TRAINING PAPER

DAILY® PROGRAM

高校数学
数 学 A　1

（見本）

数と式① 目次

（*のついたセクションは指導要領外の内容ですが，ここで学習することを勧めます。）

KYOIKUSHA

TRAINING PAPER®

高校数学　数学 A

効果的な使い方

〈1セクションの構成〉

● 1セクション(§1, §2など)の学習は，次のようになっています。
これが，ほぼ1日の学習に相当します。

学習内容の説明
新しい学習内容をわかりやすく説明してあります。また，定理や公式を簡潔にまとめています。
➡よく読んで，しっかりと理解しよう

⇩

基本例題・例題
定理や公式がどのように使われるかを具体的に示してあります。基本例題は基本的な問題，例題は標準的な問題です。
➡考え方や解答のポイントをおさえよう

⇩

トレーニング
例題をふまえて，実際に問題を解く練習です。やさしい問題からむずかしい問題へ，ステップをふんで作られています。
問題番号に ＊がついているのは標準問題，無印は基本問題です。
(ここまでが1セクションに2～3回程度くり返されます。)

⇩

最後に，「もっと力をつけよう」がはいっていることがあります。ここでは，総合問題や，やや程度の高い問題を扱います。

解　　答
巻末に《解答》とくわしい解き方を書いた《詳解》がついています。
問題番号の右の4桁数字は，《問題》，《解答》，《詳解》で共通です。
答え合わせのとき活用してください。
➡答え合わせも学習のうち，1問 1問しっかりと

〈効果的な使い方〉

❖ 授業の進度に合わせて学習していこう

学習内容は，標準的な授業進度に合わせて配列されていますから，復習用としておおいに役立ててください。また，新しい学習内容でもていねいな説明がついていますから，予習用，自学自習用として利用することもできます。

時間に余裕のない場合は，よくわからないところにしぼって，重点的に学習しましょう。

❖ 自分なりに使い方を工夫しよう

本文は表の部分のみ印刷してあります。1ページを完全にやり終えたら，はがしてしまうこともできます。裏の部分は解答を書き込んだり，補足を書き込んだりして自由に使ってください。自分なりに使い方を工夫しましょう。

❖ 定期試験の前には，弱点の部分を重点的に復習しよう

ふだんの学習でまちがえたところをチェックし，その問題を全部もう一度解きます。

§1　整　式

ここでは，$2x^3+5x-x^3-3x^2-x^2+4-2x$ のような式の整理のしかたを学習します。中学校の数学で，文字をふくむ式が活躍したように，高校の数学でも，いろいろな方面に式が出てきます。その式を，能率よく自由に使いこなすことができるように，短く，整然と表すことを覚えましょう。

➜まず，$4ax^2$ や $3x^2y^3-x^3y+xy-4$ のような式の次数と係数をいえるようにしましょう。

〔1〕整式とその次数・係数

◇整式

$4ax^2$ は，$4\times a\times x\times x$ のことですね。

このように，いくつかの文字と数の乗法だけでつくられている式を単項式といいます。

また，$3x^2y^3-x^3y+xy-4$ を書き直すと，$3x^2y^3+(-x^3y)+xy+(-4)$ ですね。

このように，単項式の和の形で表される式を多項式といいます。そして，その１つ１つの単項式 $3x^2y^3$，$-x^3y$，xy，-4 のことを項といい，項の中でも，-4 のように，文字をふくまない項を定数項といいます。

単項式と多項式を合わせて整式といいます。

$$\text{整式}\begin{cases}\text{単項式}\cdots\cdots 4ax^2\\ \text{多項式}\cdots\cdots 3x^2y^3-x^3y+xy-4\end{cases}$$

➜整式は文字と数の和・差・積だけで表される式です。文字が分母や $\sqrt{}$ の中にある式は整式ではありません。

◇整式の次数

単項式 $4ax^2$ では，文字が３個かけ合わされていますね。

このかけ合わされている文字の個数３を，単項式の次数といいます。

多項式 $3x^2y^3-x^3y+xy-4$ で各項の次数を調べると

$3x^2y^3$ ……５次，$-x^3y$ ……４次，xy ……２次，-4 ……０次

↑

ですね。　文字が０個だから０次といいます。

$$4\times\underbrace{a\times x\times x}_{\text{文字が3個}}$$

↓

次数は３

この中の最も高い次数５を，多項式 $3x^2y^3-x^3y+xy-4$ の次数といいます。

このように，多項式の次数は，各項の次数のうち最も次数の高い項の次数で表します。

◇n 次式

たとえば，$4ax^2$ は次数が３だから３次式，$3x^2y^3-x^3y+xy-4$ は次数が５だから５次式というように，次数が n の整式を n 次式といいます。

◇整式の係数

単項式 $4ax^2$ の文字以外の部分は４ですね。この４を単項式 $4ax^2$ の係数といいます。

多項式 $3x^2y^3-x^3y+xy-4$ では，それぞれの項の文字以外の部分 3，−1，1，−4 をまとめて，この多項式の係数といいます。
〈注意〉　定数項は，次数が 0 の項の係数と考えられます。

➜基本的なことがらは，わかりましたね。次の基本例題で，具体的に考えてみましょう。

基本例題 1　　整式とその次数・係数

次の式の中から整式を選び，番号で答えなさい。また，その次数と各項の係数をいいなさい。

①　$-\sqrt{2}ab^3$　　②　$x^2+3-\dfrac{1}{x^2}$　　③　$2\sqrt{y}$　　④　$5b-\dfrac{1}{2}$

◆ 考え方 ◆

整式というのは，文字と数の和・差・積だけで表される式のことです。

数については，分母になったり，$\sqrt{\ }$ の中にあってもかまいませんが，文字は分母になったり，$\sqrt{\ }$ の中にあってはいけません。

◆ 解　答 ◆

整式……①，④　　➜②は分母に x^2 が，③は $\sqrt{\ }$ の中に y があるので整式ではありません。

①の次数……4　　➜ $-\sqrt{2}ab^3=-\sqrt{2}\times a\times b\times b\times b$ で，文字が 4 個かけ合わされています。

係数……$-\sqrt{2}$

④の次数……1　　➜ $5b$ ……1 次，$-\dfrac{1}{2}$……0 次だから，最も高い次数は 1 です。

係数……$5b$ の係数 5

定数項 $-\dfrac{1}{2}$

➜分母や $\sqrt{\ }$ の中に文字があるかどうかが整式を見分けるポイントですね．トレーニングしましょう。

■■■トレーニング■■■

1　(0001)

次の式の中から整式を選び，記号で答えなさい。

㋐　$-3x^2$　　㋑　$\dfrac{2}{y}$　　㋒　7

㋓　$\sqrt{5}s$　　㋔　$\dfrac{ab^3c}{4}$　　㋕　$5\sqrt{mn}$

㋖　$x^2-\dfrac{1}{2}x+4$　　㋗　$-2a^4+3a^2-1-\dfrac{4}{a^2}$

㋘　$\sqrt{2}b^3-b+\sqrt{7}$　　㋙　$4x^3y-x^2y^4$

㋚　$\sqrt{l}-3\sqrt{m}+\sqrt{n}$　　㋛　$a^2-bc+ab-ac$

2　(0002)

次の整式の次数と各項の係数をいいなさい。

(1)　$-5x^3$　　(2)　3

(3) $\frac{s}{4}$　　　　(4) $\sqrt{5}\,a^2bc^2$

3 (0003)

次の整式の次数と各項の係数をいいなさい。

(1) $\frac{1}{2}x^2+x-6$　　　　(2) $5x^4y^2-xy^3+8x^2y$

(3) $\sqrt{3}\,m^3-\sqrt{7}+m$　　　　(4) $a^3-abc+b^2c-bc^2$

➜整式とその次数・係数についてはわかりましたね。こんどは，特定の文字に着目して式を見てみましょう。

〔2〕特定の文字に着目する場合

◇特定の文字に着目する考え方

x の1次式には，たとえば，$2x-3$，$-5x+2$，$\frac{1}{2}x$ などがありますね。
これらをまとめて，一般に，$ax+b$ と表します。
このとき，a や b は数と同じように考えているのです。
このように，式では，1つまたはいくつかの特定の文字に着目して，他の文字を数と同じように考えることがあります。
このとき，数や数と同じように考えている文字を定数といいます。

着目した文字

↓

$ax+b$

↑　　↑

定数　定数

◇特定の文字に着目する場合の整式の次数

単項式 $4ax^2$ では，文字 x に着目すると，$4a\times x^2$ ですから，次数は2です。
また，$3x^2y^3-x^3y+xy-4$ で，x に着目すると，各項の次数は

$3x^2y^3$ ……2次，　$-x^3y$ ……3次，　xy ……1次，　-4 ……0次

ですね。このうち，x についての次数が最も高いのは，$-x^3y$ の3次です。
したがって，$3x^2y^3-x^3y+xy-4$ は，x について3次式です。

◇特定の文字に着目する場合の整式の係数

単項式 $4ax^2$ で，文字 x に着目すると，x 以外の部分はすべて係数と考えますから，係数は $4a$ です。
また，$3x^2y^3-x^3y+xy-4$ で，x に着目すると，係数は

x^2 の係数…… $3y^3$，　x^3 の係数…… $-y$，　x の係数…… y，　定数項…… -4

ですね。

➜どの文字を式の主役と考えるかですね。さあ，基本例題で，その考え方を身につけましょう。

基本例題2　特定の文字に着目する場合の整式の次数・係数

下の整式について，次の問いに答えなさい。

① $-px^3y^2$　　　　② $a^2x^2-abxy^3+a$

(1) x に着目したときの次数と係数をいいなさい。

(2) x と y に着目したときの次数と係数をいいなさい。

◆解　答◆

(1) ①　次数……3，係数……$-py^2$　→$-px^3y^2=-py^2\times x^3$

②　次数……2　→a^2x^2……2次，$-abxy^3$……1次，a……0次

係数……a^2x^2の係数　a^2

$-abxy^3$の係数　$-aby^3$

定数項　a

(2) ①　次数……5，係数……$-p$　→$-px^3y^2=-p\times x^3y^2$

②　次数……4　→a^2x^2……2次，$-abxy^3$……4次，a……0次

係数……a^2x^2の係数　a^2

$-abxy^3$の係数　$-ab$

定数項　a

→同じ式でも，どの文字に着目するかで，次数や係数はちがってきます。注意しましょう。

■■■トレーニング■■■

4　(0004)

次の式の中から，[　　]内の文字に着目したとき，整式になるものを選び，記号で答えなさい。

㋐　$\dfrac{bx^2y}{a}$　[a]　　㋑　$2\sqrt{ab^2}xy^2$　[x，y]

㋒　$2a\sqrt{x}+2b\sqrt{y}$　[x，y]　　㋓　$\sqrt{5m}n^3+\dfrac{3}{m}n$　[n]

5　(0005)

次の整式について，[　　]内の文字に着目したときの次数と各項の係数をいいなさい。

(1)　$\dfrac{abx^2}{5}$　[a]　　(2)　$-x^2y^3$　[y]

(3)　$a^2+ax^2+4x-bx^3$　[x]　　(4)　$2p^4+2pq-p^2q^2$　[p]

→文字をふくむ項でも，着目した文字がなければ定数項ですね。

6　(0006)

次の整式について，[　　]内の文字に着目したときの次数と各項の係数をいいなさい。

(1)　$-4pqr^2$　[q，r]　　(2)　$\dfrac{l^2mn^2}{5}$　[l，m]

(3)　$a^4-bc^2+ab^3-ac$　[b，c]

(4)　$a^3+3a^2b^2c-3a^4bc^2+7b^4$　[a，b]

→整式の次数と係数については，もうわかりましたね。では，こんどは，整式の整理のしかたを順に覚えましょう。まず，式をできるだけ短くすることから始めます。

〔3〕同類項と等しい整式

◇同類項

$2x^2+x-3x+x^2$ という式をよく見ましょう。

$2x^2$ と x^2, x と $-3x$ は，それぞれ文字の部分がまったく同じですね。

このように，式の中で文字の部分がまったく同じである項を，同類項といいます。

同類項

$2x^2+x-3x+x^2$

同類項

〈注意〉 x と x^2 のように，文字の種類は同じでも，次数のちがう場合は，同類項ではありません。

◇同類項をまとめる

同類項は，次のように分配法則を使って，1つにまとめることができます。

$2x^2+x^2=(2+1)x^2=3x^2$ →係数どうしを計算します。

$x-3x=(1-3)x=-2x$

したがって，$2x^2+x-3x+x^2$ は，次のようにまとめることができます。

$2x^2+x-3x+x^2=3x^2-2x$

◇等しい整式

整式 $-3x^2-2+4x-x-2x^2+3$ と，$5-6x^2-4+x^2+3x$ を比べてみましょう。

それぞれの同類項をまとめると

$-3x^2-2+4x-x-2x^2+3=-5x^2+1+3x$

$5-6x^2-4+x^2+3x=1-5x^2+3x$

となり，項の順序のちがいを除くと一致しますね。

このように，2つの整式が，それぞれ同類項をまとめた結果，項の順序のちがいを除いて一致するとき，この2つの整式は等しいといいます。

→簡単ですね。同類項については，中学校でも学習しましたから，さっそくトレーニングしましょう。

■■■トレーニング■■■

7 (0007)

次の式の同類項をまとめなさい。

(1) $2a-3+4a+5$

(2) $-3x^2-2x+5x-x^2$

8 (0008)

次の式の同類項をまとめなさい。

(1) $4x-8y+6-5x+3y$

(2) $x^2-2xy+2x^2+4y^2-5xy+x^2$

→同類項をまとめるときも，特定の文字に着目することがあります。

9 (0009)

次の式を x についての整式と考えて，同類項をまとめなさい。

(1) $3ax^2-5ax^2$

(2) $3x^2-4bx^2+2x$

(3) $m^2x-2mx^2+3mx^2-3x$　　(4) $-7a+5a^2x^2-3bx^2-2ax+x$

10 (0010)

次の整式の中から等しいものを選び，記号で答えなさい。

㋐ x^2-x-3x^2+2x　　㋑ $x^3+5x^2-4x+1-5x^2+2$

㋒ $8ax-4bx^2-2bx^2-ax$　　㋓ $-x^2+4x-3x-x^2$

㋔ $x^3-5x^2-x^3+x+3x^2$　　㋕ $4ax-8bx^2+3ax+2bx^2$

→つぎに，式を整然と表すことを考えましょう。

〔4〕整式の整理

◇降べきの順，昇べきの順

たとえば,2つの整式 $-5x^2+1+3x$ と $1-5x^2+3x$ が等しいかどうかを調べるときなど，整式の項の並び方をきめて，並べかえると調べやすいですね。

$-5x^2+1+3x=-5x^2+3x+1$ は，2次，1次，0次の順に並べかえたものです。

このように，1つの文字について，次数の高いほうから順に並べる並べ方を，降べきの順といいます。

降べきの順とは逆に，$-5x^2+1+3x=1+3x-5x^2$ のように，1つの文字について，次数の低いほうから順に並べる並べ方を，昇べきの順といいます。

◇整式の整理のしかた

整式は，ふつう，次のように整理しておきます。

1　同類項をまとめます。

2　項を，次のどちらかの順に並べます。

(1) 1つの文字について，降べきの順

(2) 1つの文字について，昇べきの順

〈注意〉　ふつうは，降べきの順に並べます。

例　$2x^3+5x-x^3-3x^2-x^2+4-2x$ を降べきの順に整理すると

$$2x^3+5x-x^3-3x^2-x^2+4-2x$$
$$=x^3+3x-4x^2+4$$
$$=x^3-4x^2+3x+4$$

→同類項をまとめることと，次数の順に並べることの2つが，整式の整理の基本ですね。

基本例題3　　整式の整理

次の式を，x について降べきの順に整理しなさい。

(1) $3-2x+3x^2+4x+5$　　(2) $3ax+a-x^2+bx$

◆解　答◆

(1) $3-2x+3x^2+4x+5$

$=(3+5)+(-2+4)x+3x^2$　→同類項をまとめます。

$=8+2x+3x^2$

$=3x^2+2x+8$　→次数の高いほうから順に並べます。

(2) $3ax+a-x^2+bx$

$=(3a+b)x+a-x^2$　　➜ $3ax+bx=(3a+b)x$

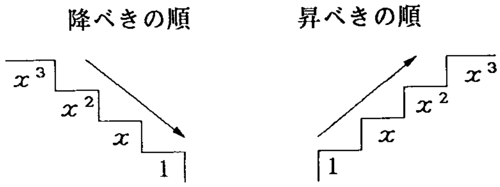
$=-x^2+(3a+b)x+a$

--------• ちょっとひとこと •--------

∘ 降べき，昇べきの「べき」とは，巾（冪）と書き，累乗と同じ意味です。

文字が1種類のとき，x^3 の次数は3，x^2 の次数は2のように，次数と累乗の指数は一致します。

ですから，「降べきの順」に並べるといったら，累乗の指数の大きいほうから小さいほうへ降りてくるように並べることだと覚えておきましょう。



➜まず，整式を次数の順に並べてみましょう。

■■■トレーニング■■■

11 (0011)

次の整式を，降べきの順に並べなさい。

(1) $-2a+a^4-3a^2+7-8a^3$　　(2) x^2+4x^4-7+5x

12 (0012)

次の整式を，昇べきの順に並べなさい。

(1) $3m^2-2m^5+1-8m^4+6m^3+4m$

(2) $3a^4-a^2-1-4a^3$

13 (0013)

整式 $2ax^3+axy^3-3y^2+a^2x^2y$ を，次のように並べなさい。

(1) x について降べきの順

(2) y について昇べきの順

➜次数の順に並べられるようになりましたね。では，いよいよ整式の整理に移りましょう。

14 (0014)

次の式を，降べきの順に整理しなさい。

(1) $3x-4-x^2-7x+3x^2+1$

(2) $xy-5-4x+3xy-2x+2xy+x^2y$

15 (0015)

次の式を，[　　] 内の文字について，降べきの順に整理しなさい。

(1) $x^2-3x+2a^2+ax^2+5$ $[x]$

(2) $x^2y+xz-7y^2+x+6y^2z-z$ $[x]$

➜ここでは，整式とその次数・係数から出発して，整式の整理のしかたまで学習しました。
楽に進められましたね。では，残ったパワーは次回にそなえることにして，終わりにしましょう。

まとめておこう！

1. 単項式と多項式を合わせて整式という。
2. 特定の文字について着目するときは，その文字以外は，数と同じように考える。
3. 整式の整理のしかた
   (1) 同類項をまとめる。
   (2) 降べきの順か昇べきの順に並べる。

