復刻版

TRAINING PAPER

DAILY PROGRAM®

高校数学　代数・幾何　《見本》

1

この巻では，放物線，だ円，双曲線について学習します。これらの曲線の方程式，グラフの特徴，直線との位置関係，軌跡に関する問題などを順を追って，ていねいにトレーニングしてきます。

2次曲線

KYOIKUSOFT

TRAINING PAPER®

高校数学　代数・幾何

効果的な使い方

●教科書の各単元ごとに１冊のトレーニングペーパーがつくられています。学校で学習している単元にあたるトレーニングペーパーを使いましょう。
●６冊で１セットです。そのうち１冊は復習号になっています。

〈１日の構成〉

●１号分は平均15日です。１号の中には通常の学習日のほかに確認テスト，問題研究の日があります。
●１日分はほぼ次のような構成になっています。

復習マークシート

その日の基本となることをマークシート形式で確認します。

➡ 答え合わせをすぐしよう　（答えは次のページのはじめ）

⇩

学習内容の説明

学習内容をわかりやすく説明してあります。

➡ よく読んでしっかり理解しよう

説明の前後にあるトレーニングをしながら進めましょう。

⇩

基本例題・例題

定理や公式が実際にどのように使われるかを示しています。
基本例題は基本的な問題，例題はやや発展的な問題です。

➡ 考え方や解答のポイントをおさえよう

⇩

トレーニング

実際に問題を解く練習です。

➡ きちんと書きこみながら進めよう

「チャレンジコーナー」では，程度のたかい問題をあつかいます。

⇩

解　答

解答は別冊にして使うことができます。

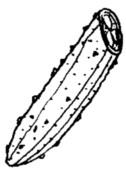
➡ 答え合わせは大切　１問１問しっかりと

〈効果的な使い方〉

●学習内容は標準的な授業の進め方に合わせて配列されています。わかりやすい説明とトレーニングがついていますから予習用，復習用としておおいに活用してください。
●順を追って指示どおりにトレーニングしていくことが基本です。ただし，慣れてきたら自分なりに使い方をくふうしてかまいません。

2 次曲線

□ 切る！ 斬る！ 截る！



きゅうりを切ります。包丁で斜めにスパッ！と。

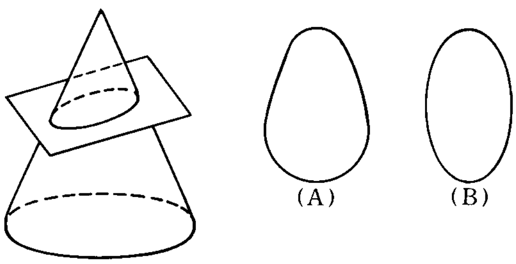
切り口は？ ……円を押しつぶしたような形になりますね。

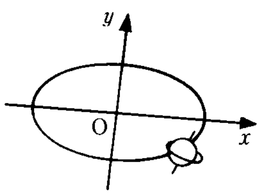
立体を平面で切ったときの切り口の形はいろいろです。

ギリシアの人達は，円すい面を平面で切ると，その切り口としていろいろな曲線が現れることを知っていました。

ところで，円すい面を下の図のような平面で切ったとき，切り口の形はどうなるでしょう。

(A)のような形ですか，それとも(B)のような形ですか。

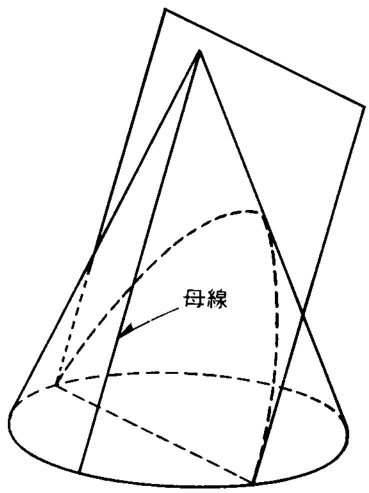




「円すい面は下に広がっているのだから，当然(A)。」と答える人が多いようです。あなたはどうですか。正解は(B)です。

(B)のような曲線を，**だ円**とよびます。惑星が太陽のまわりを，だ円軌道をえがいてまわっていることは知っていますね。

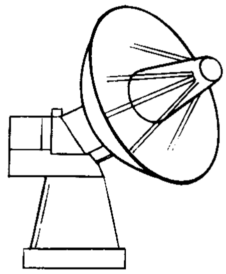
□ 届け，電磁波



それでは，中学校や高校の数学Ⅰで学習した**放物線**を，円すい面の切り口として表すことができるでしょうか。

頂点を通り円すい面にふくまれる直線を母線といいますが，この母線に平行な平面（母線と共有点をもたない平面）で切ると，その切り口が**放物線**になるのです。

ところで，パラボラアンテナという名をよく聞きますね。

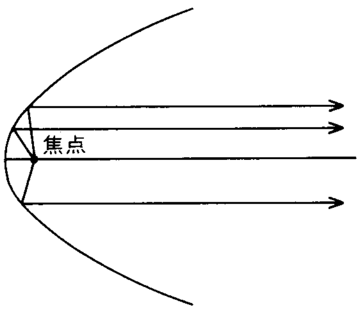


パラボラ (parabola) とは，**放物線**のことです。

放物線を軸のまわりに回転させてできる曲面……放物面……に，軸に平行な光線を当てると，光線はすべて1点に集まります。

この点を**焦点**といいます。

逆に，焦点に光源を置くと，光は放物面で反射して，軸に平行な光線になります。



平行光線は広がらないので，遠くまで届きます。この原理を使って，放物面は，自動車のヘッドライト，懐中電燈の反射板などとして使われています。

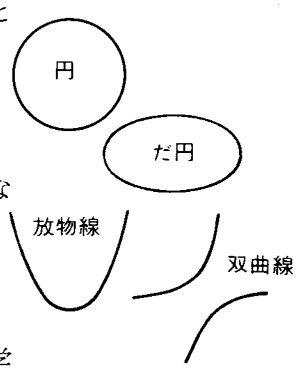
このことを，電磁波に応用したのがパラボラアンテナなのです。

□ 円，だ円，放物線，双曲線をひとまとめにして

ほかに，双曲線とよばれる曲線も，円すい面の切り口として現れてきます。

円が切り口の形として出てくることは明らかですね。

円，だ円，放物線，双曲線は，円すい面を平面で切ったときの切り口の形として得られるので，**円すい曲線**とよばれます。



□ 方程式で表すと……

ところで，これら円，だ円，放物線，双曲線は**2次曲線**ともいわれます。なぜ2次曲線というのでしょう。

それは，平面上に座標軸をとり，円，だ円，放物線，双曲線の方程式を x，y で表すと，どれも x，y の2次方程式で表すことができるからなのです。

2次方程式 $y=x^2$ で表される曲線は，放物線であることをすでに数学Ⅰで学習しました。

各曲線がどんな2次方程式で表されるのか，これから学習していきましょう。

第 1 日

放　物　線

学習日　　月　　日

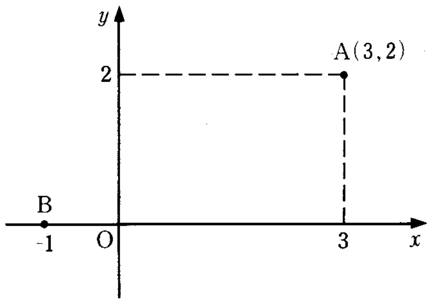
方程式 $y=x^2$ のグラフは放物線

きょうは，平面上の曲線を見て，それが放物線かどうかきちんと判断できるようになることが目標です。

どのような曲線を放物線というのか，しっかり理解していきましょう。

まず，距離と軌跡について復習しましょう。図を参考にすると，わかりやすいですね。

復習マークシート　　解答欄のあてはまる記号を黒くぬりつぶそう。



1　点 A(3, 2) について，次の問いに答えよ。

(1)　点 A から x 軸に下ろした垂線の長さはどれか。

㋐ 2　㋑ 3　㋒ 4　㋓ 5

(2)　点 A から y 軸に下ろした垂線の長さはどれか。

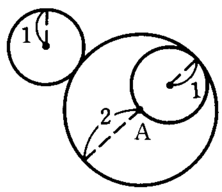
㋐ 2　㋑ 3　㋒ 4　㋓ 5

(3)　原点 O から点 A までの距離はどれか。

㋐ $\sqrt{2}$　㋑ $\sqrt{3}$　㋒ $\sqrt{5}$　㋓ $\sqrt{13}$

(4)　点 B$(-1, 0)$ から点 A までの距離はどれか。

㋐ $\sqrt{5}$　㋑ $2\sqrt{5}$　㋒ $3\sqrt{5}$　㋓ $4\sqrt{5}$



2　平面上に半径 2 の円 A がある。これについて，次の問いに答えよ。

(1)　円 A に外接する半径 1 の円の中心の軌跡はどれか。

㋐ 点 A を通る直線
㋑ 点 A を中心とする半径 1 の円
㋒ 点 A を中心とする半径 2 の円
㋓ 点 A を中心とする半径 3 の円

(2)　円 A に内接する半径 1 の円の中心の軌跡はどれか。

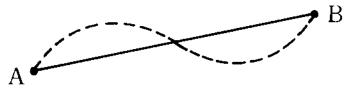
㋐ 点 A を通る直線
㋑ 点 A を中心とする半径 1 の円
㋒ 点 A を中心とする半径 2 の円
㋓ 点 A を中心とする半径 3 の円

解答欄					
1	(1)	㋐	㋑	㋒	㋓
	(2)	㋐	㋑	㋒	㋓
	(3)	㋐	㋑	㋒	㋓
	(4)	㋐	㋑	㋒	㋓
2	(1)	㋐	㋑	㋒	㋓
	(2)	㋐	㋑	㋒	㋓

復習マークシートの解答は，順に，㋐，㋑，㋓，㋑，㋓，㋑です。
では，点と直線との距離とはどのような長さのことか，まずこれについて学習しましょう。

◈最小の長さが距離

2点A，B間の距離とは，2点A，Bを結ぶ線分の長さのことです。A，Bを結ぶ曲がりくねった線の長さのことではありません。

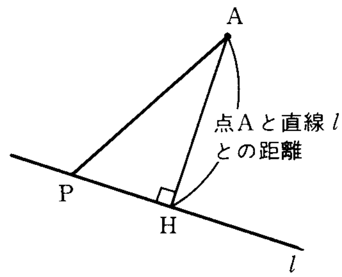


点と直線との距離

それでは，**点Aと直線 l との距離**とはどのような長さのことをいうのでしょう。

点Aと直線 l 上の点Pを結ぶ線分のうちで，長さがもっとも短いものは，点Aから直線 l へ下ろした垂線AHです。

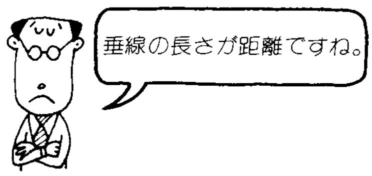
この垂線AHの長さを，点Aと直線 l との距離といいます。



点と直線との距離とは何か，よくわかりましたね。さっそく，次のトレーニングで確かめてみましょう。

トレーニング

解答は104ページ



1 **点A(3, −2)と次の直線との距離を求めよ。**

(1) x 軸　　　　(2) y 軸

(3) $x=-5$　　　　(4) $y=3$

2次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフが放物線になることは，数学Iで学習しましたが，ここでは，放物線を図形的に定義することを考えてみましょう。

◈放物線とは………？

放物線

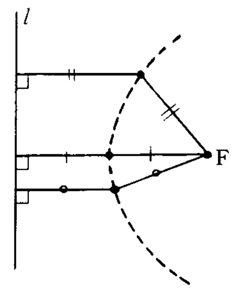
「平面上で，定点Fとそれを通らない定直線 l とから等距離にある点の軌跡(きせき)」を**放物線**といいます。

焦点
準線

この定点Fを放物線の**焦点**(しょうてん)，直線 l を放物線の**準線**(じゅんせん)といいます。

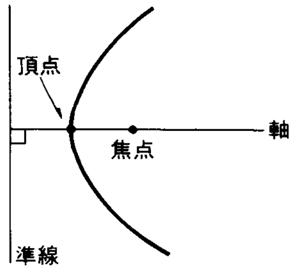
—注—

焦点を表す記号として，ふつうFを使います。それは，焦点focusの頭文字がFだからです。



◈軸とは対称軸のこと

放物線の定義からわかるように，焦点を通り準線に垂直な直線が，放物線の対称軸になっています。



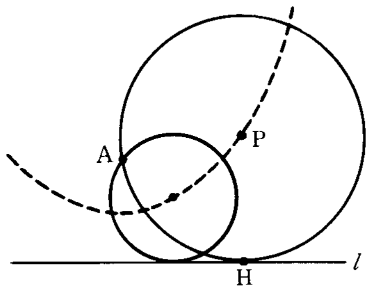
軸 **頂点** この対称軸を放物線の**軸**といい，軸と放物線との交点を放物線の**頂点**といいます。

さあ，どのような条件のものが放物線になるかわかったところで，次のトレーニングをしてみましょう。

トレーニング

解答は 104 ページ

2 **次の $\boxed{\quad}$ をうめながら，定直線 l に接し，l 上にない定点 A を通る円の中心 P の軌跡は放物線になることを示せ。**



円 P と直線 l との接点を H とする。

PH⊥ $\boxed{\quad\quad}$ であるから，PH の長さが点 P と直線 l との $\boxed{\quad\quad\quad}$ である。

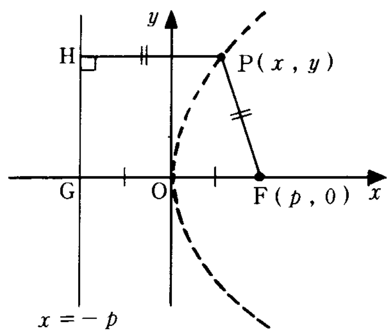
PA も PH も円 P の半径であるから　　PA＝PH

よって，点 P は定点 A と定直線 l とから $\boxed{\quad\quad\quad\quad}$ にある。したがって，点 P の軌跡は点 $\boxed{\quad\quad}$ を焦点，直線 $\boxed{\quad\quad}$ を準線とする放物線になる。

では，図形的に定義された放物線を，方程式で表すことを考えてみましょう。

◈放物線の方程式

右の図のように，放物線の焦点を F，軸と準線との交点を G とすると，定義から，放物線の頂点は FG の中点になります。



そこで，放物線の軸が x 軸，頂点が原点 O にくるように座標をとると，0 でない数 p によって，焦点は F(p, 0)，準線は $x=-p$ と表されます。

この放物線上の点を P(x, y) とすると

$$PF=\sqrt{(x-p)^2+y^2}$$

点 P から準線へ下ろした垂線 PH の長さは

$$PH=|x+p|$$

放物線の定義から，PF＝PH となります。

したがって　　$\sqrt{(x-p)^2+y^2}=|x+p|$　　⇦ 両辺がともに正。

両辺を 2 乗すると　$(x-p)^2+y^2=(x+p)^2$　　⇦ 上の式と同値。

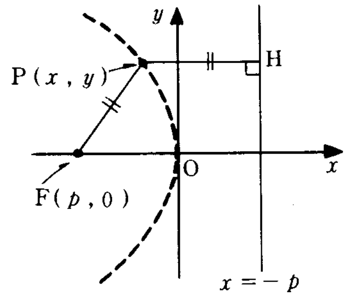
これを整理して　　$y^2=4px$

したがって

焦点 (p, 0)，準線 $x=-p$ の放物線の方程式は　　$\boldsymbol{y^2=4px}$

標準形 となります。この $y^2=4px$ を，放物線の**標準形**といいます。

―注―
$\mathrm{PH}=|x+p|$ と絶対値記号がついているのは，焦点Fが x 軸の負の部分にあることもあるからです。その場合には，放物線は左へ開くような形になり，$x\leqq 0$，$p<0$ となります。



焦点の座標が $(p,\ 0)$，準線の方程式が $x=-p$ とわかれば，その放物線の方程式は $y^2=4px$ ときまりますね。さあ，放物線の方程式を求めてみましょう。

トレーニング

解答は 104 ページ

3 次の放物線の方程式を求めよ。

(1) 焦点 $(2,\ 0)$，準線 $x=-2$　　　(2) 焦点 $(-3,\ 0)$，準線 $x=3$

つぎに，焦点が y 軸上にあって，準線が x 軸に平行な場合の放物線の方程式はどうなるか，調べてみましょう。

◈準線が x 軸に平行な場合は………

焦点が点 $(0,\ p)$，準線が直線 $y=-p$ である放物線上の点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とし，点Pから準線へ下ろした垂線をPHとします。

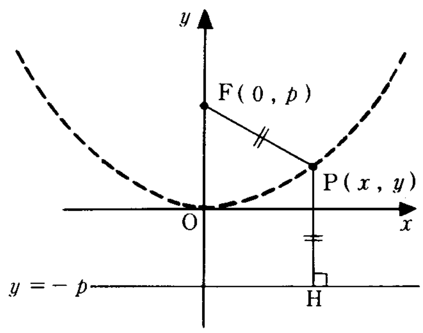
前と同じように，$\mathrm{PF}^2=\mathrm{PH}^2$ を計算すると

$$x^2=4py$$

したがって

焦点 $(0,\ p)$，準線 $y=-p$ の放物線の方程式は　$\boldsymbol{x^2=4py}$

となります。



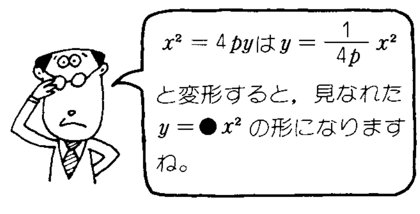
―注―
$x^2=4py$ を導くには，$\mathrm{PF}=\mathrm{PH}$ から

$$\sqrt{x^2+(y-p)^2}=|y+p|$$

両辺を2乗して

$$x^2+(y-p)^2=(y+p)^2$$

これを整理すると得られます。



それでは，焦点が y 軸上にあり，準線が x 軸に平行な放物線の方程式を求めてみましょう。
公式にあてはめればよいのですから，簡単ですね。

トレーニング　解答は104ページ

4 次の放物線の方程式を求めよ。

(1) 焦点 $(0,\ 1)$，準線 $y=-1$　　(2) 焦点 $(0,\ -3)$，準線 $y=3$

ここで，今まで学習したことをまとめておきます。

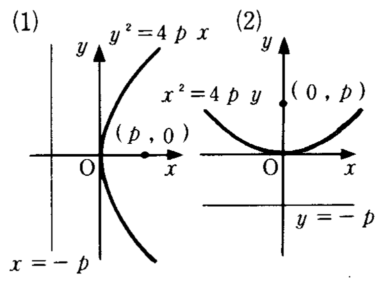
□放物線の方程式□

(1) 焦点が $(p,\ 0)$，準線が $x=-p$ の放物線の方程式は

$$y^2=4px$$

(2) 焦点が $(0,\ p)$，準線が $y=-p$ の放物線の方程式は

$$x^2=4py$$



—注—

$y^2=4px$ と $x^2=4py$ を比較すると，x と y が入れかわっていることがわかります。

$y^2=4px$	焦点 $(p,\ 0)$	準線 $x=-p$
↕　↕	╳	↕
$x^2=4py$	焦点 $(0,\ p)$	準線 $y=-p$

よく理解できましたね。

トレーニング　解答は104ページ

5 次の $\boxed{}$ をうめよ。

(1) 焦点が $\left(\frac{1}{2},\ 0\right)$，準線が $x=-\frac{1}{2}$ の放物線の方程式は $\boxed{}$ であり，

焦点が $\left(0,\ \frac{1}{2}\right)$，準線が $y=-\frac{1}{2}$ の放物線の方程式は $\boxed{}$ である。

(2) 焦点が $(-5,\ 0)$，準線が $x=5$ の放物線の方程式は $\boxed{}$ であり，

焦点が $(0,\ -5)$，準線が $y=5$ の放物線の方程式は $\boxed{}$ である。

今度は逆です。放物線の方程式から焦点と準線を求めてみましょう。

基本例題 1 ─ 放物線 $x^2=4py$ の焦点と準線

放物線 $x^2=6y$ の焦点の座標と準線の方程式を求め，そのグラフをかけ。

考え方 放物線 $x^2=4py$ の焦点は $(0,\ p)$，準線は $y=-p$ であるから，$x^2=6y$ を $x^2=4py$ の形になおし，p に相当する数を見つけることがポイントである。

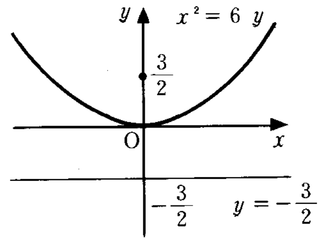
グラフには，焦点，準線，頂点をかき入れること。

解　答 $x^2=6y$ を変形すると　$x^2=4\cdot\dfrac{3}{2}y$

ゆえに，焦点の座標は　$\left(0,\ \dfrac{3}{2}\right)$

準線の方程式は　$y=-\dfrac{3}{2}$

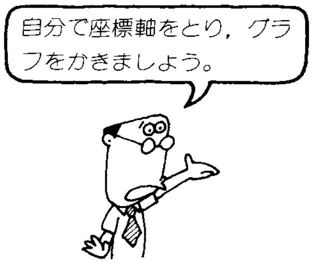
グラフは右の図のようになる。



$x^2=ay$ を，$x^2=4\cdot\dfrac{a}{4}y$ の形に変形すればよいのですね。

計算ミスをしないように注意して，次のトレーニングをしましょう。

トレーニング　解答は 104 ページ



6 次の放物線の焦点の座標と準線の方程式を求め，そのグラフをかけ。

(1) $x^2=7y$

(2) $y^2=-8x$

《ここで一息》

抛物線（ほう）　見慣れない字ですね。「放物線」を昔はこのように書きました。

「抛」は，投げ飛ばすという意味です。

中学校や数学Ⅰで学習した $y=ax^2$ のグラフは，$x^2=\frac{1}{a}y$ と変形すれば，どのような焦点と準線をもつ放物線なのかわかりますね。

こんどは少し考えるかもしれません。グラフを頭にうかべながら解いてください。

トレーニング

解答は 104 ページ

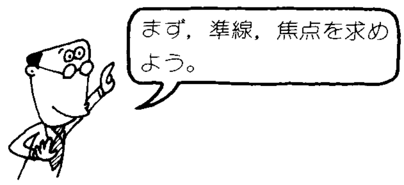
7 次の問いに答えよ。

(1) 焦点 $(-4,\ 0)$，頂点 $(0,\ 0)$ の放物線の準線の方程式を求めよ。

(2) 準線 $y=3$，頂点 $(0,\ 0)$ の放物線の焦点の座標を求めよ。

8 次の放物線の方程式を求めよ。

(1) 焦点 $(5,\ 0)$，頂点 $(0,\ 0)$



(2) 準線 $y=-\frac{3}{4}$，頂点 $(0,\ 0)$

きょうはこれでおしまい。放物線の標準形については，しっかり理解できましたね。

次の日もがんばりましょう。

第 2 日

放物線の平行移動

学習日　　月　　日

放物線の平行移動………焦点と準線はどこに？

きょうは，平行移動によって放物線の焦点や準線がどこに移るのか，また，一般の放物線が与えられたとき，それは頂点が原点にある放物線をどのように平行移動したものになっているか調べることにします。

放物線の焦点と準線のことはもうしっかり理解していますね。数学Ⅰで学習した２次関数のグラフの平行移動のことといっしょに復習しておきましょう。

復習マークシート　　解答欄のあてはまる記号を黒くぬりつぶそう。

1　焦点 (0, 1)，準線 $y=-1$ の放物線の方程式はどれか。

㋐ $x^2=4y$　　㋑ $x^2=-4y$　　㋒ $y^2=4x$　　㋓ $y^2=-4x$

2　放物線 $y^2=8x$ について，次の問いに答えよ。

(1)　焦点の座標はどれか。

㋐ $(-2,\ 0)$　　㋑ $(2,\ 0)$　　㋒ $(0,\ -2)$　　㋓ $(0,\ 2)$

(2)　準線の方程式はどれか。

㋐ $x=-2$　　㋑ $x=2$　　㋒ $y=-2$　　㋓ $y=2$

3　2次関数 $y=x^2$ のグラフを次のように平行移動したグラフの方程式はどれか。

(1)　x 軸の方向に 1 だけ平行移動

㋐ $y=x^2+1$　　㋑ $y=x^2-1$

㋒ $y=(x+1)^2$　　㋓ $y=(x-1)^2$

(2)　y 軸の方向に 1 だけ平行移動

㋐ $y=x^2+1$　　㋑ $y=x^2-1$

㋒ $y=(x+1)^2$　　㋓ $y=(x-1)^2$

(3)　x 軸の方向に -2，y 軸の方向に 3 だけ平行移動

㋐ $y=(x-2)^2+3$　　㋑ $y=(x-2)^2-3$

㋒ $y=(x+2)^2+3$　　㋓ $y=(x+2)^2-3$

解答欄					
1		㋐	㋑	㋒	㋓
2	(1)	㋐	㋑	㋒	㋓
	(2)	㋐	㋑	㋒	㋓
3	(1)	㋐	㋑	㋒	㋓
	(2)	㋐	㋑	㋒	㋓
	(3)	㋐	㋑	㋒	㋓

復習マークシートの解答は，順に，㋐，㋑，㋐，㋓，㋐，㋒です。
きょうは，トレーニングから始めます。座標平面上で点を動かしながら考えてください。

トレーニング

解答は 105 ページ

1 次の点を x 軸の方向に 3，y 軸の方向に 2 だけ平行移動したときに移る点の座標を求めよ。

(1) A$(-3,\ -2)$　　(2) B$(-1,\ 1)$

平行移動によって，点がどこに移るかわかりましたね。これをもう少し一般的に考えてみましょう。

◈点はどこに移るか

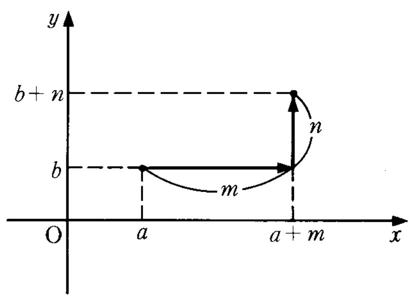
トレーニング1で，点 A$(-3,\ -2)$ を x 軸の方向に 3，y 軸の方向に 2 だけ平行移動すると，点 $(-3+3,\ -2+2)$ へ移ることが確かめられましたね。

一般に，次のことがいえます。

平面上で，点 $(a,\ b)$ を x 軸の方向に m，y 軸の方向に n だけ平行移動したときに移る点の座標は

$$(a+m,\ b+n)$$

です。



◈$f(x,\ y)$ の意味

x についての整式である $2x+3$ や x^2-x+1 を $f(x)$ と表すことがありますね。同じように，x，y についての整式である $x+y+3$ や $x^2-y^2+2x-9y+5$ などを $f(x,\ y)$ と表すことがあります。

その場合，たとえば $f(-1,\ 1)$ は，整式 $f(x,\ y)$ に $x=-1$，$y=1$ を代入したときの値を表します。

一注一

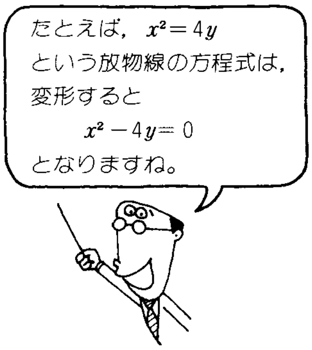
平面上の直線や円，放物線などの図形は，一般に

$(x,\ y$ についての整式$)=0$

という方程式で表されますから，記号 $f(x,\ y)$ を使って

$$\boldsymbol{f(x,\ y)=0}$$

と書くことができます。



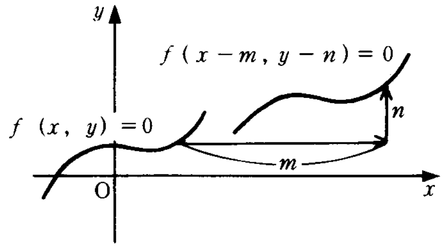
つぎに，方程式 $f(x,\ y)=0$ で表される図形を平行移動した図形の方程式は，どのようになるかをみてみましょう。

