなわち

$$e_{1} \cdot e_{2} = e_{2} \cdot e_{3} = e_{3} \cdot e_{4} = e_{4} \cdot e_{5}$$
$$= e_{5} \cdot e_{6} = e_{6} \cdot e_{1} = \frac{1}{3}$$

である。

- (b) $e_1 \ge e_4$ は xy 平面内にあり、向きは反対である。
- (c) 点 C と 点 F の z 座標は正である。

このとき,

- (2) 線分 AE の長さは 「イ」である。
- (3) 線分 AE の中点を G とすると、線分 FG の長さは \Box である。
- (4) xy 平面と面 AEF のなす角を $\beta \left(0 < \beta < \frac{\pi}{2}\right)$ とすると、 $\cos \beta = \boxed{\pm}$ である。
- (5) 線分 CF の長さは<u>す</u>である。

(慶應義塾大-理工)

Advice

ベクトルのなす角や大きさを求めるときは、内積を考えてみましょう。特にここでは (b)の条件より、 $e_4 = -e_1$ であることに注意し、これを利用しましょう。

- (1), (2)では \overrightarrow{AE} , \overrightarrow{AB} , $|\overrightarrow{AE}|^2$ などを $e_1 \sim e_6$ を使って表してみましょう。
- (4)では、図をかいて考えましょう。2つの平面のなす角は、2つの平面上のベクトル で交線 AE に垂直な2つのベクトルのなす角になっています。
- (5)は、内積だけでは無理なようですから、立体図形として考えましょう。断面図をか いてみると,よくわかるでしょう。

解答(1) ∠EAB=αであるから, cosα=

$$\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FE}) \cdot \overrightarrow{AB}$$

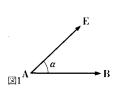
$$= (-e_6 - e_5) \cdot e_1$$

$$= -e_6 \cdot e_1 - e_5 \cdot e_1$$

$$= -e_6 \cdot e_1 - e_5 \cdot (-e_4) \quad (\because e_1 = -e_4)$$

$$= -\frac{1}{3} + \frac{1}{3}$$

$$= 0$$



$$\therefore \cos \alpha = 0$$

(2)
$$|\overrightarrow{AE}|^2 = |\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FE}|^2 = |-e_6 - e_5|^2 = |e_5 + e_6|^2$$

 $= (e_5 + e_6) \cdot (e_5 + e_6) = e_5 \cdot e_5 + 2e_5 \cdot e_6 + e_6 \cdot e_6$
 $= |e_5|^2 + 2e_5 \cdot e_6 + |e_6|^2$
 $= 1^2 + 2 \times \frac{1}{3} + 1^2 \quad (\because e_5, e_6 \Leftrightarrow \textcircled{1}) \stackrel{\text{in}}{=} (\overrightarrow{1}) \stackrel{\text{in}}{=} (\overrightarrow{$

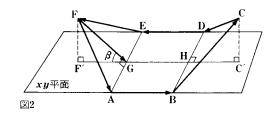
$$AE = \sqrt{\frac{8}{3}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

(3) \triangle EFA は二等辺三角形であるから、 AE の中点を G とすると $\overrightarrow{FG} \perp \overrightarrow{AE}$ である。

$$\vec{E} \vec{G} = |\vec{E}\vec{F}|^2 - |\vec{E}\vec{G}|^2 = |\vec{E}\vec{F}|^2 - |\vec{E}\vec{G}|^2 = |\vec{E}\vec{F}|^2 - |\vec{E}\vec{A}|^2 = 1 - (\frac{\sqrt{6}}{3})^2 = \frac{1}{3}$$

$$\vec{E}\vec{G} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

(4) $\mathbf{AE} \perp \mathbf{FG}$ であるから xy 平面 と面 \mathbf{AEF} のなす角は図 2 にみるように $\overrightarrow{\mathbf{GF}}$ と $\overrightarrow{\mathbf{DE}}$ のなす角に等しい。



$$\vec{GF} = \vec{GE} + \vec{EF}$$

$$= \frac{1}{2} \vec{AE} + \vec{EF}$$

$$= \frac{1}{2} (-e_5 - e_6) + e_5$$

$$= \frac{1}{2} (e_5 - e_6)$$

であるから,

$$\overrightarrow{GF} \cdot \overrightarrow{DE} = \frac{1}{2} (e_5 - e_6) \cdot e_4 = \frac{1}{2} (e_5 \cdot e_4 - e_6 \cdot e_4)$$

$$= \frac{1}{2} (e_5 \cdot e_4 + e_6 \cdot e_1) \quad (\because \quad e_4 = -e_1)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{3}$$

$$\therefore \cos \beta = \frac{\overrightarrow{GF} \cdot \overrightarrow{DE}}{|\overrightarrow{GF}||\overrightarrow{DE}|} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{\sqrt{3}}{3} \times 1} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