§2　整式の加法・減法

たとえば，$x^2+3xy+2y^2$ と $4x^2-2xy+y^2$ の和や差はどのようにして求めるのでしょうか。ここでは，このような整式の加法・減法のしかたを学習します。簡単な整式の加法・減法については，すでに中学校で学習していますね。それを踏み台にして，ここではすこし複雑な整式の加法・減法までできるようになりましょう。

➜まず，2つの整式の加法・減法のしかたを学習しましょう。

基本例題1　　整式の加法・減法(1)

次の2つの整式の和を求めなさい。また，第1式から第2式をひいた差を求めなさい。

(1)　$3p^2-5p-2$，$-p^2+2p+7$　　(2)　$\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{5}xy-y^2$，$\frac{3}{4}x^2-\frac{5}{6}y^2+xy$

◆考え方◆

2つの整式の加法・減法は，それぞれの整式にかっこをつけ，+，− でつなぎます。そして，下の規則にしたがってかっこをはずし，同類項をまとめ，降べきの順に並べます。

$+(a+b)=+a+b$，　$+(a-b)=+a-b$

➜かっこの中の項の符号は変わらない。

$-(a+b)=-a-b$，　$-(a-b)=-a+b$

➜かっこの中の項の符号が変わる。

◆解　答◆

(1)　$(3p^2-5p-2)+(-p^2+2p+7)$　　➜かっこをつけ，+ でつなぎます。

$=(3-1)p^2+(-5+2)p+(-2+7)$　　➜同類項をまとめ，降べきの順に並べます。

$=2p^2-3p+5$

$(3p^2-5p-2)-(-p^2+2p+7)$　　➜かっこをつけ，−でつなぎます。

$=3p^2-5p-2+p^2-2p-7$　　➜かっこをはずします。

$=(3+1)p^2+(-5-2)p+(-2-7)$

$=4p^2-7p-9$

(2)　$\left(\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{5}xy-y^2\right)+\left(\frac{3}{4}x^2-\frac{5}{6}y^2+xy\right)$

$=\left(\frac{1}{3}+\frac{3}{4}\right)x^2+\left(\frac{1}{5}+1\right)xy+\left(-1-\frac{5}{6}\right)y^2$

➜1つの文字，たとえば x について，降べきの順に並べます。

$=\frac{13}{12}x^2+\frac{6}{5}xy-\frac{11}{6}y^2$

$\left(\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{5}xy-y^2\right)-\left(\frac{3}{4}x^2-\frac{5}{6}y^2+xy\right)$

$=\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{5}xy-y^2-\frac{3}{4}x^2+\frac{5}{6}y^2-xy$

$=\left(\frac{1}{3}-\frac{3}{4}\right)x^2+\left(\frac{1}{5}-1\right)xy+\left(-1+\frac{5}{6}\right)y^2$

$=-\frac{5}{12}x^2-\frac{4}{5}xy-\frac{1}{6}y^2$

→加法では，それぞれの整式の項をすべて加え，同類項をまとめるのですね。減法では，ひく整式の各項の符号を変えて加えることがポイントです。さあ，トレーニングしましょう。

■■■トレーニング■■■

1 (0016)

次の２つの整式の和を求めなさい。

(1) a^2+3a-5, $5a^2-2a+1$

(2) $8x^3+3x^2-4x+12$, $-3x^2-3+x+6x^3$

2 (0017)

次の２つの整式の和を求めなさい。

(1) $-\frac{2}{5}m^2-\frac{1}{4}m-\frac{1}{2}$, $\frac{3}{5}m^2-\frac{3}{4}m-3$

(2) $\frac{1}{3}-\frac{1}{2}y^3-y$, $\frac{7}{5}y^2-\frac{2}{3}y^3+2-\frac{3}{4}y$

3 (0018)

次の２つの整式の和を求めなさい。

(1) $3a^2-5ab+b^2$, $2a^2-ab-3b^2$

(2) $x^3-x^2y+3xy^2-2y^3$, $3xy^2-2y^3+x^3-x^2y$

4 (0019)

次の２つの整式について，第１式から第２式をひいた差を求めなさい。

(1) a^2+3a-5, $4a^2-2a+1$

(2) $8x^3+3x^2-4x+12$, $-3x^2-3+x+6x^3$

5 (0020)

次の２つの整式について，第１式から第２式をひいた差を求めなさい。

(1) $-\frac{2}{5}m^2-\frac{1}{4}m-\frac{1}{2}$, $\frac{3}{5}m^2-\frac{3}{4}m-3$

(2) $\frac{1}{3}-\frac{1}{2}y^3-y$, $\frac{7}{5}y^2-\frac{2}{3}y^3+2-\frac{3}{4}y$

6 (0021)

次の２つの整式について，第１式から第２式をひいた差を求めなさい。

(1) $3a^2-5ab+b^2$, $2a^2-ab-3b^2$

(2) $x^3-x^2y+3xy^2-2y^3$, $3xy^2-2y^3+x^3-x^2y$

→２つの整式の加法・減法についてはわかりましたね。では，こんどは整式の加減の混じった式，かっこのついた式，数×整式など，もうすこし複雑な計算をしてみましょう。

基本例題２　　整式の加法・減法(2)

$A=x^2-2xy$, $B=y^2+3xy-2x^2$, $C=-3+5x^2$ のとき，次の計算をしなさい。

(1) $A+B-2C$　　(2) $(A-C)-(B-C)$

◆ 考え方 ◆

A に x^2-2xy, B に $y^2+3xy-2x^2$, C に $-3+5x^2$ を，それぞれかっこをつけて代入します。そして，かっこの前に数があるときは，下の分配法則を使ってかっこをはずします。

$$m(a+b)=ma+mb$$

(2)のように，与えられた式に，同じ整式が何度も出てくるときは，まず，その式を

$$(A-C)-(B-C)=A-C-B+C=A-B$$

のように，できるだけ簡単にしてから代入すると楽に計算できます。

◆ 解　答 ◆

(1)　$A+B-2C$

$=(x^2-2xy)+(y^2+3xy-2x^2)-2(-3+5x^2)$

➜かっこをつけて代入します。

$=x^2-2xy+y^2+3xy-2x^2+6-10x^2$

➜ $-2(-3+5x^2)=-2\times(-3)-2\times5x^2$

$=(1-2-10)x^2+(-2+3)xy+y^2+6$　➜同類項をまとめます。

$=-11x^2+xy+y^2+6$

(2)　$(A-C)-(B-C)$

$=A-C-B+C$　➜まず，A, B, C について式を整理します。

$=A-B$

$=(x^2-2xy)-(y^2+3xy-2x^2)$

$=x^2-2xy-y^2-3xy+2x^2$

$=(1+2)x^2+(-2-3)xy-y^2$

$=3x^2-5xy-y^2$

➜(2)は，与えられた式に直接代入して計算してもできますが，式を整理してから代入したほうが，計算が楽ですね。では，トレーニングに移りましょう。

■■■トレーニング■■■

7　(0022)

$A=x^2-3x+2$, $B=1+2x-4x^2$, $C=2x^2+5$ のとき，次の計算をしなさい。

(1)　$A-B+C$　　(2)　$2A-\frac{1}{3}B+\frac{1}{4}C$

8　(0023)

$A=2x^2+3x+1$, $B=-5x^2+3x+1$, $C=7x+3x^2$ のとき，次の計算をしなさい。

(1)　$A-B-(B-C)$　　(2)　$A-2C+2(B+C)$

9　(0024)

$A=a^2-4ab+5b^2$, $B=b^2-6ab+8$, $C=-3ab+2b^2$ のとき，次の計算をしなさい。

(1)　$A+B-C$　　(2)　$-\frac{1}{4}A+\frac{1}{3}B-\frac{1}{2}C$

10　(0025)

$A=x^2-2x-4$, $B=-2x^2+x+3$ のとき

$$2A+3X=2B+1$$

を満たす整式 X を求めなさい。

→２つの整数の和や差を求めるのに，右のように，それらの数の位を縦にそろえて書いて計算しましたね。整式の和や差を求めるときも，これとよく似た方法で計算することができます。つぎに，この方法を学習しましょう。

$$\begin{array}{r} 132 \\ +\ 429 \\ \hline 561 \end{array}$$

基本例題３　　整式の加法・減法(3)

次の式を，同類項を縦に並べて，計算しなさい。

(1)　$(3x^3-x^2-4)+(3-5x+2x^2-x^3)$

(2)　$(x^2+4xy-y^2)-(3x^2+2y^2-xy)$

◆ 考え方 ◆

まず，それぞれの式を降べきの順に並べます。文字が２種類以上あるときは，１つの文字に着目して降べきの順に並べます。

そして，それらの式の同類項を縦に並べます。ここで，一方の式に，ある次数の項がないときは，その次数の項が並ぶ場所をあけておきます。

◆ 解　答 ◆

(1)

$$\begin{array}{rrrrr} & 3x^3 & -\ x^2 & & -4 \\ +) & -\ x^3 & +2x^2 & -5x & +3 \\ \hline & 2x^3 & +\ x^2 & -5x & -1 \end{array}$$

→１次の項がないので，あけておきます。
→降べきの順に並べます。
→x^3 の係数　$3+(-1)=2$
　x^2 の係数　$-1+2=1$
　x の係数　$0+(-5)=-5$
　定数項　　$-4+3=-1$

(2)

$$\begin{array}{rrrr} & x^2 & +4xy & -\ y^2 \\ -) & 3x^2 & -\ xy & +2y^2 \\ \hline & -2x^2 & +5xy & -3y^2 \end{array}$$

→x について，降べきの順に並べます。
→x^2 の係数　$1-3=-2$
　xy の係数　$4-(-1)=5$
　y^2 の係数　$-1-2=-3$

注　このように,２つまたはそれ以上の式の同類項を縦に並べて計算する方法を,トレーニングペーパーでは，縦書きの方法ということにします。

--------• ちょっとひとこと •--------

◦　縦書きの方法は，下の右のように，係数だけ書いて計算してもかまいません。このとき，ある次数の項がない場合は，その項の係数を０と考えます。

$$\begin{array}{rrrrr} & 3x^3 & -\ x^2 & & -4 \\ +) & -\ x^3 & +2x^2 & -5x & +3 \\ \hline & 2x^3 & +\ x^2 & -5x & -1 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rrrrr} & 3 & -1 & 0 & -4 \\ +) & -1 & 2 & -5 & 3 \\ \hline & 2 & 1 & -5 & -1 \end{array}$$

→むずかしいことは何もありませんね。さあ，トレーニングしましょう。

■■■トレーニング■■■

11　(0026)

縦書きの方法で，次の計算をしなさい。

(1)　$(6a^2-5a-4)+(3a^2-2a+1)$
(2)　$(a^3-2a+3)+(4a^3+a^2-1)$
(3)　$(5x^3-3+7x^2-x)-(3-x+4x^2-2x^3)$
(4)　$(8x^4-2x+3x^2)-(10x^4-4x^3-x+8)$

12　(0027)
縦書きの方法で，次の計算をしなさい。
(1)　$(a^2-ab+5b^2)+(2ab-3a^2-2b^2)$
(2)　$(-5ab+3b^2)+(2a^2+3ab-b^2)$
(3)　$(x^3-x^2y-6xy^2+y^3)-(3x^3-2y^3-5xy^2+x^2y)$
(4)　$(x^2y-2x^3+4y^3)-(6y^3+9xy^2-x^3)$

➜整式の加法・減法は，同類項をまとめることが基本であることがわかりましたね。
このことをきちんとおさえて，ここでの学習を終わりにしましょう。

§3　整式の乗法

整式の加法・減法のつぎは，整式の乗法を学習しましょう。
$(x+1)(x+2)=x^2+3x+2$ となることは，すでに中学校で学習しましたね。ここでは，もうすこし複雑な整式の乗法，たとえば，$(x+1)(x^2+4x+2)$ や $(x+2y)(x^2+3xy+y^2)$ のような計算のしかたを学習します。

➜まず，整式の乗法の基本になる法則から始めましょう。

〔1〕指数法則

◇累乗，指数

$a\times a$ は，a を 2 個かけ合わせたもので，これを a^2 と書きます。
また，a を 3 個かけ合わせた $a\times a\times a$ を　a^3
　　a を 4 個かけ合わせた $a\times a\times a\times a$ を　a^4
　　…　…
　　a を n 個かけ合わせた $a\times a\times\cdots\cdots\times a$ を a^n
のように，a を n 個かけ合わせたものを，かけた個数を a の右肩に小さく書いて，a^n と表し，a の n 乗といいます。

$$\underbrace{a\times a\times\cdots\cdots\times a}_{n\text{個}} \rightarrow a^n$$

a^1 は a のことです。a^1，a^2，a^3，……，a^n，……を総称して，a の累乗といいます。
また，a^n の n を累乗の指数といいます。たとえば，a^2 の指数は 2，a^4 の指数は 4 です。
〈注意〉　a^2 を a の平方，a^3 を a の立方ともいいます。

◇指数法則

累乗についての計算を，上の累乗の意味にもどって考えてみましょう。

(1)　$a^2\times a^3=(a\times a)\times(a\times a\times a)=a^{2+3}=a^5$
　　➜ 2 個の積と 3 個の積をかけ合わせると，合わせて 2+3=5 (個) の積です。

(2)　$(a^2)^3=a^2\times a^2\times a^2=(a\times a)\times(a\times a)\times(a\times a)=a^{2\times3}=a^6$
　　➜ 2 個の積のまとまりを，3 回かけ合わせると，2×3=6 (個) の積です。

(3)　$(ab)^3=ab\times ab\times ab$
$=(a\times b)\times(a\times b)\times(a\times b)$
$=(a\times a\times a)\times(b\times b\times b)$
$=a^3b^3$

となりますね。一般的に，次のようになります。

m，n が正の整数のとき (1)　$a^m\times a^n=a^{m+n}$　　(2)　$(a^m)^n=a^{mn}$　　(3)　$(ab)^n=a^nb^n$

これを指数法則といいます。

➜指数法則はわかりましたね。単項式どうしの乗法は，この指数法則を組み合わせて使うと，計算できます。さっそく挑戦してみましょう。

基本例題 1　　単項式の乗法

$7x^5\times(-2x^4y^2)^3$ を計算しなさい。

◆ 考え方 ◆

指数法則 $a^m\times a^n=a^{m+n}$, $(a^m)^n=a^{mn}$, $(ab)^n=a^nb^n$ を組み合わせて使います。

たとえば，$(-2x^4y^2)^3$ は，指数法則のどれにもあてはまらないように見えますが，次のように，指数法則をくり返して使うと，計算できます。

$$(a\ b\ c)^n=(a\ b)^n c^n=a^n\ b^n\ c^n$$

$$(-2x^4y^2)^3=(-2x^4)^3(y^2)^3=(-2)^3(x^4)^3(y^2)^3$$

➜ $a=-2$, $b=x^4$, $c=y^2$, $n=3$

$-2x^4$をひとまとまりと考えて，指数法則を使います。

$(-2x^4)^3$ に指数法則を使います。

◆ 解　答 ◆

$7x^5\times(-2x^4y^2)^3$

$=7x^5\times(-2)^3(x^4)^3(y^2)^3$

$=7x^5\times(-8)x^{12}y^6$　　➜$(-2)^3=-8$, $(x^4)^3=x^{4\times3}$, $(y^2)^3=y^{2\times3}$

$=-56x^{5+12}y^6$　　➜ $7\times(-8)=-56$, $x^5\times x^{12}=x^{5+12}$

$=-56x^{17}y^6$

➜数は，指数のついたままや，数と数の積の形のままにしないで，計算しておきます。負の数の累乗は符号にじゅうぶん注意しましょう。

－が偶数個の積は＋
－が奇数個の積は－

■■■トレーニング■■■

1　(0028)

次の計算をしなさい。

(1)　$2x^3\times x^2$　　(2)　$(-x^3)^4$

(3)　$(a^2b^3)^4$　　(4)　$(-2x^6y^4)^3$

2　(0029)

次の計算をしなさい。

(1)　$(-a^2)\times 2a^3$　　(2)　$3ab\times 5a^4b^2$

(3)　$(-3x^4)\times(-3x)^4$　　(4)　$(-5x^2y)^3\times y^2z$

3　(0030)

次の計算をしなさい。

(1)　$(xy)^4\times(-x^2)\times(-y)^3$　　(2)　$(2a^2b)^3\times(-2a^2b)^2\times a^2b$

(3)　$(xy^3)^2\times(-y^2z)^4\times(z^3x^2)^3$

(4) $5p^2q\times(-pq^2r^3)^2\times(-3p^2qr^4)^2$

➜単項式どうしの乗法は，できるようになりましたね。では，多項式をふくむ乗法はどうするのでしょうか。つぎに，多項式の乗法を学習しましょう。

〔2〕多項式の乗法

◇分配法則

中学校で学習した $2(x-3)$ の計算を思い出してみましょう。

〔問〕 $2(x-3)$ を計算しなさい。

分配法則 $m(a+b)=ma+mb$ を使いましたね。

同じように，整式の乗法は，次の分配法則を使って計算します。

A，B，C を整式とすると

$A(B+C)=AB+AC$　　$(B+C)A=BA+CA$

たとえば

$$A\ (B+C)=A\times B+A\times C$$

$$5x(x^2-3)=5x\times x^2+5x\times(-3)=5x^3-15x$$

となります。

• 問の答 •

$2(x-3)$
$=2\times x-2\times 3$
$=2x-6$

◇展開する

上で計算した $5x(x^2-3)=5x^3-15x$ をよく見てみましょう。

左辺は，2つの整式 $5x$ と x^2-3 の積ですね。

そして，右辺は，2つの単項式 $5x^3$ と $-15x$ の和です。

このように，整式の積を単項式の和の形にすることを，展開するといいます。

$5x(x^2-3)=5x^3-15x$

<積> $\xrightarrow[\text{展開する}]{}$ <和>

◇ $(2x^2+3)(x^3+x-1)$ の展開

整式の乗法の中でも，$(2x^2+3)(x^3+x-1)$ のような多項式どうしの乗法では，分配法則をくり返し使って，次のように展開します。

$(2x^2+3)(x^3+x-1)$　　➜ x^3+x-1 を1つのものと考えて，分配法則を使います。

$=2x^2(x^3+x-1)+3(x^3+x-1)$

$=2x^2\times x^3+2x^2\times x-2x^2\times 1+3\times x^3+3\times x-3\times 1$

➜ $2x^2(x^3+x-1)$，$3(x^3+x-1)$ それぞれに分配法則を使います。

$=2x^5+2x^3-2x^2+3x^3+3x-3$

$=2x^5+5x^3-2x^2+3x-3$　　➜同類項をまとめ，降べきの順に並べます。

◇かけられる式，かける式，積の次数の関係

上で計算した式をふり返ってみると

$5x(x^2-3)=5x^3-15x$ で，1次式と2次式の積は3次式　　➜ $1+2=3$

$(2x^2+3)(x^3+x-1)=2x^5+5x^3-2x^2+3x-3$ で，2次式と3次式の積は5次式になっ

ていますね。　→ $2+3=5$

一般に，m 次式と n 次式の積は，$m+n$ 次式になります。

→展開の意味や，展開のしかたはわかりましたね。では，次の例題で，展開してみましょう。

基本例題 2　　**多項式の乗法**

次の式を展開しなさい。

(1)　$(3x-4)(x^2+2x-1)$　　(2)　$(a^2+b^2)(a^2-ab-b^2)$

◆解　答◆

(1)　$(3x-4)(x^2+2x-1)$

$=3x(x^2+2x-1)-4(x^2+2x-1)$　→ x^2+2x-1 を 1 つのものと考えます。

$=3x\cdot x^2+3x\cdot 2x-3x\cdot 1-4\cdot x^2-4\cdot 2x+4\cdot 1$

→もう 1 度分配法則を使います。

$=3x^3+6x^2-3x-4x^2-8x+4$　→指数法則を使って計算します。

$=3x^3+2x^2-11x+4$　→整理します。

(2)　$(a^2+b^2)(a^2-ab-b^2)$

$=a^2(a^2-ab-b^2)+b^2(a^2-ab-b^2)$

→ a^2-ab-b^2 を 1 つのものと考えます。

$=a^2\cdot a^2-a^2\cdot ab-a^2\cdot b^2+b^2\cdot a^2-b^2\cdot ab-b^2\cdot b^2$

$=a^4-a^3b-a^2b^2+a^2b^2-ab^3-b^4$

$=a^4-a^3b-ab^3-b^4$

注　$a\cdot b$ は $a\times b$ のことです。

$\cdot$ は × と同じように使いますから，たとえば $a^2\cdot -ab$ のように，$\cdot$ のすぐ後ろに符号や計算記号はつづけて書きません。必ずかっこをつけて，$a^2\cdot(-ab)$ と書きます。