◈平行移動した図形の方程式は？

方程式 $f(x,\ y)=0$ で表される図形を，x 軸の方向に m，y 軸の方向に n だけ平行移動した図形の方程式は

$$\boldsymbol{f(x-m,\ y-n)=0}$$

となります。



—注—

方程式 $f(x,\ y)=0$ で表される図形をF，これを上のように平行移動した図形をF′とします。F上の点 $P(x,\ y)$ が，この平行移動で点 $P'(x',\ y')$ へ移るとすると

$$x'=x+m, \quad y'=y+n$$

すなわち

$$x=x'-m, \quad y=y'-n$$

点Pは図形F上にあるのですから

$$f(x,\ y)=0$$

をみたします。

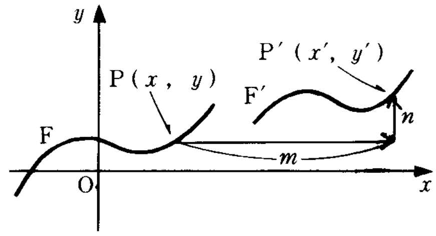
したがって

$$f(x'-m,\ y'-n)=0$$

x'，y' を x，y におきかえて，求める方程式は

$$f(x-m,\ y-n)=0$$

となることがわかります。



次のトレーニングで実際に，平行移動された図形の方程式を求めてみましょう。

トレーニング　　解答は105ページ

2 次の直線を x 軸の方向に2，y 軸の方向に3だけ平行移動した直線の方程式を求めよ。

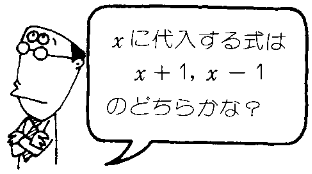
(1) $x-3=0$　　　(2) $x=-2$

(3) $y-4=0$　　　(4) $y=-5$

できましたね。同じように，曲線についてもトレーニングしましょう。

3 次の方程式で表される曲線を，x 軸の方向に 1，y 軸の方向に -2 だけ平行移動した曲線の方程式を求めよ。

(1)　$y^2=4x$　　　　　(2)　$x^2=3y$



どうでしたか。計算ミスはありませんでしたか。
ここまでの学習を，放物線についてまとめてみましょう。

◆放物線 $y^2=4px$ を平行移動した放物線は

焦点 $(p,\ 0)$，準線 $x=-p$ の放物線 $y^2=4px$ を，x 軸の方向に m，y 軸の方向に n だけ平行移動した放物線の方程式は

$$(y-n)^2=4p(x-m)$$

となります。

焦点は点 $(p,\ 0)$ が移った点ですから，その座標は　　$(p+m,\ 0+n)$

すなわち　　$(p+m,\ n)$

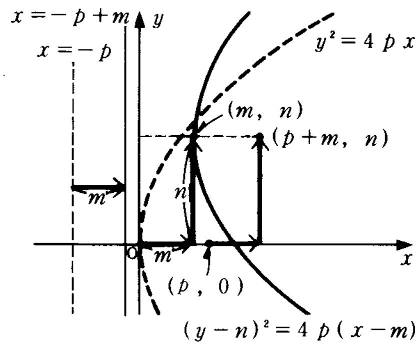
準線は直線 $x=-p$ が移った直線ですから，その方程式は　　$x-m=-p$　すなわち　　$x=-p+m$

となります。

また，頂点の座標は　　$(m,\ n)$　　⇦　$(0+m,\ 0+n)$

軸の方程式は　　$y=n$　　⇦　$y-n=0$

ですね。



では，放物線 $x^2=4py$ を平行移動したらどうなるか，次のトレーニングで考えてください。

トレーニング　　解答は 105 ページ

4 次の $\boxed{\quad}$ をうめよ。

放物線 $x^2=4py$ の焦点の座標は $(0,\ p)$，準線の方程式は $\boxed{\qquad}$，頂点の座標は $(0,\ 0)$，軸の方程式は $x=0$ であるから，この放物線を x 軸の方向に m，y 軸の方向に n だけ平行移動した放物線の方程式は

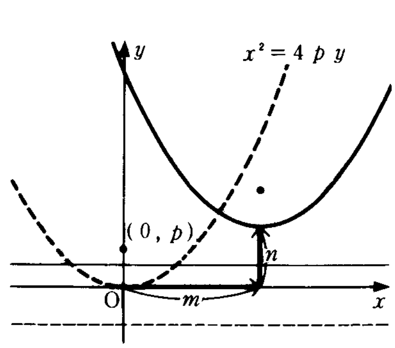
$(x-m)^2=4p(\boxed{\qquad})$

焦点の座標は　　$(m,\ \boxed{\qquad})$

$\boxed{\qquad}$ の方程式は　　$y=-p+n$

頂点の座標は　　$(m,\ n)$

軸の方程式は　　$\boxed{\qquad}$　である。



5 次の放物線を x 軸の方向に 1, y 軸の方向に -3 だけ平行移動した放物線の焦点の座標，準線の方程式を求めよ。また，頂点の座標，軸の方程式はどうなるか答えよ。

(1) $y=3x^2$　　　(2) $y^2=-5x$

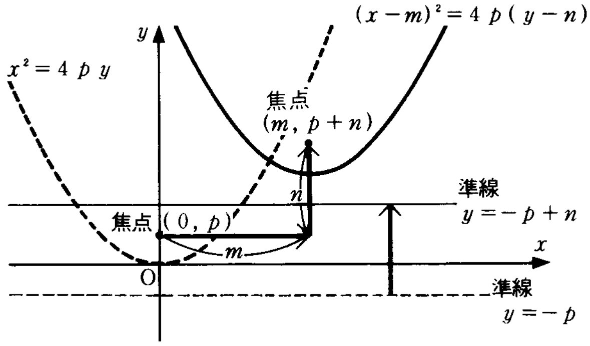
今まで学習したことをまとめておきましょう。

□放物線の焦点，準線，頂点，軸□

放物線 $(y-n)^2=4p(x-m)$ の
- 焦点の座標は $(p+m,\ n)$,　準線の方程式は $x=-p+m$
- 頂点の座標は $(m,\ n)$,　軸の方程式は $y=n$

放物線 $(x-m)^2=4p(y-n)$ の
- 焦点の座標は $(m,\ p+n)$,　準線の方程式は $y=-p+n$
- 頂点の座標は $(m,\ n)$,　軸の方程式は $x=m$

一注一
丸暗記してはいけません。x 軸の方向に m, y 軸の方向に n だけ平行移動するとどうなるか，図をかいて結果を導く練習をすることがたいせつです。



基本的なことがらの理解は十分ですか。次のトレーニングで確かめてみましょう。

トレーニング

解答は 105 ページ

6 次の放物線の焦点の座標と準線の方程式を求めよ。

(1) $(y-1)^2=2(x-3)$　　　(2) $(x+2)^2=-5(y-2)$

(3) $(y+1)^2=-x$

次は，式を変形してどのように平行移動したのかを考える問題です。式の変形をきちんとすることがたいせつです。

基本例題 1 式の変形と焦点，準線

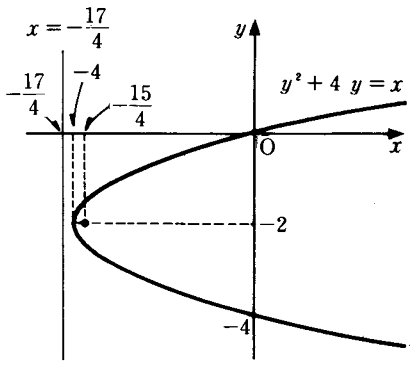
放物線 $y^2+4y=x$ の焦点の座標と準線の方程式を求め，そのグラフをかけ。

考え方 与えられた方程式を $(y-n)^2=x-m$ の形に変形し，放物線 $y^2=x$ をどのように平行移動したのかを考える。

解 答 $y^2+4y=x$ の両辺に 4 を加えて

$$y^2+4y+4=x+4$$
$$(y+2)^2=x+4$$

これは，放物線 $y^2=x$ を，x 軸の方向に -4，y 軸の方向に -2 だけ平行移動した放物線を表す。



放物線 $y^2=x$ の焦点の座標は $\left(\frac{1}{4},\ 0\right)$

準線の方程式は $x=-\frac{1}{4}$

であるから，求める**焦点の座標は**

$$\boldsymbol{\left(-\frac{15}{4},\ -2\right)}$$ ⇦ $\left(\frac{1}{4}-4,\ 0-2\right)$

求める**準線の方程式は**

$$\boldsymbol{x=-\frac{17}{4}}$$ ⇦ $x-(-4)=-\frac{1}{4}$ を解く。

グラフは，右上の図のようになる。 ⇦ 頂点 $(-4,\ -2)$，軸 $y=-2$

—注—

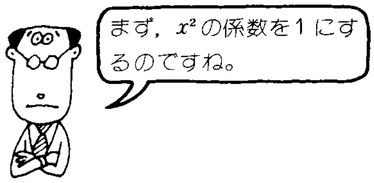
y^2+ay を $(y+n)^2$ の形にするには，y の係数 a の $\frac{1}{2}$ の 2 乗$\left(\frac{a}{2}\right)^2$ を加えて，その分ひけばよい。

グラフには，焦点，頂点の座標，準線をかき入れることを忘れずに。また，放物線の方程式 $y^2+4y=x$ において，$x=0$ を代入すると，$y^2+4y=0$ となり，これを解くと，$y=0,\ -4$ が得られる。これは，放物線が y 軸と $(0,\ 0)$，$(0,\ -4)$ で交わることを示しているから，このことを利用して，グラフを正確にかくことができる。

数学 I で学習した 2 次関数の式 $y=ax^2+bx+c$ は，$y=a(x-m)^2+n$，すなわち，$(y-n)=a(x-m)^2$ の形に変形できますから，2 次関数のグラフは，図形的に定義された放物線になることがわかりますね。次のトレーニングで，そのことを確かめてみましょう。

トレーニング　　解答は 105 ページ

7 次の $\boxed{\quad}$ をうめながら，2 次関数 $y=3x^2-6x-1$ のグラフは放物線になることを示し，その焦点の座標と準線の方程式を求めよ。



$y=3x^2-6x-1$ の両辺を $\boxed{\quad}$ で割って

$$\frac{1}{3}y=x^2-2x-\frac{1}{3}$$

両辺に $\frac{4}{3}$ を加えて　$\frac{1}{3}y+\frac{4}{3}=x^2-2x+1$

$$\frac{1}{3}(y+4)=(x-1)^2$$

これは，放物線 $\frac{1}{3}y=\boxed{\quad}$ を，x 軸の方向に 1，y 軸の方向に $\boxed{\quad}$ だけ平行移動した放物線を表す。

放物線 $\frac{1}{3}y=x^2$ の焦点の座標は $\left(0,\ \frac{1}{12}\right)$，準線の方程式は $\boxed{\quad}=-\frac{1}{12}$ であるから

求める焦点の座標は　$\left(\boxed{\quad},\ -\frac{47}{12}\right)$，　準線の方程式は　$y=-\frac{\boxed{\quad}}{12}$

8 次の放物線の焦点の座標と準線の方程式を求め，そのグラフをかけ。

(1)　$y^2=4x-8$

(2)　$y^2-2y=4x$

(3)　$y=\frac{1}{2}x^2-2x$

計算がめんどうなものもありましたが，よくがんばりましたね。きょうの学習はここまでにしますが，次のページに**チャレンジコーナー**も用意しました。余裕があれば挑戦してください。

チャレンジコーナー　このページは，時間に余裕のある人だけしてください。

グラフをかいて考えましょう。図を見るとよりよく理解できる場合が多いのです。

トレーニング

解答は 106 ページ

9 焦点 (2，0)，準線 $x=-4$ の放物線の方程式を求めよ。

10 焦点 (1，3)，頂点 (1，-1) の放物線の方程式を求めよ。

第 **3** 日

放物線と直線

学習日　　月　　日

放物線と直線の共有点は………

きょうは，放物線と直線の共有点はいくつあるか，軌跡が放物線になるのはどんな場合かなど，いろいろな問題を取り上げてみます。

判別式，解と係数の関係を中心に復習しましょう。きょうの学習に必要なことがらですから，もう一度しっかりと確認しておきましょう。

復習マークシート　　**解答欄のあてはまる記号を黒くぬりつぶそう。**

1　x の 2 次方程式 $x^2+2x+k=0$ について，次の問いに答えよ。

(1)　判別式はどれか。

㋐　$4-k$　　㋑　$4-4k$　　㋒　$4+k$　　㋓　$4+4k$

(2)　異なる 2 つの実数解をもつのは，どの場合か。

㋐　$k>4$　　㋑　$k<4$　　㋒　$k>1$　　㋓　$k<1$

(3)　重解をもつのは，どの場合か。

㋐　$k=4$　　㋑　$k=-4$　　㋒　$k=1$　　㋓　$k=-1$

(4)　虚数解をもつのは，どの場合か。

㋐　$k<4$　　㋑　$k>-4$　　㋒　$k>1$　　㋓　$k<-1$

2　2 次方程式 $x^2+2x+3=0$ の 2 つの解を α，β とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　$\alpha+\beta$ の値はどれか。

㋐　-2　　㋑　2　　㋒　-3　　㋓　3

(2)　$\alpha\beta$ の値はどれか。

㋐　-2　　㋑　2　　㋒　-3　　㋓　3

3　2 点 A$(-2,\ 3)$，B$(4,\ 5)$ を結ぶ線分 AB の中点の座標はどれか。

㋐　$(-1,\ -4)$　　㋑　$(-1,\ 4)$

㋒　$(1,\ -4)$　　㋓　$(1,\ 4)$

解答欄					
1	(1)	㋐	㋑	㋒	㋓
	(2)	㋐	㋑	㋒	㋓
	(3)	㋐	㋑	㋒	㋓
	(4)	㋐	㋑	㋒	㋓
2	(1)	㋐	㋑	㋒	㋓
	(2)	㋐	㋑	㋒	㋓
3		㋐	㋑	㋒	㋓

復習マークシートの解答は，順に，㋑，㋓，㋒，㋒，㋐，㋓，㋓です。
それでは放物線と直線を近づけると，共有点の個数はどうなるか考えてみましょう。

◈直線を平行移動すると………

直線を平行移動したとき，放物線との共有点の個数はどうなるでしょう。

右の図１の場合，直線が矢印の方向に移動していくと，共有点の個数は

$$0 \longrightarrow 1 \longrightarrow 2$$

と変化しますが，図２の場合，共有点はつねに１個です。

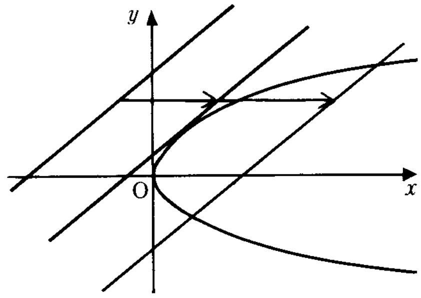


図１

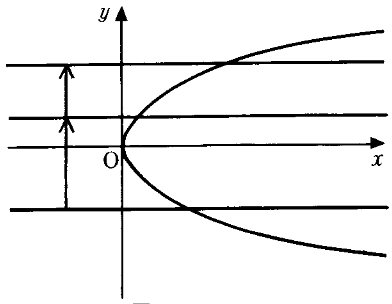


図２

ところで，数学Ｉで学習したように，２次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフと x 軸との共有点の個数は，２次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の判別式 $D=b^2-4ac$ の符号によって調べることができましたね。

また，２次関数

$$y=ax^2+bx+c \qquad \cdots\cdots\cdots ①$$

のグラフと，直線

$$y=mx+n \qquad \cdots\cdots\cdots ②$$

との共有点の個数は，①と②を連立方程式として考え，y を消去した式

$$ax^2+(b-m)x+(c-n)=0$$

の判別式の符号から調べることができましたね。

このように，共有点の個数を調べるときは，２次方程式の判別式の符号が大きな役割りを果たします。

さあ，それではトレーニングです。はじめはグラフをかいて調べたほうが簡単な問題です。

トレーニング

解答は 107 ページ

1 次の放物線と直線の共有点の個数は，k の値によってどのように変わるか調べよ。

(1) 放物線 $y=x^2$ と直線 $y=k$

(2) 放物線 $y^2=6x$ と直線 $y=k$

(3) 放物線 $y^2=-3x$ と直線 $x=k$

直線が座標軸に平行な場合は，図をかいて考えると簡単ですね。

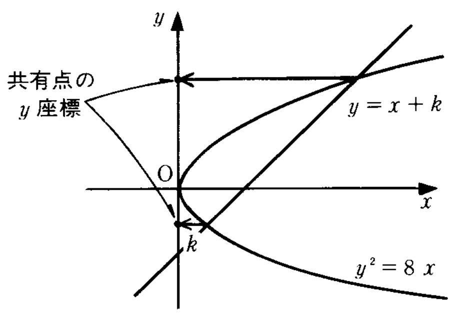
つぎに，直線が座標軸に平行でない場合について考えます。この場合は，前ページで説明したように，判別式を使うのが簡単です。

基本例題 1 　　**放物線と直線の共有点の個数**

放物線 $y^2=8x$ と直線 $y=x+k$ との共有点の個数は，k の値によってどのように変わるか調べよ。

考え方 　放物線 $y^2=8x$ と直線 $y=x+k$ との共有点の座標は，この 2 つの方程式を連立方程式として解いたときの実数解の組として得られる。

したがって，この場合，2 つの方程式から y の 2 次方程式を導き，その異なる実数解がいくつあるかを調べればよい。



解　答

$$\begin{cases} y^2=8x & \cdots\cdots\text{①} \\ y=x+k & \cdots\cdots\text{②} \end{cases}$$

②を変形すると　　$x=y-k$

これを①に代入すると　　$y^2=8(y-k)$

整理すると　　$y^2-8y+8k=0$ 　　$\cdots\cdots$③

2 次方程式③の実数解が，①と②の共有点の y 座標になる。

したがって，2 次方程式③の異なる実数解の個数が，①と②の共有点の個数と等しい。

2 次方程式③の判別式を D とすると

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &= (-4)^2-1\cdot 8k \\ &= 16-8k \\ &= 8(2-k) \end{aligned}$$

$D>0$，すなわち **$k<2$ のとき**，共有点の個数は **2**

$D=0$，すなわち **$k=2$ のとき**，共有点の個数は **1**

$D<0$，すなわち **$k>2$ のとき**，共有点の個数は **0**

基本例題 1 での学習を，次のトレーニングで身につけましょう。

判別式をじょうずに使ってください。

トレーニング

解答は 107 ページ

2 **次の放物線と直線の共有点の個数を求めよ。**

(1) 放物線 $x^2=2y$ と直線 $y=x$

(2) 放物線 $y^2=-\frac{1}{3}x$ と直線 $y=-x+1$

(3) 放物線 $x^2=\frac{1}{2}y$ と直線 $y=x-\frac{1}{8}$

3 **放物線 $y^2=4x$ と直線 $y=-x+k$ との共有点の個数は，k の値によってどのように変わるか調べよ。**

ヒント　まず，連立方程式 $\begin{cases} y^2=4x \\ y=-x+k \end{cases}$ から x を消去してみる。

◈放物線の接線とは

接する **接線，接点**

基本例題1で，共有点が1個のとき，放物線 $y^2=8x$ と直線 $y=x+2$ とは**接する**といい，その直線を**接線**，共有点のことを**接点**といいます。 ⇦ $k=2$

また，この場合の接点の座標は

$$y^2-8y+8\cdot2=0$$
$$(y-4)^2=0$$

を解いて，$y=4$ ですから，(2, 4) ⇦ $y=4$ を $y=x+2$ に代入して $x=2$

と求められます。

では，次のトレーニングで，手順に従って接点の座標を求めてみましょう。

トレーニング

解答は 107 ページ

4 **放物線 $y^2=-4x$ と直線 $y=kx+1$ について，次の問いに答えよ。**

(1) 連立方程式 $\begin{cases} y^2=-4x \\ y=kx+1 \end{cases}$ から y を消去し，x についての2次方程式を導け。

(2) (1)で求めた2次方程式の判別式を利用して，与えられた放物線と直線が接するように k の値を定めよ。

(3) 接点の座標を求めよ。

接線について，もう少し深く学習することにしましょう。

数学Ⅰで学習した，〝点 $(x_1,\ y_1)$ を通り傾き m の直線は $\boldsymbol{y-y_1=m(x-x_1)}$ で表される〞ということを使います。

例 題 1 ―― **放物線上の点における接線**

放物線 $y^2=2x$ 上の点 (2, 2) における接線の方程式を求めよ。

考え方 接線の傾きを m として，接線の方程式を表す。そして，放物線と直線の方程式を連立方程式として解いたときの実数解の組がただ1組になるように，m の値を定めればよい。

解　答　この接線の傾きを m とすると，接線の方程式は

$$y-2=m(x-2)$$

$$y=mx-2m+2 \qquad \cdots\cdots\cdots ①$$

$y^2=2x$ と①を連立方程式として，x を消去すると

$$y=m\cdot\frac{y^2}{2}-2m+2$$

⇦ $x=\dfrac{y^2}{2}$ として①に代入する。

整理すると　$my^2-2y-4m+4=0$

この2次方程式の判別式を D とすると　⇦ 放物線の形を考えると，$m\neq 0$

$$\frac{D}{4}=(-1)^2-m(-4m+4)$$

$$=4m^2-4m+1$$

$$=(2m-1)^2$$

この放物線と直線が接するのは，$D=0$ のときであるから

$$m=\frac{1}{2}$$

したがって，求める接線の方程式は

$$y=\frac{1}{2}x-2\cdot\frac{1}{2}+2$$

⇦ $m=\dfrac{1}{2}$ を①に代入する。

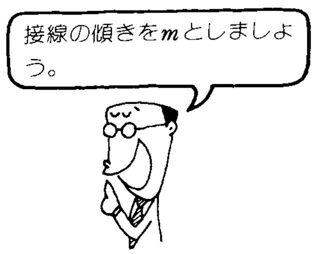
すなわち　$\boldsymbol{y=\dfrac{1}{2}x+1}$

計算ミスのないように注意することがたいせつですね。
それでは，次のトレーニングをしましょう。

トレーニング

解答は 108 ページ

5 **点 (1, 1) を通り，放物線 $x^2=-3y$ に接する直線の方程式を求めよ。**



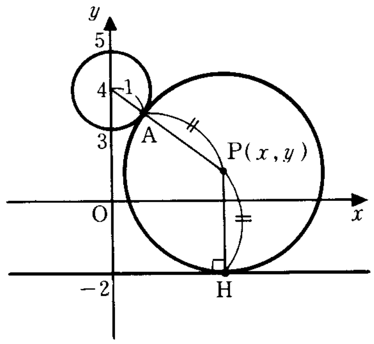
次は軌跡についての学習です。

軌跡を求めるには，まず，動点の座標を $(x,\ y)$ とし，与えられた条件を x，y の式で表します。この式を整理して，それがどのような図形を表すか調べるわけですね。

例 題 2 外接円の中心の軌跡

直線 $y=-2$ に接し，円 $x^2+(y-4)^2=1$ に外接する円の中心は，どのような図形上にあるか。

考え方 右の図のように，定直線と定円に接する円Pの接点を，それぞれH，Aとする。点Pの座標を$(x,\ y)$とし，PA＝PHであることをx，yの式で表せばよい。



解　答 直線 $y=-2$ ………①

に接し

円 $x^2+(y-4)^2=1$ ………②

に外接する円の中心をP$(x,\ y)$とする。

①，②のグラフと円Pとの接点を，それぞれH，Aとすると　PA＝PH

ゆえに　$\sqrt{x^2+(y-4)^2}-1=y+2$　⇦ $y-(-2)=y+2$

整理すると　$\sqrt{x^2+(y-4)^2}=y+3$　⇦ $y>-2$ から，$y+3>0$

両辺を2乗して　$x^2+(y-4)^2=(y+3)^2$　⇦ 両辺とも負でないから。

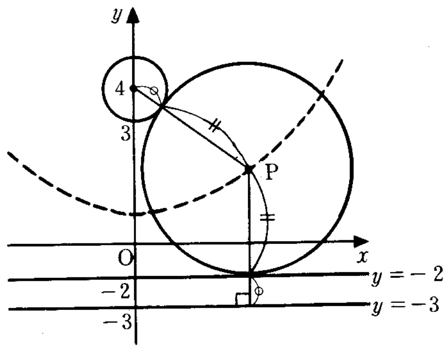
整理すると　$x^2=14y-7$

したがって，円の中心は**放物線 $x^2=14y-7$ 上にある。**

―注―

$x^2=14y-7$ は，焦点$(0,\ 4)$，準線 $y=-3$ の放物線を表す。

点Pが定点$(0,\ 4)$と定直線 $y=-3$ とから等距離にあることがわかれば，放物線の定義にもとづいて，$x^2=14y-7$ を導くこともできる。



それでは，例題にならって，次の問題を解きましょう。

トレーニング　**解答は108ページ**

6 点$(0,\ 3)$を通り，x軸に接する円の中心は，どのような図形上にあるか。次の $\boxed{}$ をうめながら求めよ。

(方法1)

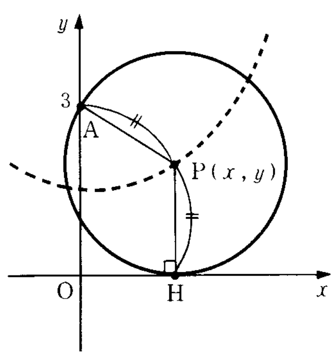
点A$(0,\ 3)$を通り，x軸に接する円の中心をP$(x,\ y)$とする。円Pとx軸との接点をHとすると　PA＝PH

ゆえに　$\sqrt{x^2+(y-\boxed{})^2}=y$　⇦ $y>0$

両辺を2乗して　$x^2+(y-\boxed{})^2=y^2$

整理すると　$\boxed{}=6y-9$

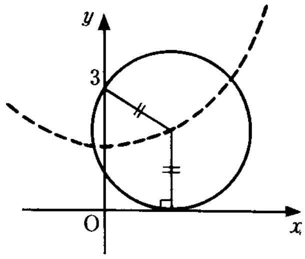
したがって，円の中心は放物線 $\boxed{}$ 上にある。



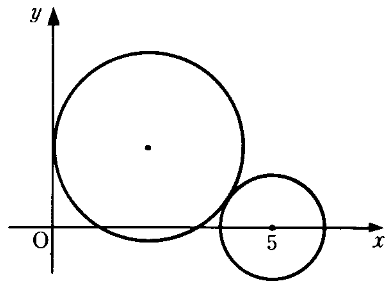
（方法２）

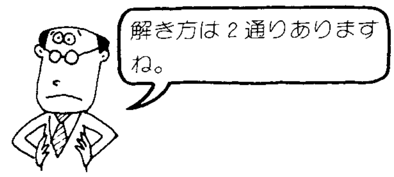
点$(0,\ 3)$を通り，x軸に接する円の中心は，点$(0,\ 3)$と $\boxed{\qquad\qquad}$ とから等距離にあるから，点 $\boxed{\qquad\qquad}$ を焦点，x 軸を $\boxed{\qquad\quad}$ とする放物線上にある。