(5) (4)と同様に xy 平面と面 BCD のなす角も β であるから,DB の中点を H とすれば,FG および CH の xy 平面上への正射影は,図 2 から

$$F'G = C'H = FG\cos\beta = CH\cos\beta = \frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{3}$$

これから CF=C'H+DE+F'G=
$$\frac{1}{3}$$
+1+ $\frac{1}{3}$ = $\frac{5}{3}$

⇔内積の利用では解けない。

⇔内積の利用で解ける。

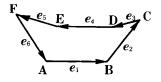
以上より ア
$$0$$
 イ $\frac{2\sqrt{6}}{3}$ ウ $\frac{\sqrt{3}}{3}$ エ $\frac{\sqrt{3}}{3}$ オ $\frac{5}{3}$

注意 (4)で2つの面のなす角は、2つの面の交線に垂直な2直線のなす角ですから、交線に垂直な 2つのベクトルの内積を考えるわけです。

> (5)は内積だけではどうにもならないので、正射影を使うわけです。1つのやり方ではうまく いかないとき、別の方法を考えるという柔軟性も必要です。

■■■ 実戦トレーニング ■■

- 型 空間内に 6 個の単位ベクトル e_1 , e_2 , ……, e_6 で構成された図のような図形があり、次の 3 つの条件(a)(b)(c)を満たしている。
 - (a) 互いに隣り合う 2 つのベクトルの内積は $\frac{1}{4}$ である。 すなわち $e_1 \cdot e_2 = e_2 \cdot e_3 = e_3 \cdot e_4 = e_4 \cdot e_5 = e_5 \cdot e_6 = e_6 \cdot e_1 = \frac{1}{4}$



- (b) $e_1 \ge e_4$ は xy 平面内にあり、向きは反対である。
- (c) 点C と点Fのz座標は正である。 このとき
- (2) 線分 BD の長さは<u>イ</u>である。
- (3) 線分 BD の中点を H とすると、線分 CH の長さは <u>ウ</u>である。
- (4) xy 平面と面 BCD のなす角を $\beta \left(0 < \beta < \frac{\pi}{2}\right)$ とすると、 $\cos \beta = \boxed{$ エ である。
- (5) 線分 CF の長さは <u>す</u>である。

- 空間に同一平面上にない 4 点 A, B, C, D がある。B, D から直線 AC に下ろした垂線の足をそれぞれ H, K とし、ベクトル \overline{HB} と \overline{KD} のなす角を θ (ただし $0 < \theta < \pi$) とする。
 - (1) ベクトル \overrightarrow{HB} と \overrightarrow{HD} のなす角を α とすると

$HD\cos\alpha = KD\cos\theta$

であることを証明せよ。

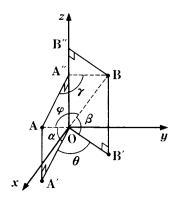
(2) \angle ABC, \angle ADC がともに直角で、AB=CD=a、BC=DA=b であるとき、線分 BD の長さを a、b、 θ で表せ。 (一橋大)

- 室間に xyz 座標系をとる。今 xy 平面上にない点 A,B があり,点 A,B から xy 平面におろした垂線の足を A',B' とする。このとき $\angle AOA' = \alpha$, $\angle BOB' = \beta$, $\angle A'OB' = \theta$,OA = a,OB = b であったとする。
 - (1) 点 A, B より z 軸におろした垂線の足を A", B" とし, \angle AA"B= γ とすると,

 $BB''\cos\theta = A''B\cos\gamma$

となることを示せ

- (2) AB^2 を a, b, α , β , θ を用いて表せ。
- (3) $\angle AOB = \varphi$ とするとき $\cos \varphi$ を α , β , θ を用いて表せ。



━━ 例題 32 図形とベクトル ━━

空間の,同一平面上にない 4 点 O, A, B, C を考える。線分 OA, AB, BC, CO の上に それぞれ点 P_1 , P_2 , P_3 , P_4 があって $P_1P_2P_3P_4$ が平行四辺形をなすものとする。このとき次 の問いに答えよ。