--------• ちょっとひとこと •--------

◦　上の(1)の計算を，$3x-4$ を 1 つのものと考えて，次のように計算してもかまいません。

$(3x-4)(x^2+2x-1)$

$=(3x-4)x^2+(3x-4)\cdot 2x-(3x-4)\cdot 1$

$=3x\cdot x^2-4\cdot x^2+3x\cdot 2x-4\cdot 2x-3x\cdot 1+4\cdot 1$

$=3x^3-4x^2+6x^2-8x-3x+4$

$=3x^3+2x^2-11x+4$

◦　一般に，整式の乗法は，一方の整式の各項に他方の整式の各項を順にかけて，それらの和をつくってもできます。

だから，右のように，2 項と 3 項の整式の乗法で，かっこをはずすと，同類項をふくめて 2×3=6 (項) できます。

①②③

$(a+b)(c+d+e)$

④⑤⑥

$=ac+ad+ae+bc+bd+be$

①　②　③　④　⑤　⑥

➜それでは，展開するトレーニングに移りましょう。

■■■トレーニング■■■

4 (0031)

次の式を展開しなさい。

(1) $5x(4x^2+3x-2)$　　(2) $-2a^2(3a^2+7-a)$

(3) $a^3b^2(a^2b-6ab+5b^2)$　　(4) $(3x^2y^2)^3(x^2-3xy+4y^2)$

5 (0032)

次の式を展開しなさい。

(1) $(x-3)(2x^2+x-1)$　　(2) $(m+4)(m^2-3m+2)$

(3) $(ax+by)(bx+ay)$　　(4) $(5p^2-3q^2+4pq)(p-q)$

6 (0033)

次の式を展開しなさい。

(1) $(x^2-x+5)(3x^2+8x-2)$

(2) $(x^2-xy+3y^2)(x^2+y^2+y)$

➜整式の加法・減法で，同類項を縦にそろえて計算する縦書きの方法を学習しましたね。整式の乗法でも同じような方法がよく使われます。この方法を学習しましょう。

基本例題3　　整式の乗法

次の式の展開を，式を縦に並べて計算しなさい。

(1) $(x^2+3-2x)(2-x^2)$　　(2) $(b^2+a^2-3ab)(b-2a)$

◆考え方◆

まず，それぞれの式を降べきの順に並べます。文字が2種類以上あるときは，1つの文字に着目して降べきの順に並べます。

そして，それらの式を，右のように縦に並べて書きます。このとき，ある次数の項がないときは，その次数の項がはいる場所をあけておきます。

$$\begin{array}{rrrr} & x^2 & -2x & +3 \\ \times) & -x^2 & \boxed{} & +2 \\ \hline \end{array}$$

あけておく

◆解　答◆

(1)

$$\begin{array}{rrrrrr} & & & x^2 & -2x & +3 \\ \times) & & & -x^2 & & +2 \\ \hline & -x^4 & +2x^3 & -3x^2 & & \\ & & & 2x^2 & -4x & +6 \\ \hline & -x^4 & +2x^3 & -x^2 & -4x & +6 \end{array}$$

➜$(x^2-2x+3)\cdot(-x^2)$ を $-x^2$ の真下から，$(x^2-2x+3)\cdot 2$ を2の真下から書きます。

➜上の2式の和を求めます。

(2)

$$\begin{array}{rrrrr} & & a^2 & -3ab & +b^2 \\ \times) & & -2a & +b & \\ \hline & -2a^3 & +6a^2b & -2ab^2 & \\ & & a^2b & -3ab^2 & +b^3 \\ \hline & -2a^3 & +7a^2b & -5ab^2 & +b^3 \end{array}$$

➜a について，降べきの順に並べます。

〈注意〉　基本例題3の方法を，トレーニングペーパーでは，乗法の縦書きの方法ということにします。

■■■トレーニング■■■

7 (0034)

縦書きの方法で，次の式を展開しなさい。

(1) $(2x^2+3x-1)(x^2-3x)$

(2) $(3x^2-4x-1)(2x-x^2+1)$

8 (0035)

縦書きの方法で，次の式を展開しなさい。

(1) $(3b^2-4a^2+ab)(2b-a)$

(2) $(x^2-3y^2)(y^2-5xy+7x^2)$

➜計算ばかりでたいへんでしたが，がんばりましたね。余力のある人や，もうすこしがんばりたい人は次のもっと力をつけようで，項数が多くて，複雑な整式の乗法をしてみましょう。

もっと力をつけよう

■■■トレーニング■■■

9* (0036)

$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$を展開しなさい。

➜項数が多くなっても，いままでどおり，分配法則をくり返し使って，展開すればよいのです。

➜ここでの学習は，これで終わりです。計算問題では，ちょっと面倒でも，途中の計算をあまりはぶかないほうが，計算まちがいが少なく，むしろ速くできます。あとで見直すときも楽です。

まとめておこう！

1. 指数法則
   $a^m \times a^n = a^{m+n}$，$(a^m)^n = a^{mn}$，
   $(ab)^n = a^n b^n$
2. 整式の積を単項式の和の形にすることを展開するといいます。
3. 多項式どうしの積は，分配法則をくり返し使って展開することができます。

§4　乗法公式

前に，学習したように，整式の乗法は，どんな整式でも，分配法則を使って順に計算していけばできます。でも，特別な形をしている整式の乗法は，その結果を公式として覚えておいたほうが，簡単に計算できます。中学校でも，
$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ などの公式を学習しましたね。ここではもっといろいろな乗法公式を覚え，整式の乗法がより手早くできるようになりましょう。

➜まず，2つの1次式の乗法についての公式から始めます。中学校の復習もかねて学習しましょう。

〔1〕2つの1次式の乗法の公式

◇ $(a+b)^2$，$(a-b)^2$ の乗法公式

$(x+3)^2$ や $(x-5)^2$ のように，同じ式の平方の乗法公式は中学校で学習しましたね。復習してみましょう。

〔問〕 公式を使って，次の式を展開しなさい。

(1) $(x+3)^2$　　　(2) $(x-5)^2$

〔問〕はできましたね。次の公式を使うのです。

1　$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ ……和の平方

2　$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ ……差の平方

これらの公式は，形で覚えておきましょう。

●問の答●

(1)　$(x+3)^2$
$=x^2+2\cdot x\cdot 3+3^2$
$=x^2+6x+9$

(2)　$(x-5)^2$
$=x^2-2\cdot x\cdot 5+5^2$
$=x^2-10x+25$

◇ $(a+b)(a-b)$，$(x+a)(x+b)$ の乗法公式

$(x+3)(x-3)$ や $(x+1)(x+3)$ のように，両方の式に共通な項がふくまれているときの乗法公式も中学校で学習しましたね。思い出しましょう。

$$(x+3)(x-3)=x^2-3^2=x^2-9$$
$$(x+1)(x+3)=x^2+(1+3)x+1\cdot 3=x^2+4x+3$$

でしたね。

これらの公式もしばしば使われますから，まとめて覚えておきましょう。

3　$\underset{\text{和}}{(a+b)}\underset{\text{差}}{(a-b)}=\underset{\text{平方の差}}{a^2-b^2}$ ……和と差の積

4　$(x+a)(x+b)=x^2+\underset{\text{和}}{(a+b)}x+\underset{\text{積}}{ab}$

◇ $(ax+b)(cx+d)$ の乗法公式

$(ax+b)(cx+d)$ は，両方の式に x が共通にふくまれていますね。この式を展開してみましょう。

$$
\begin{aligned}
&(ax+b)(cx+d)\\
&=ax(cx+d)+b(cx+d) && \Rightarrow cx+d \text{ を1つのものと考えます。}\\
&=acx^2+adx+bcx+bd\\
&=acx^2+(ad+bc)x+bd && \Rightarrow x \text{ について降べきの順に並べます。}
\end{aligned}
$$

となります。結局，次の公式が成り立つことがわかります。

5　$(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd$

◇ $(ax+b)(cx+d)$ の乗法公式の覚え方

上の公式は，次のようになっています。

x の係数どうしの積

$$(ax+b)(cx+d)=acx^2+\boxed{}+bd$$

定数項どうしの積

前の x の係数と後ろの定数項との積

$$(ax+b)(cx+d)=\boxed{}+(ad+bc)x+\boxed{}$$

前の定数項と後ろの x の係数との積

➜公式は，覚えておいて，いつでも使えるようにすることがたいせつです。でも，もし忘れてしまったときでも，分配法則を使って計算し，公式を導けるようにしておくこともたいせつです。

基本例題 1　　乗法公式(1)

公式を使って，次の式を展開しなさい。

(1)　$(3x-4y)^2$　　(2)　$(2+5x)(5x-2)$

(3)　$(2m-5)(2m-7)$　　(4)　$(2x-1)(3x+2)$

◆ 考え方 ◆

与えられた式の形から，どの公式が使えるかを判断します。このとき，かけ合わせる両方の式に共通なものが何かで，次のように考えられます。

両方の式がまったく同じとき	$(a+b)^2$，$(a-b)^2$	
1つの項が共通なとき	$(x+a)(x+b)$	➜残りの項はちがう。
	$(a+b)(a-b)$	➜符号だけちがう。
1つの文字だけが共通なとき	$(ax+b)(cx+d)$	

また，与えられた式の形そのままでは判断しにくいときは，すこし変形してみるとわかります。たとえば，(2)で，$(2+5x)(5x-2)=(5x+2)(5x-2)$ とすれば使える公式が見えてきます。

◆解　答◆

(1)　$(3x-4y)^2$　　→$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

$=(3x)^2-2\cdot 3x\cdot 4y+(4y)^2$

$=9x^2-24xy+16y^2$

(2)　$(2+5x)(5x-2)$

$=(5x+2)(5x-2)$　　→$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

$=(5x)^2-2^2$

$=25x^2-4$

(3)　$(2m-5)(2m-7)$　　→$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$

$=(2m)^2+(-5-7)\cdot 2m+(-5)\cdot(-7)$

$=4m^2-24m+35$

(4)　$(2x-1)(3x+2)$　　→$(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd$

$=2\cdot 3\cdot x^2+\{2\cdot 2+(-1)\cdot 3\}x+(-1)\cdot 2$

$=6x^2+x-2$

→では，式の形に注意してトレーニングしてみましょう。

■■■トレーニング■■■

1　(0037)

次の式を展開しなさい。

(1)　$(a-2b)^2$　　　(2)　$(2m-3n)^2$

(3)　$(5a+bc)^2$　　　(4)　$\left(4x+\frac{y}{3}\right)^2$

2　(0038)

次の式を展開しなさい。

(1)　$(5+4x)(4x-5)$　　　(2)　$\left(\frac{1}{3}m+2\right)\left(\frac{1}{3}m-2\right)$

3　(0039)

次の式を展開しなさい。

(1)　$\left(x-\frac{y}{2}\right)\left(x+\frac{y}{2}\right)$　　　(2)　$(2x+yz)(2x-yz)$

4　(0040)

次の式を展開しなさい。

(1)　$(x+4y)(x-5y)$　　　(2)　$(2a-bc)(2a-3bc)$

5　(0041)

次の式を展開しなさい。

(1)　$(2x+3)(3x+1)$　　　(2)　$\left(x-\frac{5}{2}\right)\left(3x-\frac{7}{2}\right)$

6　(0042)

次の式を展開しなさい。

(1)　$(x-4y)(3x-5y)$　　　(2)　$(2x-3y)(4x+9y)$

〈注意〉　$(ax+b)(cx+d)$で，$b=b'y$，$d=d'y$のとき，

$(ax+b'y)(cx+d'y)$ の形とみると，次のように展開されます。

$$(ax+b'y)(cx+d'y)=acx^2+(ad'+b'c)xy+b'd'y^2$$

➜ 2つの1次式の乗法についての公式は自由に使えるようになりましたね。つぎは，$(a+b)^3$ や $(a-b)^3$ の乗法公式を学習しましょう。

〔2〕$(a+b)^3$，$(a-b)^3$ の乗法公式

◇ $(a+b)^3$ の展開

$(a+b)^3$ を展開してみましょう。

$(a+b)^3=(a+b)(a+b)^2$ と表せますね。

また，〔1〕で学習したように，$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ ですから

$$\begin{aligned}(a+b)^3&=(a+b)(a+b)^2\\&=(a+b)(a^2+2ab+b^2)\\&=a(a^2+2ab+b^2)+b(a^2+2ab+b^2)\end{aligned}$$

➜ $a^2+2ab+b^2$ を1つのものと考えます。

$$\begin{aligned}&=a^3+2a^2b+ab^2+a^2b+2ab^2+b^3\\&=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\end{aligned}$$

➜整理します。

となります。

◇ $(a-b)^3$ の展開

$(a+b)^3$ の場合と同じように考えて，$(a-b)^3$ を展開してみましょう。

〔問〕 $(a-b)^3=(a-b)(a-b)^2$ と表せることを利用して，$(a-b)^3$ を展開しなさい。

〔問〕はできましたね。

$a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$ の項の符号を調べてみましょう。

－の符号がつくのは，b，b^3 をふくむ項，つまり，b を奇数個ふくむ項です。

●問の答●

$$\begin{aligned}&(a-b)^3\\=\;&(a-b)(a-b)^2\\=\;&(a-b)(a^2-2ab+b^2)\\=\;&a(a^2-2ab+b^2)-b(a^2-2ab+b^2)\\=\;&a^3-2a^2b+ab^2-a^2b+2ab^2-b^3\\=\;&a^3-3a^2b+3ab^2-b^3\end{aligned}$$

◇ $(a+b)^3$，$(a-b)^3$ の乗法公式

上で展開した2つの式をまとめると，次のようになります。比べながら覚えましょう。

各項の符号だけちがいますね。
$(a+b)^3$ の展開では全部＋
$(a-b)^3$ の展開では b を奇数個ふくむ項が－

6　$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$……和の立方
7　$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$……差の立方

➜それでは，ここでまとめた公式を実際に使って展開してみましょう。

基本例題 2　　　　**乗法公式(2)**

公式を使って，次の式を展開しなさい。

(1)　$(x+4)^3$　　　　(2)　$(2x-y)^3$

◆ 考え方 ◆

与えられた式は，(1)は $(a+b)^3$，(2)は $(a-b)^3$ の形です。a，b にあたるものをはっきりさせて，次のように公式にあてはめて展開します。

$$(a+b)^3=a^3\ +3a^2b\ +3ab^2\ +b^3$$
$$(x+4)^3=x^3+3\cdot x^2\cdot 4+3\cdot x\cdot 4^2+4^3$$

$$(a-b)^3=a^3\ -3a^2b\ +3ab^2\ -b^3$$
$$(2x-y)^3=(2x)^3-3\cdot(2x)^2\cdot y+3\cdot 2x\cdot y^2-y^3$$

◆ 解　答 ◆

(1)　$(x+4)^3$

$=x^3+3\cdot x^2\cdot 4+3\cdot x\cdot 4^2+4^3$

$=x^3+12x^2+48x+64$

(2)　$(2x-y)^3$

$=(2x)^3-3\cdot(2x)^2\cdot y+3\cdot 2x\cdot y^2-y^3$

$=8x^3-12x^2y+6xy^2-y^3$

➜式がすこし長くなりますから，途中の計算をまちがえないように注意して，トレーニングしましょう。

■■■トレーニング■■■

7　(0043)

次の式を展開しなさい。

(1)　$(a+2)^3$　　　　(2)　$(3+b)^3$

(3)　$(x-1)^3$　　　　(4)　$\left(\frac{1}{3}-p\right)^3$

8　(0044)

次の式を展開しなさい。

(1)　$(3a+2)^3$　　　　(2)　$(4y-1)^3$

(3)　$\left(2m-\frac{1}{3}\right)^3$　　　　(4)　$\left(\frac{1}{2}p-4\right)^3$

9 (0045)

次の式を展開しなさい。

(1) $(a+2b)^3$　　　(2) $(4m+n)^3$

(3) $(3x+5y)^3$　　　(4) $(-2s-3t)^3$

➔たくさん計算しましたね。では，あとひとがんばりして，$(a+b)(a^2-ab+b^2)$ と $(a-b)(a^2+ab+b^2)$ の乗法公式を覚えましょう。

〔3〕$(a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$ の乗法公式

◇ $(a+b)(a^2-ab+b^2)$ の展開

$(a+b)(a^2-ab+b^2)$ を展開してみましょう。

$$
\begin{aligned}
&(a+b)(a^2-ab+b^2)\\
&=a(a^2-ab+b^2)+b(a^2-ab+b^2)
\end{aligned}
$$