すなわち，放物線 $\boxed{\qquad\qquad}$ 上にある。



7 **y 軸に接し，円$(x-5)^2+y^2=1$ に外接する円の中心は，どのような図形上にあるか。**



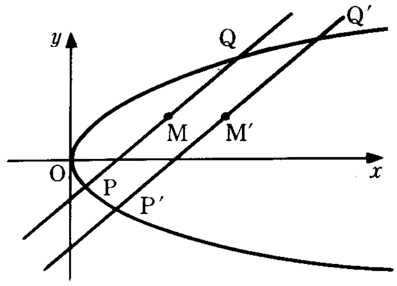


さあ，もう少しがんばりましょう。
今度の問題は，今までと形がちがっています。

例 題 3 　　線分の中点の軌跡

放物線 $y^2=8x$ と直線 $y=x+k$ が異なる２点P，Qで交わるとき，線分PQの中点Mはどのような図形上にあるか。

考え方　PQ の中点を M$(x,\ y)$ として，x と y の関係式を求めればよい。
2 つの方程式 $y^2=8x$，$y=x+k$ から，x を消去して得られる y についての 2 次方程式の解が，P，Q の y 座標である。



解　答　連立方程式 $\begin{cases} y^2=8x \\ y=x+k \end{cases}$ から x を消去すると

$$y^2=8(y-k)$$

$$y^2-8y+8k=0$$

この 2 次方程式の判別式を D とすると　$\dfrac{D}{4}=(-4)^2-1\cdot 8k=8(2-k)$

放物線と直線が異なる 2 点で交わるのであるから　$D>0$

ゆえに　$k<2$　　⇦ $8(2-k)>0$ から

2 点 P，Q の y 座標をそれぞれ α，β とすると，PQ の中点 M の y 座標は

$$y=\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{8}{2}=4$$　⇦ 2 次方程式の解と係数の関係

M の x 座標は　$x=4-k$　　⇦ $y=4$ を $y=x+k$ に代入。

$k<2$ であるから　$x>2$

したがって，M は**直線 $y=4$ 上で $x>2$ の部分にある。**

それでは，トレーニング。**例題 3** とは少しちがいます。

トレーニング　　**解答は 108 ページ**

8　**点 P が放物線 $y^2=3x$ 上を動くとき，点 A$(-2,\ 0)$ と点 P を結ぶ線分 AP の中点 M は，どのような図形上にあるか。**

ヒント　P$(x,\ y)$，M$(u,\ v)$ とすると，$u=\dfrac{x+(-2)}{2}$，$v=\dfrac{y+0}{2}$ が成り立つ。

きょうはここまでです。次の日も根気よく学習しましょう。

第 **4** 日

だ　円

学習日　　月　　日

だ円とは，円をおしつぶした形の曲線

きょうは，「だ円」という曲線について学習します。
どのようにしたら，だ円をかくことができるか，それを方程式で表すとどんな式になるのか，などを調べていきます。

2点間の距離の求め方，覚えていますね。式の変形も重要です。基礎事項をチェックしておきましょう。

復習マークシート　**解答欄のあてはまる記号を黒くぬりつぶそう。**

1　次の2点A，B間の距離はどれか。

(1)　A$(-2,\ 0)$，B$(2,\ 0)$

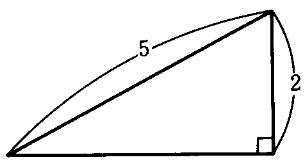
㋐ $\sqrt{6}$　　㋑ $\sqrt{8}$　　㋒ 2　　㋓ 4

(2)　A$(3,\ 0)$，B$(0,\ 4)$

㋐ 25　　㋑ $\sqrt{7}$　　㋒ 5　　㋓ 7

2　斜辺の長さが5，他の1辺の長さが2である直角三角形の他の1辺の長さはどれか。

㋐ 29　　㋑ 21　　㋒ $\sqrt{29}$　　㋓ $\sqrt{21}$



3　次の式をみたす a の値はどれか。

(1)　$2=\dfrac{1}{a}$

㋐ $\dfrac{1}{4}$　　㋑ $\dfrac{1}{2}$　　㋒ 2　　㋓ 4

(2)　$\dfrac{x^2}{9}=\dfrac{x^2}{a^2}$　　ただし，$a>0$

㋐ $\dfrac{1}{9}$　　㋑ $\dfrac{1}{3}$　　㋒ 3　　㋓ 9

(3)　$4x^2=\left(\dfrac{x}{a}\right)^2$　　ただし，$a>0$

㋐ $\dfrac{1}{16}$　　㋑ $\dfrac{1}{4}$　　㋒ $\dfrac{1}{2}$　　㋓ 2

解　答　欄		
1	(1)	㋐ ㋑ ㋒ ㋓
	(2)	㋐ ㋑ ㋒ ㋓
2		㋐ ㋑ ㋒ ㋓
3	(1)	㋐ ㋑ ㋒ ㋓
	(2)	㋐ ㋑ ㋒ ㋓
	(3)	㋐ ㋑ ㋒ ㋓

復習マークシートの解答は，順に，㋓，㋒，㋓，㋑，㋒，㋒です。
2点 $(a,\ b)$，$(c,\ d)$ 間の距離は $\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}$ で求められますね。
それでは，どのような曲線をだ円というのか学習しましょう。

◈だ円の図形的な定義は

だ円
焦点

「平面上で，2定点F，F′からの距離の和が一定である点の軌跡」を**だ円**といい，F，F′をだ円の**焦点**といいます。

だ円を，道具を使ってかくには，どうしたらよいでしょう。

◈だ円をかくには

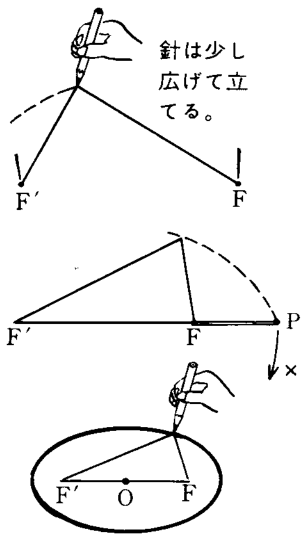
右の図のように，2つの焦点F，F′の位置に針を立て，一定の長さの糸の両端をこの針に結びつけます。そして，鉛筆の先でこの糸をぴんと張りながら鉛筆を動かせばよいのです。

ところが，この方法で実際にかいてみると，不便なことが出てきます。

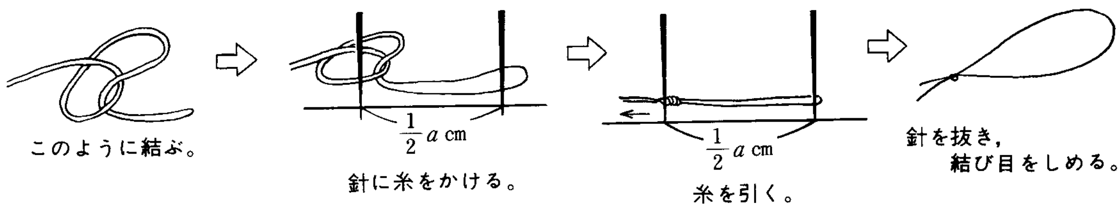
右の図のPの位置まではなめらかにかけますが，そこから先は糸が針にかかって動きません。

どうしますか。

糸を輪にして針にかければ，じょうずにかけますね。



それでは，実際にだ円をかいてみることにしましょう。糸で a cm の長さの輪を作るには，糸を2重にして次の図のように結び，$\frac{1}{2}a$ cm の間隔の針にかければ，簡単にできます。



トレーニング

解答は109ページ

1 **右の図の2点F，F′間の距離は3 cmである。2定点F，F′からの距離の和が5 cmの点の軌跡であるだ円のかき方を説明した次の文の□をうめ，実際にそのだ円をかけ。**

糸で□cmの長さの輪を作り，F，□に立てた針にかけて，鉛筆の先でぴんと張りながら鉛筆を動かせばよい。

どうでしたか。だ円をかくには，針の立て方からくふうしなければなりませんね。

◈だ円の対称性をまとめると

だ円は，そのかき方からもわかるように

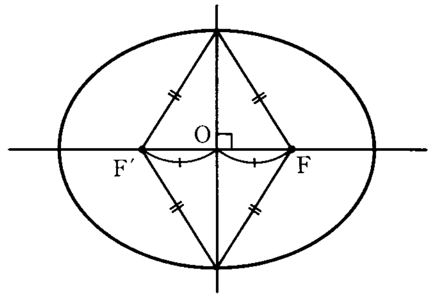
- 2つの焦点を通る直線
- 焦点を結ぶ線分の垂直2等分線

に関して対称ですし，

- 焦点を結ぶ線分の中点O

に関しても対称です。

中心　この点Oを，だ円の**中心**といいます。



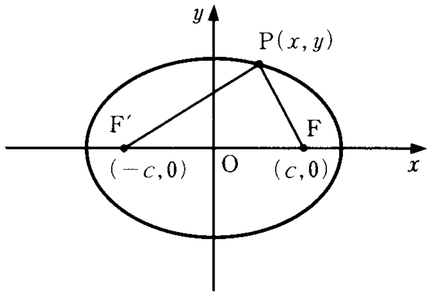
それでは，だ円を方程式で表すことにしましょう。

◈だ円の方程式を求めよう

2つの焦点F，F′を通る直線をx軸，線分FF′の垂直2等分線をy軸にとると，だ円の対称性から，$c>0$として

$$F(c,\ 0),\qquad F'(-c,\ 0)$$

と表すことができます。



2定点F，F′からの距離の和を$2a$とし

$$PF+PF'=2a \quad\cdots\cdots①$$

となる点Pの座標を$(x,\ y)$とします。このとき，$PF+PF'>FF'$から，$a>c>0$です。

①をx，y，cを使って表すと　$\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a$

ゆえに　$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x+c)^2+y^2}$

両辺を2乗すると

$$(x-c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+(x+c)^2+y^2$$

整理すると　$a\sqrt{(x+c)^2+y^2}=cx+a^2$

さらに両辺を2乗して整理すると

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$$

$\sqrt{a^2-c^2}=b$とおくと　⇦ $a>c$から　$b>0$

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$$

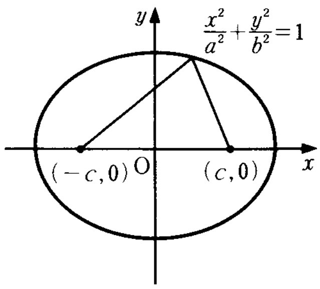
両辺をa^2b^2で割ると　$\boldsymbol{\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1}$

標準形　この式を，だ円の方程式の**標準形**といいます。

□だ円の方程式□

$a>c>0$，$b=\sqrt{a^2-c^2}$とするとき
2定点$(c,\ 0)$，$(-c,\ 0)$からの距離の和が$2a$の点の軌跡であるだ円の方程式は

$$\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}$$

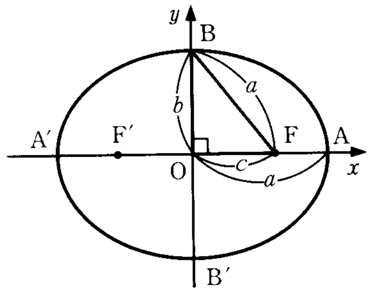


—注—

a，b，c は右の図のように，直角三角形の３辺の長さになっています。

BF＋BF′＝$2a$ で，BF＝BF′ ですから，当然 BF＝a となるのです。

また，だ円の方程式 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ で，$y=0$ とすると，x 軸との交点が A(a, 0)，A′($-a$, 0)，$x=0$ とすると，y 軸との交点が B(0, b)，B′(0, $-b$) になることがわかります。

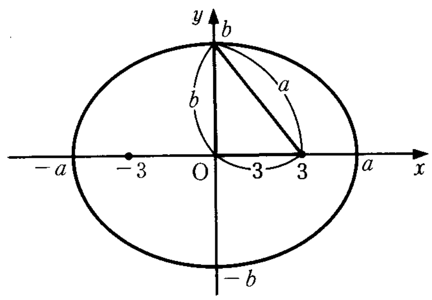


それでは，次の基本例題とトレーニングで，だ円の標準形を確実に自分のものにしましょう。

基本例題１ 　　　　　　　　　　　　　　　　　　**だ円の方程式**

２点 (3, 0)，(−3, 0) を焦点とし，この２点からの距離の和が 10 の点の軌跡であるだ円の方程式を求めよ。

考え方　$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ の a，b にあたる値を求めればよい。
$2a=10$ であることから a の値はすぐにわかるから，あとは，右の図を参考にして b の値を求めればよい。



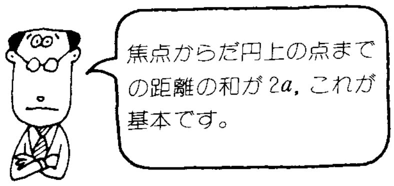
解　答　２点 (c, 0)，($-c$, 0) からの距離の和が $2a$ の点の軌跡であるだ円の方程式は

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad ただし，b=\sqrt{a^2-c^2}$$

ところで，$2a=10$ から　　$a=5$

これと $c=3$ から　　$b=\sqrt{5^2-3^2}=\sqrt{16}=4$

ゆえに，求めるだ円の方程式は　　$\boldsymbol{\dfrac{x^2}{5^2}+\dfrac{y^2}{4^2}=1}$



トレーニング　　**解答は 109 ページ**

2　**２点 (5, 0)，(−5, 0) を焦点とし，この２点からの距離の和が 26 の点の軌跡であるだ円の方程式を，次の □ をうめながら求めよ。**

２点 (c, 0)，($-c$, 0) からの距離の □ が $2a$ の点の軌跡であるだ円の方程式は

$$\frac{x^2}{\boxed{\quad}}+\frac{y^2}{\boxed{\quad}}=1 \qquad ただし，b=\sqrt{a^2-c^2}$$

$2a=$ □ から　　$a=13$

これと $c=$ □ から　　$b=\sqrt{13^2-5^2}=\sqrt{144}=12$

ゆえに，求めるだ円の方程式は　　$\dfrac{x^2}{\boxed{\quad}^2}+\dfrac{y^2}{\boxed{\quad}^2}=1$

3 **2 点 $(8,\ 0)$, $(-8,\ 0)$ を焦点とし，この 2 点からの距離の和が 20 の点の軌跡であるだ円の方程式を求めよ。**

今までは焦点が x 軸上にある場合を学習してきましたが，y 軸上にあるときはどうなるでしょうか。

◆焦点が y 軸上にあると………

焦点が x 軸上にあるときと同様に計算していくと

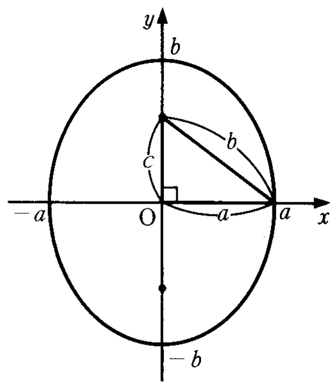
$b>c>0$, $a=\sqrt{b^2-c^2}$

のとき，2 定点 $(0,\ c)$, $(0,\ -c)$ からの距離の和が $2b$ の点の軌跡であるだ円の方程式は

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

となります。

焦点が x 軸上にあるときとは，＿＿の部分がちがっていますね。



―注―

右の図のように，a, b, c が直角三角形の 3 辺の長さになっていることに注意してください。

図形を頭にえがきながら，次のトレーニングをしましょう。

トレーニング

解答は 109 ページ

4 **2 点 $(0,\ 4)$, $(0,\ -4)$ を焦点とし，この 2 点からの距離の和が 10 の点の軌跡であるだ円の方程式を求めよ。**

ヒント　2 点 $(0,\ c)$, $(0,\ -c)$ を焦点とし，この 2 点からの距離の和が $2b$ の点の軌跡であるだ円の方程式は　$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$　ただし，$a=\sqrt{b^2-c^2}$

今まで学習したことに，もう少しつけ加えることにします。

◈頂点と長軸，短軸

今までに学習してきたように

$$\text{だ円}\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad \cdots\cdots\text{①}$$

は x 軸と y 軸に関して対称ですね。

だ円①が x 軸と交わる点は

$A(a,\ 0)$,　$A'(-a,\ 0)$

y 軸と交わる点は

$B(0,\ b)$,　$B'(0,\ -b)$

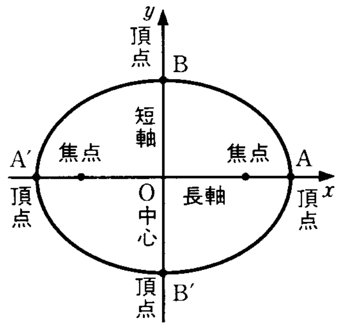


図1

頂点　です。この4つの点 A，A′，B，B′ をだ円①の**頂点**といいます。頂点が4つもあるのですね。

主軸　また，AA′，BB′ を，それぞれだ円①の**主軸**といいます。

長軸　主軸のうちで，長いほうをだ円の**長軸**，短いほうをだ円

短軸　の**短軸**といいます。

だ円①で，$a>b>0$ のとき　⇦ 図1のような場合

長軸の長さは　$AA'=2a$

短軸の長さは　$BB'=2b$

$b>a>0$ のとき　⇦ 図2のような場合

長軸の長さは　$BB'=2b$

短軸の長さは　$AA'=2a$

です。

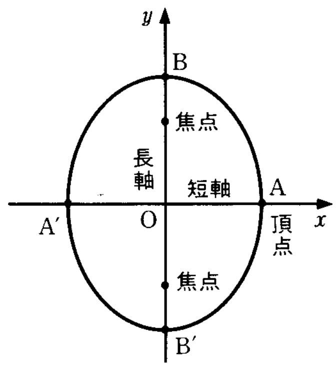
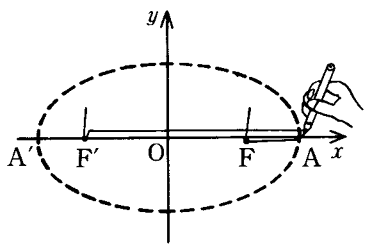


図2

焦点は，必ず長軸の上にのっていますね。

「焦点からだ円上の点までの距離の和は，長軸の長さに等しい」ことを確認しておきましょう。



例　右の図で，$AF=A'F'$ ですから

$AF+AF'=A'F'+AF'=AA'$

≪ここで一息≫

関孝和は，だ円のことを「側円」とよび，その面積を求めています。
江戸時代には，側円とよばれることが多かったようです。
明治になってから，だ円という名称がふつうになりました。

それでは，トレーニングです。問題がすぐに解けないときは，もう一度上の図を見てみましょう。

トレーニング　解答は 109 ページ

5 $b>a>0$ のとき，だ円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ の頂点および焦点の座標を，次の $\boxed{}$ をうめながら求めよ。

頂点の座標は　$(a,\ 0)$，$(-a,\ 0)$，$(0,\ b)$，$(\boxed{},\ \boxed{})$

$b>a$ であるから，焦点は $\boxed{}$ 軸上にあり，座標は $(0,\ c)$，$(0,\ -c)$ と表せる。

$c>0$ とすると　$c=\sqrt{\boxed{}}$

ゆえに，焦点の座標は　$(0,\ \sqrt{b^2-a^2})$，$(\boxed{},\ \boxed{})$

$a>b>0$ のときも，**トレーニング5**と同様に考えていくと，焦点の座標の公式が求められます。

□だ円の焦点の座標□

だ円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ の焦点の座標は

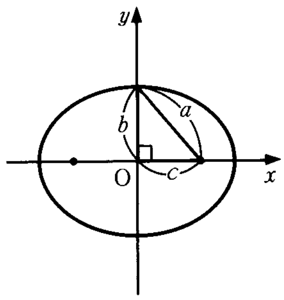
(1)　**$a>b>0$ のとき**

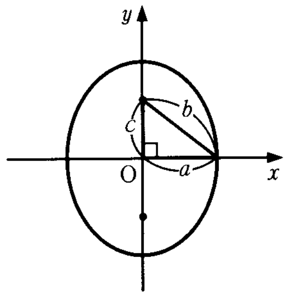
$$(\sqrt{a^2-b^2},\ 0),\quad (-\sqrt{a^2-b^2},\ 0)$$

(2)　**$b>a>0$ のとき**

$$(0,\ \sqrt{b^2-a^2}),\quad (0,\ -\sqrt{b^2-a^2})$$

—注—
丸暗記するよりも，右のような図を思いうかべて，焦点の座標を求める方法を頭に入れておいたほうがよい。



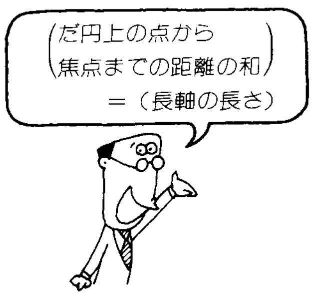


トレーニング　解答は 109 ページ

6 次のだ円上の点から，その焦点までの距離の和を求めよ。

(1)　$\dfrac{x^2}{3^2}+\dfrac{y^2}{2^2}=1$

(2)　$x^2+\dfrac{y^2}{6}=1$



7 次のだ円の方程式を求めよ。

(1) 長軸が y 軸上にあって長さ 6，短軸が x 軸上にあって長さ 4

(2) 焦点の座標が $(3\sqrt{3},\ 0)$，$(-3\sqrt{3},\ 0)$，長軸の長さが 12

ヒント (2) 焦点が 2 点 $(c,\ 0)$，$(-c,\ 0)$ で，焦点からの距離の和すなわち長軸の長さが $2a$ のだ円の方程式は $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$　ただし，$b=\sqrt{a^2-c^2}$

式の変形をふくむ問題を解いてみましょう。基本的には今までと変わりません。

基本例題 2　　**だ円の頂点，焦点，長軸，短軸の求め方**

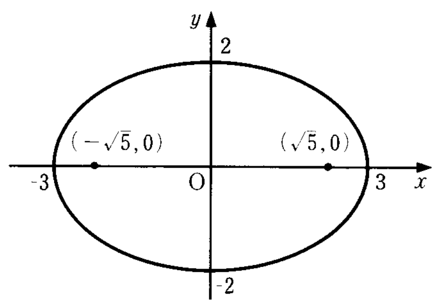
だ円 $4x^2+9y^2=36$ の頂点，焦点の座標と，長軸，短軸の長さを求め，そのグラフをかけ。

考え方　与えられた方程式の両辺を 36 で割って，$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ の形に変形する。焦点を求めるには，図をかいて考えるのが簡単。

解　答　$4x^2+9y^2=36$ の両辺を 36 で割ると

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$$

すなわち　$$\frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{2^2}=1$$



ゆえに，だ円の**頂点の座標は**

$(3,\ 0)$，$(-3,\ 0)$

$(0,\ 2)$，$(0,\ -2)$

焦点は長軸上にあるから，$c>0$ としてその座標を $(c,\ 0)$，$(-c,\ 0)$ とすると　⇦ $3>2$ から，長軸は x 軸上にある。

$c=\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt{5}$

よって，**焦点の座標は**　**$(\sqrt{5},\ 0)$，$(-\sqrt{5},\ 0)$**

長軸の長さは　$2\cdot 3=$**6**

短軸の長さは　$2\cdot 2=$**4**

グラフは右上の図のようになる。

—注—

グラフは，焦点と頂点の座標がわかるようにかいておくこと。

基本例題にならって，次のトレーニングをしましょう。ポイントをしっかりつかんでください。

トレーニング

解答は 110 ページ

8 **だ円 $\dfrac{x^2}{4^2}+\dfrac{y^2}{5^2}=1$ について，次の問いに答えよ。**

(1) このだ円の頂点の座標を求めよ。

(2) このだ円の焦点は x 軸上，y 軸上のどちらにあるか。

(3) このだ円の焦点の座標を求めよ。

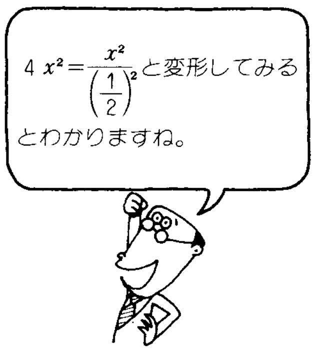
(4) このだ円の長軸，短軸の長さを求めよ。

(5) このだ円のグラフをかけ。

9 **次のだ円の頂点，焦点の座標と，長軸，短軸の長さを求め，そのグラフをかけ。**

(1) $4x^2+3y^2=12$

(2) $4x^2+9y^2=1$



きょうの学習はここまでです。また，きょうは，**チャレンジコーナー**も用意しました。余裕があれば，挑戦してみましょう。

チャレンジコーナー　このページは，時間に余裕のある人だけしてください。

もう少しがんばってみましょう。だんだん応用力をつけてください。

トレーニング　解答は 110 ページ

10 長軸が x 軸上，短軸が y 軸上にあり，2 点 $\left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$，$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{4}\right)$ を通るだ円の方程式を求めよ。

ヒント　だ円の方程式を $Ax^2+By^2=1$ とすると計算が簡単になる。

11 $a>b>0$ のとき，だ円 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ と 2 つの焦点を共有し，短軸の長さが $2a$ であるだ円の方程式を求めよ。

ヒント　求めるだ円の長軸の長さを $2d$ として，d を求める。また，2 つのだ円の焦点が一致することに注目する。

だ円の平行移動

学習日　　月　　日

だ円の中心が原点ではない場合は………

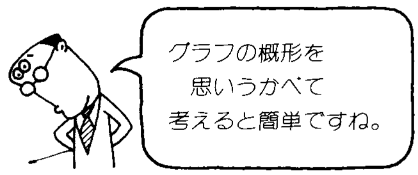
平行移動したとき，だ円の中心，焦点，頂点はどこに移るでしょうか。また，x，y の 2 次方程式がだ円の方程式になるのはどんな場合でしょうか。

もう，だ円の焦点，頂点の座標，長軸，短軸の長さを求めることができますね。

ところで，x についての 2 次式が $(x+a)^2$ の形になるのは，どのような場合でしたか。復習しておきましょう。

復習マークシート　解答欄のあてはまる記号を黒くぬりつぶそう。

1　**だ円 $\dfrac{x^2}{5^2}+\dfrac{y^2}{3^2}=1$ について，次の問いに答えよ。**



(1)　このだ円の頂点の座標であるものはどれか。

㋐　(5, 0)　　㋑　(3, 0)
㋒　(0, 5)　　㋓　(−3, 0)

(2)　このだ円の焦点の座標であるものはどれか。

㋐　(5, 0)　　㋑　(0, 3)
㋒　(4, 0)　　㋓　(0, 4)

(3)　このだ円の長軸の長さはどれか。

㋐　5　　㋑　10　　㋒　3　　㋓　6

(4)　このだ円の短軸の長さはどれか。

㋐　5　　㋑　10　　㋒　3　　㋓　6

2　**次の x についての 2 次式が $(x+a)^2$ の形になるためには，$\boxed{}$ の中の値はどれであればよいか。**

(1)　$x^2+6x+\boxed{}$

㋐　-7　　㋑　7　　㋒　9　　㋓　36

(2)　$x^2+3x+\boxed{}$

㋐　2　　㋑　-4　　㋒　9　　㋓　$\dfrac{9}{4}$

(3)　$x^2+\boxed{}x+25$

㋐　10　　㋑　5　　㋒　0　　㋓　-5

解　答　欄		
1	(1)	㋐ ㋑ ㋒ ㋓
	(2)	㋐ ㋑ ㋒ ㋓
	(3)	㋐ ㋑ ㋒ ㋓
	(4)	㋐ ㋑ ㋒ ㋓
2	(1)	㋐ ㋑ ㋒ ㋓
	(2)	㋐ ㋑ ㋒ ㋓
	(3)	㋐ ㋑ ㋒ ㋓

復習マークシートの解答は，順に，㋐，㋒，㋑，㋓，㋒，㋓，㋐です。
それでは，だ円の平行移動について学習しましょう。

◈平行移動されただ円の方程式は

方程式 $f(x,\ y)=0$ で表される曲線を，x 軸の方向に m，y 軸の方向に n だけ平行移動した曲線の方程式は $f(x-m,\ y-n)=0$ でした。