(i) $|\overrightarrow{OP_1}|: |\overrightarrow{P_1A}| = k: (1-k)$

 $|\overrightarrow{AP_2}|:|\overrightarrow{P_2B}|=(1-l):l$

 $|\overrightarrow{\mathrm{BP_3}}|:|\overrightarrow{\mathrm{P_3C}}|=m:(1-m)$

 $|\overrightarrow{\mathrm{CP_4}}|:|\overrightarrow{\mathrm{P_4O}}|=(1-n):n$

とすれば、k=l=m=n であることを示せ。ただし、 $\mid \mid$ はベクトルの大きさを表す。

(ii) 平行四辺形 P₁P₂P₃P₄の対角線の交点は、線分 OB, AC のそれぞれの中点を結ぶ線分 (京都大-理系) 上にあることを示せ。

Advice (i) 内分点の位置ベクトルの公式,四辺形 $P_1P_2P_3P_4$ が平行四辺形 \longleftrightarrow $\overline{P_1P_2} = \overrightarrow{P_4P_3}$

などを用いて \overrightarrow{a} , \overrightarrow{b} , \overrightarrow{c} の関係を求めます。ここまでは、基本問題です。

 \overrightarrow{a} , \overrightarrow{b} , \overrightarrow{c} が同一平面上になければ、すなわち一次独立であれば、

 $\overrightarrow{pa} + \overrightarrow{ab} + \overrightarrow{rc} = \overrightarrow{0}$ より $\overrightarrow{p} = \overrightarrow{q} = r = 0$ が導かれます。

(ii) 一般に $\overrightarrow{OP} = (1-k)\overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{OB}$ ($0 \le k \le 1$) が成り立てば点 P は線分 AB 上にあり ます。逆も成り立ちます。これを利用しましょう。

解答(i) $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{a}, \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{b}, \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{c}$ とおくと

 $\overrightarrow{\mathrm{OP_1}} = k \overrightarrow{\mathrm{OA}} = k \overrightarrow{a}$

 $\overrightarrow{OP_2} = l\overrightarrow{OA} + (1-l)\overrightarrow{OB} = l\overrightarrow{a} + (1-l)\overrightarrow{b}$

 $\overrightarrow{OP_3} = (1-m)\overrightarrow{OB} + m\overrightarrow{OC} = (1-m)\overrightarrow{b} + m\overrightarrow{c}$

$$\overrightarrow{OP_4} = n\overrightarrow{OC} = n\overrightarrow{c}$$

四辺形 $P_1P_2P_3P_4$ は平行四辺形であるから,

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{P_4P_3}$$
 ……① \Leftrightarrow この条件はよく使う。

$$\therefore \overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1} = \overrightarrow{la} + (1-\overrightarrow{l})\overrightarrow{b} - \overrightarrow{ka}$$

$$= (1-\overrightarrow{k})\overrightarrow{a} + (1-\overrightarrow{l})\overrightarrow{b} \qquad \cdots \cdots \cdots (2)$$

$$\therefore \overrightarrow{P_4P_3} = \overrightarrow{OP_3} - \overrightarrow{OP_4} = (1-m)\overrightarrow{b} + m\overrightarrow{c} - n\overrightarrow{c}$$

$$= (1-m)\overrightarrow{b} + (m-n)\overrightarrow{c} \qquad \cdots$$

①, ②, ③により

$$(l-k)\overrightarrow{a} + (1-l)\overrightarrow{b} = (1-m)\overrightarrow{b} + (m-n)\overrightarrow{c}$$

$$(l-k)\overrightarrow{a} + (m-l)\overrightarrow{b} + (n-m)\overrightarrow{c} = \overrightarrow{0}$$

$$\vec{a}$$
, \vec{b} , \vec{c} は同一平面上にないから

⇔O, A, B, Cが同一平面上に

$$l-k=0 \qquad m-l=0 \qquad n-m=0$$

ないので。

$$\therefore k=l=m=n$$

(ii) 線分 OB, AC の中点を、それぞれ E, F とすれば

$$\overrightarrow{OE} = \frac{1}{2} \overrightarrow{OB} = \frac{1}{2} \overrightarrow{b}$$

$$\overrightarrow{OF} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}}{2} = \frac{\overrightarrow{a} + \overrightarrow{c}}{2}$$
(6)