➔ a^2-ab+b^2 を1つのものと考えます。

$$
\begin{aligned}
&=a^3-a^2b+ab^2+a^2b-ab^2+b^3\\
&=a^3+b^3
\end{aligned}
$$

➔整理します。

となります。みごとに同類項が消えますね。

◇ $(a-b)(a^2+ab+b^2)$ の展開

$(a-b)(a^2+ab+b^2)$ を展開してみましょう。

$$
\begin{aligned}
&(a-b)(a^2+ab+b^2)\\
&=a(a^2+ab+b^2)-b(a^2+ab+b^2)\\
&=a^3+a^2b+ab^2-a^2b-ab^2-b^3\\
&=a^3-b^3
\end{aligned}
$$

となります。これも，きれいに整理されますね。

◇ $(a+b)(a^2-ab+b^2)$，$(a-b)(a^2+ab+b^2)$ の乗法公式

上で展開した2つの式をまとめると，次のようになります。

8	$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$
9	$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

◇符号に着目すると

上でまとめた乗法公式で，符号に着目すると，次のようになっています。

同符号

異符号

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$$
$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$$

異符号

同符号

符号を除くと式の形が
同じですね。
また，符号の組み合わ
せのきまりも同じです。

〈注意〉 上の2つの公式を，まとめて次のように書くことがあります。

$(a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) = a^3 \pm b^3$
（複号同順）

ここで使われている記号±や∓を複号といいます。

この式では，複号が±，∓，±の順に出てきます。

これは，最初の複号±で，＋を考えると，次から順に－，＋を考え，最初の複号±で，－を考えると次から順に＋，－を考えることを示しています。

＋	－	＋	の組
と	と	と	
－	＋	－	の組
±	∓	±	

➜それでは，実際に計算してみましょう。符号にはじゅうぶん注意しましょう。

基本例題３　　乗法公式(3)

公式を使って，次の式を展開しなさい。

(1)　$(x+2)(x^2-2x+4)$　　　(2)　$(x-4y)(x^2+4xy+16y^2)$

◆考え方◆

与えられた式は，(1)は $(a+b)(a^2-ab+b^2)$，(2)は $(a-b)(a^2+ab+b^2)$ の形に見えます。まず，1次の式から a，b にあたるものをきめます。つぎに，その a，b で，2次式のほうが公式の形になっていることを確かめてから，公式にあてはめて展開します。

(1)の場合

$$(a+b)(a^2-a\ \ b+b^2)=a^3+b^3$$
$$(x+2)(x^2-x\cdot 2+2^2)=x^3+2^3$$

◆解　答◆

(1)　$(x+2)(x^2-2x+4)$　　➜$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$

$=(x+2)(x^2-x\cdot 2+2^2)$

$=x^3+2^3$

$=x^3+8$

(2)　$(x-4y)(x^2+4xy+16y^2)$　　➜$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

$=(x-4y)\{x^2+x\cdot 4y+(4y)^2\}$

$=x^3-(4y)^3$

$=x^3-64y^3$

➜与えられた式が，公式の形になっていることを忘れずに確かめましょう。ではトレーニングです。

■■■トレーニング■■■

10　(0046)

次の式を展開しなさい。

(1)　$(x+1)(x^2-x+1)$　　　(2)　$(2-x)(4+2x+x^2)$

11　(0047)

次の式を展開しなさい。

(1)　$(2a+5)(4a^2-10a+25)$　　　(2)　$(4x-3)(16x^2+12x+9)$

12 (0048)

次の式を展開しなさい。

(1) $(3y-x)(x^2+9y^2+3xy)$　　(2) $(x-5y)(x^2+5xy+25y^2)$

(3) $(4x+7y)(16x^2-28xy+49y^2)$　　(4) $(5a+2b)(25a^2+4b^2-10ab)$

(5) $\left(\frac{2}{3}x-\frac{3}{4}y\right)\left(\frac{4}{9}x^2+\frac{1}{2}xy+\frac{9}{16}y^2\right)$　　(6) $\left(2x+\frac{y}{4}\right)\left(4x^2+\frac{y^2}{16}-\frac{1}{2}xy\right)$

➜たくさんの公式を学習しましたね。公式は，ただ覚えようとせず，自分で導けるようにしておきましょう。
そして，しっかり身につけて，じゅうぶんに使いこなせるようにしましょう。

まとめておこう！

1. $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$
2. $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$
3. $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$
4. $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$
5. $(ax+b)(cx+d)$
   $=acx^2+(ad+bc)x+bd$
6. $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
7. $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$
8. $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$
9. $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

§5　乗法公式の利用　$(a+b+c)^2$ の展開など

式を展開するのに，乗法公式にあてはまるときはそれを利用したほうが簡単なことを前に学習しましたね。ここでは，公式そのものの形ではないけれども，ちょっと見方を変えたり，くふうしたりすると公式があてはまる場合の，見方やくふうのしかたを学習します。

➜さっそく始めましょう。どの公式に近い形か，そして，どのようにくふうすればそれにあてはまるかよく考えましょう。

基本例題 1　　　　**乗法公式の利用(1)**

$(a+b+c)^2$ を展開しなさい。

◆考え方◆

$(a+b)^2$ の形によく似ています。ちがいは，かっこの中の項の数です。$(a+b)^2$ は2項，$(a+b+c)^2$ は3項です。

そこで，$(a+b+c)^2$ で，たとえば，$a+b=A$ のように，2つの項をまとめて1つのものと考えると，$(A+c)^2$ となり，公式にあてはまります。

◆解　答◆

$(a+b+c)^2$

$=\{(a+b)+c\}^2$　　➜$a+b$ を1つのもの A と考えます。

$=(a+b)^2+2\cdot(a+b)\cdot c+c^2$　　➜$(A+c)^2$ を公式を使って展開します。

$=a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+c^2$

➜A を $a+b$ にもどし，もう一度公式を使って展開します。

$=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

注　ふつう，上の解答の最後の式のような順に並べておきます。

➜$a+b=A$ とおくのは頭の中で行いましょう。では，トレーニングです。

■■■トレーニング■■■

1　(0049)

次の式を展開しなさい。

(1)　$(x+y+1)^2$　　　　(2)　$(2a-3b+c)^2$

➜$(a+b+c)^2$ の形の式の展開はできましたね。この式もよく出てきますから，その展開の結果を公式としてまとめておきましょう。

$(a+b+c)^2$ の乗法公式

10　$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

➔右辺は，a，b，c，をそれぞれ2乗したものとその中の2つずつの積を2倍したものの和になっていますね。さあ，この公式を使って展開してみましょう。

■■■トレーニング■■■

2 (0050)

次の式を展開しなさい。

(1) $(l+m+1)^2$　　(2) $(-p+q+r)^2$

(3) $(x+y-z)^2$　　(4) $(s-t-u)^2$

3 (0051)

次の式を展開しなさい。

(1) $(x+2y-3z)^2$　　(2) $(2a-b-5c)^2$

(3) $(x^2-4x+7)^2$　　(4) $(x^2-xy+2y^2)^2$

➔それでは，基本例題1と同じように，いくつかの項をまとめて1つのものと考える方法で，2つの整式の積を，いろいろな乗法公式にあてはめて展開してみましょう。

基本例題2　乗法公式の利用(2)

次の式を展開しなさい。

(1) $(x^2+x+1)(x^2+x-2)$　　(2) $(x+2y-z)(x-2y+z)$

◆考え方◆

2つの式に共通なものをまとめて1つのものと考えます。

(1)では，x^2+x が共通ですから，これを A と考えると，与えられた式は $(A+1)(A-2)$ となります。

(2)では，x が共通です。また，$2y-z$ と $-2y+z$ は，各項の符号がそれぞれ変わっただけの関係になっています。だから，$-2y+z=-(2y-z)$ で，$2y-z$ が共通です。

したがって，$2y-z$ を B と考えると，与えられた式は $(x+B)(x-B)$ となります。

◆解　答◆

(1) $(x^2+x+1)(x^2+x-2)$

$=\{(x^2+x)+1\}\{(x^2+x)-2\}$　➔x^2+x を1つのもの A と考えます。

$=(x^2+x)^2+(1-2)(x^2+x)+1\cdot(-2)$　➔$(A+1)(A-2)$ を展開します。

$=(x^2+x)^2-(x^2+x)-2$

$=x^4+2x^3+x^2-x^2-x-2$　➔A を x^2+x にもどして展開します。

$=x^4+2x^3-x-2$

(2) $(x+2y-z)(x-2y+z)$

➔$-2y+z=-(2y-z)$ だから，$2y-z$ を1つのもの B と考えます。

$=\{x+(2y-z)\}\{x-(2y-z)\}$

$=x^2-(2y-z)^2$　➔$(x+B)(x-B)$ を展開します。

$=x^2-(4y^2-4yz+z^2)$　➔B を $2y-z$ にもどして展開します。

$=x^2-4y^2+4yz-z^2$

➔共通なものを探し出し，それを1つのものと考えれば，乗法公式にあてはまる場合があるのですね。

■■■トレーニング■■■

4＊ (0052)

次の式を展開しなさい。

(1) $(2x^2+3x-1)(2x^2+3x+4)$

(2) $(x^2+2x-3)(x^2-5x-3)$

(3) $(p+q+r)(p+q-r)$

(4) $(3a-b+2c)(3a+b+2c)$

5＊ (0053)

次の式を展開しなさい。

(1) $(a-b+c)(a+b-c)$

(2) $(2+3x-x^2)(-2+3x+x^2)$

(3) $(a+b+c+d)(a-b-c+d)$

(4) $(x^2+2x-2)(x^2-3x+3)$

➜(4)は，$2x-2=2(x-1)$，$-3x+3=-3(x-1)$ に注意します。

➜ 2つの整式の乗法は，もうバッチリできますね。さあ，こんどは，3つ以上の整式の乗法で，くふうして簡単に展開することを考えましょう。

基本例題3　　乗法公式の利用(3)

次の式を展開しなさい。

(1) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$

(2) $(a^2+b^2)^2(a+b)^2(a-b)^2$

◆ 考え方 ◆

たくさんの整式の乗法では，共通な項が出てくるように組をつくるとか，乗法公式にあてはまるように計算の順序を変えるとかのくふうをすると，楽に展開できます。

(1)では，まず，$(x+1)(x+4)$ と $(x+2)(x+3)$ とに分けてそれぞれ展開すると，x^2+5x+4，x^2+5x+6 となり，x^2+5x が共通になります。これを A と考えて $(A+4)(A+6)$ を展開します。

(2)では，$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ の公式をくり返し使うことを考えます。そのために，まず，後ろの2つの式 $(a+b)^2(a-b)^2$ を計算します。

◆ 解　答 ◆

(1) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$

$=\{(x+1)(x+4)\}\{(x+2)(x+3)\}$　　➜ 2つの組に分けます。

$=(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)$

$=\{(x^2+5x)+4\}\{(x^2+5x)+6\}$

➜ x^2+5x を1つのもの A と考え，$(A+4)(A+6)$ を展開します。

$=(x^2+5x)^2+(4+6)(x^2+5x)+4\cdot 6$

$=(x^2+5x)^2+10(x^2+5x)+24$

$=x^4+10x^3+25x^2+10x^2+50x+24$

$=x^4+10x^3+35x^2+50x+24$

(2) $(a^2+b^2)^2(a+b)^2(a-b)^2$

$=(a^2+b^2)^2\{(a+b)(a-b)\}^2$

➜ $(a+b)^2(a-b)^2$ から計算します。
$(a+b)^2(a-b)^2=\{(a+b)(a-b)\}^2$ です。

$=(a^2+b^2)^2(a^2-b^2)^2$
$=\{(a^2+b^2)(a^2-b^2)\}^2$
$=\{(a^2)^2-(b^2)^2\}^2$
$=(a^4-b^4)^2$
$=(a^4)^2-2a^4b^4+(b^4)^2$
$=a^8-2a^4b^4+b^8$

--------• ちょっとひとこと •--------

∘ $(x+\bigcirc)(x+\triangle)(x+\square)(x+\diamond)$ の形の式を2つの組に分けることを考えてみましょう。

$(x+a)(x+b)=x^2+(\underbrace{a+b}_{\text{和}})x+\underbrace{ab}_{\text{積}}$ ですから，定数項の和が等しい2つの組か，定数項の積が等しい2つの組に分けると，それらの組に共通な項が x^2 のほかにもう1つ出てきます。

基本例題3の(1)では，$1+4=5$，$2+3=5$ と，定数項の和が等しくなるような組に分けたのですね。

➜要領はわかりましたね。では，トレーニングに移りましょう。

■■■トレーニング■■■

6 * (0054)

次の式を展開しなさい。

(1) $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)$

(2) $(x-y)(x-2y)^2(x-3y)$

7 * (0055)

次の式を展開しなさい。

(1) $(x-2)(x-3)(x+4)(x+6)$

(2) $(x-5y)(x-3y)(x+3y)(x+5y)$

8 * (0056)

$(x+y+1)(x+y-1)(x-y+1)(x-y-1)$ を展開しなさい。

9 * (0057)

次の式を展開しなさい。

(1) $(x+1)(x-1)(x^4+x^2+1)$

(2) $(1-a)(1+a+a^2)(1+a^3+a^6)$

(3) $(x+3b)^3(x-3b)^3$

(4) $(x+a)(x-a)(x^2-ax+a^2)(x^2+ax+a^2)$

➜最後に多項式の積の和や差の計算も練習しておきましょう。

もっと力をつけよう

■■■トレーニング■■■

10 * (0058)

次の計算をしなさい。

(1) $(a+b-c)^2-(c+a-b)^2$

(2) $(a+b)^3+(a-b)^3$

(3) $(2a-b)(a+3b)-(3a+2b)(2a+b)$

(4) $(x+3)(x^2-3x+9)-(x-3)(x^2+3x+9)$

11 * (0059)

$$(x-b)(x-c)(b-c)+(x-c)(x-a)(c-a)+(x-a)(x-b)(a-b)$$

を計算しなさい。

➜置きかえ，計算の順序，まだ他にもくふうのしかたはあるでしょう。公式をじゅうぶんに使いこなせるように計算練習をたくさんしてください。

§6　因数分解(1)　中学の復習

いままでは，$(x+y)(x-y)=x^2-y^2$ のように，式を展開すること，つまり，かっこをはずして単項式の和の形にすることを学習してきました。ここからは，逆に，$x^2-y^2=(x+y)(x-y)$ のように式の形を変えることを学習していきます。因数分解ですね。

➜さっそく，始めます。中学校で学習したことの復習もかねて，基本的なことをまとめましょう。

〔1〕共通因数と因数分解

◇因数分解

これまでに学習したように，$(x+2)(x+3)$ を展開すると

$$(x+2)(x+3)=x^2+5x+6$$

となりましたね。この式の左辺と右辺を入れかえると

$$x^2+5x+6=(x+2)(x+3)$$

となり，x^2+5x+6 を，$x+2$ と $x+3$ という 2 つの整式の積で表したことになります。

このように，1 つの多項式を 2 つ以上の整式の積の形に表すことを，その式を因数分解するといいます。つまり，因数分解は，展開の逆の操作（そうさ）なのです。

そして，その積をつくっているおのおのの式を，もとの式の因数といいます。

＜積＞　　　　　　　　　　　＜和＞

$$\underset{\text{因数}}{(x+2)}\underset{\text{因数}}{(x+3)} \underset{\text{因数分解}}{\overset{\text{展　開}}{\rightleftarrows}} x^2+5x+6$$

上の場合，$x+2$，$x+3$ は x^2+5x+6 の因数です。

〈注意〉　因数分解では，因数を書く順序は，どうでもかまいません。

◇共通因数

たとえば，$ma-2m$ という式を考えてみましょう。

m は ma の因数であり，$-2m$ の因数でもあります。

このようなとき，m を ma と $-2m$ の共通因数といいます。

$ma-2m$ ―― 共通因数

◇共通因数をくくり出す

$ma-2m$ では，ma と $-2m$ の共通因数 m をかっこの外にくくり出して，$ma-2m=m(a-2)$ と因数分解できます。

このように，整式を因数分解するには，まず，各項に共通因数があれば，それをすべて

$$AB+AC=A(B+C)$$

によって，かっこの外にくくり出します。

➜共通因数をくくり出すことは，因数分解の基本です。その練習をして，因数分解をするとき，式を見たらまず共通因数をさがす習慣を身につけましょう。

基本例題 1　　共通因数と因数分解

次の式を因数分解しなさい。

(1)　$3x^2y-15xy^2$　　(2)　$a(x-y)+b(y-x)$

◆解　答◆

(1)　$3x^2y-15xy^2$

$=3xy\cdot x-3xy\cdot 5y$　　➜共通因数は $3xy$ です。

$=3xy(x-5y)$　　➜共通因数をくくり出します。

(2)　$a(x-y)+b(y-x)$

➜ $y-x=-(x-y)$ であることに注意すると，$x-y$ が共通因数です。

$=a(x-y)-b(x-y)$

$=(a-b)(x-y)$

➜共通因数の見つけ方はわかりましたね。では，トレーニングに進みましょう。

■■■トレーニング■■■

1　(0060)

次の式を因数分解しなさい。

(1)　$ax-2x$　　(2)　$mx-my+mz$

(3)　$6x^2y-8xy^2$　　(4)　x^2y+xy^2-8xy

2　(0061)

次の式を因数分解しなさい。

(1)　$a^2(2a+1)+b^2(2a+1)$　　(2)　$l(x-y)+m(y-x)$

(3)　$a(2b-c)-b(c-2b)$　　(4)　$a^2(x+y)+b(-x-y)$

➜共通因数をくくり出す因数分解のしかたはわかりましたね。つぎに，共通因数がうまく見つからない場合を考えてみましょう。まず，その中で，乗法公式を利用する因数分解を考えます。

〔2〕2次式の因数分解(1)

◇ $a^2+2ab+b^2$，$a^2-2ab+b^2$ の因数分解

いままで学習した乗法公式に

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

がありましたね。これらの式の左辺と右辺をそれぞれ入れかえると

$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$

$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$

となって，$a^2+2ab+b^2$ の形の式は $(a+b)^2$，$a^2-2ab+b^2$ の形の式は $(a-b)^2$ と因数分解されることがわかります。

たとえば，$4x^2+20x+25$，y^2-4y+4 という2次式は，それぞれ次のように因数分解することができます。

$$4x^2+20x+25=(2x)^2+2\cdot 2x\cdot 5+5^2 \quad \Rightarrow a=2x,\ b=5$$
$$=(2x+5)^2$$
$$y^2-4y+4=y^2-2\cdot y\cdot 2+2^2 \quad \Rightarrow a=y,\ b=2$$
$$=(y-2)^2$$