これをだ円に適用すれば

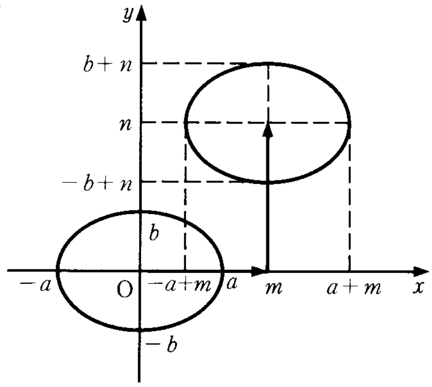
だ円 $\dfrac{(x-m)^2}{a^2}+\dfrac{(y-n)^2}{b^2}=1$ ………①は

だ円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ………②を

x 軸の方向に m，y 軸の方向に n だけ平行移動したものであることがわかります。

したがって，だ円①の中心は点 $(m,\ n)$ です。

だ円①の頂点も焦点も，だ円②の頂点，焦点を平行移動したものですから，右の図のように考えて，簡単に求めることができますね。



それでは，このことがよく理解できているか，トレーニングで確かめましょう。

トレーニング

解答は 111 ページ

1 **次の $\boxed{}$ をうめよ。**

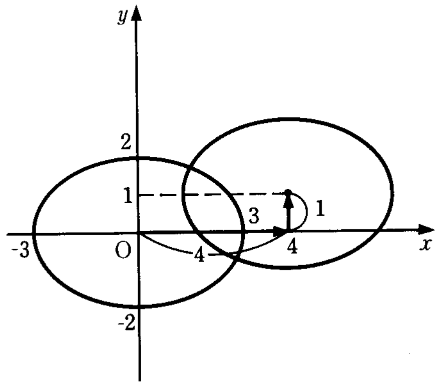
だ円 $\dfrac{x^2}{3^2}+\dfrac{y^2}{2^2}=1$ ………①

を x 軸の方向に 4，y 軸の方向に 1 だけ平行移動して得られるだ円の方程式は

$$\frac{(x-\boxed{})^2}{3^2}+\frac{(y-\boxed{})^2}{2^2}=1 \quad\text{………②}$$

である。

だ円①の中心の座標は $(0,\ 0)$，焦点の座標は $(\sqrt{5},\ 0)$，$(-\sqrt{5},\ 0)$ であるから，だ円②の中心の座標は $(4,\ 1)$，焦点の座標は $(\sqrt{5}+\boxed{},\ 1)$，$(\boxed{},\ 1)$ である。



2 **次の方程式で表されるだ円を，x 軸の方向に 1，y 軸の方向に -2 だけ平行移動して得られるだ円の方程式と，その中心および焦点の座標を求めよ。**

(1) $\dfrac{x^2}{5^2}+\dfrac{y^2}{4^2}=1$

(2)　$3x^2+y^2=3$

つぎに，中心が原点にないだ円のグラフをかいてみましょう。

基本例題 1　　$\dfrac{(x-m)^2}{a^2}+\dfrac{(y-n)^2}{b^2}=1$ のグラフ

方程式 $\dfrac{(x+2)^2}{9}+\dfrac{(y-5)^2}{4}=1$ は，どのような図形を表すか。そのグラフをかけ。

考え方　どのような図形を平行移動したものなのかを考える。

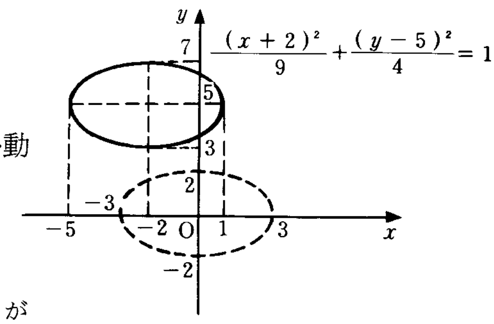
x のかわりに $x+2$ となっていたら，$x+2=x-(-2)$ であるから，x 軸の方向に -2 平行移動したことになる。

解　答　与えられた方程式の表す図形は

だ円 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$

を x 軸の方向に -2，y 軸の方向に 5 だけ平行移動しただ円である。

グラフは右の図のようになる。



—注—

グラフは，中心，頂点の座標がわかるようにかくことがたいせつである。

だ円 $\dfrac{(x+2)^2}{9}+\dfrac{(y-5)^2}{4}=1$，すなわち $\dfrac{(x+2)^2}{3^2}+\dfrac{(y-5)^2}{2^2}=1$ の中心の座標は $(-2,\ 5)$，頂点の座標は $(1,\ 5)$，$(-5,\ 5)$，$(-2,\ 3)$，$(-2,\ 7)$ である。

理解できましたね。次のトレーニングでもう一度上のことを確かめてから，実際にグラフをかいてみましょう。中心，頂点の座標がわかるようにかくことを忘れないように。

トレーニング　　解答は 111 ページ

3　**次の ☐ をうめよ。**

方程式 $\dfrac{(x-1)^2}{2^2}+\dfrac{(y+3)^2}{4^2}=1$ で表される図形は

だ円 $\dfrac{x^2}{2^2}+\dfrac{y^2}{4^2}=1$

を x 軸の方向に ☐，y 軸の方向に ☐ だけ平行移動した ☐ である。

4 次の方程式で表される図形のグラフをかけ。

(1) $\dfrac{(x-3)^2}{4}+(y+1)^2=1$　　　(2) $(x-1)^2+\dfrac{(y+2)^2}{5}=1$

ここまでは，$\dfrac{(x-m)^2}{a^2}+\dfrac{(y-n)^2}{b^2}=1$ の形の方程式で表される図形についての学習が中心でした。今度は，式の変形が中心になります。

トレーニング

解答は 112 ページ

5 次の $\boxed{}$ をうめながら，方程式 $3x^2+y^2+6x-2y-2=0$ を $\dfrac{(x-m)^2}{a^2}+\dfrac{(y-n)^2}{b^2}=1$ の形に変形せよ。

$$3x^2+y^2+6x-2y-2$$

$=3x^2+6x+\boxed{}-2$　　⇦ （x の 2 次式）+（y の 2 次式）の形に変形。

$=3(x^2+2x)+(y^2-2y)-2$

$=3\{(x^2+2x+1)-\boxed{}\}+\{(y^2-2y+1)-1\}-2$

$=3(x+1)^2+(\boxed{})^2-6$

⇦ x をふくむ項，y をふくむ項を，それぞれ $A(x+\alpha)^2$，$B(y+\beta)^2$ の形に。

よって，$3x^2+y^2+6x-2y-2=0$ は

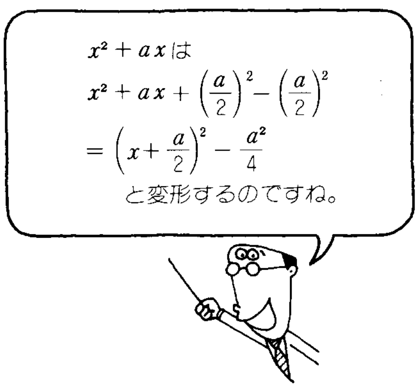
$$3(x+1)^2+(y-1)^2-6=\boxed{}$$

$$3(x+1)^2+(y-1)^2=\boxed{}$$ となる。

両辺を $\boxed{}$ で割ると

$$\frac{(x+1)^2}{2}+\frac{(y-1)^2}{6}=1$$

したがって　$\dfrac{(x+1)^2}{(\boxed{})^2}+\dfrac{(y-1)^2}{(\boxed{})^2}=1$



この変形のしかたを，十分練習しておきましょう。

6 次の方程式を $\dfrac{(x-m)^2}{a^2}+\dfrac{(y-n)^2}{b^2}=1$ の形に変形せよ。

(1) $2x^2+y^2=8x$　　　　(2) $x^2+4y^2-2x+16y+1=0$

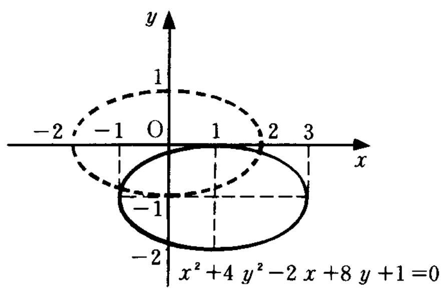
ここまでのことがよく理解できていれば，次の例題はすぐ解けますよ。

例 題 1　　　　**$ax^2+by^2+cx+dy+e=0$ のグラフ**

方程式 $x^2+4y^2-2x+8y+1=0$ はどのような図形を表すか。そのグラフをかけ。

考え方　x^2，y^2 の係数がそれぞれ 1，4 でともに正であるから，まず，与えられた方程式を $\dfrac{(x-m)^2}{a^2}+\dfrac{(y-n)^2}{b^2}=1$ の形に変形できないか考える。この形に変形できれば，だ円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ を x 軸の方向に m，y 軸の方向に n だけ平行移動したものとわかる。

解 答　$x^2+4y^2-2x+8y+1$



$=x^2-2x+4y^2+8y+1$

⇦ (x の 2 次式)+(y の 2 次式) の形に。

$=(x^2-2x)+4(y^2+2y)+1$

$=\{(x^2-2x+1)-1\}+4\{(y^2+2y+1)-1\}+1$

⇦ $x^2+ax^2+\left(\dfrac{a}{2}\right)^2$ の形をつくる。

$=(x-1)^2+4(y+1)^2-4$

よって，$x^2+4y^2-2x+8y+1=0$ は

$$(x-1)^2+4(y+1)^2-4=0$$

$$(x-1)^2+4(y+1)^2=4 \quad \text{となる。}$$

両辺を 4 で割ると $\dfrac{(x-1)^2}{4}+(y+1)^2=1$

したがって，与えられた方程式は

だ円 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$　すなわち $\dfrac{x^2}{2^2}+\dfrac{y^2}{1^2}=1$

を x 軸の方向に 1，y 軸の方向に -1 だけ平行移動しただ円を表す。

グラフは右上の図のようになる。

式の変形の方法とグラフのかき方は，よくわかりましたね。
それでは，きょうの仕上げのトレーニングをしましょう。

トレーニング

解答は112ページ

7 次の方程式はどのような図形を表すか。そのグラフをかけ。

(1) $x^2+2y^2-8x-4y+16=0$

(2) $3x^2+4y^2+6x+8y-5=0$

8 焦点$(-1,\ 0)$，$(3,\ 0)$，長軸の長さが6であるだ円の方程式を求めよ。

きょうの学習はこれで終わりです。よく理解できましたね。

第 6 日　だ円と直線

学習日　　月　　日

だ円と直線の位置関係，だ円と円の関係は………

きょうは，だ円と直線との共有点の個数，円とだ円の関係，軌跡がだ円になるものなどについて学習します。

まず，いつものとおり復習マークシートから始めますが，①の問題では，共有点の個数がどうなるか，図のだ円の頂点の座標に注目して考えてください。また，線分の分点の座標についても復習しておきましょう。

復習マークシート　　解答欄のあてはまる記号を黒くぬりつぶそう。

① だ円 $\dfrac{x^2}{5^2}+\dfrac{y^2}{2^2}=1$ について，次の問いに答えよ。

(1)　このだ円と 2 個の共有点をもつ直線の方程式はどれか。

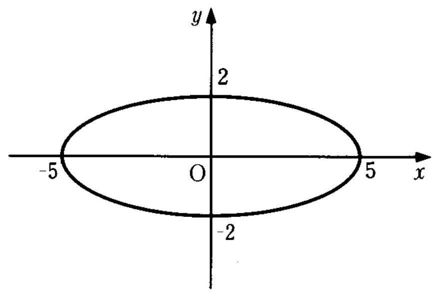
㋐　$x=2$　　㋑　$x=5$　　㋒　$y=-2$　　㋓　$y=2$

(2)　このだ円との共有点が 1 個だけの直線の方程式はどれか。

㋐　$x=2$　　㋑　$x=5$　　㋒　$y=3$　　㋓　$y=5$

(3)　このだ円と共有点をもたない直線の方程式はどれか。

㋐　$x=2$　　㋑　$x=-5$　　㋒　$y=2$　　㋓　$y=5$



② 次の点の座標はどれか。

(1)　2 点 O(0, 0)，A(0, 3) を結ぶ線分 OA を 2 : 1 に内分する点

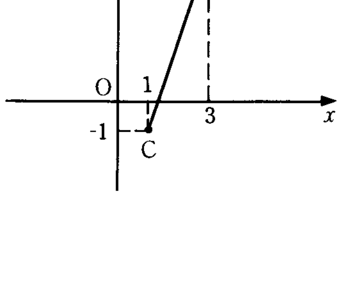
㋐　(0, 1)　　㋑　(0, 2)　　㋒　(0, −3)　　㋓　(0, 6)

(2)　2 点 O(0, 0)，B(3, 0) を結ぶ線分 OB を 2 : 1 に外分する点

㋐　(1, 0)　　㋑　(2, 0)　　㋒　(−3, 0)　　㋓　(6, 0)

(3)　2 点 C(1, −1)，D(3, 5) を結ぶ線分 CD の中点

㋐　(4, 4)　　㋑　(2, 6)　　㋒　(2, 2)　　㋓　(1, 3)



解答欄					
①	(1)	㋐	㋑	㋒	㋓
	(2)	㋐	㋑	㋒	㋓
	(3)	㋐	㋑	㋒	㋓
②	(1)	㋐	㋑	㋒	㋓
	(2)	㋐	㋑	㋒	㋓
	(3)	㋐	㋑	㋒	㋓

復習マークシートの解答は，順に，㋐，㋑，㋓，㋑，㋓，㋒です。
では，だ円と直線との関係から学習することにしましょう。

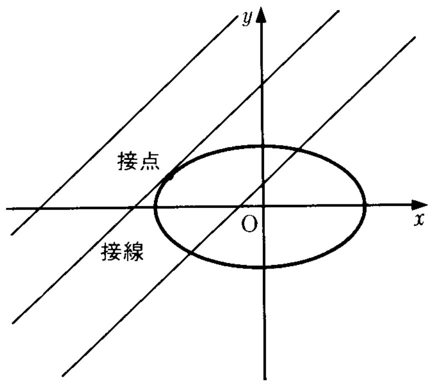
◈共有点の個数は

だ円と直線との共有点の個数は，右の図のように，その位置関係によって，0，1，2の3通りの場合があります。

復習マークシート$\boxed{1}$の結果で確かめてください。

接する 接線 接点

共有点の個数が1のとき，だ円とその直線とは**接する**といい，その直線を**接線**，共有点のことを**接点**といいます。



放物線の場合は，直線との共有点の個数が1でも，接するとはかぎりませんでしたね。

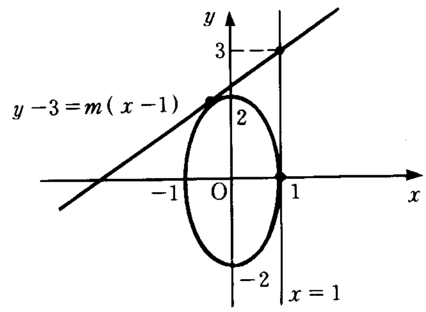
だ円の接線の方程式を求めてみましょう。

基本例題1 ―― だ円外の1点からだ円に引いた接線

点 A(1，3) を通り，だ円 $4x^2+y^2=4$ ………① に接する直線の方程式を求めよ。

考え方 グラフをかいて，点Aを通る接線がどうなるかを考える。接線に傾きがある場合，すなわち接線が y 軸に平行でない場合は，その傾きを m として，接線の方程式を $y-3=m(x-1)$ と表す。あとは，直線とだ円①とがただ1個の共有点をもつように，2次方程式の判別式を利用して，m の値を定めればよい。

解　答 点Aを通りだ円①に接する直線の1つは $x=1$ である。　⇐ 右の図参照。



もう1つの接線の傾きを m とすると，その接線の方程式は

$$y-3=m(x-1)$$
$$y=mx-m+3 \quad \cdots\cdots\cdots ②$$

①と②を連立方程式として，y を消去すると

$$4x^2+(mx-m+3)^2=4$$

整理すると

$$(m^2+4)x^2-2(m^2-3m)x+m^2-6m+5=0$$

この2次方程式の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=(m^2-3m)^2-(m^2+4)(m^2-6m+5)=24m-20$$

だ円①と直線②が接するのは，$D=0$ のときであるから

$$m=\frac{5}{6}$$　⇐ $24m-20=0$ から

これを②に代入すると

$$y=\frac{5}{6}x+\frac{13}{6}$$

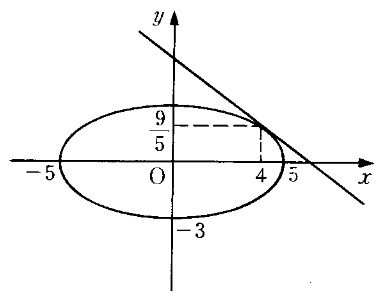
ゆえに，求める直線の方程式は　　**$x=1$,　$y=\frac{5}{6}x+\frac{13}{6}$**

それでは，次のトレーニングで，接線と共有点の個数についての問題を練習しましょう。

トレーニング

解答は 113 ページ

1 **だ円 $\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{3^2}=1$ 上の点 $\left(4,\ \frac{9}{5}\right)$ における接線の方程式を，次の $\boxed{\quad}$ をうめながら求めよ。**



この接線の傾きを m とすると，接線の方程式は

$$y-\boxed{\quad}=m(x-\boxed{\quad})$$

$$y=mx-4m+\frac{9}{5} \quad \cdots\cdots ①$$

$\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{3^2}=1$ と①を連立方程式として，y を消去し，整理すると

$$(25m^2+9)x^2-2(100m^2-45m)x+400m^2-360m-144=0$$

この 2 次方程式の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=(100m^2-45m)^2-(25m^2+9)(400m^2-360m-144)$$

$$=81(\boxed{\quad}m+\boxed{\quad})^2$$

このだ円と直線が接するのは，$D=0$ のときであるから　　$m=\boxed{\quad}$

これを①に代入して，求める接線の方程式は　　$y=\boxed{\quad}$

2 **点 $(-2,\ 3)$ を通り，だ円 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ に接する直線の方程式を求めよ。**

3 だ円 $\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{4}=1$ と直線 $y=\dfrac{1}{2}x+k$ との共有点の個数は，k の値によってどのように変わるか調べよ。

ヒント　連立方程式 $\begin{cases} \dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{4}=1 \\ y=\dfrac{1}{2}x+k \end{cases}$ から y を消去して x の2次方程式を導き，その判別式から，k の値の範囲と共有点の個数を調べる。

今度は，円とだ円の間にはどのような関係があるか学習しましょう。

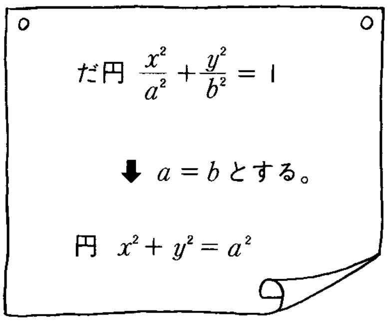
◈円はだ円の特別な場合

だ円の方程式 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ において，$a=b$ としてみると

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$

すなわち　$x^2+y^2=a^2$

となり，原点を中心とする半径 a の円の方程式になります。そこで，円はだ円の特別な場合と考えることができますね。



円とだ円の関係を，もう少し調べることにしましょう。

◈円とだ円の関係は

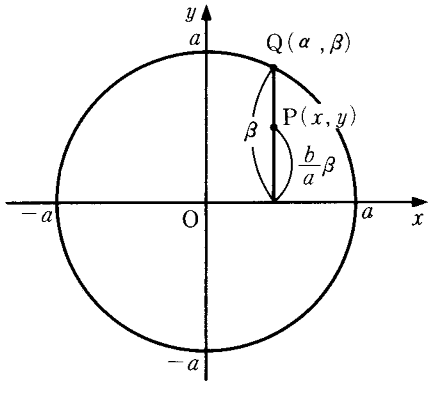
点 $\mathrm{Q}(\alpha,\ \beta)$ の y 座標だけを $\dfrac{b}{a}$ 倍した点を P とします。(ただし，$a>0$，$b>0$)

点 Q が円 $x^2+y^2=a^2$ ………① 上を動くとき，点 P はどのような図形上を動くでしょうか。

点 P の座標を $(x,\ y)$ とすると，この x 座標は点 Q の x 座標と一致するから

$$x=\alpha$$

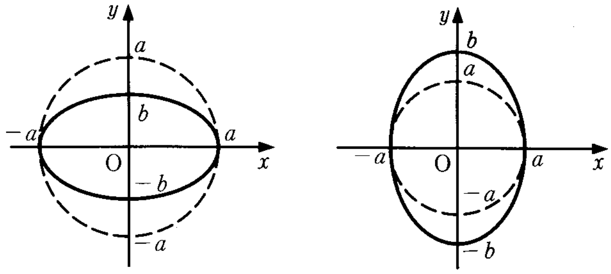
となります。



また，y 座標は点Qの y 座標の $\dfrac{b}{a}$ 倍ですから　　$y=\dfrac{b}{a}\beta$

となります。したがって

$$\begin{cases} \alpha = x \\ \beta = \dfrac{a}{b}y \end{cases} \quad \cdots\cdots\cdots②$$



ところで，点Q(α，β) は円①上の点ですから

$$\alpha^2+\beta^2=a^2 \quad \cdots\cdots\cdots③$$

②を③に代入すると　　$x^2+\left(\dfrac{a}{b}y\right)^2=a^2$

変形すると　　$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$　　$\cdots\cdots\cdots④$

したがって，点Qが円①上を動くとき，点Pはだ円④上を動きます。

これから，**だ円 $\boldsymbol{\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1}$ は**

円 $\boldsymbol{x^2+y^2=a^2}$ を，$\boldsymbol{y}$ 軸の方向に $\boldsymbol{\dfrac{b}{a}}$ 倍したもの

であることがわかります。

—注—

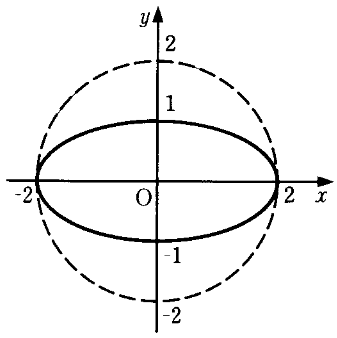
円 $x^2+y^2=a^2$ を y 軸の方向に $\dfrac{b}{a}$ 倍しただ円の方程式は，$x^2+y^2=a^2$ の y を $\dfrac{a}{b}y$ におきかえて求められます。すなわち，$x^2+\left(\dfrac{a}{b}y\right)^2=a^2$ です。

たとえば，円 $x^2+y^2=4$ を y 軸の方向に $\dfrac{1}{2}$ 倍しただ円の方程式を求めるには，y を $2y$ におきかえればよいのです。

すなわち　　$x^2+(2y)^2=4$

変形すると　　$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$

となります。



同様に，円 $x^2+y^2=a^2$ を x 軸の方向に $\dfrac{b}{a}$ 倍しただ円の方程式は，x を $\dfrac{a}{b}x$ におきかえて求めることができます。

《ここで一息》

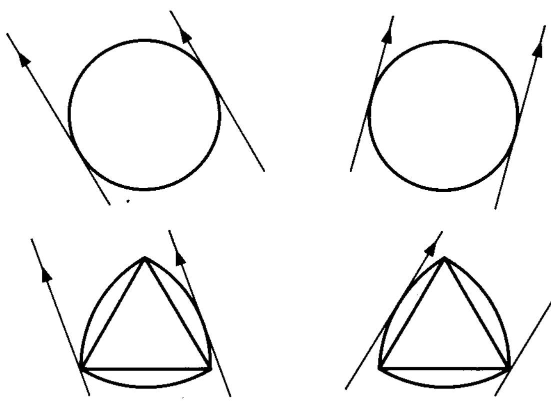
幅は一定

円を平行な2直線ではさみます。どの方向からはさんでも，2直線間の距離は一定ですね。

円のほかに，このような図形がありますか。

正三角形の各頂点を中心とし，その1辺を半径とする円弧で作られた図形がそれです。

「ルーローの三角形」とよばれています。

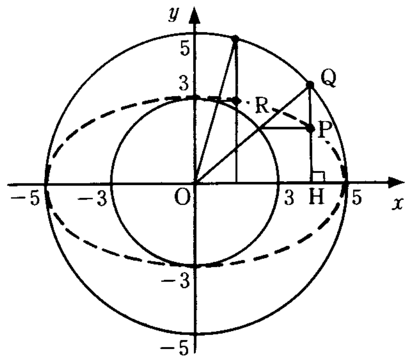


実際に，円の方程式からだ円の方程式を導いてみましょう。

トレーニング

解答は 113 ページ

4 円 $x^2+y^2=5^2$ 上の点Qから x 軸に下ろした垂線をQH, OQと円 $x^2+y^2=3^2$ との交点をR, 点Rを通り x 軸に平行な直線とQHとの交点をPとする。



点Qが円 $x^2+y^2=5^2$ 上を動くとき，点Pはだ円 $\dfrac{x^2}{5^2}+\dfrac{y^2}{3^2}=1$ 上を動くことを，次の $\boxed{}$ をうめながら示せ。

△QOH において

$$\mathrm{QO}:\mathrm{RO}=5:\boxed{},\qquad \mathrm{RP}\parallel\mathrm{OH}$$

であるから

$$\mathrm{QH}:\mathrm{PH}=5:\boxed{}\qquad \text{ゆえに}\qquad \mathrm{PH}=\frac{\boxed{}}{5}\mathrm{QH}$$

これから，点Pは円 $x^2+y^2=5^2$ を y 軸の方向に $\dfrac{\boxed{}}{5}$ 倍した図形上を動く。

その図形の方程式は　$x^2+(\boxed{})^2=5^2$

すなわち　$\boxed{}=1$

したがって，点Pはだ円 $\boxed{}$ 上を動く。

5 点Q$(\alpha,\ \beta)$ の x 座標だけを $\dfrac{1}{2}$ 倍した点をP$(x,\ y)$ とする。点Qが円 $x^2+y^2=4$ 上を動くとき，点Pはどのような図形上を動くか。

次は，もう少し一般的な軌跡の問題です。

例 題 1 　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　**内分点の軌跡**

長さ 3 の線分 PQ の端 P が x 軸上を，端 Q が y 軸上を動くとき，線分 PQ を 2:1 の比に内分する点 R の軌跡を求めよ。

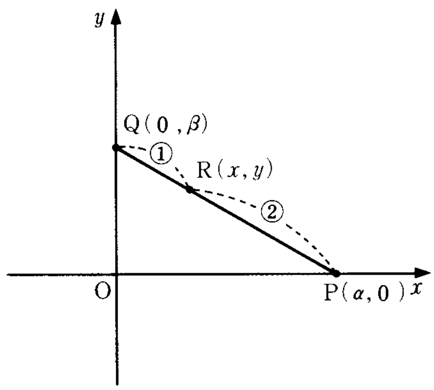
考え方　点 R の座標を $(x,\ y)$ とし，x と y の関係式を求めればよい。P，Q がそれぞれ x 軸，y 軸上を動き，PQ の長さが 3 であることを，どのように表したらよいか考える。

また，2 点 $(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$ を結ぶ線分を $m:n$ の比に内分する点の座標は

$$\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n},\ \frac{my_2+ny_1}{m+n}\right)$$