(i)の結果より $\overrightarrow{OP_1} = k\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{OP_3} = (1-k)\overrightarrow{b} + k\overrightarrow{c}$

平行四辺形 $P_1P_2P_3P_4$ の対角線の交点を D とすると, (i)から

$$\overrightarrow{OD} = \frac{\overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_3}}{2}$$

$$= \frac{\overrightarrow{ka} + (1-\overrightarrow{k})\overrightarrow{b} + \overrightarrow{kc}}{2} = \frac{(1-\overrightarrow{k})\overrightarrow{b}}{2} + \frac{\overrightarrow{k(a} + \overrightarrow{c})}{2} \qquad \dots \dots \dots \textcircled{7}$$

⑤、⑥、⑦より

 $\overrightarrow{OD} = (1-k)\overrightarrow{OE} + k\overrightarrow{OF}$ (tzt) $0 \le k \le 1$)

よって D は EF を k: (1-k) に内分する点となるから,D は E と F を結ぶ線分上にある。 \Leftrightarrow 結論を,式だけでなく文章でも示す。

注意 ベクトルの平行条件,内分点の位置ベクトル,ベクトルの1次独立について理解しておくことが必要です。

特に、1次独立の、平面、空間、それぞれの場合の図形的な意味をしっかり把握しておきましょう。

 $\overrightarrow{0}$ でない 2 つのベクトル \overrightarrow{a} , \overrightarrow{b} に対して $\alpha \overrightarrow{a} + \beta \overrightarrow{b} = \overrightarrow{0}$ ならば $\alpha = \beta = 0$ が成り立つとき,これら 2 つのベクトルは 1 次独立であるといいます。平面上で, $\overrightarrow{0}$ でもなく,平行でもない 2 つのベクトル \overrightarrow{a} , \overrightarrow{b} は 1 次独立です。

同じようにして、 $\overrightarrow{0}$ でない 3 つのベクトル \overrightarrow{a} , \overrightarrow{b} , \overrightarrow{c} に対して $\alpha\overrightarrow{a}+\beta\overrightarrow{b}+\gamma\overrightarrow{c}=\overrightarrow{0}$ ならば $\alpha=\beta=\gamma=0$ が成り立つとき、これらの 3 つのベクトルは 1 次独立であるといい、同一平面上 にない、空間の 3 つのベクトルは 1 次独立です。このことは背理法を用いてきれいに証明されます。本間の場合は次のように証明できます。

$$(l-k)\overrightarrow{a} + (m-l)\overrightarrow{b} + (n-m)\overrightarrow{c} = \overrightarrow{0}$$
4

いま, *m*≠*n*とすると④より

$$\overrightarrow{c} = \frac{l-k}{m-n}\overrightarrow{a} + \frac{m-l}{m-n}\overrightarrow{b}$$

となり、Сは3点О, А, Вが決定する平面上にあることになり仮定に反します。

 $\therefore m=n$

同様にして、 $l \neq k$ または $m \neq l$ の場合も 4 点 O,A,B,C が同一平面上にあることになり,仮定に反します。

したがって

$$l=k$$
, $m=l$, $n=m$

$$\therefore k=l=m=n$$

また四辺形 $P_1P_2P_3P_4$ が平行四辺形であるための条件は

1) $\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{P_4P_3}$

または

2)2本の対角線は互いを2等分する。

の2つです。

空間においてベクトルが一次独立であるということは、どういうことか、とくに重要な概念ですから、しっかりと押さえておいて下さい。

実戦トレーニングに進もう。

■■■■ 実戦トレーニング ■■■■

- **4** (i) 四面体 ABCD において, 辺 AB, CB, AD, CD を 2:1 の比に内分する点を, それぞれ P, Q, R, S とするとき, これらを頂点とする, 四角形は, 平行四辺形であることを示せ。
 - (ii) 四面体 ABCD において、頂点を共有しない 2 辺の各々の中点を結ぶ線分は 1 点で交わることを示せ。

- **⑤** 頂点が O,底面が正方形 ABCD,四つの側面がすべて正三角形の正四角すいがあり,各辺の長さは 1 である。
 - (1) 辺 OA を 1:2 に内分する点を P,OB を 1:k に内分する点を Q,OD を 1:k に内分する点を R とする。三点 P,Q,R を頂点とする平行四辺形を PQSR とするとき,PS # OC となるように,k の値を定めよ。
 - (2) (1)のとき、 $\angle QPR = \theta$ として、 $\cos \theta$ の値を求めよ。