◇ a^2-b^2の因数分解

$(a+b)(a-b)$の乗法公式を思い出してみましょう。

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

でしたね。この式の左辺と右辺を入れかえると

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$$

となって，a，bの平方の差a^2-b^2の形の式は，a，bの和$a+b$と差$a-b$の積に因数分解されることがわかります。

たとえば，$25x^2-y^2$という2次式は

$$25x^2-y^2=(5x)^2-y^2 \quad \Rightarrow a=5x,\ b=y$$
$$=(5x+y)(5x-y)$$

と因数分解されますね。

◇ $a^2+2ab+b^2$，$a^2-2ab+b^2$，a^2-b^2の因数分解の公式

上で調べた式を因数分解の公式としてまとめておきましょう。

公式は，形で覚えておきましょう。

1	$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$
2	$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$
3	$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

➜では，上の因数分解の公式を使うトレーニングをしましょう。

基本例題2　　2次式の因数分解(1)

次の式を因数分解しなさい。

(1)　$4x^2-12xy+9y^2$　　　(2)　$16x^2-9y^2$

◆考え方◆

まず，式の形をよく見て，どの公式にあてはまるかを考えます。

(1)は，$4x^2=(2x)^2$，$9y^2=(3y)^2$と考えると，$2\cdot 2x\cdot 3y=12xy$ですから，$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$の公式が使え，(2)は，$16x^2=(4x)^2$，$9y^2=(3y)^2$と考えると，$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$の公式が使えます。

◆解　答◆

(1)　$4x^2-12xy+9y^2 \quad \Rightarrow a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$

$$=(2x)^2-2\cdot 2x\cdot 3y+(3y)^2$$
$$=(2x-3y)^2$$

(2)　$16x^2-9y^2 \quad \Rightarrow a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

$$=(4x)^2-(3y)^2$$
$$=(4x+3y)(4x-3y)$$

➜公式を使うときのポイントは，どの公式があてはまりそうか見当をつけることと，何を１つのものと考えるかです。このことに注意して，次の因数分解をしてみましょう。

■■■トレーニング■■■

3 (0062)

次の式を因数分解しなさい。

(1) x^2+4x+4

(2) $x^2-14x+49$

(3) $a^2+20a+100$

(4) $\frac{1}{4}a^2-a+1$

4 (0063)

次の式を因数分解しなさい。

(1) $4x^2+12xy+9y^2$

(2) $x^2-12xy+36y^2$

(3) $4a^2+20ab+25b^2$

(4) $9a^2-42ab+49b^2$

5 (0064)

次の式を因数分解しなさい。

(1) $25a^2-10a(b+1)+(b+1)^2$

(2) $(x-2)^2+6y(x-2)+9y^2$

6 (0065)

次の式を因数分解しなさい。

(1) $4a^2-1$

(2) $9x^2-25$

7 (0066)

次の式を因数分解しなさい。

(1) x^2-4a^2

(2) $25x^2-81y^2$

8 (0067)

次の式を因数分解しなさい。

(1) $x^2-(y-1)^2$

(2) $(a+1)^2-(b+2)^2$

➜ここまでの因数分解はきちんとできましたね。つぎに，$x^2+8x+15$ のような２次式の因数分解を考えましょう。

〔3〕２次式の因数分解(2)

◇ $x^2+(a+b)x+ab$ の因数分解

前に学習した乗法公式を思い出してみましょう。

$$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$$

でしたね。この式の左辺と右辺を入れかえると

$$x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$$

となり，$x^2+(a+b)x+ab$ という形の式は，$(x+a)(x+b)$ と因数分解されることがわかります。

上の式を，因数分解の公式としてまとめておきましょう。

4　$x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$

◇係数に着目する

$x^2+8x+15$ を因数分解することを考えてみましょう。
この式が $(x+a)(x+b)$ の形に因数分解されたとすると

$$x^2+8x+15=(x+a)(x+b)$$
$$=x^2+(a+b)x+ab$$

となります。

ここで，x の係数，定数項を比較すると，次のようになります。

$a+b=8$，$ab=15$　→ x の係数が和，定数項が積

◇ a，b の求め方

上で考えた $a+b=8$，$ab=15$ を満たす a，b を求めるには，次のようにします。

① $ab=15$ を満たす整数 a，b の組を考えます。

1 と 15　　3 と 5
(-1) と (-15)　(-3) と (-5)

の組が考えられます。

② ①で考えた組の中から $a+b=8$ を満たす組をさがします。

右の表から，このような a，b の組は 3 と 5 であることがわかります。

積が15になる2数	2数の和
1，　15	16
3，　5	8
-1，-15	-16
-3，-5	-8

和を満たす整数の組はいくらでも考えられるから，まず，積を満たす整数の組を見つけ，その和を調べます。

したがって

$$x^2+8x+15=(x+3)(x+5)$$

と因数分解できます。

→それでは，上の公式を使って因数分解してみましょう。

基本例題 3　　2次式の因数分解(2)

次の式を因数分解しなさい。

(1)　x^2+2x-3　　　(2)　$x^2+3xy-18y^2$

◆ 考え方 ◆

x の係数が和，定数項が積になるような a，b を見つけて，$(x+a)(x+b)$ と因数分解します。a，b は，次の手順にしたがって求めます。

① まず，積が定数項になる数 a，b の組を考えます。

② つぎに，①で考えた数 a，b の組の中から，和が x の係数に等しくなる組をさがします。

◆ 解　答 ◆

(1)　x^2+2x-3

$=x^2+\{(-1)+3\}x+(-1)\cdot 3$　→ $(-1)+3=2$，$(-1)\cdot 3=-3$

$=\{x+(-1)\}(x+3)$

$=(x-1)(x+3)$

(2) $x^2+3xy-18y^2$　→ x についての整式と考えます。

$=x^2+\{(-3y)+6y\}x+(-3y)\cdot 6y$

→ $(-3y)+6y=3y$, $(-3y)\cdot 6y=-18y^2$

$=\{x+(-3y)\}(x+6y)$

$=(x-3y)(x+6y)$

〈注意〉　(2)で，x の係数は $3y$ ですから，積が $-18y^2$ になる組をさがすとき，$(-3y^2)\cdot 6$ や $9\cdot(-2y^2)$ は考えません。

■■■トレーニング■■■

9　(0068)

次の式を因数分解しなさい。

(1) $x^2+3x-18$　　(2) x^2-x-12

(3) $x^2+10x+24$　　(4) $x^2-16x+48$

10　(0069)

次の式を因数分解しなさい。

(1) $x^2-12xy-13y^2$　　(2) $x^2-8xy+7y^2$

(3) $x^2+5xy+6y^2$　　(4) $x^2+7xy-18y^2$

11　(0070)

次の式を因数分解しなさい。

(1) $(x+y)^2+7(x+y)+12$

(2) $(a-1)^2-2(a-1)-8$

→ここで学習した因数分解の公式はどれもとても重要です。
最後にもう一度，しっかり覚えたかどうか確かめましょう。

まとめておこう！

1. $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$
2. $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$
3. $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$
4. $x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$

§7 因数分解(2) $acx^2+(ad+bc)x+bd$, a^3+b^3, a^3-b^3 の因数分解

ここでは，$3x^2+2x-5$ のような２次式の因数分解について学習します。和や差の平方の形ではないし，平方の差にもなっていません。また，x^2 の係数は１ではありません。このようなときはどうするのでしょうか。このような２次式と x^3+y^3 のような３次式の因数分解をしてみましょう。

→まず，はじめに $3x^2+2x-5$ のような２次式の因数分解から始めましょう。

〔1〕$acx^2+(ad+bc)x+bd$ の因数分解

◇ $acx^2+(ad+bc)x+bd$ の因数分解の公式

前に学習した乗法公式の中に

$$(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd$$

というのがありましたね。この式の左辺と右辺を入れかえると

$$acx^2+(ad+bc)x+bd=(ax+b)(cx+d)$$

となります。

だから，$acx^2+(ad+bc)x+bd$ という形の式は，$(ax+b)(cx+d)$ と因数分解されることがわかります。

上の式を因数分解の公式としてまとめておきましょう。

5　$acx^2+(ad+bc)x+bd=(ax+b)(cx+d)$

◇係数に着目する

たとえば，$3x^2+2x-5$ を因数分解することを考えてみましょう。

この式が $(ax+b)(cx+d)$ の形に因数分解されたとすると

$$\begin{aligned}3x^2+2x-5&=(ax+b)(cx+d)\\&=acx^2+(ad+bc)x+bd\end{aligned}$$

となります。

ここで，x^2 の係数，x の係数，定数項を比較すると，次のようになります。

$$ac=3,\quad ad+bc=2,\quad bd=-5$$

◇ a，b，c，d の求め方

上で考えた $ac=3$，$ad+bc=2$，$bd=-5$ を満たす a，b，c，d を求めるには，次のようにします。

① $ac=3$ を満たす正の整数 a，c の組を考えます。

　　1×3　の分解が考えられます。

　　→組を考えるというのは 1×3 と 3×1 を同じに考える，つまり，順序を考えないことです。

② $bd=-5$ を満たす整数 b，d の組を考えます。

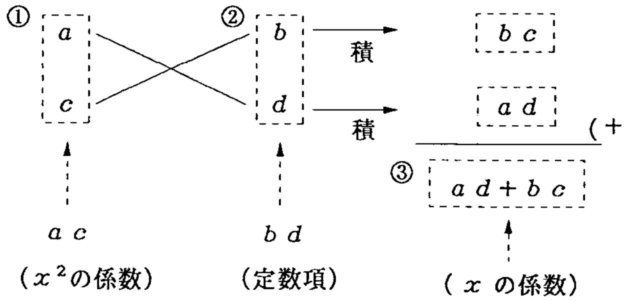
$(-1)\times 5$,　$1\times(-5)$　の分解が考えられます。

③　①，②で考えた a，b，c，d の組の中から $ad+bc=2$ を満たす組をさがします。

このとき，次のような方法がよく使われます。

右の図で，①で求めた a，c の組を①のところに，②で求めた b，d の組を②のところに書きます。

そして，a と d の積，b と c の積を求め，その和を③のところに書き，③のところの値が x の係数に等しいかどうかを調べます。



この方法で，a，b，c，d を求めてみましょう。

$$\begin{array}{ccc} 1 & -1 & \to -3 \\ 3 & 5 & \to \underline{\ \ 5}\ (+ \\ & & 2 \end{array}\qquad \begin{array}{ccc} 1 & 5 & \to 15 \\ 3 & -1 & \to \underline{-1}\ (+ \\ & & 14 \end{array}\qquad \begin{array}{ccc} 1 & 1 & \to 3 \\ 3 & -5 & \to \underline{-5}\ (+ \\ & & -2 \end{array}\qquad \begin{array}{ccc} 1 & -5 & \to -15 \\ 3 & 1 & \to \underline{\ \ 1}\ (+ \\ & & -14 \end{array}$$

ですから，$a=1$，$b=-1$，$c=3$，$d=5$ のとき，$ad+bc=2$ になることがわかります。

したがって

$$3x^2+2x-5=\{\underset{a}{1}\cdot x+(\underset{b}{-1})\}(\underset{c}{3}\cdot x+\underset{d}{5})$$
$$=(x-1)(3x+5)$$

と因数分解できます。

上のような方法を，たすきがけといいます。

> たすきがけでためすとき，上のように，a，c の組をきめておいて，b，d の組を入れかえるのがふつうです。

➡さあ，たすきがけを使って因数分解してみましょう。

基本例題 1　$acx^2+(ad+bc)x+bd$ の因数分解(1)

$6x^2+x-2$ を因数分解しなさい。

◆ 考え方 ◆

次の手順にしたがって因数分解します。

①　x^2 の係数6を，2つの正の整数の積の形で表します。

1×6,　2×3

②　定数項 -2 を，2つの整数の積の形で表します。

$1\times(-2)$,　$(-1)\times 2$

③　①，②の整数の組を使って，下のように計算し，x の係数に等しくなるものをさがします。

$$\begin{array}{ccc} 6 & 1 & \to 1 \\ 1 & -2 & \to \underline{-12}\ (+ \\ ① & ② & ③\ \boxed{-11} \end{array}\qquad\qquad \begin{array}{ccc} 2 & -1 & \to -3 \\ 3 & 2 & \to \underline{\ \ 4}\ (+ \\ ① & ② & ③\ \boxed{1} \end{array}$$

x の係数に等しくない　　　　x の係数に等しい

◆解　答◆

$6x^2+x-2$

$=\{2x+(-1)\}(3x+2)$

$=(2x-1)(3x+2)$

$$
\rightarrow \begin{array}{ccccc} 2 & \times & -1 & \longrightarrow & -3 \\ 3 & & 2 & \longrightarrow & \underline{4}\ (+ \\ & & & & 1 \end{array}
$$

〈注意〉　基本例題１の場合 $\begin{array}{cc} 2 & -2 \\ 3 & 1 \end{array}$ などは，ためす必要はありません。

というのは，$2x-2$ のような因数をもつ式は，２を各項の共通因数にもつからです。

→たすきがけの手順は確かめられましたね。では，トレーニングです。

■■■トレーニング■■■

1　(0071)

次の式を因数分解しなさい。

(1)　$2x^2+x-3$　　(2)　$4y^2-17y-15$

(3)　$10y^2-19y+6$　　(4)　$54b^2+51b-14$

2　(0072)

次の式を因数分解しなさい。

(1)　$6x^2+7x-3$　　(2)　$5x^2-28x-12$

(3)　$12x^2+13x-14$　　(4)　$14x^2-27x-20$

3　(0073)

次の式を因数分解しなさい。

(1)　$-3a^2+7a-2$　　(2)　$7x^2+\frac{19}{4}x-5$

→(1)はまず式全体を－で，(2)は $\frac{1}{4}$ でくくります。

→$acx^2+(ad+bc)x+bd$ の形の２次式の因数分解は，もうだいぶ慣れましたね。つぎは，a，b，c，d が式の場合の因数分解を考えましょう。

基本例題２　$acx^2+(ad+bc)x+bd$ の因数分解(2)

$3x^2-11xy+6y^2$ を因数分解しなさい。

◆考え方◆

x についての２次式と考えると，x^2 の係数は３，x の係数は $-11y$，定数項は $6y^2$ です。ですから，次の手順にしたがって因数分解します。

①　x^2 の係数３を２つの正の整数の積で表します。

1×3

②　定数項 $6y^2$ を，２つの式の積の形で表します。

$y\times6y$，$(-y)\times(-6y)$，$2y\times3y$，$(-2y)\times(-3y)$

このとき，x の係数は $-11y$ ですから，$1\times6y^2$ や，$2\times3y^2$ などは考えません。

③　①，②の数や式の組を使って，下のように計算し，x の係数に等しくなるものをさがします。

$$
\begin{array}{ccccl}
\boxed{\begin{array}{c}1\\3\end{array}} & \times & \boxed{\begin{array}{c}y\\6y\end{array}} & \begin{array}{c}\longrightarrow\\\longrightarrow\end{array} & \begin{array}{r}3y\\ \underline{6y}\ (+\\ ③\ \boxed{9y}\end{array}\\
\uparrow & & \uparrow & & \\
① & & ② & &
\end{array}
$$

→ x の係数に等しい ?

◆解　答◆

$3x^2-11xy+6y^2$
$=\{x+(-3y)\}\{3x+(-2y)\}$
$=(x-3y)(3x-2y)$

$$
\to\quad
\begin{array}{ccccr}
1 & \times & -3y & \longrightarrow & -9y\\
3 & & -2y & \longrightarrow & \underline{-2y}\ (+\\
 & & & & -11y
\end{array}
$$

→係数が式になっても，手順は同じですね。

--------•ちょっとひとこと•--------

∘　$3x^2-11xy+6y^2$ を因数分解するとき，次のように，y をはぶいた式の因数分解 $3x^2-11x+6=(x-3)(3x-2)$ を考え，その係数をそのまま使って，$(x-3y)(3x-2y)$ とすることもできます。

$$
3x^2-11xy+6y^2 \xrightarrow[y\text{をはぶく}]{\text{数はそのまま}} 3x^2-11x+6
$$

$$
\begin{array}{ccccr}
1 & \times & -3 & \longrightarrow & -9\\
3 & & -2 & \longrightarrow & \underline{-2}\ (+\\
 & & & & -11
\end{array}
$$

$$
(x-3y)(3x-2y) \xleftarrow[y\text{をつける}]{\text{数はそのまま}} (x-3)(3x-2)
$$

■■■トレーニング■■■

4　(0074)

次の式を因数分解しなさい。

(1)　$3a^2-14ab+8b^2$　　(2)　$4x^2+4xy-15y^2$

(3)　$15x^2-29xy+12y^2$　　(4)　$60m^2-68mn+15n^2$

→うまく因数分解できましたね。因数分解したときは，必ず逆に展開して検算する習慣を身につけましょう。

5　(0075)

次の式を因数分解しなさい。

(1)　$-10x^2+17xy+6y^2$　　(2)　$a^2+\dfrac{ab}{2}-3b^2$

→つぎは，いよいよ３次式の因数分解です。

〔2〕 a^3+b^3, a^3-b^3 の因数分解

◇ a^3+b^3, a^3-b^3 の因数分解の公式

前に学習した3次式の乗法公式を思い出してみましょう。

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$$
$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$$

という2つがありましたね。これらの式の左辺と右辺をそれぞれ入れかえると

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$$
$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

となります。

つまり

a, b の立方の和 a^3+b^3 の形の式は1次式 $a+b$ と2次式 a^2-ab+b^2 の積に

a, b の立方の差 a^3-b^3 の形の式は1次式 $a-b$ と2次式 a^2+ab+b^2 の積に

因数分解されることがわかります。

上の式は，しばしば出てきますから，まとめて覚えておきましょう。

6	$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$
7	$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

◇ a^3+b^3, a^3-b^3 の因数分解の公式の覚え方

上の公式は，a, b について着目すると，どの項の係数の絶対値も1で，符号の関係は右のようになっています。

異符号

同符号

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$$
$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

同符号

異符号

➜ここで学習した a^3+b^3, a^3-b^3 の因数分解の公式は，とてもたいせつな公式でこれからもさまざまな場面で使われます。しっかりと身につけておきましょう。

基本例題3　　a^3+b^3, a^3-b^3 の因数分解

次の式を因数分解しなさい。

(1)　x^3+27　　　(2)　$8x^3-y^3$

◆考え方◆

式の形を見て，どの公式にあてはまるかを考えます。

(1)は，$27=3^3$ と考えると，$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$ の公式が使えます。

(2)は，$8x^3=(2x)^3$ と考えると，$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ の公式が使えます。