である。

解　答　点 P，Q の座標をそれぞれ $(\alpha,\ 0)$，$(0,\ \beta)$，点 R の座標を $(x,\ y)$ とする。



点 R が線分 PQ を 2:1 の比に内分する点であることを式で表すと

$$\begin{cases} x=\dfrac{\alpha}{3} & \Leftarrow \dfrac{1\cdot\alpha+2\cdot 0}{2+1} \\ y=\dfrac{2\beta}{3} & \Leftarrow \dfrac{1\cdot 0+2\cdot\beta}{2+1} \end{cases}$$

ゆえに

$$\begin{cases} \alpha=3x \\ \beta=\dfrac{3}{2}y \end{cases} \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

一方，PQ=3 であるから

$$\sqrt{\alpha^2+\beta^2}=3$$

両辺を 2 乗すると

$$\alpha^2+\beta^2=3^2 \quad \cdots\cdots\cdots ②$$

①を②に代入すると

$$(3x)^2+\left(\frac{3}{2}y\right)^2=3^2$$

$$x^2+\frac{y^2}{4}=1$$

したがって，点 R の軌跡は**だ円 $x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$** である。

それでは，次のトレーニングで軌跡の求め方を十分練習しましょう。

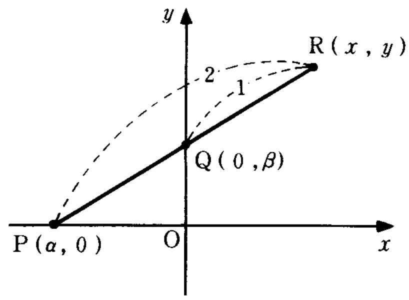
2 点 $(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$ を結ぶ線分を $m:n$ の比に外分する点の座標は

$$\left(\frac{mx_2-nx_1}{m-n},\ \frac{my_2-ny_1}{m-n}\right)$$

ですね。

 解答は 113 ページ

6 長さ1の線分PQの端Pが x 軸上を，端Qが y 軸上を動くとき，線分PQを2:1の比に外分する点Rの軌跡を，次の問いにしたがって求めよ。



(1) 点P，Qの座標をそれぞれ $(\alpha,\ 0)$，$(0,\ \beta)$，点Rの座標を $(x,\ y)$ とし，点Rが線分PQを2:1の比に外分する点であることから，x，y をそれぞれ α，β を使って表せ。

(2) 線分PQの長さが1であることを，α，β を使って表せ。

(3) (1)から α，β の値を求め，それらを(2)で求めた式に代入して，点Rの軌跡を求めよ。

7 点Pから直線 $x=-4$ までの距離と，点Pから定点F$(-1,\ 0)$ までの距離との比が2:1であるとき，点Pの軌跡を求めよ。

きょうは，少しむずかしかったと思いますが，よくがんばりましたね。
次の日も，この調子でがんばりましょう。

第 7 日

学習日　　月　　日

双　曲　線

双曲線………２つの曲線で構成

数学Ⅰで学習した反比例 $y=\dfrac{1}{x}$ のグラフは双曲線です。図形的にみて，どのような曲線を双曲線というのでしょうか。きょうは，そのことを中心に学習します。

まず，グラフと座標軸との交点の求め方などを復習しましょう。

復習マークシート　　**解答欄のあてはまる記号を黒くぬりつぶそう。**

1　数直線上で，次の２数にそれぞれ対応する２点間の距離はどれか。

(1)　３と７

㋐　-10　　㋑　-4　　㋒　4　　㋓　7

(2)　-3 と５

㋐　-8　　㋑　-2　　㋒　2　　㋓　8

2　直線 $3x+2y=6$ について，次の問いに答えよ。

(1)　x 軸との交点の座標はどれか。

㋐　$(2,\ 0)$　　㋑　$(3,\ 0)$　　㋒　$(-2,\ 0)$　　㋓　$(-3,\ 0)$

(2)　y 軸との交点の座標はどれか。

㋐　$(0,\ 2)$　　㋑　$(0,\ 3)$　　㋒　$(0,\ -2)$　　㋓　$(0,\ -3)$

3　次の方程式と同じ解をもつ方程式はどれか。

(1)　$|x|=2$

㋐　$x=-2$　　㋑　$x=2$

㋒　$x^2=2$　　㋓　$x^2=4$

(2)　$|x-1|=2$

㋐　$x-1=-2$　　㋑　$x-1=2$

㋒　$(x-1)^2=2$　　㋓　$(x-1)^2=4$

解答欄		
1	(1)	㋐ ㋑ ㋒ ㋓
	(2)	㋐ ㋑ ㋒ ㋓
2	(1)	㋐ ㋑ ㋒ ㋓
	(2)	㋐ ㋑ ㋒ ㋓
3	(1)	㋐ ㋑ ㋒ ㋓
	(2)	㋐ ㋑ ㋒ ㋓

復習マークシートの解答は，順に，㋒，㋓，㋐，㋑，㋓，㋓です。
では，どういう曲線を双曲線というのか学習しましょう。

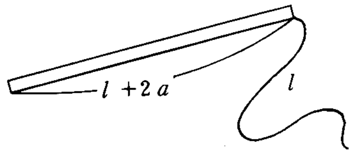
◈双曲線の図形的な定義は

双曲線 「平面上で，2 定点 F，F′ からの距離の差が一定である点の軌跡」を**双曲線**といい，
焦点 F，F′ を双曲線の**焦点**といいます。

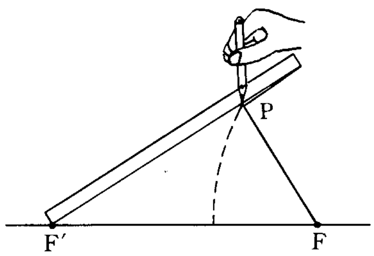
では，双曲線を，道具を使ってかくには，どうしたらよいでしょう。

◈双曲線をかくには

右の図のように，長さ l の糸と，糸より長さが $2a$ だけ長い定規を用意し，定規の端にこの糸の端を固定します。定規の長さと糸の長さの差が $2a$ になっていますね。



この糸と定規の端を，それぞれ点 F，F′ に固定し，定規は点 F′ で自由に回転できるようにしておきます。鉛筆の先 P で糸をぴんと張りながら，鉛筆を定規に沿って動かせば，PF′−PF$=2a$ でつねに一定ですから，双曲線の一部がかけます。



つぎに，定規の端を F，糸の端を F′ というように固定する点をかえてかくと，双曲線全体をかくことができます。

◈双曲線の対称性は

双曲線は，そのかき方からもわかるように，

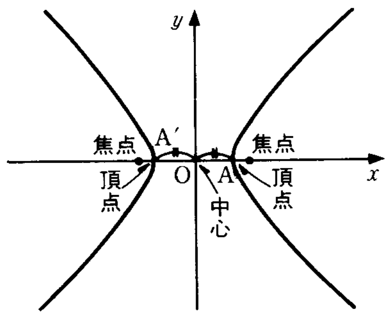
- 2 つの焦点を通る直線
- 焦点を結ぶ線分の垂直 2 等分線

に関して対称ですし，

- 焦点を結ぶ線分の中点 O

に関しても対称です。

中心 この点 O を，双曲線の**中心**といいます。
頂点 また，2 つの焦点を通る直線と双曲線との交点
主軸 A，A′ を**頂点**，AA′ を**主軸**といいます。



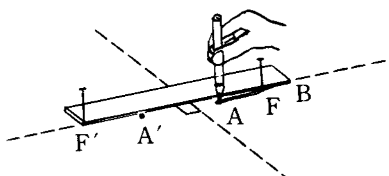
双曲線のかき方はわかりましたね。それを確かめるために，次のトレーニングをしましょう。

トレーニング

解答は 114 ページ

1 **長さ l の糸と，長さ $l+2a$ の定規を使って双曲線をかくとする。双曲線の頂点を A，A′ とすると，線分 AA′ の長さは $2a$ であることを，次の $\boxed{}$ をうめながら説明せよ。**

定規と糸の端をそれぞれ点 F′, F に固定して，双曲線をかく。
定規が直線 FF′ と重なり，鉛筆の先が点 A にきたときを考える。



(定規の長さ)−(糸の長さ)= $\boxed{}$ であるから

$$\mathrm{F'B}-(\mathrm{AB}+\mathrm{AF})=(\mathrm{F'A}+\boxed{})-(\mathrm{AB}+\mathrm{AF})$$
$$=\mathrm{F'A}-\mathrm{AF}=2a$$

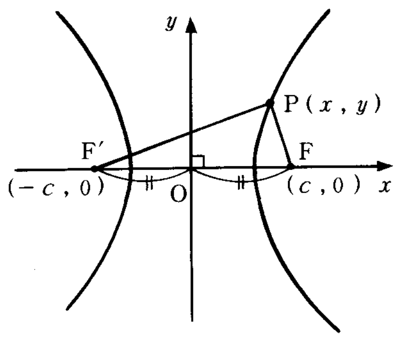
ところで，双曲線のかき方から，$\mathrm{F'A'}=\boxed{}$ であるから

$$\mathrm{F'A}-\mathrm{AF}=(\mathrm{F'A'}+\mathrm{A'A})-\mathrm{AF}$$
$$=\boxed{}$$

ゆえに，$\mathrm{A'A}=\boxed{}$ となる。

双曲線はどんな方程式で表せるでしょうか。どのように座標軸をとって考えればよいのでしょうか。

◈双曲線の方程式を求めよう



2つの焦点 F，F′ を通る直線を x 軸，線分 FF′ の垂直2等分線を y 軸にとると，双曲線の対称性から，$c>0$ として

$$\mathrm{F}(c,\ 0),\qquad \mathrm{F'}(-c,\ 0)$$

と表すことができます。

2定点 F，F′ からの距離の差を $2a$ とし

$$|\mathrm{PF}-\mathrm{PF'}|=2a \qquad \cdots\cdots\cdots①$$

となる点 P の座標を $(x,\ y)$ とします。

このとき，$|\mathrm{PF}-\mathrm{PF'}|<\mathrm{FF'}$ から

$c>a>0$ です。①を x，y，c を使って表すと

$|\mathrm{PF}-\mathrm{PF'}|=2a$ すなわち $\mathrm{PF}-\mathrm{PF'}=\pm 2a$ ⇦ $2a$ または $-2a$ のこと。

から $\sqrt{(x-c)^2+y^2}-\sqrt{(x+c)^2+y^2}=\pm 2a$

ゆえに $\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\sqrt{(x+c)^2+y^2}\pm 2a$

両辺を2乗すると

$$(x-c)^2+y^2=(x+c)^2+y^2\pm 4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+4a^2$$

整理すると

$$\pm a\sqrt{(x+c)^2+y^2}=-cx-a^2$$

さらに両辺を2乗して整理すると

$$(c^2-a^2)x^2-a^2y^2=a^2(c^2-a^2)$$

$\sqrt{c^2-a^2}=b$ とおくと ⇦ $c>a$ から $b>0$

$$b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$$

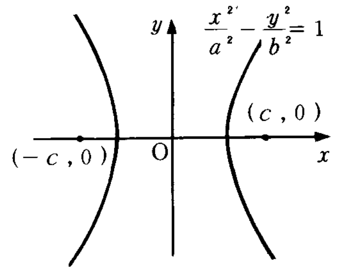
両辺を a^2b^2 で割ると $\boldsymbol{\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1}$

標準形　この式を，双曲線の方程式の**標準形**といいます。

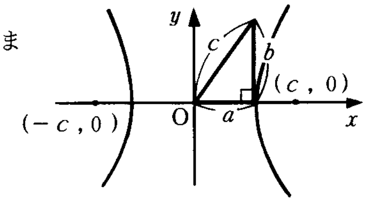
□双曲線の方程式□

$c>a>0$，$b=\sqrt{c^2-a^2}$ とするとき
2定点 $(c,\ 0)$，$(-c,\ 0)$ からの距離の差が $2a$ の点の軌跡である双曲線の方程式は

$$\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1}$$



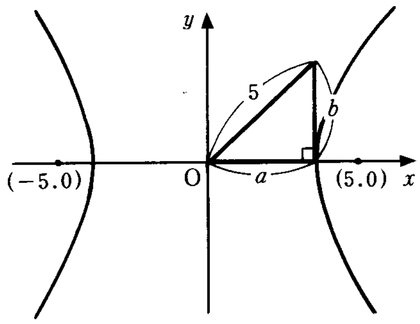
—注—
a, b, c は右の図のように，直角三角形の3辺の長さになっています。
このことはとてもたいせつです。



では，双曲線の方程式を求める練習をしましょう。

基本例題 1 ——— 双曲線の方程式

2点 (5, 0), (−5, 0) を焦点とし，この2点からの距離の差が8の点の軌跡である双曲線の方程式を求めよ。



考え方 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ の a, b にあたる値を求めればよい。
$2a=8$ であることから a の値はすぐにわかるから，あとは，右の図を参考にして b の値を求めればよい。

解　答 2点 $(c, 0)$, $(-c, 0)$ からの距離の差が $2a$ の点の軌跡である双曲線の方程式は

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad ただし，b=\sqrt{c^2-a^2}$$

ところで，$2a=8$ から　$a=4$
これと $c=5$ から　$b=\sqrt{5^2-4^2}=\sqrt{9}=3$
ゆえに，求める双曲線の方程式は　$\boldsymbol{\dfrac{x^2}{4^2}-\dfrac{y^2}{3^2}=1}$

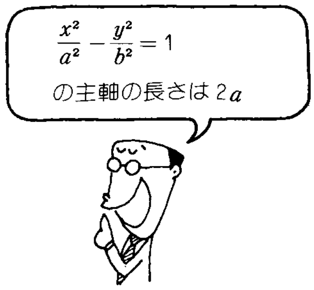
上の基本例題にならって，次のトレーニングをしましょう。

トレーニング

解答は 114 ページ

2 **2点 (5, 0), (−5, 0) を焦点とし，この2点からの距離の差が6の点の軌跡である双曲線の方程式を求めよ。**

3 **焦点の座標が $(3,\ 0)$，$(-3,\ 0)$ で，主軸の長さが 4 である双曲線の方程式を求めよ。**



4 **焦点の座標が $(6,\ 0)$，$(-6,\ 0)$ で，頂点の座標が $(3,\ 0)$，$(-3,\ 0)$ である双曲線の方程式を求めよ。**

焦点が y 軸上にあるとき，双曲線の方程式はどうなるでしょうか。

◈焦点が y 軸上にあると………

焦点が x 軸上にあるときと同様に計算していくと

$c>\underline{b}>0,\quad \underline{a=\sqrt{c^2-b^2}}$

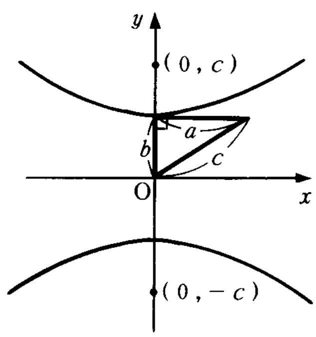
のとき，2 定点 $\underline{(0,\ c)}$，$\underline{(0,\ -c)}$ からの距離の差が $\underline{2b}$ の点の軌跡である双曲線の方程式は

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$$

書きなおすと

$$\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1}$$ ⇦ この形も標準形といいます。

となります。



焦点が x 軸上にあるときは，＿＿ の部分がちがっていますね。

図形を頭にえがきながら，次のトレーニングをしましょう。

トレーニング　解答は114ページ

5 2点 $(0,\ 5)$, $(0,\ -5)$ を焦点とし，この2点からの距離の差が6の点の軌跡である双曲線の方程式を求めよ。

ヒント　2点 $(0,\ c)$, $(0,\ -c)$ を焦点とし，この2点からの距離の差が $2b$ の点の軌跡である双曲線の方程式は　$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=-1$　ただし，$a=\sqrt{c^2-b^2}$

つぎに，双曲線の方程式から焦点を求める方法を考えてみましょう。

◈双曲線の焦点を求めるには

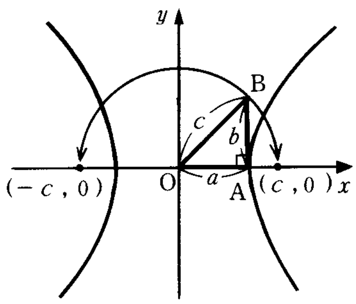
双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ………① の主軸は x 軸上にあります。

頂点は双曲線と主軸との交点ですから，①に $y=0$ を代入して得られる x についての方程式を解けば，頂点の x 座標が求められます。

すなわち，頂点の座標は，$(a,\ 0)$, $(-a,\ 0)$ です。

頂点 $\mathrm{A}(a,\ 0)$ において主軸に垂線を立て，その上に長さ b の線分 AB をとります。

このとき，中心 O と点 B との距離，すなわち線分 OB の長さを c とすると，双曲線①の焦点の座標は $(c,\ 0)$, $(-c,\ 0)$ となるのです。



だ円のときと同様に，a, b, c は直角三角形の3辺の長さになっていますね。

$c=\sqrt{a^2+b^2}$ ですから，焦点の座標は

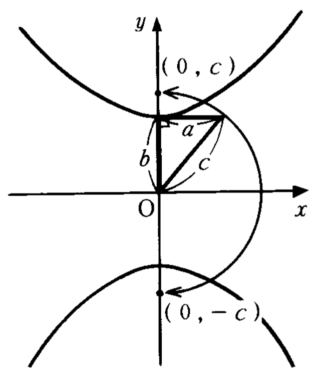
$$(\sqrt{a^2+b^2},\ 0),\ (-\sqrt{a^2+b^2},\ 0)$$

であることがわかります。

双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=-1$ についても，右の図のように考えていけば，焦点の座標は

$$(0,\ \sqrt{a^2+b^2}),\ (0,\ -\sqrt{a^2+b^2})$$

であることがわかります。



—注—

$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=-1$ に $y=0$ を代入しても，これをみたす x の実数の値は存在しないので，主軸は x 軸上にはないことがわかります。

焦点は主軸をふくむ直線上にあることを忘れないように。

□双曲線の焦点の座標□

双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ の焦点の座標は

$(\sqrt{a^2+b^2},\ 0)$，$(-\sqrt{a^2+b^2},\ 0)$

双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=-1$ の焦点の座標は

$(0,\ \sqrt{a^2+b^2}\ )$，$(0,\ -\sqrt{a^2+b^2}\ )$

—注—

丸暗記するよりも，a，b，c が直角三角形の 3 辺の長さになっている図を頭に入れておいたほうがよい。

それでは，次の基本例題で，実際に焦点の座標の求め方を確認しましょう。

基本例題 2 　　　　**双曲線の焦点**

双曲線 $x^2-\dfrac{y^2}{4}=1$ について，次の問いに答えよ。

(1)　この双曲線の焦点 F，F′ の座標を求めよ。

(2)　この双曲線上に点 P をとるとき，PF と PF′ との関係を式で表せ。

考え方　双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ の焦点の座標を，$c>0$ として，$(c,\ 0)$，$(-c,\ 0)$ とすると，

a，b，c は直角三角形の 3 辺の長さになり　　$c=\sqrt{a^2+b^2}$

PF と PF′ の差は一定で，その値は主軸の長さに等しい。

解　答　(1)　$x^2-\dfrac{y^2}{4}=1$ を標準形になおすと

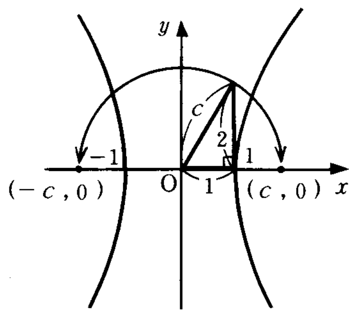
$$\frac{x^2}{1^2}-\frac{y^2}{2^2}=1$$

$c>0$ として，焦点の座標を $(c,\ 0)$，$(-c,\ 0)$ とすると

$$c=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$$

ゆえに，焦点 F，F′ の座標は

$$(\sqrt{5},\ 0),\ (-\sqrt{5},\ 0)$$



(2)　PF と PF′ の差は一定で，その値は主軸の長さに等しい。

頂点の座標は $(1,\ 0)$，$(-1,\ 0)$ であるから，主軸の長さは　　2

ゆえに　　$|\mathbf{PF}-\mathbf{PF'}|=\mathbf{2}$

基本例題にならって，次のトレーニングをしましょう。

トレーニング

解答は 114 ページ

6 **双曲線 $\dfrac{x^2}{4^2}-\dfrac{y^2}{3^2}=-1$ について，次の問いに答えよ。**

(1) この双曲線の頂点と焦点は x 軸上，y 軸上のどちらにあるか。

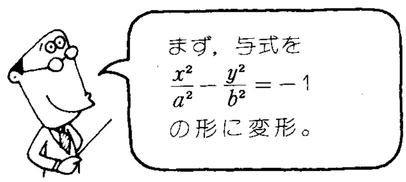
(2) この双曲線の頂点の座標を求めよ。

(3) この双曲線の焦点の座標を求めよ。

7 **次の双曲線の頂点，焦点の座標を求めよ。**

(1) $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{5}=1$

(2) $4x^2-9y^2=-1$



きょうの学習はこれで終わりです。図形が多く出てきましたが，しっかり頭にはいりましたね。

第 8 日

双曲線の漸近線

学習日　月　日

漸近線(ぜんきんせん)………曲線がどんどん近づいていく直線

漸近線ということばは，数学Ⅰでも学習しましたね。
きょうは，双曲線の漸近線になるのはどんな直線かを学習し，双曲線のグラフをかいてみましょう。

双曲線の頂点，焦点，主軸については，もうしっかり理解していますね。焦点が x 軸上にある場合と y 軸上にある場合とでは，双曲線の方程式がどうちがうか，今までに学習したことを簡単にチェックしておきましょう。

復習マークシート　解答欄のあてはまる記号を黒くぬりつぶそう。

1　次の方程式で表される曲線のうちで，焦点が x 軸上にある双曲線はどれか。

㋐ $\dfrac{x^2}{3^2}+\dfrac{y^2}{2^2}=1$　㋑ $\dfrac{x^2}{3^2}-\dfrac{y^2}{2^2}=1$　㋒ $x^2+y^2=1$　㋓ $x^2-y^2=-1$

2　次の方程式で表される曲線のうちで，焦点が y 軸上にある双曲線はどれか。

㋐ $\dfrac{x^2}{3^2}+\dfrac{y^2}{2^2}=1$　㋑ $\dfrac{x^2}{3^2}-\dfrac{y^2}{2^2}=1$　㋒ $x^2+y^2=1$　㋓ $x^2-y^2=-1$

3　双曲線 $\dfrac{x^2}{3^2}-\dfrac{y^2}{4^2}=1$ について，次の問いに答えよ。

(1)　この双曲線の頂点の座標であるものはどれか。

㋐ (0，3)　㋑ (0，4)　㋒ (3，0)　㋓ (4，0)

(2)　この双曲線の焦点の座標であるものはどれか。

㋐ (5，0)　㋑ (0，5)　㋒ $(\sqrt{7},\ 0)$　㋓ $(0,\ \sqrt{7})$

(3)　この双曲線の主軸の長さはどれか。

㋐ 3　㋑ 4　㋒ 6　㋓ 8

(4)　この双曲線の2つの焦点から双曲線上の点までの距離の差はどれか。

㋐ 1　㋑ 3　㋒ 4　㋓ 6

4　直線 $y=mx+n$ と $y=m'x+n'$ が垂直になる条件はどれか。

㋐ $mm'=1$　㋑ $mm'=-1$

㋒ $nn'=1$　㋓ $nn'=-1$

解答欄		
1		㋐ ㋑ ㋒ ㋓
2		㋐ ㋑ ㋒ ㋓
3	(1)	㋐ ㋑ ㋒ ㋓
	(2)	㋐ ㋑ ㋒ ㋓
	(3)	㋐ ㋑ ㋒ ㋓
	(4)	㋐ ㋑ ㋒ ㋓
4		㋐ ㋑ ㋒ ㋓

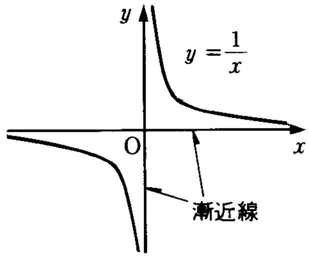
復習マークシートの解答は，順に，㋑，㋓，㋒，㋐，㋒，㋓，㋑です。
きょうは，双曲線の形について，もう少しくわしく調べることにします。

◈双曲線は，ある直線にかぎりなく近づく

座標平面上において，双曲線上の点 P が原点からかぎりなく遠ざかるとき，点 P からの距離がかぎりなく 0 に近づく直線が存在します。

漸近線　そのような直線を，双曲線の**漸近線**といいます。

数学 I で学習したように，分数関数 $y=\dfrac{1}{x}$ のグラフは双曲線ですが，その漸近線はどれでしたか。



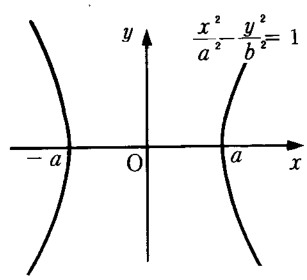
グラフをかいてみるとわかりますね。
そう，x 軸と y 軸です。

◈双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ の漸近線は

それでは，双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ………① の漸近線を求めてみましょう。

①を y について解くと

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$$



となります。根号の中は負になりませんから

$$x\leqq -a,\ x\geqq a \qquad \Leftarrow\ a>0$$

ですね。

双曲線①のグラフは，x 軸および y 軸に関して対称ですから，$x\geqq 0$，$y\geqq 0$ の部分で考えることにします。このとき

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}\quad (x\geqq a) \qquad ………②$$

となりますが，この右辺は

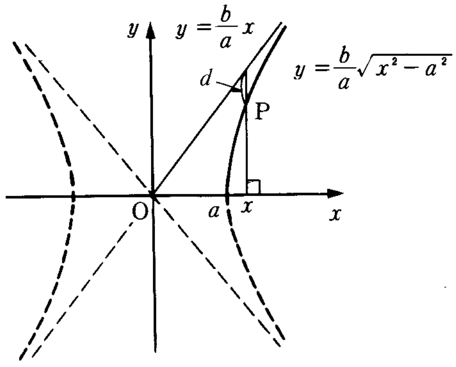
$$\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}=\frac{b}{a}\sqrt{x^2\left(1-\frac{a^2}{x^2}\right)}=\frac{b}{a}x\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}$$

と変形できます。

x の値が大きくなればなるほど，$\dfrac{a^2}{x^2}$ の値は 0 に近くなり，$\sqrt{1-\dfrac{a^2}{x^2}}$ の値は 1 に近くなっていきますから，$\dfrac{b}{a}x\sqrt{1-\dfrac{a^2}{x^2}}$ は $\dfrac{b}{a}x$ とほぼ等しくなると考えられます。

したがって，双曲線②上の点 P は原点から遠ざかるにつれて，直線 $y=\dfrac{b}{a}x$ にかぎりなく近づくことが予想されます。確かめてみましょう。

$d=\dfrac{b}{a}x-\dfrac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$ とすると，d は右の図のような線分の長さになり



$$d=\frac{b}{a}\left(x-\sqrt{x^2-a^2}\right)$$

$$=\frac{b}{a}\cdot\frac{(x-\sqrt{x^2-a^2})(x+\sqrt{x^2-a^2})}{x+\sqrt{x^2-a^2}}$$
$$=\frac{b}{a}\cdot\frac{a^2}{x+\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{ab}{x+\sqrt{x^2-a^2}}$$

x の値が大きくなればなるほど，この分母の値はいくらでも大きくなりますから，d の値はかぎりなく 0 に近くなります。

したがって，直線 $y=\frac{b}{a}x$ が，$x\geqq 0$，$y\geqq 0$ の部分での，双曲線②の漸近線であることがわかります。

◆双曲線の漸近線の求め方は

双曲線 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ と直線 $y=\frac{b}{a}x$ は，どちらも原点 O に関して対称ですから，直線 $y=\frac{b}{a}x$ はこの双曲線の第 3 象限の部分についても漸近線になっています。また，この双曲線は y 軸に関しても対称ですから，$y=\frac{b}{a}x$ と y 軸に関して対称な直線 $y=-\frac{b}{a}x$ は，この双曲線の第 2，第 4 象限の部分の漸近線です。