(広島大)

- **⑤** 頂点が O,底面が正方形 ABCD,四つの側面がすべて正三角形の正四角すいがあり各辺の長さは 1 である。
 - (1) 辺 OA を 1:3 に内分する点を P,OB を 1:2 に内分する点を Q,OD を 1:k に内分する点を R とする。三点 P,Q,R を頂点とする平行四辺形を PQSR とするとき,PS # OC となるように,k の値を定めよ。
 - (2) (1)のとき、 $\angle QPR = \theta$ として、 $\cos\theta$ の値を求めよ。

ごくろうさまでした。第20日は、演習問題です。

第 20 日

空間座標・ベクトル5日間⑤

学習日

月 日

演習問題

きょうは、ベクトルの学習の仕上げとして、演習問題をします。ベクトルがでてきたら、つねに その図形的意味を考えるようにして解き進んで下さい。 では、はじめましょう。

11 空間に相異なる 4 点 $O(0,\ 0,\ 0)$, $A(a,\ 0,\ 0)$, $B(0,\ b,\ 0)$, $C(c,\ c,\ c)$ がある。ただし, $a,\ b$ は正の数とする。4 点 $O,\ A,\ B,\ C$ への距離がいずれも相等しい点 $P(x,\ y,\ z)$ が xy 平面に関して C と同じ側 (xy 平面上は除く) にあるのは, $a,\ b,\ c$ にどのような関係があるときか。

② 空間に 3 点 $O(0,\ 0,\ 0)$, $N(0,\ 0,\ 1)$, $S(0,\ 0,\ -1)$ がある。点 $Q(r\cos\theta,\ r\sin\theta,\ 0)$ (r>0) に対し直線 OQ 上に点 $R\Big(\frac{1}{r}\cos\theta,\ \frac{1}{r}\sin\theta,\ 0\Big)$ をとり,直線 NQ と直線 SR の交点を P とする。線分 OP の長さを求めよ。 (北海道大-文系)

- **3** 零ベクトルでない 3 つのベクトル \overrightarrow{a} , \overrightarrow{b} , \overrightarrow{c} が $\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{b}+3\overrightarrow{c}=\overrightarrow{0}$ かつ $(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b})=(\overrightarrow{b},\overrightarrow{c})=(\overrightarrow{c},\overrightarrow{a})=k$ をみたすとき
 - (1) $|\overrightarrow{a}|$, $|\overrightarrow{b}|$, $|\overrightarrow{c}|$ を k で表せ。
 - (2) \overrightarrow{b} , \overrightarrow{c} のなす角を求めよ。

ただし $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})$ はベクトル $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}$ の内積, $|\overrightarrow{x}|$ はベクトル \overrightarrow{x} の長さ(大きさ), $\overrightarrow{0}$ は零ベクトルを表す。

- 四面体 OABC において、ベクトル \overrightarrow{AC} 、 \overrightarrow{OB} はいずれもベクトル \overrightarrow{OA} に直交し、 $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OB}$ で、 \overrightarrow{AC} と \overrightarrow{OB} のなす角は $\theta \left(0 < \theta \le \frac{\pi}{2}\right)$ であるとする。 $\overrightarrow{OA} = a$ 、 $\overrightarrow{OB} = b$ として、次の(1)と (2)を a, b, θ を用いて表せ。
 - (1) ABC の面積
 - (2) 四面体 OABC の体積

(広島大)

- 国 正四面体 OABC の各頂点の座標が O(0, 0, 0), A(2, 0, 0), B(b_1 , b_2 , 0), C(c_1 , c_2 , c_3) であり, b_2 >0, c_3 >0 を満たしているものとする。動点 P は O を出発して辺 OC 上を等速度で動き、2 秒かかって C に到着する。また、動点 Q は、P が動き始めてから最初の 1 秒間は A に静止しており、その後、等速度で辺 AB 上を動き、1 秒かかって、P が C に到着すると同時に、B に到着する。このとき、次の各問いに答えよ。
 - (1) ベクトル \overrightarrow{OB} , \overrightarrow{OC} の成分を数値で表せ。
 - (2) P が出発してから、t 秒後 ($0 \le t \le 2$) におけるベクトル \overrightarrow{PQ} を、t を使って成分で表せ。
 - (3) 2点 P, Qの距離の最小値を求めよ。