◆解　答◆

(1)　x^3+27

$=x^3+3^3$

$=(x+3)(x^2-3\cdot x+3^2)$
$=(x+3)(x^2-3x+9)$

(2) $8x^3-y^3$
$=(2x)^3-y^3$
$=(2x-y)\{(2x)^2+2x\cdot y+y^2\}$
$=(2x-y)(4x^2+2xy+y^2)$

➜$1^3=1$，$2^3=8$，$3^3=27$，$4^3=64$，$5^3=125$ ぐらいは覚えておきましょう。
さあ，トレーニングです。

■■■トレーニング■■■

6 (0076)

次の式を因数分解しなさい。

(1) x^3+8
(2) y^3-27
(3) $64+27a^3$
(4) $125x^3-1$

7 (0077)

次の式を因数分解しなさい。

(1) $27a^3+125b^3$
(2) $64x^3+y^3$
(3) $8a^3-125b^3$
(4) $1000x^3-27y^3$

8 (0078)

次の式を因数分解しなさい。

(1) $1-(p-q)^3$
(2) $(x+y)^3+(x-y)^3$
(3) $(a+b+c)^3-1$

➜これで，ここでの学習は終わりです。いままでに学習した因数分解の公式は，これからもたびたび登場します。公式をよく覚えたかどうかをもう一度よく確かめておきましょう。

まとめておこう！

5. $acx^2+(ad+bc)x+bd$
$=(ax+b)(cx+d)$
6. $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$
7. $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

§8　因数分解(3)　1つの文字に着目する因数分解など

これまでは，主に，公式にあてはまる式の因数分解をしました。ここでは，$2x^3y-6x^2y-8xy$，$x^2-xy-2y^2+2x+11y-15$ などのように，そのままでは公式にはあてはまらない複雑な形の式の因数分解をしてみます。

➜まず，$2x^3y-6x^2y-8xy$ のような式の因数分解をしてみましょう。

〔1〕共通因数をくくり出す方法

◇共通因数をくくり出して次数の低い式の積にする

$2x^3y-6x^2y-8xy$ の因数分解を考えてみましょう。

まず，因数分解の定石どおり，共通因数がないかどうか調べてみます。

$$2x^3y=2xy\cdot x^2 \qquad -6x^2y=2xy\cdot(-3x) \qquad -8xy=2xy\cdot(-4)$$

ですから，どの項も $2xy$ を因数にもっています。

この $2xy$ をくくり出してみましょう。

$$2x^3y-6x^2y-8xy=2xy(x^2-3x-4)$$

となり，x，y について4次式だったのが，2次式と2次式の積になります。

◇さらに因数分解する

上の式で，共通因数をすべてくくり出すと，2つの整式の積の形になりました。

ところで，このときのかっこの中の式 x^2-3x-4 をよく見てみましょう。

この式は，これまでに学習した因数分解の公式を使って，次のように，2つの1次式の積に分解できますね。

$$x^2-3x-4=(x+1)\{x+(-4)\} \qquad \rightarrow 1+(-4)=-3,\ 1\cdot(-4)=-4$$
$$=(x+1)(x-4)$$

ですから，$2x^3y-6x^2y-8xy$ は，次のように因数分解できます。

$$2x^3y-6x^2y-8xy=2xy(x+1)(x-4)$$

このように，因数分解するときは，もうこれ以上因数分解できない整式の積の形で表します。

➜では，実際に，すこし複雑な式の因数分解をしてみましょう。

例題1　共通因数をくくり出す方法

次の式を因数分解しなさい。

(1)　x^4-x^2　　　(2)　$3ab^3-6ab^2-24ab$

◆解　答◆

(1)　x^4-x^2

$=x^2\cdot x^2-x^2\cdot 1$　　➜共通因数は x^2

$=x^2(x^2-1)$

$=x^2(x+1)(x-1)$　　➜ x^2-1 を公式を使って因数分解します。

(2) $3ab^3-6ab^2-24ab$

$=3ab\cdot b^2+3ab\cdot(-2b)+3ab\cdot(-8)$　➔共通因数は $3ab$

$=3ab(b^2-2b-8)$

$=3ab(b+2)\{b+(-4)\}$　➔ b^2-2b-8 を公式を使って因数分解します。

$=3ab(b+2)(b-4)$

➔ちょっと見たところ複雑な形の式でも共通因数をすべてくくり出すと，公式の形になることがあるのですね。トレーニングしてみましょう。

■■■トレーニング■■■

1 ＊ (0079)

次の式を因数分解しなさい。

(1) a^5-4a^3

(2) a^3-13a^2+40a

(3) $x^4-2x^3+x^2$

(4) $a^3b^2+3a^2b^2+3ab^2+b^2$

2 ＊ (0080)

次の式を因数分解しなさい。

(1) x^3y+2x^2y+xy

(2) $4x^5y+32x^2y^4$

(3) $6a^3b^3+a^2b^2-2ab$

(4) $ab^5+13a^2b^4+12a^3b^3$

➔複雑な式でも，共通因数がすぐ見つかるときは，それをくくり出して，式を簡単な形にすることができましたね。では，$a^2b-a^3c+bc-ac^2$ のように，共通因数が見つからないときはどうするのでしょうか。

〔2〕１つの文字に着目する因数分解

◇１つの文字に着目する因数分解のしかた

２つ以上の文字をふくむ式，たとえば $ax+bx+a+b$ の因数分解を考えましょう。

各項に共通な因数がありませんね。

このようなときは，式の中の文字 a，b，x のうち，どれか１つに着目して式を整理します。たとえば，x に着目すると

$$ax+bx+a+b=(a+b)x+(a+b)$$
$$=(a+b)(x+1)$$

のように，x の係数と定数項がともに $a+b$ で等しいから，これを共通因数と考えて，くくり出して因数分解することができます。

〈注意〉 a に着目して整理しても，b に着目して整理しても，同じように因数分解できます。

◇文字についての次数がちがうとき

たとえば，$a^2b-a^3c+bc-ac^2$ で，式の中の文字 a，b，c それぞれについての次数は，次のようになっていますね。

a ……３次，　b ……１次，　c ……２次

このように，それぞれの文字についての次数がちがうときは，最も次数の低い文字 b に着目して，次のように因数分解します。

$a^2b-a^3c+bc-ac^2$

$=(a^2+c)b+(-a^3c-ac^2)$　➔ b について整理します。

$=(a^2+c)b-ac(a^2+c)$　➔ b の係数と定数項の共通因数は a^2+c です。

$=(a^2+c)(b-ac)$　➔ a^2+c をくくり出します。

◇文字についての次数が等しいとき

たとえば，$x^2-xy-2y^2+2x+11y-15$ は，式の中の文字 x，y どちらについての次数も２次で等しくなっていますね。

このようなときは，それぞれの文字の最高次の係数をくらべてみましょう。

x^2 の係数……１，　y^2 の係数……-2

ですね。

このように，どの文字についての次数も等しいときは，係数が正で簡単な x に着目して

$x^2-xy-2y^2+2x+11y-15$

$=x^2+(-y+2)x+(-2y^2+11y-15)$　➜ x について整理します。

$=x^2-(y-2)x-(y-3)(2y-5)$　➜定数項を因数分解します。

$=\{x+(y-3)\}\{x-(2y-5)\}$

➜和が $-(y-2)$，積が $-(y-3)(2y-5)$ となる式は $y-3$ と $-(2y-5)$

$=(x+y-3)(x-2y+5)$

と因数分解するのがよいでしょう。

➜１つの文字に着目する因数分解はわかりましたね。
では，この方法で，例題の式を因数分解してみましょう。

例題２　　１つの文字に着目する因数分解(1)

次の式を因数分解しなさい。

(1)　$ax-bx+a-b$　　　(2)　$a^2-c^2+ab-bc$

◆考え方◆

式の形を見ると，共通因数はありませんし，公式の形にもなっていませんから，１つの文字に着目して整理して因数分解します。

(1)では，式の中の文字 a，b，x のどれについても１次式で，係数もそれほど複雑さにちがいがありませんから，どれか１つ適当にきめて，それについて整理します。

(2)では，式の中の文字 a，b，c それぞれについての次数は，a ……２次，b ……１次，c ……２次ですから，次数の最も低い b に着目して整理します。

◆解　答◆

(1)　$ax-bx+a-b$　➜ a，b，x のどれについても１次式

$=(a-b)x+(a-b)$　➜ x に着目して整理します。

$=(a-b)(x+1)$

(2)　$a^2-c^2+ab-bc$　➜ a ……２次，b ……１次，c ……２次

$=(a-c)b+(a^2-c^2)$　➜最も次数の低い b について整理します。

$=(a-c)b+(a+c)(a-c)$　➜共通因数は $a-c$ です。

$=(a-c)\{b+(a+c)\}$

$=(a-c)(a+b+c)$

■■■トレーニング■■■

3 ＊ (0081)

次の式を因数分解しなさい。

(1)　$xy-2x-y+2$　　　(2)　$3ab-5b+9a-15$

(3)　$2a^2x^2-2abx^2+ab-b^2$　　　(4)　$4a^2x^2-9b^2x^2+2a+3b$

4 * (0082)

次の式を因数分解しなさい。

(1) $a^2-b^2+ac+bc$　　(2) $am^3-b^2+b^2m-a$

(3) $xy-2xz+2y^2-3yz-2z^2$　　(4) $a^2-2abc+ca^2-b^2+b^2c$

例題3　　1つの文字に着目する因数分解(2)

$2x^2-xy-6y^2-4x+y+2$ を因数分解しなさい。

◆考え方◆

式の中の文字 x，y のどちらについても2次式ですが，x^2 の係数は2，y^2 の係数は -6 ですから，係数の簡単な x に着目して整理します。

$$
\begin{aligned}
2x^2-xy-6y^2-4x+y+2 &= 2x^2-(y+4)x-(6y^2-y-2)\\
&= 2x^2-(y+4)x-(2y+1)(3y-2)
\end{aligned}
$$

と，x についての2次式になりますから，たすきがけの方法で因数分解します。

◆解　答◆

$2x^2-xy-6y^2-4x+y+2$

$=2x^2-(y+4)x-(6y^2-y-2)$　→x について整理します。

$=2x^2-(y+4)x-(2y+1)(3y-2)$　→定数項を因数分解します。

$=\{x-(2y+1)\}\{2x+(3y-2)\}$

$=(x-2y-1)(2x+3y-2)$

→
$$
\begin{array}{ccccc}
1 & \times & -(2y+1) & \longrightarrow & -4y-2\\
2 & & 3y-2 & \longrightarrow & \underline{3y-2}\,(+\\
 & & & & -(y+4)
\end{array}
$$

→複雑な式を因数分解したときは，必ずあとで展開をしてもとの式になるかどうか確かめましょう。

■■■トレーニング■■■

5 * (0083)

次の式を因数分解しなさい。

(1) $x^2+3xy+2y^2+3x+5y+2$

(2) $-6x^2+y^2-xy-x-3y+2$

6 * (0084)

次の式を因数分解しなさい。

(1) $2x^2+7xy+3y^2+3x-y-2$

(2) $2x^2-xy-y^2+8x+y+6$　(福岡大)

(3) $2x^2-6y^2+xy+7y-2$

(4) $6x^2+12y^2-18xy+5x-13y-4$

→これで，ここでの学習は終わりです。だんだん式が難しくなってきますね。ここでは，その複雑な式の因数分解のしかたとして，共通因数をくくり出したり，1つの文字に着目したりする方法を学習しました。

§9　因数分解(4)　置きかえを利用する因数分解

前にひきつづいて，ここでも複雑な式の因数分解のしかたを学習します。たとえば，$(a+b)(a+b-5)-6$ のように，$a+b$ がくり返し出てくる式や，x^4+x^2-2 のように，偶数次の項だけの4次式の因数分解をしてみましょう。

➜まず，いくつかの項がくり返し出てくる式の因数分解から始めます。

例題1　　置きかえを利用する因数分解(1)

次の式を因数分解しなさい。

(1)　$(a+b)(a+b-5)-6$　　　(2)　$(x^2+2x+3)(x^2+2x-4)+6$

◆考え方◆

くり返し出てくるいくつかの項を，まとめて1つのものと考えます。

(1)では，$a+b$ がくり返し出てくるので，これを A とおいて展開すると

$$\begin{aligned}(a+b)(a+b-5)-6&=(a+b)\{(a+b)-5\}-6\\&=A(A-5)-6\\&=A^2-5A-6\end{aligned}$$

と，A について2次式になります。この式を因数分解します。

(2)では，x^2+2x がくり返し出てくるので，これを X とおいて展開すると

$$\begin{aligned}(x^2+2x+3)(x^2+2x-4)+6&=\{(x^2+2x)+3\}\{(x^2+2x)-4\}+6\\&=(X+3)(X-4)+6\\&=X^2-X-12+6\\&=X^2-X-6\end{aligned}$$

と，X について2次式になります。この式を因数分解します。

◆解　答◆

(1)　$(a+b)(a+b-5)-6$

$=(a+b)\{(a+b)-5\}-6$　　➜$a+b$ を1つのものと考えて展開します。

$=(a+b)^2-5(a+b)-6$

$=\{(a+b)+1\}\{(a+b)-6\}$　　➜$a+b$ についての2次式を因数分解します。

$=(a+b+1)(a+b-6)$

(2)　$(x^2+2x+3)(x^2+2x-4)+6$

$=\{(x^2+2x)+3\}\{(x^2+2x)-4\}+6$

➜x^2+2x を1つのものと考えて展開します。

$=(x^2+2x)^2-(x^2+2x)-12+6$

$=(x^2+2x)^2-(x^2+2x)-6$

$=\{(x^2+2x)-3\}\{(x^2+2x)+2\}$

➜x^2+2x についての2次式を因数分解します。

$=(x^2+2x-3)(x^2+2x+2)$

$=(x-1)(x+3)(x^2+2x+2)$

➜それぞれの式を x についての2次式と考えて，さらに因数分解します。

➜まとめて，1つのものと考えて因数分解したあとで，もとにもどして考えると，そ

れぞれの式がさらに因数分解できることがあります。このことに気をつけて，次のトレーニングをしましょう。

■■■トレーニング■■■

1 ＊ (0085)

次の式を因数分解しなさい。

(1) $(a-b)(a-b-4)-5$　　(2) $(x-y+3)(5-y+x)+1$

(3) $(a^2+b^2-1)(a^2+b^2+3)-5$　　(4) $(x^2-x+6)(x^2+3x+6)-32x^2$

2 ＊ (0086)

次の式を因数分解しなさい。

(1) $(x+1)^3-x-1$　　(2) $a^2b^2(a-b)-a+b$

(3) $4x^3+4x^2y-(x+y)^3$　　(4) $a^4+2a^3b+a^2b^2-a(a+b)-2$

3 ＊ (0087)

次の式を因数分解しなさい。

(1) $a^3+3a^2+3a+1-b^2(a+1)$　　(2) $a^3-b^3-ab(a-b)$

(3) $x^3y^3(x+y)-8x-8y$　　(4) $2(x^3+y^3)-3x^2+3xy-3y^2$

➜置きかえをする因数分解はもう慣れましたね。では，つぎに，x^4+x^2-2 のような式の因数分解のしかたを学習しましょう。

例題 2　　置きかえを利用する因数分解(2)

次の式を因数分解しなさい。

(1) x^4+x^2-2　　(2) x^4+x^2+1

◆ 考え方 ◆

どの項も偶数次で，しかも $x^4=(x^2)^2$ であることに着目して，次の順に考えます。

① x^2 を X とおいて，X についての2次式をつくり，それが公式を使って因数分解できるかどうかを調べます。

(1)は，$x^4+x^2-2=X^2+X-2=(X-1)(X+2)$ となり，因数分解できます。

(2)は，$x^4+x^2+1=X^2+X+1$ となり，因数分解できません。

② ①の方法で因数分解できないときは，もとの式にくふうをして，A^2-B^2 の形の式をつくり，$(A+B)(A-B)$ と因数分解します。

(2)は　$x^4+x^2+1=x^4+2x^2+1-x^2$　➜x^2 をたして，x^2 をひきます。

$=(x^2+1)^2-x^2$　➜A^2-B^2 の形です。

◆ 解　答 ◆

(1) x^4+x^2-2

$=(x^2)^2+x^2-2$　➜x^2 を1つのものと考えます。

$=(x^2-1)(x^2+2)$　➜x^2 についての2次式を因数分解します。

$=(x+1)(x-1)(x^2+2)$　➜それぞれの式をさらに因数分解します。

(2) x^4+x^2+1

$=x^4+2x^2+1-x^2$　➜x^2 をたして，x^2 をひき，A^2-B^2 の形をつくります。

$=(x^2+1)^2-x^2$

$=\{(x^2+1)+x\}\{(x^2+1)-x\}$　➜A^2-B^2 を因数分解します。

$=(x^2+x+1)(x^2-x+1)$

➔例題2の2つの問題は，一見同じように見えますが，それぞれ別の考え方で因数分解しなければいけません。どちらの考え方を使えばよいか注意して因数分解するようにしましょう。

--------• ちょっとひとこと •--------

∘　x^4+x^2-2 や x^4+x^2+1 は

$$x^4+x^2-2=(x^2)^2+x^2-2$$
$$x^4+x^2+1=(x^2)^2+x^2+1$$

のように，2次式 x^2 について2次式になっています。

このように，2次式の2次式になっている式を複2次式といいます。

■■■トレーニング■■■

4 ＊ (0088)

次の式を因数分解しなさい。

(1) x^4-6x^2+5　　(2) x^4-10x^2+9

(3) $4x^4-17x^2+4$　　(4) $9x^4-4x^2-5$

5 ＊ (0089)

次の式を因数分解しなさい。

(1) x^4-14x^2+1　　(2) x^4-11x^2+1

(3) $4x^4-21x^2+9$　　(4) x^4+4

6 ＊ (0090)

次の式を因数分解しなさい。

(1) $x^4+3x^2y^2-28y^4$　　(2) $2a^4-15a^2b^2-27b^4$

(3) $x^4+6x^2y^2+25y^4$　　(4) $9a^4-7a^2b^2+b^4$

➔ここでは，複雑な式や，次数の高い式を，公式にあてはまるように置きかえたり，くふうして変形したりして因数分解しました。それぞれの因数分解のパターンをしっかり身につけましょう。

もっと力をつけよう

■■■トレーニング■■■

7 ＊ (0091)

次の式を因数分解しなさい。

(1) x^6-y^6　　(2) $x^6-7x^3y^3-8y^6$

8 ＊ (0092)