ところで，$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ の右辺を 0 とおいてみると　$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$

この式の左辺を因数分解すると　$\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)=0$

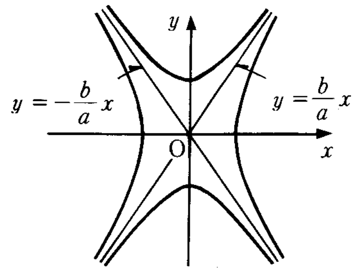
ゆえに　$y=\frac{b}{a}x$，　$y=-\frac{b}{a}x$

これは漸近線の方程式でしたから，**双曲線 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ の漸近線の方程式は $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$ として求められる**，と覚えておいてもよいですね。

双曲線 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$ の漸近線も，$y=\pm\frac{b}{a}x$ です。

□漸近線の方程式□

双曲線 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，　$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$
の漸近線はどちらも
直線 $y=\frac{b}{a}x$　と　$y=-\frac{b}{a}x$
である。



―注―

漸近線の方程式は，$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$ から求めることができます。

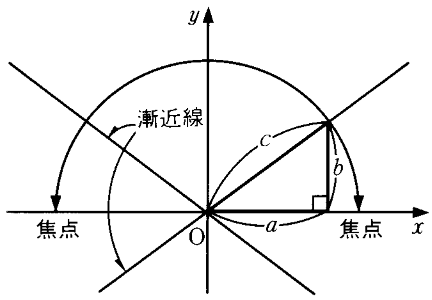
それでは，実際に双曲線の漸近線を求め，双曲線のグラフをかいてみましょう。

基本例題 1 ―― 双曲線の漸近線とそのグラフ

双曲線 $\dfrac{x^2}{4^2}-\dfrac{y^2}{3^2}=1$ の焦点の座標と漸近線の方程式を求め，そのグラフをかけ。

考え方　$c>0$ として焦点の座標を $(c,\ 0)$，$(-c,\ 0)$ とすると，c は右の図の直角三角形の斜辺の長さである。

漸近線は，この斜辺をふくむ直線と，この直線と y 軸に関して対称な直線である。



すなわち，双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ の焦点は

$$(\sqrt{a^2+b^2},\ 0),\ (-\sqrt{a^2+b^2},\ 0)$$

漸近線は，$y=\pm\dfrac{b}{a}x$ である。

ここで，a，b にあたる値は，$a=4$，$b=3$ である。

解　答　$c>0$ として焦点の座標を $(c,\ 0)$，$(-c,\ 0)$ とすると　　$c=\sqrt{4^2+3^2}=\sqrt{25}=5$

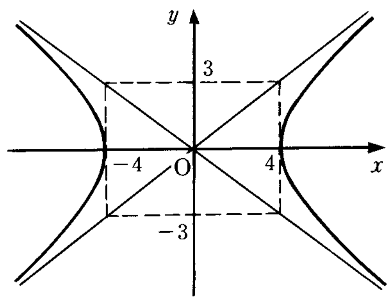
ゆえに，焦点の座標は

$$\boldsymbol{(5,\ 0),\ (-5,\ 0)}$$

漸近線の方程式は

$$\boldsymbol{y=\pm\frac{3}{4}x}$$

グラフは右の図のようになる。



―注―

この場合，漸近線の方程式は $\dfrac{x^2}{4^2}-\dfrac{y^2}{3^2}=0$ から

$$\left(\frac{x}{4}-\frac{y}{3}\right)\left(\frac{x}{4}+\frac{y}{3}\right)=0$$

ゆえに　$\dfrac{x}{4}-\dfrac{y}{3}=0,\quad \dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{3}=0$

これから，$y=\pm\dfrac{3}{4}x$ と求めることもできる。

また，双曲線のグラフをかくときは，漸近線を必ずかくこと。

それではトレーニングです。漸近線を先にかくと，双曲線のグラフはかきやすいですね。

トレーニング

解答は 115 ページ

1 **双曲線 $\dfrac{x^2}{4^2}-\dfrac{y^2}{3^2}=-1$ について，次の問いに答えよ。**

(1) この双曲線の焦点は，x 軸上，y 軸上のどちらにあるか。

(2) この双曲線の焦点の座標を求めよ。

(3) この双曲線の漸近線の方程式を求めよ。

(4) この双曲線のグラフをかけ。

2 **次の双曲線の焦点の座標と漸近線の方程式を求め，そのグラフをかけ。**

(1) $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{4}=1$

(2) $y^2-x^2=4$

3 **焦点 $(3,\ 0)$，$(-3,\ 0)$，漸近線 $y=\pm\dfrac{1}{2}x$ の双曲線の方程式を求めよ。**

数学Ⅰで学習したように，双曲線 $y=\dfrac{1}{x}$ の漸近線は直交していました。一般に，漸近線が直交するのはどんな場合か考えてみましょう。

◈漸近線が直交するのは………

直角双曲線

双曲線の2本の漸近線が直交するとき，その双曲線を**直角双曲線**といいます。

ところで，双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ………①，$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=-1$ ………②

の漸近線は，いずれも $y=\pm\dfrac{b}{a}x$ です。

双曲線①，②がそれぞれ直角双曲線になるのはどのような場合でしょう。

双曲線①，②の漸近線 $y=\dfrac{b}{a}x$ と $y=-\dfrac{b}{a}x$ とが直交するのですから

$$\frac{b}{a}\left(-\frac{b}{a}\right)=-1$$

すなわち　$a^2=b^2$

ところで，$a>0$，$b>0$ ですから

$$a=b$$

このとき，双曲線①，②は直角双曲線になります。

したがって，

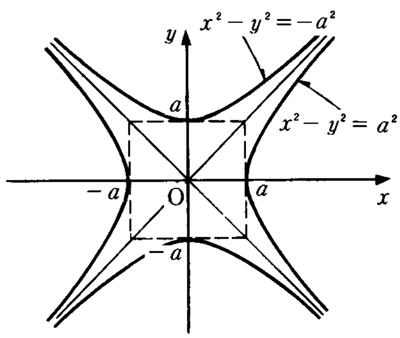
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2}=1,\quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2}=-1$$

すなわち

$$\boldsymbol{x^2-y^2=a^2} \text{ ………③},\quad \boldsymbol{x^2-y^2=-a^2} \text{ ………④}$$

の形で表される双曲線は，直角双曲線になります。

双曲線③，④の漸近線はともに，$y=x$，$y=-x$ です。



それでは，直角双曲線についての問題を解いてみましょう。

トレーニング　解答は116ページ

4　2点 (2, 0)，(−2, 0) を焦点とする直角双曲線の方程式を，次の □ をうめながら求めよ。

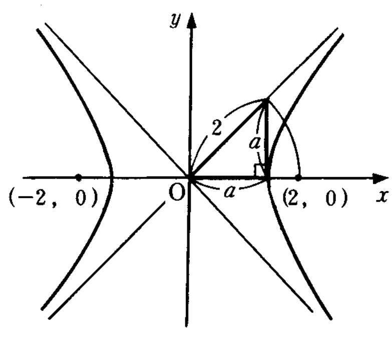
求める直角双曲線の方程式を $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{a^2}=1$ とする。

焦点の座標から　$a^2+a^2=\boxed{}^2$

ゆえに　$a^2=\boxed{}$

したがって，求める直角双曲線の方程式は

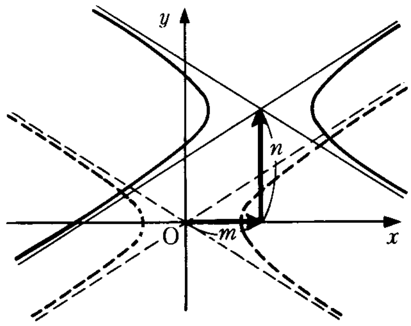
$\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{2}=1$　すなわち　$\boxed{}=2$



5 2点(0, 4), (0, −4)を焦点とする直角双曲線の方程式を求めよ。

つぎに，平行移動について学習します。漸近線の方程式はどうなるか，注意しながら学習していきましょう。

◈双曲線を平行移動すると



双曲線 $\dfrac{(x-m)^2}{a^2}-\dfrac{(y-n)^2}{b^2}=1$ ………①は

双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ………②を

x 軸の方向に m，y 軸の方向に n だけ平行移動したものです。

したがって，双曲線①の

中心の座標は　$(m,\ n)$

頂点の座標は　$(a+m,\ n)$　$(-a+m,\ n)$

焦点の座標は　$(\sqrt{a^2+b^2}+m,\ n)$，　$(-\sqrt{a^2+b^2}+m,\ n)$

漸近線の方程式は　$y-n=\pm\dfrac{b}{a}(x-m)$

となります。

だ円のときと同様に式を変形し，双曲線のグラフをかいてみましょう。

例 題1　　**$ax^2-by^2+cx+dy+e=0$ のグラフ**

方程式 $x^2-y^2-2x+4y-4=0$ はどのような図形を表すか。そのグラフをかけ。

考え方　x^2 の係数が1，y^2 の係数が −1 であるから，まず，与えられた方程式を $\dfrac{(x-m)^2}{a^2}-\dfrac{(y-n)^2}{b^2}=1$ の形に変形できないか考える。この形に変形できれば，双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ を x 軸の方向に m，y 軸の方向に n だけ平行移動したものとわかる。

解 答　$x^2-y^2-2x+4y-4$

$=x^2-2x-(y^2-4y)-4$

⇦ (x の2次式)−(y の2次式)の形に

$=\{(x^2-2x+1)-1\}-\{(y^2-4y+4)-4\}-4$

⇦ $x^2+ax+\left(\dfrac{a}{2}\right)^2$ の形をつくる。

$=(x-1)^2-(y-2)^2-1$

よって，$x^2-y^2-2x+4y-4=0$ は

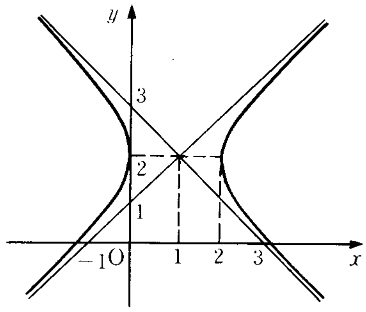
$(x-1)^2-(y-2)^2=1$ となる。

したがって，与えられた方程式は

双曲線 $x^2-y^2=1$　すなわち　$\dfrac{x^2}{1^2}-\dfrac{y^2}{1^2}=1$

を x 軸の方向に1，y 軸の方向に2だけ平行移動した双曲線を表す。

グラフは右上の図のようになる。



—注—

この双曲線は直角双曲線である。

平行移動について理解できているか，式の変形ができるか，次のトレーニングで確かめてみましょう。

トレーニング

解答は116ページ

6 **双曲線 $\dfrac{(x-1)^2}{4}-\dfrac{(y+2)^2}{9}=-1$ の頂点，焦点の座標と漸近線の方程式を，次の $\boxed{}$ をうめながら求めよ。**

与えられた双曲線は

双曲線 $\dfrac{x^2}{2^2}-\dfrac{y^2}{3^2}=-1$　………①

を x 軸の方向に $\boxed{}$，y 軸の方向に $\boxed{}$ だけ平行移動した双曲線である。

双曲線①の頂点の座標は　$(0,\ 3)$，$(0,\ -3)$

焦点の座標は　$(0,\ \sqrt{13})$，$(0,\ -\sqrt{13})$

漸近線の方程式は　$y=\pm\dfrac{3}{2}x$

であるから，与えられた双曲線の

頂点の座標は　$(1,\ 1)$，$(\boxed{},\ \boxed{})$

焦点の座標は　$(1,\ \sqrt{13}-2)$，$(\boxed{},\ \boxed{})$

漸近線の方程式は　$y+\boxed{}=\pm\dfrac{3}{2}\left(x-\boxed{}\right)$

すなわち　$y=\dfrac{3}{2}x-\dfrac{7}{2}$，$\boxed{}$

7 双曲線 $x^2-4y^2-2x=3$ の頂点，焦点の座標と漸近線の方程式を求めよ。

8 次の方程式はどのような図形を表すか。そのグラフをかけ。

(1) $x^2-y^2-4y=0$

(2) $4x^2-9y^2+16x+18y-29=0$

きょうの学習はこれで終わりです。式の変形のしかたはだいぶ慣れたと思います。次の日もがんばりましょう。

第 9 日

双曲線と直線

学習日　　月　　日

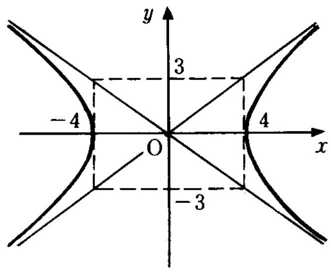
双曲線と直線の位置関係は………

きょうは，双曲線と直線の共有点の個数，軌跡が双曲線になるものなどについて学習します。双曲線のグラフを頭に思いうかべながら，学習を進めましょう。

双曲線についての基礎事項は十分理解できていると思います。漸近線など，きょうの学習と関連のある事項について，復習しておきましょう。

復習マークシート　　解答欄のあてはまる記号を黒くぬりつぶそう。

1　右のグラフをもとにして，双曲線 $\dfrac{x^2}{4^2}-\dfrac{y^2}{3^2}=1$ について，次の問いに答えよ。



(1)　この双曲線との共有点の個数が 0 である直線の方程式はどれか。

㋐　$y=5$　　㋑　$x=5$　　㋒　$y=-3$　　㋓　$x=-3$

(2)　この双曲線との共有点の個数が 1 である直線の方程式はどれか。

㋐　$y=4$　　㋑　$x=4$　　㋒　$y=3$　　㋓　$x=3$

(3)　この双曲線との共有点の個数が 2 である直線の方程式はどれか。

㋐　$y=3$　　㋑　$x=3$　　㋒　$x=-3$　　㋓　$x=-1$

2　漸近線の方程式が $y=\pm\dfrac{2}{3}x$ である双曲線の方程式はどれか。

㋐　$\dfrac{x^2}{3}-\dfrac{y^2}{2}=1$　　㋑　$\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{3}=1$　　㋒　$\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{4}=1$　　㋓　$\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}=1$

3　双曲線 $4x^2-9y^2=-1$ と共通の漸近線をもつ双曲線の方程式はどれか。

㋐　$4x^2-9y^2=1$　　㋑　$2x^2-3y^2=1$

㋒　$3x^2-2y^2=-1$　　㋓　$2x^2-3y^2=-1$

4　直角双曲線の方程式はどれか。

㋐　$2x^2-y^2=1$　　㋑　$x^2-2y^2=1$

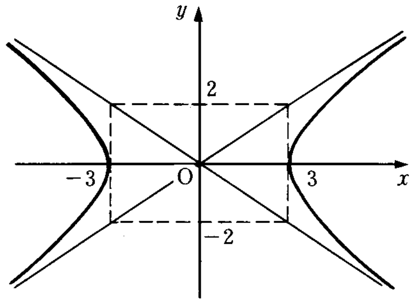
㋒　$x^2-y^2=4$　　㋓　$x^2-4y^2=-4$

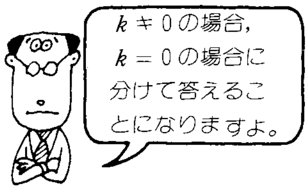
解答欄					
1	(1)	㋐	㋑	㋒	㋓
	(2)	㋐	㋑	㋒	㋓
	(3)	㋐	㋑	㋒	㋓
2		㋐	㋑	㋒	㋓
3		㋐	㋑	㋒	㋓
4		㋐	㋑	㋒	㋓

復習マークシートの解答は，順に，㋓，㋑，㋐，㋒，㋐，㋒です。
それでは，次のトレーニングをしてみましょう。

トレーニング　解答は117ページ

1 右の図は，双曲線 $\dfrac{x^2}{3^2}-\dfrac{y^2}{2^2}=1$ のグラフである。この図を利用して，直線 $y=\dfrac{2}{3}x+k$ との共有点の個数はどうなるか推定せよ。

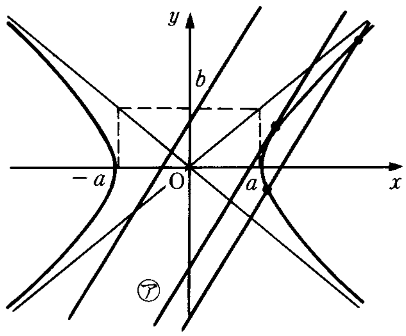




双曲線と直線の共有点の個数は，だ円などの場合より複雑そうですね。しっかり学習しましょう。

◈共有点の個数は

(iii) の場合



双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ………① と
直線 $y=mx+n$ ………② との共有点の個数はどうなるでしょう。
グラフをかいて調べると

	m の値の範囲	共有点の個数
(i)	$-\dfrac{b}{a}<m<\dfrac{b}{a}$	2
(ii)	$m=\pm\dfrac{b}{a}$	0 または 1
(iii)	$m<-\dfrac{b}{a}$，$m>\dfrac{b}{a}$	0，1，2

⇦ $\pm\dfrac{b}{a}$ は①の漸近線の傾きに等しい。

のいずれかであることがわかります。
直線②の傾き m と，漸近線の傾きとの間には，密接な関係がありますね。

直線 $x=k$ と双曲線①との共有点の個数がどうなるかは，**復習マークシート**$\boxed{1}$の結果から，$k<-a$，$k>a$ のとき 2，$k=\pm a$ のとき 1，$-a<k<a$ のとき 0 といえますね。

接する
接線
接点

ところで，直線が図の㋐のような位置にある場合，双曲線とその直線とは**接する**といい，その直線を**接線**，共有点のことを**接点**といいます。直線が双曲線とただ 1 点を共有しても，接線になるとはかぎりません。　⇦ トレーニング**1**の場合のように。
これは，放物線の場合と同様ですね。

それでは，もう少し中心が原点にない双曲線で確かめてみましょう。

基本例題 1 　　　　**双曲線と直線の共有点の個数**

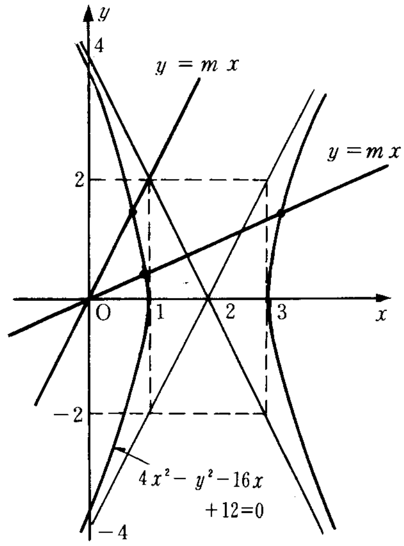
双曲線 $4x^2-y^2-16x+12=0$ と直線 $y=mx$ との共有点の個数は，m の値によってどのように変わるか調べよ。

考え方　まず，双曲線 $4x^2-y^2-16x+12=0$ ………①と

直線 $y=mx$ ………②の

グラフから，共有点の個数を推定しよう。

共有点の個数は，①，②を連立方程式として解いたときの x，y の実数解の組の個数に等しい。したがって，①と②から y を消去して x の 2 次方程式を導き，その異なる実数解の個数を調べればよい。



解　答

$$4x^2-y^2-16x+12=0 \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

$$y=mx \quad \cdots\cdots\cdots ②$$

②を①に代入すると

$$4x^2-(mx)^2-16x+12=0$$

整理すると

$$(4-m^2)x^2-16x+12=0 \quad \cdots\cdots\cdots ③$$

(I)　$4-m^2 \neq 0$，すなわち，$m \neq \pm 2$ のとき

③は x についての 2 次方程式であるから，その判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=(-8)^2-12(4-m^2)=12m^2+16$$

$12m^2+16 \geqq 16$ であるから　　$D>0$

したがって，方程式③は異なる 2 つの実数解をもつ。

(II)　$4-m^2=0$，すなわち，$m=\pm 2$ のとき

方程式③は，1 次方程式 $-16x+12=0$ である。

ゆえに　　$x=\dfrac{3}{4}$

したがって，方程式③の実数解は 1 つである。

(I)，(II)から，**$m \neq \pm 2$ のとき，共有点の個数は 2**

$m=\pm 2$ のとき，共有点の個数は 1

―注―

グラフから共有点の個数を正確に推定できるようになることがたいせつ。

①は $(x-2)^2-\dfrac{y^2}{4}=1$，すなわち，$\dfrac{(x-2)^2}{1^2}-\dfrac{y^2}{2^2}=1$ と変形してグラフをかく。

それでは，トレーニングです。この判別式は 2 次方程式の場合使えるのですから，y を消去して得られた方程式の x^2 の係数が 0 でないことを，まず確認してください。

トレーニング

解答は117ページ

2 双曲線 $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{4}=-1$ ………① と直線 $y=mx$ ………②との共有点の個数は，m の値によってどのように変わるか，次の問いにしたがって調べよ。

(1) ②を①に代入して，x についての2次方程式を導け。

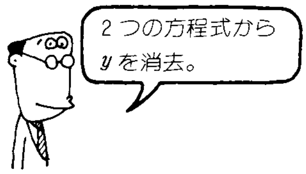
(2) (1)で導いた2次方程式の x^2 の係数が正または0の場合の m の値の範囲を求めよ。

(3) (2)の場合について，共有点の個数を求めよ。

(4) (1)で導いた2次方程式の x^2 の係数が負の場合の m の値の範囲を求めよ。

(5) (4)の場合について，共有点の個数を求めよ。

3 双曲線 $4x^2-y^2+2y-5=0$ と直線 $y=mx$ との共有点の個数は，m の値によってどのように変わるか調べよ。



4 双曲線 $x^2-4y^2=1$ に接する傾きが1の直線の方程式を求めよ。

ヒント　求める直線の方程式を $y=x+k$ とおく。

接線について，もう少し学習しましょう。

例 題 1 　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　**双曲線上の点における接線**

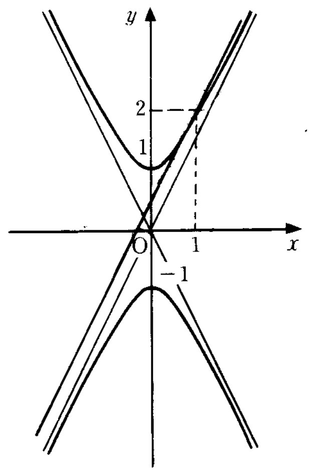
双曲線 $3x^2-y^2=-1$ 上の点 (1，2) における接線の方程式を求めよ。

考え方 　接線の傾きを m として，接線の方程式を表す。そして，双曲線と接線の方程式を連立方程式として y を消去し，得られた x についての 2 次方程式が重解をもつように，m の値を定めればよい。

解　答 　この接線の傾きを m とすると，接線の方程式は

$$y-2=m(x-1)$$

$$y=mx-m+2 \quad \cdots\cdots ①$$



$3x^2-y^2=-1$ と①を連立方程式として，y を消去すると

$$3x^2-(mx-m+2)^2=-1$$

整理すると

$$(3-m^2)x^2+2(m^2-2m)x-(m^2-4m+3)=0 \quad \cdots\cdots ②$$

$3-m^2 \neq 0$ のとき，②は x についての 2 次方程式であるから，その判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=(m^2-2m)^2+(3-m^2)(m^2-4m+3)$$

$$=4m^2-12m+9$$

$$=(2m-3)^2$$

この双曲線と直線①が接するのは $D=0$ のときであるから　$m=\frac{3}{2}$

これは，$3-m^2 \neq 0$ をみたす。

$m=\frac{3}{2}$ を①に代入して，求める接線の方程式は　$y=\frac{3}{2}x-\frac{3}{2}+2$

すなわち　$\boldsymbol{y=\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}}$

—注—

直線①が点 (1，2) で双曲線 $3x^2-y^2=-1$ と接するから，$x=1$ は 2 次方程式②の重解になっている。

解と係数の関係から　$1+1=-\frac{2(m^2-2m)}{3-m^2}$

分母をはらって整理すると　$m^2-3=m^2-2m$

ゆえに　$m=\frac{3}{2}$

このとき，方程式②は，$\frac{3}{4}x^2-\frac{3}{2}x+\frac{3}{4}=0$　すなわち　$x^2-2x+1=0$ となり，$x=1$ を確かに重解としてもつ。

このようにして m の値を求めてもよい。

例題にならって，双曲線上の点における接線の方程式を求めてみましょう。計算ミスのないように注意してください。

トレーニング　　解答は118ページ

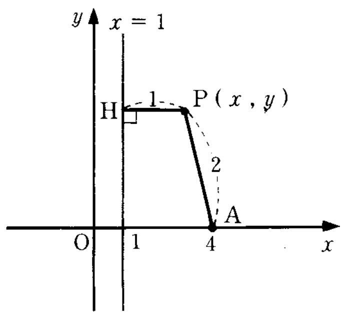
5 **双曲線 $x^2-3y^2=1$ 上の点 (2, 1) における接線の方程式を求めよ。**

つぎに，双曲線に関する軌跡の問題を学習しましょう。

例 題 2　　**双曲線になる点の軌跡**

点 A (4, 0) と直線 $x=1$ からの距離の比が $2:1$ である点 P の軌跡を求めよ。

考え方　点 P の座標を $(x,\ y)$ として，x と y の関係式を求めればよい。
点 P と直線 $x=1$ との距離は，点 P から直線 $x=1$ に下ろした垂線 PH の長さであるから，この場合は，PA=2PH から x と y の関係式を導く。



解　答　点 P の座標を $(x,\ y)$，点 P から直線 $x=1$ に下ろした垂線を PH とする。

$$\mathrm{PA}=\sqrt{(x-4)^2+y^2}$$
$$\mathrm{PH}=|x-1|$$

PA=2PH であるから

$$\sqrt{(x-4)^2+y^2}=2|x-1|$$

両辺を2乗すると　⇦ 両辺とも負ではないから

$$(x-4)^2+y^2=4(x-1)^2$$

整理すると　$3x^2-y^2=12$

$$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$$

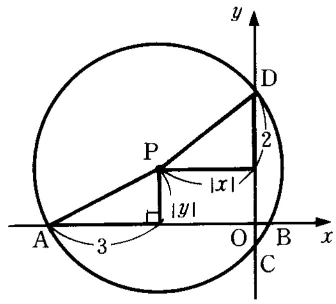
したがって，点 P の軌跡は**双曲線** $\boldsymbol{\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1}$ である。

それではトレーニングです。与えられた条件を，きちんと式におきかえてください。

トレーニング

解答は 118 ページ

6 **x 軸，y 軸からそれぞれ長さ 6，4 の線分を切りとる円の中心の軌跡を，次の $\boxed{\quad}$ をうめながら求めよ。**



円の中心 P の座標を $(x,\ y)$，円 P と x 軸との交点を A，B，y 軸との交点を C，D とする。

$$PA^2=|y|^2+\boxed{\quad}^2=y^2+\boxed{\quad}$$

$$PD^2=\left|\boxed{\quad}\right|^2+2^2=\boxed{\quad}+4$$

PA と PD は円 P の半径であるから

$$PA^2=\boxed{\quad}^2$$

ゆえに　$y^2+9=x^2+4$

変形して　$\boxed{\quad}=5$

したがって，求める円の中心の軌跡は，直角双曲線 $\boxed{\qquad}$ である。

7 **点 A$(5,\ 0)$ と直線 $x=\dfrac{16}{5}$ からの距離の比が $5:4$ である点 P の軌跡を求めよ。**

8 **2 点 A$(2,\ 0)$，B$(-2,\ 0)$ がある。いま，点 P をとり，△PAB の頂点 P と辺 AB の中点 O を結ぶ線分 PO の長さが $\sqrt{PA\cdot PB}$ に等しくなるようにする。このとき，点 P はどのような図形をえがくか。**