(神戸大)

- **⑤** 空間内の 3点 O, A, B に対し, $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{OB}$ として 2 次方程式 $x^2 (|\overrightarrow{a}|^2 + |\overrightarrow{b}|^2)x + (\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b})^2 = 0$ ………① を考える。ここで, $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}$ は \overrightarrow{a} と \overrightarrow{b} の内積を表し, $|\overrightarrow{a}|$ は \overrightarrow{a} の大きさを表す。
 - (1) ①の解はいずれも負でない実数であることを証明せよ。
 - (2) 2点 O, $A(O \Rightarrow A)$ を固定するとき, $x = |\overrightarrow{a}|^2$ が①の解となるような点 B はどんな図形を描くか。 (早稲田大-理工)

- $m{7}$ 次の問い(1), (2)に答えよ。ただし、ベクトル \overrightarrow{a} の大きさを $|\overrightarrow{a}|$ で表す。
 - (1) 等式 $|\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}|^2 + |\overrightarrow{a} \overrightarrow{b}|^2 = 2(|\overrightarrow{a}|^2 + |\overrightarrow{b}|^2)$ が成り立つことを示せ。
 - (2) \overrightarrow{a}_n , \overrightarrow{b}_n (n=1, 2, ……) がベクトルで,

$$|\overrightarrow{a}_n| \le 1$$
, $|\overrightarrow{b}_n| \le 1$, $\lim_{n \to \infty} |\overrightarrow{a}_n + \overrightarrow{b}_n| = 2$

のとき、数列 $\{|\overrightarrow{a}_n - \overrightarrow{b}_n|\}$ は収束することを示し、 $\lim_{n \to \infty} |\overrightarrow{a}_n - \overrightarrow{b}_n|$ の値を求めよ。

(神戸大-理系)

これで,第1巻が終わりです。学習していくリズムがわかってきたと思います。とくに,受験勉強はあせることなくマイペースで進めることがたいせつです。最初は時間がかかってもよいですから,一歩一歩理解を確実にしていきましょう。



大学受験デイリープログラム - 難関特別コース - **数学100日間**

| 8 | 章 | 日数 | タイトル | | |
|----------------|----------|------|-------------------|--|--|
| H | 数方 | 第1日 | 整数問題 | | |
| | . 程 | 第2日 | 整式・方程式 | | |
| | と式 | 第3日 | 2次方程式·高次方程式 | | |
| | 式充 | 第4日 | 不等式 | | |
| | 等式 | 第5日 | 演習問題 | | |
| H | | 第6日 | 2次関数·合成関数 | | |
| | 関 | 第7日 | 関数の最大・最小 | | |
| | <u>م</u> | 第8日 | 対数関数 | | |
| 第 | 数とグラフ | 第9日 | 三角関数 | | |
| | う | 第10日 | 演習問題 | | |
| 1 | | 第11日 | 直線・円の方程式 | | |
| | 解 | 第12日 | 2次曲線 | | |
| 巻 | 析 | 第13日 | 軌跡 | | |
| | 幾何 | 第14日 | 不等式と領域 | | |
| | פיז | 第15日 | 演習問題 | | |
| | au v. | 第16日 | ベクトルの基本性質 | | |
| | 空べ | 第17日 | ベクトルの内積 | | |
| | 間ク | 第18日 | 空間のベクトル | | |
| | 座ト | 第19日 | 空間のベクトルの内積 | | |
| | 標ル | 第20日 | 演習問題 | | |
| 273 | 空 | 第21日 | 直線・平面の方程式 | | |
| | 間 | 第22日 | 平面と垂線 | | |
| | ₩. | 第23日 | 空間における角 | | |
| | 形の | 第24日 | 球と直線 | | |
| | 方 | 第25日 | 球と平面 | | |
| | 程 | 第26日 | 空間図形の面積・体積 | | |
| | 式 | 第27日 | 演習問題 | | |
| 第 | 行 | 第28日 | 行列の演算 | | |
| | 列 | 第29日 | 逆行列 | | |
| 2 | 逆 | 第30日 | 単位行列と零行列の利用 | | |
| - | 行列 | 第31日 | 行列Aのn乗 | | |
| 28 | 29 | 第32日 | 演習問題 | | |
| = | | 第33日 | 1次変換 | | |
| | , a | 第34日 | 1次変換の決定 | | |
| | 1 | 第35日 | 1次変換とベクトル | | |
| | 次 | 第36日 | 不動直線 | | |
| | 変 | 第37日 | 図形の1次変換 | | |
| | 換 | 第38日 | 回転移動 | | |
| | | 第39日 | 回転移動の応用 2歳39888 | | |
| $\vdash\vdash$ | | 第40日 | 演習問題 等差数列·等比数列 | | |
| | 数数 | 第42日 | いろいろな数列 | | |
| | 学 列 的 | 第43日 | 数列の和 | | |
| 第 | 帰 | 第44日 | Σの計算 | | |
| | 納 | 第45日 | 数学的帰納法 | | |
| 3 | 法 | 第46日 | 演習問題 | | |
| * | | 第47日 | 漸化式 | | |
| = | 漸 | 第48日 | 図形と漸化式 | | |
| | 化 | 第49日 | 行列と漸化式 | | |
| | 式 | 第50日 | 確率と漸化式 | | |