次の式を因数分解しなさい。

(1) $(x^2+y^2-z^2)^2-4x^2y^2$

(2) $(a+b)^4+c^4-2c^2(a+b)^2$

(3) $(x^3+3)^3+(x^3-3)^3$

➔がんばりましたね。さあ，答え合わせをきちんとして終わりましょう。

§ 10　因数分解(5)　項の組み合わせをくふうする因数分解など

因数分解についてもいよいよ最後です。これまでも，複雑な式を，くふうをして因数分解してきましたね。ここでは，さらに，くふうをこらして，式の項を組み合わせたり，展開して整理したりしてから因数分解してみます。

➜はじめに，項の組み合わせをくふうすることによって式を因数分解する方法について学習しましょう。

例題 1　　項の組み合わせをくふうする因数分解

次の式を因数分解しなさい。

(1)　x^3-x^2+x-1　　　(2)　$x^2-4xy+4y^2-z^2$

◆考え方◆

式の項の組み合わせをくふうして，共通な式を因数にもつ組に分けたり，公式の形になるような組に分けたりします。

(1)では，たとえば，x^3-x^2 と $x-1$ の 2 つの組に分けると

$$x^3-x^2=x^2(x-1)$$

だから，どちらの組も $x-1$ を因数にもち，これをくくり出して因数分解することができます。

(2)では，式の中の文字 x，y，z のどれについても 2 次式です。

この中で，z をふくむ項は 1 つだけだから，z に着目すると，z をふくまない項は

$$x^2-4xy+4y^2=(x-2y)^2$$

となります。

だから，$x-2y=X$ と考えると，式全体は X^2-z^2 となり，公式が使えます。

◆解　答◆

(1)　x^3-x^2+x-1

$=(x^3-x^2)+(x-1)$　　➜x^3-x^2 と $x-1$ の組に分けます。

$=x^2(x-1)+(x-1)$　　➜x^3-x^2 を因数分解します。

$=(x-1)(x^2+1)$　　➜$x-1$ をくくり出します。

(2)　$x^2-4xy+4y^2-z^2$

$=(x^2-4xy+4y^2)-z^2$

　➜z をふくむ項と，ふくまない項の組に分けます。

$=(x-2y)^2-z^2$

$=\{(x-2y)+z\}\{(x-2y)-z\}$　　➜$A^2-B^2=(A+B)(A-B)$

$=(x-2y+z)(x-2y-z)$

➜どの文字の次数も等しい式で 1 つの文字に着目するとき，(2)のように，ふくまれる項数の少ないものに着目することもあります。

さあ，トレーニングしましょう。

■■■トレーニング■■■

1 * (0093)

次の式を因数分解しなさい。

(1) x^3+x^2-x-1　　(2) x^3-x^2-2x+8

2 * (0094)

次の式を因数分解しなさい。

(1) $m^3+2mn^2-m^2n-2n^3$　　(2) x^3-8y^3+x-2y

(3) $a^3+a^2b+ab^2+b^3-a-b$

3 * (0095)

次の式を因数分解しなさい。

(1) x^4-x^2-2x-1　　(2) $x^4-10x^3+25x^2-25$

(3) $4x^4-4x^3+x^2-9$　　(4) $x^4+6x^3+8x^2-2x-1$

4 * (0096)

次の式を因数分解しなさい。

(1) m^2-n^2+2m+1　　(2) $x^2+y^2-z^2-2xy$

(3) $a^2+b^2-c^2-2ab-2c-1$　　(4) $a^2+b^2-c^2-d^2+2ab-2cd$

(5) $x^4+2x^2-a^4-4a^2-3$

➜さて，こんどは，$a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)$ のように，式の積をふくんだ式を因数分解してみましょう。

例題 2　　**複雑な式の因数分解**

$a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)$ を因数分解しなさい。

◆ 考え方 ◆

かっこの中の平方の差の形の式をそれぞれ因数分解すると

$$a(b+c)(b-c)+b(c+a)(c-a)+c(a+b)(a-b)$$

となり，共通な因数はありません。

このようなときは，はじめにもどって，与えられた式を展開します。すると

$$ab^2-ac^2+bc^2-ba^2+ca^2-cb^2$$

と，式の中の文字 a，b，c どれについても2次式になります。だから，たとえば，a に着目すると

$$(c-b)a^2+(b^2-c^2)a+(bc^2-cb^2)$$
$$=(c-b)a^2+(b+c)(b-c)a+bc(c-b)$$

となり，a^2 の係数，a の係数，定数項のどれも $c-b$ を因数にもちますから，くくり出すことができます。

◆ 解　答 ◆

$a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)$

$=ab^2-ac^2+bc^2-ba^2+ca^2-cb^2$　➜展開します。

$=(c-b)a^2+(b^2-c^2)a+(bc^2-cb^2)$　➜ a について整理します。

$=(c-b)a^2+(b+c)(b-c)a+bc(c-b)$　➜係数を因数分解します。

$=(c-b)a^2-(b+c)(c-b)a+bc(c-b)$

$=(c-b)\{a^2-(b+c)a+bc\}$　➜ $c-b$ をくくり出します。

$=(c-b)(a-b)(a-c)$　➜ $a^2-(b+c)a+bc=(a-b)(a-c)$

$=(a-b)(b-c)(c-a)$

〈注意〉　ふつう，解答は，上のように，$a \to b \to c \to a$ の順に書きます。
　　　　$(c-b)(a-b)(a-c)$ のままでもまちがいではありません。

■■■トレーニング■■■

5＊ (0097)

次の式を因数分解しなさい。

(1)　$ab(a-b)+bc(b-c)+ca(c-a)$

(2)　$a(b+c)^2+b(c+a)^2+c(a+b)^2-4abc$

6＊ (0098)

$(x^2-1)(y^2-1)-4xy$ を因数分解しなさい。

7＊ (0099)

$(x-1)(x-2)(x+3)(x+6)-60x^2$ を因数分解しなさい。

もっと力をつけよう

■■■トレーニング■■■

8＊ (0100)

次の問いに答えなさい。

(1)　$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$ であることを使って

$$a^3+b^3+c^3-3abc$$

を因数分解しなさい。

(2)　$8+a^3+27b^3-18ab$ を因数分解しなさい。

9＊ (0101)

$xy+(x+1)(y+1)(xy+1)$ を因数分解しなさい。

10＊ (0102)

$a^2b-2ab^2+ac-abc-2bc-c^2$ を因数分解しなさい。

➜これで因数分解の学習は終わりです。

因数分解のしかた

1. 共通因数をくくり出す。
2. 因数分解の公式にあてはめる。
3. 1つの文字に着目する。
   次数がちがうとき……最低次の文字に着目
   次数が等しいとき……係数の簡単な文字に着目
4. 共通な式を，1つの文字で置きかえる。
5. 項の組み合わせをくふうする。

§ 11　整式の除法(1)　$A=BQ+R$（R の次数＜B の次数）

いままでに，整式の加法，減法，乗法について学習してきました。整数では，加法，減法，乗法のほかに除法がありましたね。同じように，整式でも除法が考えられます。ここでは，この整式の除法，つまり $(8x^3-24x+9)\div(2x^2+3x-1)$ のような計算について学習します。

➜まず，整式の除法のしかたを覚えましょう。

〔1〕整式の除法

◇整式の除法の書き方

たとえば，$(8x^3-24x+9)\div(2x^2+3x-1)$ を計算することを考えてみましょう。
まず，割られる式も割る式も降べきの順に並べます。
そして，下のように，割られる式を $\overline{)}$ の中に，割る式を $\overline{)}$ の外に書きます。
ここで，割られる式を見ると，2次の項がありませんね。
このようなときは，これを $8x^3+0\cdot x^2-24x+9$ と考えて，2次の項が入る場所をあけておきます。

割る式……$2x^2+3x-1\overline{)8x^3\boxed{}-24x+9}$……割られる式

2次の項の場所をあけておく

◇整式の除法のしかた

上の計算は，次のようにします。

① 最高次の項どうしで割り算をします。
割られる式 $8x^3-24x+9$ の最高次の項 $8x^3$ を割る式 $2x^2+3x-1$ の最高次の項 $2x^2$ で割ります。$8x^3\div2x^2=4x$ ですね。この $4x$ を $8x^3$ の上に書きます。

② 割る式と①で求めた $4x$ をかけます。
$(2x^2+3x-1)\cdot4x=8x^3+12x^2-4x$ ですね。この式を割られる式の下に，同類項をそろえて書きます。

③ 割られる式から②の式をひきます。
$(8x^3-24x+9)-(8x^3+12x^2-4x)=-12x^2-20x+9$ ですね。この式を②の式の下に，同類項をそろえて書きます。

$$
\begin{array}{rll}
 & 4x & \text{……①割る} \\
2x^2+3x-1 \,\big) & \overline{8x^3 \qquad\qquad -24x+9} & \\
 & \underline{8x^3+12x^2-\ 4x} & \text{……②かける} \\
 & -12x^2-20x+9 & \text{……③ひく}
\end{array}
$$

つぎに，$-12x^2-20x+9$ を割られる式と考えて，上の①，②，③の手順をくり返します。
右のようになりますね。
整式の範囲内では，これ以上計算がつづけられませんから，ここで終わりにします。

$$
\begin{array}{rl}
 & 4x\ -\ 6 \\
2x^2+3x-1\,\big) & 8x^3 \qquad\qquad -24x+9 \\
 & 8x^3+12x^2-\ 4x \\
\hline
 & \qquad -12x^2-20x+9 \\
 & \qquad -12x^2-18x+6 \\
\hline
 & \qquad\qquad\quad -\ 2x+3
\end{array}
$$

◇商と余り

前の計算で得られた $4x-6$ を商，残った $-2x+3$ を余りといいます。
整式 A を整式 B で割ったときの余りが0であるとき，A は B で割り切れるといいます。

➜整式の除法についての説明はわかりましたね。
整数の除法と同じような計算のしかたをするのですね。
さあ，実際に，いろいろな整式の除法で，その計算のしかたを身につけてしまいましょう。

整式の範囲で計算するというのは，商も余りも整式になる範囲内で計算することです。

基本例題1　　　　整式の除法(1)

次の計算をして，商と余りを求めなさい。

(1)　$(15-22x+5x^2)\div(2x-3)$　　　(2)　$(3x^3-6x+12)\div(x^2-2x+2)$

◆解　答◆

(1)

$$
\begin{array}{rl}
 & \frac{5}{2}x-\frac{29}{4} \\
2x-3\,\big) & 5x^2-22x+15 \\
 & 5x^2-\frac{15}{2}x \\
\hline
 & \qquad -\frac{29}{2}x+15 \\
 & \qquad -\frac{29}{2}x+\frac{87}{4} \\
\hline
 & \qquad\qquad\quad -\frac{27}{4}
\end{array}
$$

➜$5x^2\div2x=\frac{5}{2}x$，$-\frac{29}{2}x\div2x=-\frac{29}{4}$
➜降べきの順に並べます。
➜$(2x-3)\cdot\frac{5}{2}x$
➜$5x^2-22x+15-\left(5x^2-\frac{15}{2}x\right)$
➜$(2x-3)\cdot\left(-\frac{29}{4}\right)$
➜$-\frac{29}{2}x+15-\left(-\frac{29}{2}x+\frac{87}{4}\right)$
これ以上計算できません。

商は $\frac{5}{2}x-\frac{29}{4}$，余りは $-\frac{27}{4}$　　➜係数は分数ですが，商も余りも整式です。

(2)

$$
\begin{array}{rl}
 & 3x\ +6 \\
x^2-2x+2\,\big) & 3x^3 \qquad\quad -\ 6x+12 \\
 & 3x^3-6x^2+\ 6x \\
\hline
 & \qquad 6x^2-12x+12 \\
 & \qquad 6x^2-12x+12 \\
\hline
 & \qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

➜割られる式は2次の項がないので，その場所をあけておきます。
➜余りは0です。

商は $3x+6$，余りは0

注　(2)では余りが0ですから，$3x^3-6x+12$ は x^2-2x+2 で割り切れます。

➜整式の除法は，式を降べきの順に整理し，同類項をきちんと並べることに注意すれば，それほどむずかしくありませんね。むしろ，くり上がりやくり下がりがないだ

け，整数の除法よりも簡単といえるかもしれません。では，トレーニングにはいります。

■■■トレーニング■■■

1 (0103)

次の計算をして，商と余りを求めなさい。

(1) $(x^2-5x-5)\div(x+2)$

(2) $(6x^2+x-6)\div(x-3)$

(3) $(-2+5x-6x^2)\div(3x-1)$

(4) $(5x^2-3x+2)\div(2x+3)$

2 (0104)

次の計算をして，商と余りを求めなさい。

(1) $(x^3+4x^2-3x-2)\div(x^2+2x-2)$

(2) $(3x^3-x+1)\div(x^2+1)$

(3) $(x^4-4x^3+3x^2-2x+1)\div(x^2-x-1)$

➜これまでの計算は，1つの文字の整式についてのものでした。では，2つ以上の文字をふくむ整式の除法はどうなるのでしょうか。このことについて学習しましょう。

例題1　　整式の除法(2)

x についての整式と考えて，次の除法をしなさい。

$$(3a^2-ax+6x^2)\div(2x+3a)$$

◆考え方◆

割る式も割られる式も着目した文字 x について降べきの順に並べ，下のようにして計算します。他の文字は数と同じように考えます。

$$2x+3a\,\overline{)\,6x^2-ax+3a^2}$$

◆解　答◆

$$\begin{array}{rl}
 & 3x\ -5a \\
2x+3a & \overline{)\,6x^2-\ \ ax+\ 3a^2} \\
 & \underline{6x^2+\ 9ax\qquad\ } \\
 & -10ax+\ 3a^2 \\
 & \underline{-10ax-15a^2} \\
 & 18a^2
\end{array}$$

➜ $6x^2\div2x=3x$，$-10ax\div2x=-5a$

➜ x について降べきの順に並べます。

➜ $(2x+3a)\cdot3x$

➜ $(6x^2-ax+3a^2)-(6x^2+9ax)$

➜ $(2x+3a)\cdot(-5a)$

➜ $(-10ax+3a^2)-(-10ax-15a^2)$

x について0次です。x についての1次式で割っているので，これ以上計算できません。

商は $3x-5a$，余りは $18a^2$

➜特定の文字に着目して，他の文字は定数と考えれば，あとは基本例題1と同じようにして計算できます。それでは，トレーニングしましょう。

■■■トレーニング■■■

3 * (0105)

[ ]の中の文字についての整式と考えて，次の除法をしなさい。

(1) $(x^3+ax^2-a^3)\div(x-a)$　$[x]$

(2) $(p^3-3a^2p)\div(p^2+ap-2a^2)$　$[p]$

(3) $(x^3+y^3-3x^2y)\div(x+y)$　$[y]$

4 * (0106)

$(4x^2-3xy+2y^2)\div(x+y)$ について，次の問いに答えなさい。

(1) x についての整式と考えて計算しなさい。

(2) y についての整式と考えて計算しなさい。

--------• ちょっとひとこと •--------

◦ 2つ以上の文字をふくむ式の割り算では，着目する文字を変えると，商や余りが変わるのがふつうです。

例 $(4x^2-6xy+y^2)\div(2x+y)$ で x についての整式とみた場合と，y についての整式とみた場合を比べましょう。

(1) x についての整式とみた場合

$$\begin{array}{r l}
 & \;2x\;-4y \\
2x+y & \overline{)\,4x^2-6xy+\;\;y^2} \\
 & \underline{\;4x^2+2xy\qquad\quad} \\
 & \qquad -8xy+\;\;y^2 \\
 & \qquad \underline{-8xy-4y^2} \\
 & \qquad\qquad\quad 5y^2
\end{array}$$

商は $2x-4y$，余りは $5y^2$

(2) y についての整式とみた場合

$$\begin{array}{r l}
 & \;y\;-8x \\
y+2x & \overline{)\,y^2-6xy+\;4x^2} \\
 & \underline{\;y^2+2xy\qquad\quad} \\
 & \qquad -8xy+\;4x^2 \\
 & \qquad \underline{-8xy-16x^2} \\
 & \qquad\qquad\quad 20x^2
\end{array}$$

商は $y-8x$，余りは $20x^2$

➜もう整式の除法はできるようになりましたね。では，ここで，整式の除法の割られる式，割る式，商，余りの間にはどんな関係があるのか調べてみましょう。

〔2〕整式の除法のしくみ

◇除法のしくみ

〔1〕で計算したように，$A=8x^3-24x+9$ を，$B=2x^2+3x-1$ で割ると，商は $4x-6$，余りは $-2x+3$ です。

このとき，余り $-2x+3$ は，A から，$B\cdot 4x$，$B\cdot(-6)$ を順にひいていって求めました。これを，等式に書いてみましょう。

$$A-B\cdot 4x-B\cdot(-6)=-2x+3$$

つまり　$A \quad = \quad B \quad \cdot(4x-6)+(-2x+3)$

(割られる式)＝(割る式)×　(商)　＋　(余り)

となっています。

◇余りの次数と割る式の次数の関係

上の計算の結果で，余りの次数と割る式の次数を比べてみましょう。

余り $-2x+3$ ……1次，　割る式 $2x^2+3x-1$ ……2次

ですから，余りの次数が，割る式の次数より低くなっています。

これは，上の計算をするとき，商も余りも整式の範囲でこれ以上つづけることができないところまで計算したことから理解できますね。

割る式より次数の低くない式が残ったら，まだ，計算がつづけられますね。

◇整式の除法のしくみ

上で調べたことをまとめると，次のようになります。

> x についての整式 A を，x についての整式 B で割ったときの商を Q，余りを R とすると，次の関係が成り立つ。
>
> $A=BQ+R$　　　R の次数 $<B$ の次数
>
> とくに，A が B で割り切れるとき，$R=0$ だから　　$A=BQ$

◇割られる式，割る式，商の次数の関係

上の計算の結果で，割られる式，割る式，商の次数を比べてみましょう。

割られる式 $8x^3-24x+9$ ……3次，割る式 $2x^2+3x-1$ ……2次，商 $4x-6$ ……1次ですね。

つまり，3次式を2次式でわった商は1次式になっています。　　➜ $3-2=1$

これは，上の計算で，商をたてるとき，割られる式の最高次の項を，割る式の最高次の項で割ったことからもわかりますね。

一般に，m 次式を n 次式で割った商は，$m-n$ 次式になります。$(m\geqq n)$

➜整式の除法のしくみは，整数の除法のしくみと比べながら覚えるといいですね。
では，このことを使う問題を考えてみましょう。

例題2　　　　**整式の除法のしくみ**

整式 x^3+2x-2 をある整式で割ったとき，商は $x-1$，余りは $2x-1$ でした。この整式を求めなさい。

◆ 考え方 ◆

割られる式を A，割る式を B，商を Q，余りを R とすると，次の関係があります。

$$A=BQ+R$$

いま，$A=x^3+2x-2$，$Q=x-1$，$R=2x-1$ ですから

$$x^3+2x-2=B(x-1)+2x-1$$

です。ここから，B を求めます。

◆ 解　答 ◆

求める整式を B とおくと

$$x^3+2x-2=B(x-1)+2x-1$$

よって　　$B(x-1)=x^3+2x-2-(2x-1)$　　➜ $2x-1$ を移項します。

　　　　　$B(x-1)=x^3-1$

したがって　　$B=(x^3-1)\div(x-1)$

　　　　　　　$=x^2+x+1$

➜両辺を $x-1$ で割ります。$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$

➜問われていることを正しくつかんで，式に表すことができれば簡単ですね。すこし練習しましょう。

■■■トレーニング■■■

5 ＊ (0107)