きょうの学習はここまでです。双曲線についてはよく理解できましたね。

第10日

2 次 曲 線

学習日　　月　　日

2次曲線とはどんな曲線？

x，y についての２次方程式で表される曲線について学習します。円，放物線，だ円，双曲線の方程式は，どれも x，y についての２次方程式でしたね。

今まで学習した放物線，だ円，双曲線について復習しておきましょう。基礎を確実に。これはひじょうにたいせつなことです。

復習マークシート　解答欄のあてはまる記号を黒くぬりつぶそう。

1　次の問いに答えよ。

(1)　放物線の方程式はどれか。

㋐　$x^2-y^2=0$　　㋑　$x^2-4y^2=1$　　㋒　$x+y^2=1$　　㋓　$4x^2+y^2=1$

(2)　だ円の方程式はどれか。

㋐　$x^2-y^2=0$　　㋑　$x^2-4y^2=1$　　㋒　$x+y^2=1$　　㋓　$4x^2+y^2=1$

(3)　双曲線の方程式はどれか。

㋐　$x^2-y^2=0$　　㋑　$x^2-4y^2=1$　　㋒　$x+y^2=1$　　㋓　$4x^2+y^2=1$

2　x，y についての２次方程式 $ax^2+by^2=1$ で表される図形について，次の問いに答えよ。

(1)　だ円になるのは，どの場合か。

㋐　$a>0$，$b=0$　　㋑　$a>0$，$b>0$

㋒　$a<0$，$b<0$　　㋓　$ab<0$

(2)　双曲線になるのは，どの場合か。

㋐　$a>0$，$b=0$　　㋑　$a>0$，$b>0$

㋒　$a<0$，$b<0$　　㋓　$ab<0$

(3)　２直線になるのは，どの場合か。

㋐　$a>0$，$b=0$　　㋑　$a>0$，$b>0$

㋒　$a<0$，$b<0$　　㋓　$ab<0$

解答欄					
1	(1)	㋐	㋑	㋒	㋓
	(2)	㋐	㋑	㋒	㋓
	(3)	㋐	㋑	㋒	㋓
2	(1)	㋐	㋑	㋒	㋓
	(2)	㋐	㋑	㋒	㋓
	(3)	㋐	㋑	㋒	㋓

復習マークシートの解答は，順に，㋒，㋓，㋑，㋑，㋓，㋐です。
さっそく，x，y の2次方程式で表されるのはどんな図形か，考えてみることにしましょう。

◈2次曲線とは

これまで学習してきた

円　$\boldsymbol{x^2+y^2=r^2}$　　$r>0$

放物線　$\boldsymbol{y^2=4px}$，$\boldsymbol{x^2=4py}$　　$p\neq 0$

だ円　$\boldsymbol{\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1}$　　$a>0$，$b>0$

双曲線　$\boldsymbol{\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1}$，$\boldsymbol{\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=-1}$　　$a>0$，$b>0$

2次曲線 は，x，y についての2次方程式で表されています。これらの曲線をまとめて**2次曲線**といいます。

円は，だ円の特別な場合と考えることもできます。

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ で，$a=b$ となる場合が円でしたね。

そこで，〝放物線，だ円，双曲線をまとめて2次曲線という〃といってもよいことになります。

―注―

2次方程式 $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$ で表される図形を2次曲線という考え方もありますが，トレペでは，上のように，放物線，だ円，双曲線をまとめて2次曲線ということにします。

◈2次曲線の方程式の一般形は

円，放物線，だ円，双曲線はすべて，x，y についての2次方程式

$$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0 \qquad \cdots\cdots\cdots ①$$

で表すことができます。

たとえば，放物線の方程式

$$(y-n)^2=4p(x-m) \qquad \cdots\cdots\cdots ②$$

が，①の形で表すことができることを確かめてみましょう。

②を展開して整理すると

$$y^2-4px-2ny+4pm+n^2=0$$

となります。これは，①において

$$a=0,\ b=0,\ c=1,\ d=-4p,\ e=-2n,\ f=4pm+n^2$$

とした方程式ですから，②は①の形で表すことができることがわかりますね。

ほかの2次曲線の場合も，同じようにして確かめてみましょう。

トレーニング　解答は 119 ページ

1 だ円の方程式 $\dfrac{(x-1)^2}{2^2}+\dfrac{(y+2)^2}{3^2}=1$ を $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$ の形で表せ。

円，放物線，だ円，双曲線の方程式は，すべて x，y についての 2 次方程式ですね。では，その逆はどうでしょう。

◈2 次方程式で表される図形は？

x，y の 2 次方程式で表される図形は，すべて円，放物線，だ円，双曲線のいずれかになるのでしょうか。

たとえば　$x^2-y^2=0$

は x，y についての 2 次方程式です。

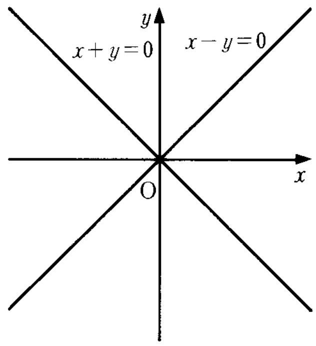
この方程式で表される図形は何でしょう。

左辺を因数分解すると

$$(x+y)(x-y)=0$$

$$x+y=0,\ x-y=0$$

これは原点を通る 2 直線ですね。



したがって，x，y の 2 次方程式で表される図形がいつも 2 次曲線になるとはかぎりません。

それでは，方程式 $x^2+y^2+1=0$ で表される図形は何でしょう。

x，y が実数のとき，つねに，$x^2+y^2\geqq 0$ ですから　$x^2+y^2+1\geqq 1$

したがって，$x^2+y^2+1=0$ をみたす実数 x，y は存在しません。

すなわち，方程式 $x^2+y^2+1=0$ によって表される図形はありません。

このように，表される図形が存在しない場合もあるのです。

次の式で表される図形は何か，考えてみましょう。

トレーニング　解答は 119 ページ

2 x，y についての 2 次方程式 $x^2+y^2=0$ で表される図形を，次の $\boxed{}$ をうめながら求めよ。

x，y は実数であるから　$x^2\geqq\boxed{}$，　$y^2\geqq\boxed{}$

ゆえに　$x^2+y^2\boxed{}0$

したがって，$x^2+y^2=0$ となるのは

$x^2=y^2=0$　すなわち　$x=y=\boxed{}$

のときだけである。

したがって，$x^2+y^2=0$ で表される図形は，点 ($\boxed{}$, $\boxed{}$) である。

もう少し，x，y の2次方程式で表される図形がどのようになるかについて学習していきましょう。
やや式が複雑になっています。

基本例題1 ―――― **2次方程式で表される図形**

次の方程式で表される図形を図示せよ。

(1) $x^2-y^2+2x+1=0$　　　　(2) $x^2-y^2+2x-3=0$

考え方　x をふくむ項，y をふくむ項をまとめ，$(x+\alpha)^2+(y+\beta)^2$ または $(x+\alpha)^2-(y+\beta)^2$ の形になるように変形する。そして，$(x+\alpha)^2-(y+\beta)^2=0$ となったら，左辺を因数分解してみる。

$(x+\alpha)^2$ の形を作るには，x^2+ax を

$$x^2+ax+\left(\frac{a}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}$$

と変形すればよい。

解　答　(1) $x^2-y^2+2x+1=(x^2+2x+1)-y^2$

$=(x+1)^2-y^2$

よって，与えられた方程式は

$(x+1)^2-y^2=0$ となる。

左辺を因数分解すると

$(x+y+1)(x-y+1)=0$

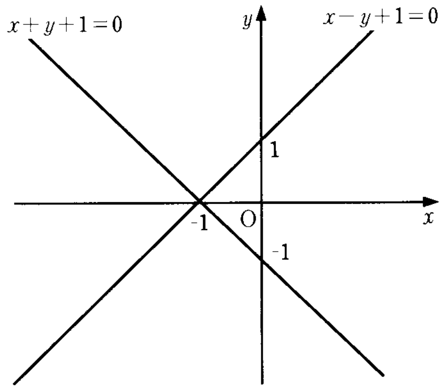
ゆえに　$x+y+1=0$，　$x-y+1=0$

したがって，与えられた方程式は

2直線 $x+y+1=0$，$x-y+1=0$

を表す。

グラフは右の図のようになる。



(2) $x^2-y^2+2x-3=(x^2+2x)-y^2-3$

$=(x^2+2x+1)-1-y^2-3$

$=(x+1)^2-y^2-4$

よって，与えられた方程式は

$(x+1)^2-y^2-4=0$

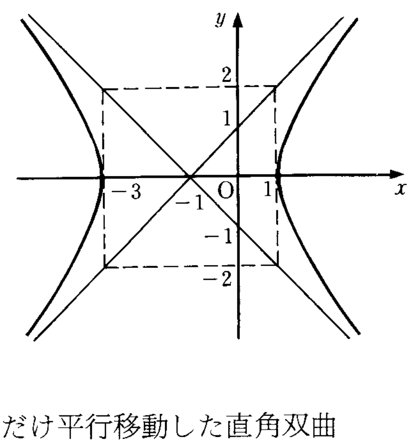
$(x+1)^2-y^2=4$　となる。

両辺を4で割ると　$\dfrac{(x+1)^2}{4}-\dfrac{y^2}{4}=1$

したがって，与えられた方程式は

直角双曲線 $\dfrac{x^2}{2^2}-\dfrac{y^2}{2^2}=1$ を x 軸の方向に -1 だけ平行移動した直角双曲線を表す。

グラフは右の図のようになる。



―注―

双曲線 $\dfrac{x^2}{2^2}-\dfrac{y^2}{2^2}=1$ ………①　の漸近線の方程式は，$\dfrac{x^2}{2^2}-\dfrac{y^2}{2^2}=0$ で求められる。

双曲線 $\dfrac{(x+1)^2}{2^2}-\dfrac{y^2}{2^2}=1$ ………② は双曲線①を x 軸の方向に -1 だけ平行移動したものであるから，②の漸近線も①の漸近線を x 軸の方向に -1 だけ平行移動したものになる。したがって，②の漸近線の方程式は，$\dfrac{(x+1)^2}{2^2}-\dfrac{y^2}{2^2}=0$ で求められる。これは，②の右辺を0とおいた式である。

一般に，双曲線 $\dfrac{(x-m)^2}{a^2}-\dfrac{(y-n)^2}{b^2}=\pm1$ の漸近線は，$\dfrac{(x-m)^2}{a^2}-\dfrac{(y-n)^2}{b^2}=0$ で求めることができる。

さあ，次の問題を解いてみましょう。式の変形をまちがえないように注意してください。

トレーニング

解答は119ページ

3 **方程式 $y^2-8x-4y-4=0$ で表される図形を，次の$\boxed{}$をうめて図示せよ。**

$$\begin{aligned} y^2-8x-4y-4&=(y^2-4y)-8x-4\\ &=(y^2-4y+\boxed{})-\boxed{}-8x-4\\ &=(y-\boxed{})^2-8x-8 \end{aligned}$$

よって，与えられた方程式は

$(y-2)^2-8x-8=\boxed{}$

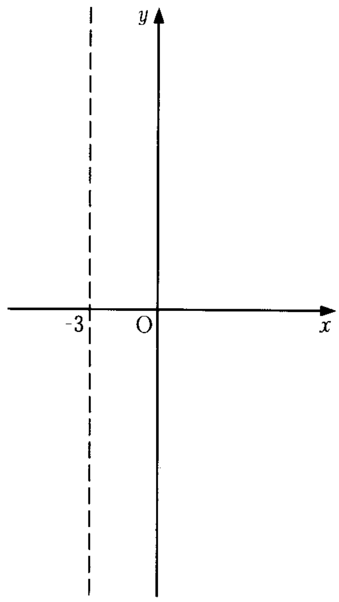
$(y-2)^2=8\boxed{}$

したがって，与えられた方程式は

放物線 $y^2=8x$ を x 軸の方向に -1，y 軸の方向に$\boxed{}$だけ平行移動した$\boxed{}$

を表す。

その焦点の座標は $(1,\ \boxed{})$，準線の方程式は $x=-3$ である。

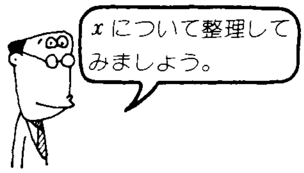


4 **次の方程式で表される図形を図示せよ。**

(1) $4x^2+y^2-6y+9=0$

(2) $4x^2+y^2+8x-4y-1=0$

(3) $x^2-xy-2y^2+2x-y+1=0$



x，yについての2次方程式で表される図形については，よくわかりましたね。ここまでのことをまとめてみましょう。

◈2次方程式で表される図形をまとめると

x，yについての2次方程式

$$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$$

で表される図形は

(i) 存在しない

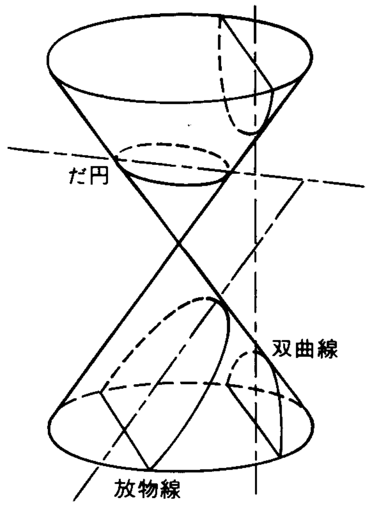
(ii) 円，放物線，だ円，双曲線，

2直線，1直線，1点

のいずれかになります。

円，放物線，だ円，双曲線は，円すい面を，円すいの頂点を通らない平面で切った切り口になっていますから，**円すい曲線**とよばれています。

円すい曲線



≪ここで一息≫

円の大きさはちがっても，円周の長さは等しい！?

大きさがちがう2つの円を，中心が一致するようにはり合わせます。これを1つの直線上で転がしてみましょう。

図のように，大きな円が直線 l 上をAから1回転してBまで転がったとすると，大きな円の周の長さは線分ABに等しくなります。

ところが，2つの円ははり合わせてありますから，小さい円も直線 l' 上を A' から B' まで転がったことになります。したがって，小さな円の周の長さは $A'B'$ です。

ところで，$AB=A'B'$ ですから，大きな円も小さな円も円周の長さは等しい？ことになります。ふしぎですね。

つぎに，少し変わった形の方程式で表される図形について考えてみましょう。

例 題 1　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　**無理方程式で表される図形**

方程式 $y=\dfrac{1}{2}\sqrt{4-x^2}$ ………① で表される図形を図示せよ。

考え方　$A\geqq 0$, $B\geqq 0$ のとき，$A=B$ と $A^2=B^2$ は同値である。このことに注意して①の両辺を 2 乗して根号をはずし，そのグラフをかけばよい。

解　答

$$y=\frac{1}{2}\sqrt{4-x^2} \qquad \cdots\cdots①$$

両辺を 2 乗すると

⇦ (右辺)$\geqq 0$ であるから，$y\geqq 0$

$$y^2=\frac{1}{4}(4-x^2)$$

⇦ $y\geqq 0$ のとき，①と同値。

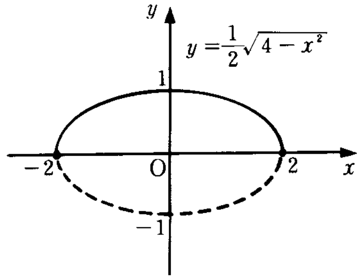
ゆえに　$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$

①より，$y\geqq 0$ であるから，与えられた方程式は

だ円 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ の x 軸上および x 軸の上側の部分を

表す。

グラフは右上の図のようになる。



無理方程式で表される図形をかいてみましょう。例題で学習しましたから，そんなに考えずにできますね。

トレーニング　　解答は 120 ページ

5 次の方程式で表される図形を図示せよ。

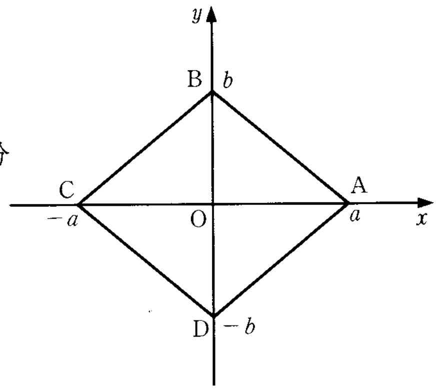
(1) $y=\sqrt{x+2}$　　　　(2) $y=\dfrac{1}{2}\sqrt{4+x^2}$

ある条件をみたす点Pの軌跡の求め方はわかっていますね。もう少し練習してみましょう。

例 題 2 ―― 2次曲線と軌跡

4点 $A(a,\ 0)$, $B(0,\ b)$, $C(-a,\ 0)$, $D(0,\ -b)$ を頂点とするひし形ABCDがある。点PがPA・PC=PB・PDをみたしながら動くとき，点Pの軌跡を求めよ。
ただし，$a>0$, $b>0$ とする。

考え方 点Pの座標を$(x,\ y)$とし，PA，PB，PC，PDの長さを，それぞれx，a，bを使って表し，PA・PC=PB・PDの条件から，xとyの関係式を導く。
a，bについての条件$a=b$か$a\neq b$かについて，場合分けして考えることも忘れないように。



解 答 点Pの座標を$(x,\ y)$とすると

$$PA=\sqrt{(x-a)^2+y^2}$$
$$PB=\sqrt{x^2+(y-b)^2}$$
$$PC=\sqrt{(x+a)^2+y^2}$$
$$PD=\sqrt{x^2+(y+b)^2}$$

PA・PC=PB・PDであるから

$$\sqrt{(x-a)^2+y^2}\cdot\sqrt{(x+a)^2+y^2}=\sqrt{x^2+(y-b)^2}\cdot\sqrt{x^2+(y+b)^2}$$

両辺を2乗すると

$$\{(x-a)^2+y^2\}\{(x+a)^2+y^2\}=\{x^2+(y-b)^2\}\{x^2+(y+b)^2\}$$

展開して整理すると

$$2(a^2+b^2)x^2-2(a^2+b^2)y^2=a^4-b^4$$
$$2(a^2+b^2)x^2-2(a^2+b^2)y^2=(a^2+b^2)(a^2-b^2)$$

$a\neq 0$, $b\neq 0$より，$a^2+b^2\neq 0$であるから，両辺をa^2+b^2で割ると

$$2x^2-2y^2=a^2-b^2$$

すなわち $x^2-y^2=\frac{1}{2}(a^2-b^2)$ ………①

$a=b$のとき，①は

$$x^2-y^2=0$$
$$y=\pm x$$

$a\neq b$のとき，$\frac{1}{2}(a^2-b^2)=k$とおけば，①は

$x^2-y^2=k$ すなわち $\frac{x^2}{k}-\frac{y^2}{k}=1$ ⇦ $k\neq 0$

したがって，点Pの軌跡は

$a=b$ のとき　2直線 $y=\pm x$

$a\neq b$ のとき　直角双曲線 $x^2-y^2=\frac{1}{2}(a^2-b^2)$

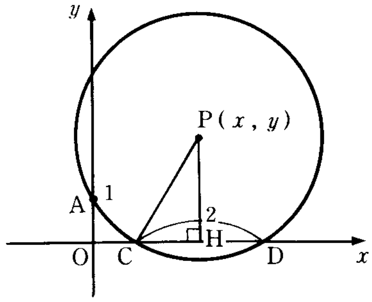
である。

次のトレーニングで，軌跡の求め方を自分のものにしてください。条件を正確に式でおきかえることがポイントです。

トレーニング

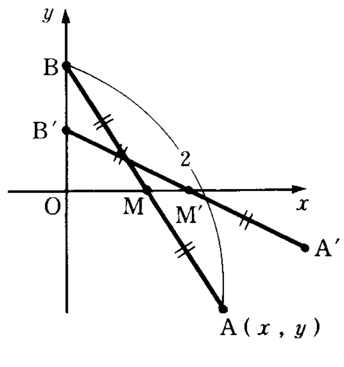
解答は 120 ページ

6 **定点 A(0, 1) を通り，x 軸から長さ 2 の弦を切りとる円の中心 P の軌跡を求めよ。**



ヒント　点 P の座標を $(x,\ y)$，円 P と x 軸との交点を C，D，点 P から x 軸へ下ろした垂線を PH とすると，△PCH は PC を斜辺とする直角三角形であるから，
$PC^2=CH^2+PH^2$ が成り立つ。

7 **長さ 2 の線分 AB の 1 端 B は y 軸上の正の部分を，AB の中点 M は x 軸上の正の部分を動く。このとき，点 A の軌跡を求めよ。**



ヒント　点 A，点 B，点 M の座標を，それぞれ $(x,\ y)$，$(0,\ b)$，$(a,\ 0)$ とし，点 M が線分 AB の中点であること，BM=1 であることに注目する。ただし，$a>0$，$b>0$。

きょうはこれでおしまい。2 次曲線の意味については，十分理解できましたね。

2 次曲線と不等式

学習日　　月　　日

不等式 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}>1$ で表される図形は………

きょうは，x，y についての不等式，たとえば $y^2>4x$ をみたす点 $(x,\ y)$ の集合がどのような図形になるか，などを調べてみることにしましょう。

きょうは，境界が放物線やだ円などになる領域について学習します。数学Ⅰでは，直線，円を境界とする領域について学習しましたね。復習しておきましょう。

復習マークシート　　解答欄のあてはまる記号を黒くぬりつぶそう。

1 直線 $y=x+1$ の上側にある点の座標であるものはどれか。

㋐ $(0,\ 0)$　㋑ $(1,\ 1)$　㋒ $(-1,\ 1)$　㋓ $(-1,\ -1)$

2 直線 $2x+y+1=0$ の下側にある点の座標であるものはどれか。

㋐ $(0,\ 0)$　㋑ $(1,\ 1)$　㋒ $(-1,\ 1)$　㋓ $(-1,\ -1)$

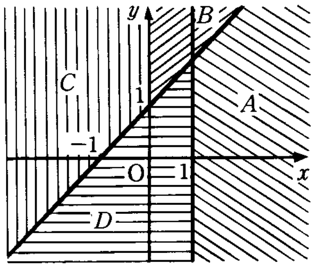
3 円 $x^2+y^2=4$ の外側にある点の座標であるものはどれか。

㋐ $(2,\ 1)$　㋑ $(2,\ 0)$　㋒ $(0,\ -2)$　㋓ $(1,\ 1)$

4 円 $(x-1)^2+y^2=9$ の内側にある点の座標であるものはどれか。

㋐ $(3,\ 3)$　㋑ $(3,\ 2)$　㋒ $(4,\ 0)$　㋓ $(4,\ 1)$

5 右の図を見て答えよ。



(1) 連立不等式 $\begin{cases} y<x+1 \\ x<1 \end{cases}$ の表す領域はどれか。

㋐ A　㋑ B　㋒ C　㋓ D

(2) 領域 A を表す連立不等式はどれか。

㋐ $\begin{cases} y<x+1 \\ x>1 \end{cases}$　㋑ $\begin{cases} y<x+1 \\ x<1 \end{cases}$

㋒ $\begin{cases} y>x+1 \\ x>1 \end{cases}$　㋓ $\begin{cases} y>x+1 \\ x<1 \end{cases}$

解答欄				
1	㋐	㋑	㋒	㋓
2	㋐	㋑	㋒	㋓
3	㋐	㋑	㋒	㋓
4	㋐	㋑	㋒	㋓
5 (1)	㋐	㋑	㋒	㋓
(2)	㋐	㋑	㋒	㋓

復習マークシートの解答は，順に，ウ，エ，ア，イ，エ，アです。
これから，x，y についての２次不等式をみたす点 $(x,\ y)$ の集合がどうなるかを学習していきましょう。

◈不等式 $y^2<4x$，$y^2>4x$ の表す領域とは

方程式 $y^2=4x$ ………① をみたす点 $(x,\ y)$ の集合は，焦点 $(1,\ 0)$，準線 $x=-1$ の放物線でした。

それでは，不等式 $y^2<4x$ や $y^2>4x$ をみたす点$(x,\ y)$ の集合はどのような図形になるでしょうか。

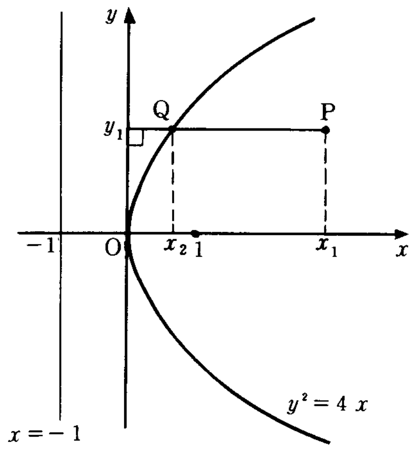
いま，座標平面を３つの集合

$l=\{(x,\ y)\mid y^2=4x\}$

$A=\{(x,\ y)\mid y^2<4x\}$

$B=\{(x,\ y)\mid y^2>4x\}$

に分けてみます。l はもちろん放物線です。



点 P $(x_1,\ y_1)$ を放物線①上にない点とします。

点 P を通り x 軸に平行な直線と，放物線①との共有点を Q$(x_2,\ y_1)$ とすると

$y_1{}^2=4x_2$ ………②

点 P が集合 A にふくまれるときは

$y_1{}^2<4x_1$ ………③

②と③から　$4x_2<4x_1$

ゆえに　$x_2<x_1$

点 P が集合 B にふくまれるときは，同様にして

$x_1<x_2$

となります。したがって，

点 P が集合 A にふくまれるとき，点 P は放物線 $y^2=4x$ の焦点のある側にあり，

点 P が集合 B にふくまれるとき，点 P は放物線 $y^2=4x$ の準線のある側にあることがわかります。すなわち

集合 A は，放物線 $y^2=4x$ の焦点のある側にある点全体の集合

集合 B は，放物線 $y^2=4x$ の準線のある側にある点全体の集合

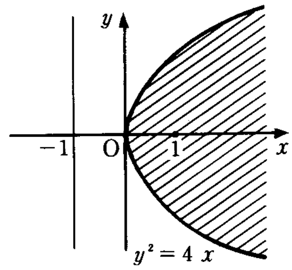
になります。

不等式の表す領域

x，y についての不等式があるとき，それをみたす点 $(x,\ y)$ の集合を，この**不等式の表す領域**といいます。

たとえば，上の集合 A，B のことを，それぞれ不等式 $y^2<4x$，$y^2>4x$ の表す領域というのです。

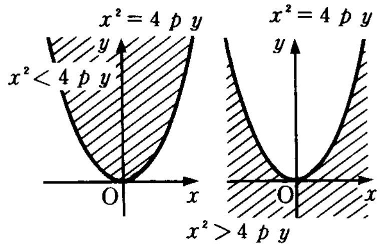
$y^2<4x$ の表す領域は，右の図の斜線部分です。ただし，境界である放物線 $y^2=4x$ 上の点はふくみません。



□不等式 $y^2<4px$，$y^2>4px$ の表す領域□

不等式 $y^2<4px$，$y^2>4px$ の表す領域は，それぞれ放物線 $y^2=4px$ の焦点のある側にある点全体の集合，準線のある側にある点全体の集合である。

また，不等式 $x^2<4py$，$x^2>4py$ の表す領域は，それぞれ，放物線 $x^2=4py$ の焦点のある側にある点全体の集合，準線のある側にある点全体の集合であることがいえます。



境界をふくまない　　境界をふくまない

一注一

領域を図示するとき，ふつう斜線で示します。ただし，境界になる曲線上の点がどうなるのかは，図ではよくわかりませんから，別に文章で説明するか，図に境界をふくむかふくまないかを書き入れておきます。

それでは，次のトレーニングで領域を図示してみましょう。

求める領域が放物線のどちら側になるかは，与えられた不等式に焦点の座標を代入して調べることもできます。不等式が成り立てば，求める領域は，焦点のある側にある点全体の集合となります。