| 巻 | 章 | 日 数 | タイトル | | |
|----------|----------|-------|-----------------|--|--|
| | | 第51日 | 演習問題 | | |
| | 数無 | 第52日 | 数列の極限 | | |
| | 列限 | 第53日 | 点 列 | | |
| 第 | の級極数 | 第54日 | 無限級数 | | |
| 3 - | 限数 | 第55日 | 演習問題 | | |
| | 舆 | 第56日 | 関数の極限 | | |
| 巻 | 数 | 第57日 | 導関数 | | |
| | の | 第58日 | 関数の増減 | | |
| | 増 | 第59日 | 極大・極小 | | |
| Ш | 減 | 第60日 | 演習問題 | | |
| | 微 | 第61日 | 方程式への応用 | | |
| | 分 の | 第62日 | 不等式への応用 | | |
| | 応 | 第63日 | 速度・加速度 | | |
| | 用 | 第64日 | 演習問題 | | |
| | 4 | 第65日 | 定積分 | | |
| | 定 | 第66日 | 置換積分 | | |
| 積 | 積 | 第67日 | 部分積分 | | |
| 第 | 分 | 第68日 | 場合分けをする積分 | | |
| l ⊦ | | 第69日 | 演習問題 | | |
| 4 | 定 | 第70日 | 2曲線間の面積 | | |
| | 積 | 第71日 | 接線と面積 | | |
| 巻 | 分 | 第72日 | 面積の公式 | | |
| = | ے | 第73日 | 場合分けをする求積 | | |
| | <u> </u> | 第74日 | 面積比 | | |
| l ⊦ | 積 | 第75日 | 演習問題 | | |
| | 定積 | 第76日 | 断面積の積分 | | |
| | 分 | 第77日 | 回転体の体積(1) | | |
| | ح | 第78日 | 回転体の体積(2) | | |
| | 体積 | 第79日 | 空間図形の体積 演習問題 | | |
| \vdash | | 第80日 | 曲線の長さ | | |
| | 積関 | | 位置と速度 | | |
| | 分 数 | 第82日 | 関数方程式 | | |
| | の方 | | W4 5 4 70 5 | | |
| | 応 程 | 第85日 | 微分万程式 積分方程式 | | |
| | 用式 | 第86日 | 便刀/7任A 演習問題 | | |
| l ⊦ | 713 34 | 第87日 | 場合の数と確率 | | |
| | | 第88日 | 確率の基本性質 | | |
| 第 | | 第89日 | 独立試行 | | |
| | 7300 | 第90日 | 確率と数列 | | |
| 5 | 確 | 第91日 | 確率と極限値 | | |
| | _ | 第92日 | 確率と極化式 | | |
| 25 | 率 | 第93日 | 確率と新しれ | | |
| | | 第94日 | 平均と分散 | | |
| | | 第95日 | 演習問題 | | |
| | 60- | 第96日 | 総合演習 (1) | | |
| | 総 | 第97日 | 総合演習 (2) | | |
| | 合 | 第98日 | 総合演習 (3) | | |
| | 演 | 第99日 | 総合演習 (4) | | |
| | 뀥 | 第100日 | 総合演習 (5) | | |

TRAINING PAPER
DAILY PROGRAM

大学受験難関特別コース100日

数学 第 1 卷 解答編

発行人 加藤 譲 発行所 株式会社 教育社