トレーニング

解答は 121 ページ

1 **次の不等式の表す領域を図示せよ。**

(1)　$y^2>3x$　　(2)　$y^2<-4x$

(3)　$x^2<2y$　　(4)　$x^2\geqq -\dfrac{1}{2}y$

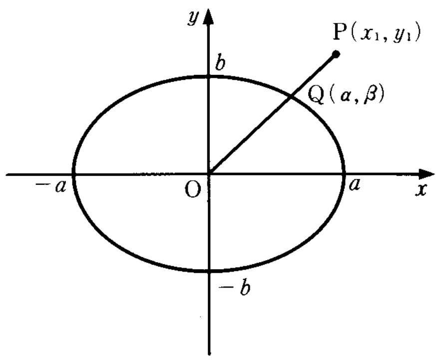
では，次の不等式で表される領域はどうなるでしょうか。できるだけ簡単な方法で調べてみましょう。

例 題 1 **$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}>1$ の表す領域**

不等式 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}>1$ の表す領域を図示せよ。ただし，$a>0$，$b>0$ とする。

考え方

だ円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ………① 上の点を $Q(\alpha,\ \beta)$ とすると，原点を端点とする半直線 OQ 上の点はすべて，$k\geqq 0$ として，$P(k\alpha,\ k\beta)$ と表すことができる。このとき，



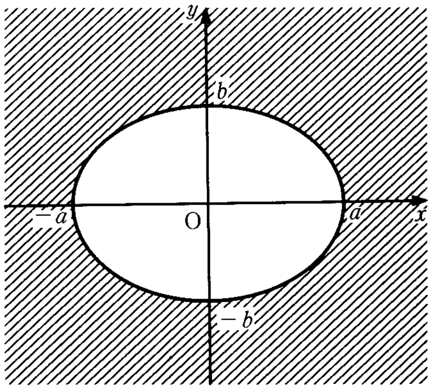
(i) $0\leqq k<1$ ならば，$OP<OQ$，すなわち点 P はだ円①の内部にある点

(ii) $k=1$ ならば，$OP=OQ$，すなわち点 P はだ円①上にある点

(iii) $k>1$ ならば，$OP>OQ$，すなわち点 P はだ円①の外部にある点である。

解 答

だ円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ………① 上にない点 P の座標 $(x_1,\ y_1)$ は，だ円①上の任意の点 Q の座標 $(\alpha,\ \beta)$ と定数 k によって，$(k\alpha,\ k\beta)$ と表すことができる。ただし，$k\geqq 0$，$k\neq 1$



よって
$$\frac{x_1{}^2}{a^2}+\frac{y_1{}^2}{b^2}=\frac{k^2\alpha^2}{a^2}+\frac{k^2\beta^2}{b^2}$$
$$=k^2\left(\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}\right)$$

ところで，点 Q はだ円①上にある点であるから
$$\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}=1$$

ゆえに
$$\frac{x_1{}^2}{a^2}+\frac{y_1{}^2}{b^2}=k^2$$

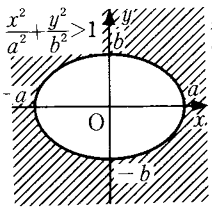
$0\leqq k<1$，すなわち点 P がだ円①の内部にある点であるとき
$$\frac{x_1{}^2}{a^2}+\frac{y_1{}^2}{b^2}<1$$

$k>1$，すなわち点 P がだ円①の外部にある点であるとき
$$\frac{x_1{}^2}{a^2}+\frac{y_1{}^2}{b^2}>1$$

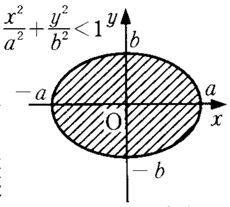
したがって，不等式 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}>1$ の表す領域は，だ円①の外部にある点全体の集合であるから，右上の図の斜線部分になる。ただし，境界はふくまない。

□不等式 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}>1$, $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}<1$ の表す領域□

不等式 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}>1$, $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}<1$ の表す領域は，それぞれだ円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ の外部にある点全体の集合，内部にある点全体の集合である。



境界をふくまない



境界をふくまない

領域を図示するときは，境界をふくむのかふくまないのか必ず書いてください。では，トレーニングです。

トレーニング

解答は 122 ページ

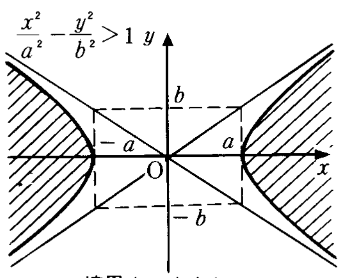
2 次の不等式の表す領域を図示せよ。

(1) $\dfrac{x^2}{3^2}+\dfrac{y^2}{2^2}<1$　　(2) $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{16}\geqq 1$

境界が双曲線のときについても，一般に次のことがいえます。

□不等式 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}>1$, $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}<1$ の表す領域□

不等式 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}>1$, $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}<1$ の表す領域は，それぞれ双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ の焦点のある側にある点全体の集合，中心のある側にある点全体の集合である。



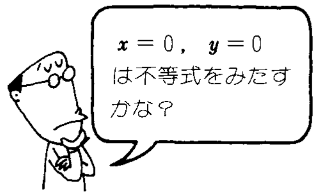
境界をふくまない

不等式 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}>-1$, $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}<-1$ の表す領域は，上と逆に，それぞれ双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=-1$ の中心のある側，焦点のある側にある点全体の集合になります。次のトレーニングで確かめましょう。

トレーニング　解答は 122 ページ

3 次の不等式の表す領域を図示せよ。

(1) $\dfrac{x^2}{4}-y^2 \leqq 1$　　　(2) $\dfrac{x^2}{3^2}-\dfrac{y^2}{2^2}>-1$



最後に，少し複雑な問題を解いてみましょう。順を追って考えてください。

例題2　　**連立不等式の表す領域**

連立不等式 $\begin{cases} x-2y+2<0 & \cdots\cdots① \\ \dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}>1 & \cdots\cdots② \end{cases}$ **の表す領域を図示せよ。**

考え方　不等式①，②の表す領域の共通な部分を求めればよい。不等式②の表す領域の境界は双曲線である。

解答　不等式①の表す領域は

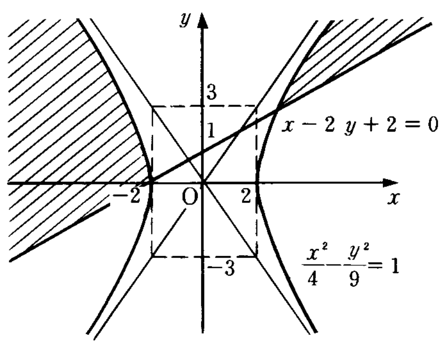
直線 $x-2y+2=0$，すなわち $y=\dfrac{1}{2}x+1$

の上側にある点全体の集合

不等式②の表す領域は

双曲線 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}=1$ の焦点のある側にある点全体の集合

したがって，連立不等式①，②の表す領域は，右の図の斜線部分になる。ただし，境界はふくまない。



—注—

不等式①，②に，$x=0$，$y=0$ を代入すると，$2<0$，$0>1$ となり，いずれも不等式は成り立たない。

したがって，不等式①の表す領域は原点のない側，不等式②の表す領域も原点すなわち中心のない側であることがわかる。

では，トレーニングです。1つ1つの不等式が表す領域を求め，その共通部分を示せばよいのですから，落ちついて解いてください。

トレーニング　　解答は122ページ

4 連立不等式 $\begin{cases} y^2<3x \\ x^2-y^2 \geqq 4 \end{cases}$ の表す領域を，次の問いにしたがって求めよ。

(1) $y^2<3x$ の表す領域は，放物線 $y^2=3x$ の焦点のある側にある点全体の集合か，それとも，準線のある側にある点全体の集合か。また，放物線 $y^2=3x$ 上にある点をふくむか。

(2) $x^2-y^2 \geqq 4$ の表す領域は，双曲線 $x^2-y^2=4$ 上にある点および中心のある側にある点全体の集合か，それとも，双曲線 $x^2-y^2=4$ 上にある点および焦点のある側にある点全体の集合か。

(3) (1)，(2)の結果から，この連立不等式の表す領域を図示せよ。

5 次の不等式の表す領域を図示せよ。

(1) $4<4x^2+y^2<16$　　(2) $(x-2y)(4x^2-y^2-4)<0$

ヒント　(2) $AB<0$ は，$\begin{cases} A>0 \\ B<0 \end{cases}$ または $\begin{cases} A<0 \\ B>0 \end{cases}$ と同値である。

きょうの学習はこれで終わりです。境界の2次曲線のグラフは，もちろんかけるようになりましたね。
次の日は確認テストですが，すでに第4巻の1次変換を終えている人は，その章で残っていた第13日「2次曲線の1次変換」の学習を先にすませておきましょう。

第12日

確認テスト

学習日　　月　　日

時間；50分

得点	/100

解答は124ページ

今まで，2次曲線について学習してきました。きょうは，基礎事項が十分理解されているか，代表的な問題をきちんと解くことができるか，確かめてみましょう。自信をもって，自分の力をテストしてください。

配点；各5点　計10点

1　放物線 $x^2=4y$ について，次の問いに答えよ。

(1)　この放物線の焦点の座標を求めよ。

(2)　この放物線の準線の方程式を求めよ。

配点；各5点　計15点

2　だ円 $4x^2+5y^2=20$ について，次の問いに答えよ。

(1)　標準形 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ の形に変形せよ。

(2)　このだ円の焦点の座標を求めよ。

(3)　このだ円の長軸，短軸の長さを求めよ。

配点；各5点　計10点

3　漸近線の方程式が $y=\pm\dfrac{1}{2}x$ で，頂点の座標が $(4,\ 0)$，$(-4,\ 0)$ である双曲線について，次の問いに答えよ。

(1)　この双曲線の方程式を求めよ。

(2)　この双曲線の焦点の座標を求めよ。

配点；(1) 5 点　(2) 5 点　(3) 10 点　計 20 点

4 **焦点の座標が (2，1) で，準線の方程式が $x=-4$ である放物線について，次の問いに答えよ。**

(1)　この放物線の頂点の座標を求めよ。

(2)　この放物線の軸の方程式を求めよ。

(3)　この放物線の方程式を求めよ。

配点；(1) 5 点　(2) 5 点　(3) 10 点　計 20 点

5 **双曲線 $4x^2-y^2=-4$ について，次の問いに答えよ。**

(1)　この双曲線の漸近線の方程式を求めよ。

(2)　この双曲線のグラフをかけ。

(3)　点 (1，0) を通りこの双曲線に接する直線の方程式を求めよ。

配点；10 点

$\boxed{6}$ 方程式 $4x^2+y^2-8x+4y-8=0$ はどのような図形を表すか。そのグラフをかけ。

配点；15 点

$\boxed{7}$ 点 P から直線 $x=8$ までの距離と，点 P から定点 F(2, 0) までの距離との比が 2 : 1 であるとき，点 P の軌跡を求めよ。

学習日　　月　　日

第13日　問題研究

これまでの学習で，基本的な問題を解く力は十分ついています。きょうは，やや応用力の必要な問題を解いてみましょう。どんな問題でも解法の糸口さえつかめれば，あとは基本的な問題の組合せにすぎません。

この日で取り上げた研究問題は，これまであなたが学習して身につけた実力で十分解けるようにステップ形式にしてあります。〔**解　答**〕と書かれた横のスペースに解答を記入していきましょう。

➡ **研究問題の解答は 125 ページ**

研究問題 1　　**2つの焦点と通る1点からの双曲線の方程式の求め方**

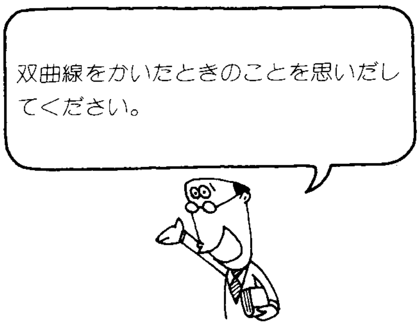
焦点が $\mathrm{F}(\sqrt{3},\ 0)$，$\mathrm{F}'(-\sqrt{3},\ 0)$ で，点 $\mathrm{A}(2,\ 1)$ を通る双曲線の方程式を，次の問いにしたがって求めよ。

(1)　点 A から 2 点 F，F′ までの距離の差を求めよ。

(2)　この双曲線の方程式を $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$，$a>0$，$b>0$ とするとき，a の値を求めよ。

(3)　この双曲線の方程式を求めよ。

〔**解　答**〕



上の問題では，a，b の値の求め方がわかればだいじょうぶですね。それでは，次の問題に挑戦しましょう。

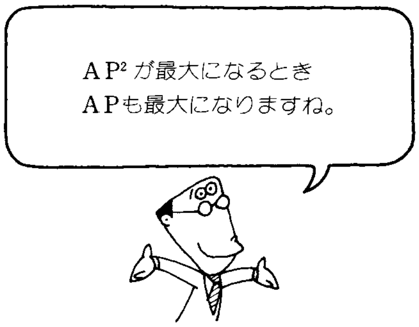
研究問題 [2] だ円上の動点と定点を結ぶ線分の最大値

だ円 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 上に定点 A(0, 1) と動点 P(x, y) がある。AP の長さがもっとも長くなるような点 P の座標を，次の問いにしたがって求めよ。

(1) AP^2 を y だけの式で表せ。

(2) AP の長さがもっとも長くなる点 P の座標を求めよ。

〔解　答〕



AP^2 を x，y のいずれか一方で表すとすれば，当然 y ですね。上のような問題がステップ形式でなければ，この点がもっともたいせつなところです。では，次の研究問題を考えましょう。

研究問題 $\boxed{3}$ 　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　**直角双曲線の性質**

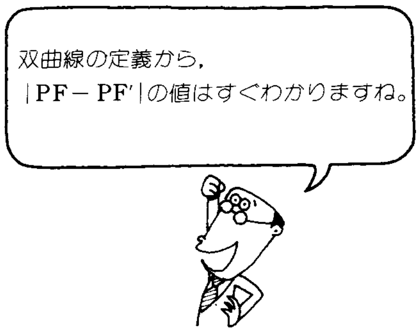
直角双曲線 $x^2-y^2=a^2$, $a>0$ 上の任意の点を P(x, y), 焦点を F, F′, 中心を O とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 焦点 F, F′ の座標を求めよ。ただし，F の x 座標は正とする。

(2) $(\mathrm{PF}-\mathrm{PF}')^2$, $\mathrm{PF}^2+\mathrm{PF}'^2$ を，a, x, y を用いて表せ。

(3) $\mathrm{PO}^2=\mathrm{PF}\cdot\mathrm{PF}'$ となることを示せ。

〔解　答〕



計算も，その方法によって，とても簡単になることがわかったと思います。つぎは，接点に関する問題です。

研究問題 4 ― だ円上の点と直線との距離の最大・最小

だ円 $\dfrac{x^2}{2^2}+\dfrac{y^2}{3^2}=1$ ………① について，次の問いに答えよ。

(1) だ円①に接する傾き 2 の直線の方程式と接点の座標を求めよ。

(2) だ円①上の点から直線 $2x-y-10=0$ に下ろした垂線の長さの最大値と最小値を求めよ。

〔解　答〕

(2)を解くのに，(1)をどう使ったらよいのかわかりましたね。次は軌跡の問題です。

研究問題 5　　　**放物線の焦点を通る弦の中点の軌跡**

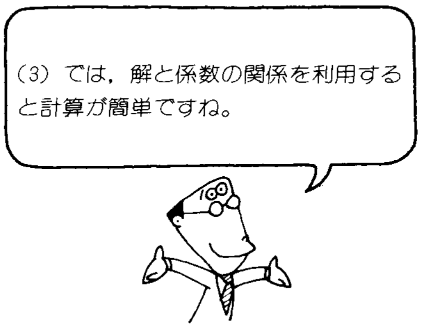
放物線 $y^2=4x$ ………①　について，次の問いに答えよ。

(1)　放物線①の焦点 F の座標を求めよ。

(2)　焦点 F を通り，x 軸に平行でない直線の方程式は $x+my-1=0$ と表せることを示せ。

(3)　焦点 F を通る直線と放物線①との交点を P，Q とするとき，線分 PQ の中点の軌跡を求めよ。

〔解　答〕



これでこの章の学習は終わりです。軸が座標軸に平行でない 2 次曲線の方程式はどうなるかなどが，高校の数学のすぐ上にあります。これからも自信をもって，数学の学習を積み重ねていきましょう。

円すい曲線の見方をかえると

見方1　2次曲線は円すい曲線ではない

教科書などによっては，2次曲線と円すい曲線を同じ図形としてあつかっているものもありますが，高校より上の数学で正確に定義すると，x，y についての2次方程式

$$ax^2+by^2+cxy+dx+ey+f=0 \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

をみたす点$(x,\ y)$の集合を2次曲線といいます。

①の方程式の中には

$$x^2+y^2=1 \qquad 4x^2+9y^2=36$$

$$x^2-y^2=1 \qquad xy=1$$

のような**円すい曲線**もふくまれていますが

$$(x-y+1)^2=0$$

すなわち　$x-y+1=0$　………**1つの直線**

$$(x-y+1)(x-y-3)=0$$

すなわち　$x-y+1=0$，$x-y-3=0$

………**平行な2直線**

$$(x-1)^2+(y-2)^2=0$$

すなわち　$(x,\ y)=(1,\ 2)$　………**1点**

などもふくまれています。そこで，一般には，「円すい曲線は2次曲線である」が，「2次曲線は円すい曲線である」とはいえないのです。

高校より上の数学では

(2次曲線)=(円すい曲線)

と思わないように，ご用心!!

見方2　よみがえる円すい曲線

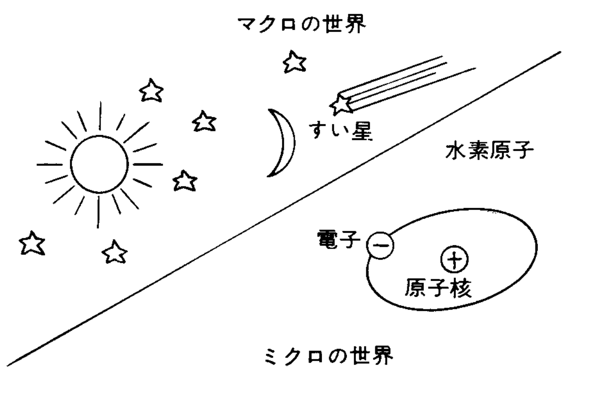
惑星の軌道と水素原子中の電子の軌道が同じ形であることの発見は，その軌道の長さの大小には無関係に，驚くべき事実です。

古代から人類は星を眺め，太陽の運行について，細かく観察してきました。それは，天体の運行が人間生活にきわめて大きな関係をもつからでした。〝天変地異〟ということばがあります。人類の生活は，天が変わると多大の影響をうけるということを意味していますが，ハレーすい星が地球にぶつかって，地球最後の日がくるとさわいだのは，記憶に新しいことですね。

紀元前230年頃のギリシア人，**アポロニウス**が「円すい曲線論」を書いたのも，何千年，何万年の人類の知恵の集積であると思われます。

ところが，最近の研究での，水素原子中の電子の軌道が同じ円すい曲線であるなどの発見，ミクロの世界に宇宙と同じ運動があるという発見は，紀元前に発見された円すい曲線が現代に再発見されたものと考えられますね。

宇宙の構造（マクロの世界）と，物質の構造（ミクロの世界）の研究に，ともに，円すい曲線が役だつということを，古代の文化の再生として考えることは，楽しくもロマンのあることではないでしょうか。



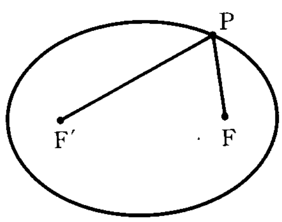
見方３　見方がかわると，すべてがかわる
………影絵を見る

人生にだって，今まで〝死んだように元気がない〟などといっていたのが，突然，〝生きかえったように元気になる〟こともあります。同じ環境にいても，物の見方，考え方しだいで，明るい人生にもなれば，暗い人生にもなる。それを，「人生は気持ちしだいだ」というのです。

数学も人生であるかぎり，こんな例は山ほどあります。円すい曲線もその有名な例の１つで，アポロニウスの円すい曲線が，2000年たったのち，**ポンスレー**(1788〜1867)によって，**射影幾何学**としてよみがえったのです。それまでは，円すい曲線は距離を使って定義していました。

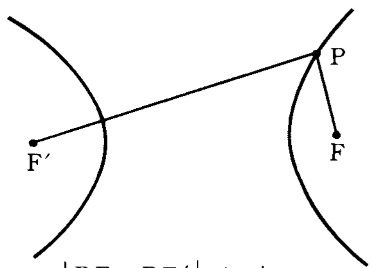
たとえば

２定点からの距離の和が一定………だ円



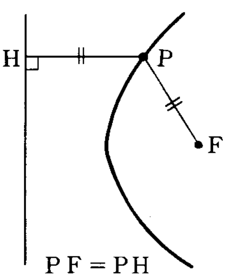
PF＋PF′が一定

２定点からの距離の差が一定………双曲線



|PF－PF′|が一定

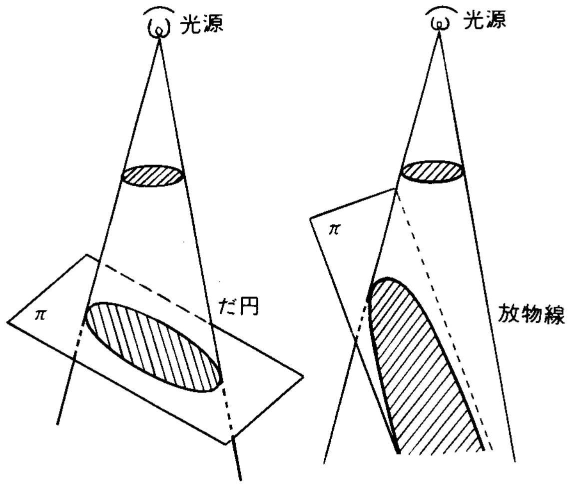
定点と定直線からの距離が等しい
………放物線



PF＝PH

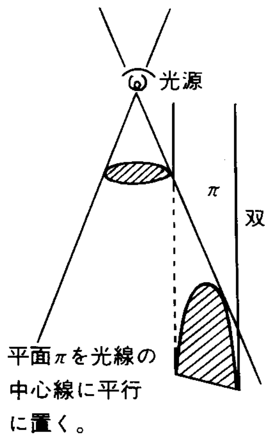
というような定義でした。

ところが，射影幾何学では，「円すい曲線は円の影である」という定義をします。物の見方の転換の一例で，これならば，だれでも円すい曲線をつくることができるし，円すい曲線の先祖は円であるということもよくわかりますね。

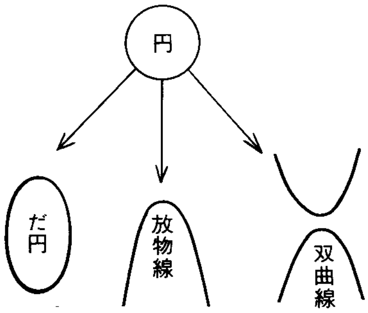


平面πを斜めに置く。

平面πを光線の外側の１本に平行に置く。



アポロニウスの時代にも，円すいの切り口であるという考え方はあったのですが，円と関係づけることが弱かったのです。

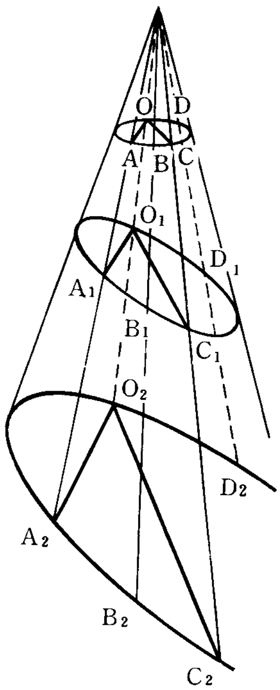


一般に，先祖がわかれば，将来を考える上で，それはたいせつな資料になります。円すい曲線も先祖が円であることがわかれば，円の性質が子孫の円すい曲線にどのようにうつるかを

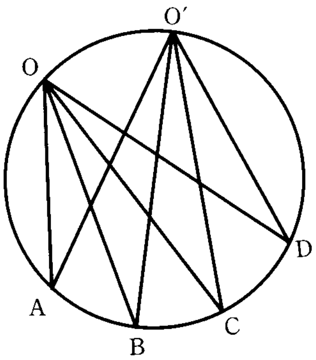
調べることで，今までとはまったくちがった物の見方ができるようになります。これが射影幾何学の誕生なのです。

見方 4　影の中で変わらないものは？

円には中心や半径があります。このようなものは，影（円すい曲線）ではなくなってしまいます。それでは，変わらないものがあるのでしょうか？



長さに関するものは，変わってしまうので，角について考えると，上の図のように，$\angle AOC$ と $\angle A_1O_1C_1$ は等しくないことがわかります。



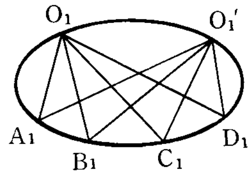
ところが，円においては，円周角は等しいという性質がありますから，円周上にもう 1 点 O′ をとると

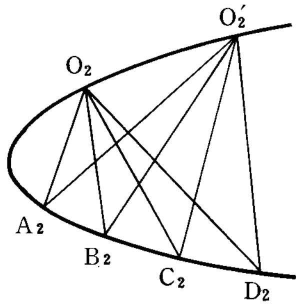
$$\angle AOC=\angle AO'C,\ \angle AOD=\angle AO'D,$$
$$\angle BOC=\angle BO'C,\ \angle BOD=\angle BO'D$$

がいえ

$$\frac{\dfrac{\angle AOC}{\angle BOC}}{\dfrac{\angle AOD}{\angle BOD}}=\frac{\dfrac{\angle AO'C}{\angle BO'C}}{\dfrac{\angle AO'D}{\angle BO'D}}$$

が成り立ちます。この比の値は，点 O，O′ が，円周上のどこにあっても成り立つことは容易にわかりますね。ところで，分数は比であるので，この比は，分数（比）を重ねているという意味で，**複比**とよばれています。





「円では A，B，C，D に対する複比は一定である」といえますが，このことは，ほかの円すい曲線についても，曲線上にもう 1 点 O′ をとると，同じように成り立つのです。すなわち，上の図で

$$\frac{\dfrac{\angle A_1O_1C_1}{\angle B_1O_1C_1}}{\dfrac{\angle A_1O_1D_1}{\angle B_1O_1D_1}}=\frac{\dfrac{\angle A_1O_1'C_1}{\angle B_1O_1'C_1}}{\dfrac{\angle A_1O_1'D_1}{\angle B_1O_1'D_1}},$$

$$\frac{\dfrac{\angle A_2O_2C_2}{\angle B_2O_2C_2}}{\dfrac{\angle A_2O_2D_2}{\angle B_2O_2D_2}}=\frac{\dfrac{\angle A_2O_2'C_2}{\angle B_2O_2'C_2}}{\dfrac{\angle A_2O_2'D_2}{\angle B_2O_2'D_2}}$$

が成り立ち，このことを「**円すい曲線上で，与えられた 4 点に対する複比は，一定である**」といいます。このことは，逆も成り立ち，これを円すい曲線の定義に使うことができるのです。

影の性質を調べることは，電子顕微鏡で光を，角度を変えて当てながら，分子構造を調べることと，たいへんよく似ているのではないでしょうか。

TRAINING PAPER

DAILY PROGRAM

発行人　加藤　譲
発行所　株式会社　キョーイクソフト

高校数学／代数･幾何