次の条件を満たす整式を求めなさい。

(1) $x-2$ で割ると商が $x-1$，余りが 3

(2) x^2-x+2 で割ると商が $2x^2-1$，余りが $2x-3$

6 ＊ (0108)

次の条件を満たす整式を求めなさい。

(1) $x^4-3x^3+2x^2-1$ を割ると，商が x^2+1，余りが $3x-2$

(2) $5x^4-10x^3+6x^2-2$ を割ると，商が x^2-2x+2，余りが $-8x+6$

➜ごくろうさま。
これで終わりです。
ここで学習したたいせつなことを，整理しておきましょう。

まとめておこう！

x についての整式 A を，x についての整式 B で割ったときの商を Q，余りを R とすると，次の関係が成り立つ。

$A=BQ+R$　　R の次数＜B の次数

§ 12　整式の除法(2)　組立除法など

前のセクションは，整式の除法について，その計算のしかたやしくみを学習しましたね。ここでは，ひきつづき整式の除法の学習ですが，すこし発展させた問題を解いてみます。また，$x-\alpha$ という形の1次式で割る場合の，簡単な計算方法も学習します。

➜まず，次の「除法の等式」を利用する問題を考えましょう。

(割られる式)＝(割る式)×(商)＋(余り)

例題1　　整式の商と余り

x についての整式 P を x^2-x+1 で割ると $2x+1$ 余り，その商をさらに x^2-1 で割ると $x+2$ 余るという。このとき，次の問いに答えなさい。

(1)　P を $(x^2-x+1)(x^2-1)$ で割ったときの余りを求めなさい。

(2)　P を x^2-1 で割ったときの余りを求めなさい。

◆ 考え方 ◆

整式 P を x^2-x+1 で割ったときの商を Q とすると

$$P=(x^2-x+1)Q+2x+1$$

と表されます。また，Q を x^2-1 で割ったときの商を Q' とすると

$$Q=(x^2-1)Q'+x+2$$

と表されますから，後の式を前の式に代入した式を変形して考えます。

(1)では，$P=(x^2-x+1)(x^2-1)(x$ の整式$)+($余り$)$

(2)では，$P=(x^2-1)(x$ の整式$)+($余り$)$

の形に変形します。余りの次数は，割る式の次数よりも低くなることに注意します。

◆ 解　答 ◆

(1)　整式 P を x^2-x+1 で割ったときの商を Q とすると

$$P=(x^2-x+1)Q+2x+1 \quad \cdots\cdots\text{①}$$

Q を x^2-1 で割ったときの商を Q' とすると

$$Q=(x^2-1)Q'+x+2 \quad \cdots\cdots\text{②}$$

②を①に代入すると

$$\begin{aligned}P&=(x^2-x+1)\{(x^2-1)Q'+x+2\}+2x+1\\&=(x^2-x+1)(x^2-1)Q'+(x^2-x+1)(x+2)+2x+1\\&=(x^2-x+1)(x^2-1)Q'+x^3+x^2+x+3\end{aligned}$$

$(x^2-x+1)(x^2-1)$ の次数は4で，x^3+x^2+x+3 の次数は3だから，P を $(x^2-x+1)(x^2-1)$ で割った余りは

$$x^3+x^2+x+3$$

(2)

$$P=(x^2-x+1)(x^2-1)Q'+x^3+x^2+x+3$$

x^3+x^2+x+3 を x^2-1 で割ると，商が $x+1$，余りが $2x+4$ となるから

$$x^3+x^2+x+3=(x^2-1)(x+1)+2x+4$$

したがって

$$\begin{aligned}P&=(x^2-x+1)(x^2-1)Q'+(x^2-1)(x+1)+2x+4\\&=(x^2-1)\{(x^2-x+1)Q'+(x+1)\}+2x+4\end{aligned}$$

→ x^2-1 でくくる。

x^2-1 の次数は2で，$2x+4$ の次数は1だから，P を x^2-1 で割った余りは

$2x+4$

〈注意〉 (2)で，
$$P=(x^2-x+1)(x^2-1)Q'+x^3+x^2+x+3$$
$$=(x^2-1)\{(x^2-x+1)Q'\}+x^3+x^2+x+3$$
と考えて，余りを x^3+x^2+x+3 としないように注意しましょう。
x^3+x^2+x+3 は，まだ x^2-1 で割ることができます。

→与えられた条件を正しくつかみ，式に表すことができれば，整式の除法のしくみから，解答は導き出されます。では，トレーニングをしてみましょう。

■■■トレーニング■■■

1＊ (0109)

x についての整式 A を x についての整式 B で割ったときの商が $x-2$，余りが x^2+x-6 であった。整式 A を $x-2$ で割ったときの余りは0となることを示しなさい。

2＊ (0110)

x についての整式 A を x についての整式 B で割ったときの商は x^2-1，余りは $3x-2$ となった。また，整式 B を x^2-x-1 で割ったときの余りは $2x-3$ になった。このとき，次の問いに答えなさい。

(1) A を $(x^2-1)(x^2-x-1)$ で割ったときの余りを求めなさい。

(2) A を x^2-x-1 で割ったときの余りを求めなさい。

→整式の除法の応用問題にも少し慣れてきたと思います。次は，余りから割られる整式の係数を求める問題を考えてみましょう。

例題 2 整式の除法の応用

x についての整式 x^3-3x^2+px+q が x^2+2x-1 で割り切れるのは，p，q の値がどんなときですか。

◆ 考え方 ◆

割り切れるのは，余りが0になるときです。

だから，x についての整式 x^3-3x^2+px+q を x^2+2x-1 で実際に割って余りを求めます。そして，その余りが0になるように p，q の値を定めます。

◆ 解 答 ◆

x^3-3x^2+px+q を x^2+2x-1 で実際に割ると

$$\begin{array}{r|llll}
 & x & -5 & & \\ \hline
x^2+2x-1 & x^3-3x^2+ & px+ & q & \\
 & x^3+2x^2- & x & & \\ \hline
 & -5x^2+ & (p+1)x+ & q & \\
 & -5x^2- & 10x+ & 5 & \\ \hline
 & & (p+11)x+ & (q-5) &
\end{array}$$

→ p，q は定数です。

→これが余りです。

割り切れるのは，余り $(p+11)x+(q-5)$ が0のときだから

$p+11=0$，$q-5=0$ 　→ $p+11$ は余りの x の係数，$q-5$ は余りの定数項

これを解いて　$p=-11$，$q=5$

〈注意〉　求めるのは，余りが0になるときの p，q の値です。x ではありません。
だから，$(p+11)x+(q-5)=0$ から

$$x=-\frac{q-5}{p+11}$$

などとしないように注意しましょう。

余りの x の係数と定数項がともに0になるように，p，q の値を定めればよいのです。

➜整式の除法のしかたを，しっかり理解していれば，スラスラ解けますね。トレーニングしてみましょう。

■■■トレーニング■■■

3 ＊ (0111)
x についての整式 x^4+px^2+3x-q を x^2+3x-1 で割ったときの余りが $-17x$ になるのは，p，q の値がどんなときですか。

4 ＊ (0112)
x についての整式 $2x^3+5x^2-3x+p$ が x についての整式 x^2-x+q で割り切れるのは，p，q の値がどんなときですか。

5 ＊ (0113)
x についての整式 $x^3+2ax^2-x+2ab$ を x についての整式 x^2-2x+b で割ったときの余りが $x+6$ になるように，a，b の値を定めなさい。

➜実際に割ったときの余りと問題で与えられた余りの係数が等しくなるように a，b の値を定めましょう。

➜ここまでくれば，整式の割り算は文句なしにできるようになりましたね。では，つぎに，1次式での割り算を，かけ算とたし算だけですませる方法を学習しましょう。

発展〔1〕組立除法

◇1次式 $x-\alpha$ での除法

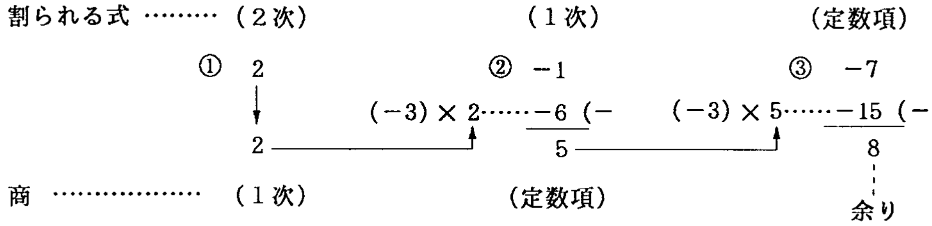
まず，$(2x^2-x-7)\div(x-3)$ をいままでどおりの方法で計算してみましょう。
右のようになり
商は $2x+5$，余りは8
ですね。

$$\begin{array}{rrrrrr}
 & 2 & x & +5 & & \\ \hline
x-3\,) & \boxed{2} & x^2 & \boxed{-} & x & -7 \\
① & 2 & x^2 & -6 & x & \\ \hline
 & & & \boxed{5} & x & \boxed{-7} \\
 & & ② & 5 & x & -15 \\ \hline
 & & & & ③ & \boxed{8}
\end{array}$$

◇係数の関係に着目する

上の計算で，商 $2x+5$ の係数2，5や，余りの8がどのようにして求められたかを調べてみましょう。
割る式は $x-3$ で，x の係数が1ですから，商の係数は上の $\boxed{}$ の①，②の2，5に等しくなっています。

つまり，①，②，③の計算だけで，次のように商と余りが求められることがわかります。



◇組立除法

上の関係を利用して，１次式 $x-\alpha$ での除法は，次のようにその係数だけを使って行うことができます。右の図を見ながら，読んでいきましょう。

① 割られる式を降べきの順に並べて $2x^2-x-7$ とし，その係数を，2，−1，−7 の順に並べて㋐の位置に書きます。

② 割る式 $x-3$ の３を㋑の位置に書きます。

③ ㋐の２をそのまま下ろして，㋒の位置に書きます。

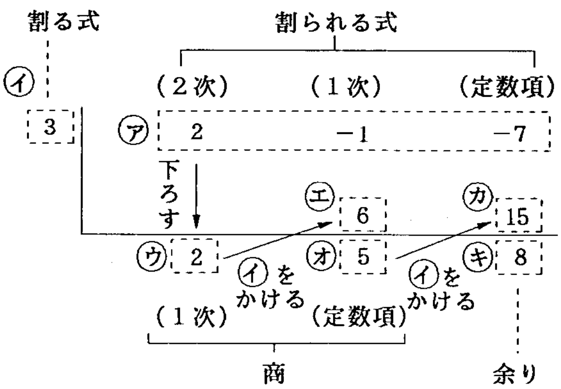
④ ㋑×㋒の値を㋓の位置に書きます。
→㋑×㋒＝3×2＝6

⑤ −1＋㋓の値を㋔の位置に書きます。
→−1＋㋓＝−1＋6＝5

⑥ ㋑×㋔の値を㋕の位置に書きます。
→㋑×㋔＝3×5＝15

⑦ −7＋㋕の値を㋖の位置に書きます。
→−7＋㋕＝−7＋15＝8

⑧ ㋒，㋔が商の係数で，㋖が余りです。
→㋒＝2，㋔＝5，㋖＝8



−(−3)×2＝＋(＋3)×2
−(−3)×5＝＋(＋3)×5
であることを利用して，組立除法では
㋔，㋖の値をたし算で求めます。

上のようにして，１次式で割ったときの商と余りを求める方法を組立除法といいます。

--------• ちょっとひとこと •--------

◦ 組立除法のしくみはどうなっているか考えてみましょう。

たとえば，ax^3+bx^2+cx+d を，１次式 $x-\alpha$ で割って，商が lx^2+mx+n，余りが r になるとします。

これは，右のように計算されるはずです。

$$\begin{array}{rrrrr}
 & lx^2+ & mx+ & n & \\ \hline
x-\alpha\,) & ax^3+ & bx^2+ & cx+ & d \\
 & lx^3- & \alpha l x^2 & & \\ \hline
 & & mx^2+ & cx & \\
 & & mx^2- & \alpha m x & \\ \hline
 & & & nx+ & d \\
 & & & nx- & \alpha n \\ \hline
 & & & & r
\end{array}$$

右の計算で，係数の関係に着目すると

$l=a$
$m=b-(-\alpha l)$
$\quad =b+\alpha l$
$n=c-(-\alpha m)$
$\quad =c+\alpha m$
$r=d-(-\alpha n)$
$\quad =d+\alpha n$

となっています。この関係を，次のように書いて，商(の係数)と余りを求めるのが組立除法です。

$$
\begin{array}{c|cccc}
\alpha & a & b & c & d \\
 & & \alpha l & \alpha m & \alpha n \\ \hline
 & l & m & n & \multicolumn{1}{|c}{r}
\end{array}
$$

→ m 次式を n 次式で割った商は，$m-n$ 次式でしたね。組立除法では，割る式はいつも１次式だから，商の次数は

割られる式の次数－１

です。

最後に右下に現れるのが余りですね。

商と区別するため，縦線などで区切るとよいですよ。

→組立除法のしかたはわかりましたね。次の例題で，実際に使ってみて，その便利さを味わいましょう。

例題３ 組立除法

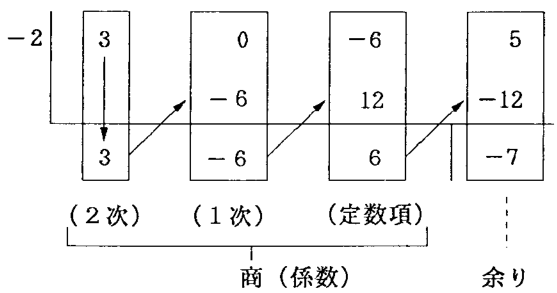
組立除法を使って，$(-6x+3x^3+5)\div(x+2)$ の商と余りを求めなさい。

◆ 考え方 ◆

まず，割られる式を x の降べきの順に並べて $3x^3-6x+5$ とします。２次の項がありませんが，$3x^3+0\cdot x^2-6x+5$ と考えて，係数は順に３，０，－６，５とします。

つぎに，割る式を $x-\alpha$ の形にして，α にあたる数を求めます。$x+2=x-(-2)$ ですから，－２ですね。

上の数を右のように組み合わせて計算します。



◆ 解　答 ◆

$$
\begin{array}{r|rrrr}
-2 & 3 & 0 & -6 & 5 \\
 & & -6 & 12 & -12 \\ \hline
 & 3 & -6 & 6 & \multicolumn{1}{|r}{-7}
\end{array}
$$

→ x^2 の係数は０と考えます。

よって，商は $3x^2-6x+6$，余りは -7　→商は２次式，余りは定数です。

〈注意〉　１次式で割ったときの余りは，いつも定数です。

→組立除法は，たし算とかけ算だけでできるから楽なのです。では，すこしトレーニングしましょう。

■■■トレーニング■■■

6 ＊ (0114)

組立除法を使って，次の計算の商と余りを求めなさい。

(1)　$(2x^2-5x-9)\div(x-2)$　　(2)　$(x^3+3x^2-2x+7)\div(x+1)$

(3)　$(4x^3-3x^2+x-5)\div(x-3)$　　(4)　$(x^4-5x^3-x^2+2x-6)\div(x+2)$

7 *（0115）

組立除法を使って，次の計算の商と余りを求めなさい。

(1) $(2x^3-5x^2-3)\div(x-3)$　　(2) $(x^3+27)\div(x+3)$

(3) $(5+8x^2+28x-3x^3)\div(x+2)$　　(4) $(3x-2x^4+5)\div(x-1)$

→組立除法で求めた商の係数に０がふくまれているとき，その次数の項は，はぶいて書きます。
整式の除法については，これでひととおり終わりです。やさしかったでしょう。
では，また。

まとめておこう！

xについての整式ax^3+bx^2+cx+dを$x-\alpha$で割ったときの商と余りは，係数だけ並べて，下のように求めることができます。

$$\begin{array}{c|ccc|c}
\alpha & a & b & c & d \\
 & & \alpha a & \alpha b' & \alpha c' \\ \hline
 & a & b+\alpha a & c+\alpha b' & d+\alpha c' \\
 & & \| & \| & \vdots \\
 & & b' & c' & \text{余り}
\end{array}$$

$\underbrace{a \quad b' \quad c'}_{\text{商（係数）}}$

§ 13　最大公約数と最小公倍数*

整数の約数・倍数，公約数・公倍数，最大公約数・最小公倍数については，中学校で学習しましたね。ここでは，整式について，その約数・倍数，公約数・公倍数，最大公約数・最小公倍数とは何か，また，どのようにして求めるのか，などについて学習しましょう。

➜まず，整式の約数・倍数，公約数・公倍数について学習しましょう。

〔1〕公約数と公倍数

◇約数と倍数

整式 x^2+3x+2 は因数分解できて，$x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$ となりますね。
したがって，x^2+3x+2 は $x+1$ で割り切れます。

➜A が B で割り切れ，商が Q のとき，$A=BQ$ となります。

このように，整式 A が整式 B で割り切れるとき
B を A の約数，A を B の倍数
といいます。
上の場合，$x+1$ は x^2+3x+2 の約数で，x^2+3x+2 は $x+1$ の倍数ですね。

$x+1$ は x^2+3x+2 の約数
$x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$
x^2+3x+2 は $x+1$ の倍数

〈注意〉　これから，整式の倍数を考えるときは，0 倍は考えないことにします。

◇公約数

こんどは，2 つの整式 x^2+3x+2，x^2+x-2 を考えましょう。
この 2 つの式をそれぞれ因数分解すると，次のようになります。

$$x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$$
$$x^2+x-2=(x-1)(x+2)$$

したがって，$x+2$ は x^2+3x+2 の約数にも，x^2+x-2 の約数にもなっています。
このように，2 つ以上の整式に共通な約数を，それらの整式の公約数といいます。
上の場合，$x+2$ は x^2+3x+2 と x^2+x-2 の公約数になっていますね。

◇公倍数

つぎに，整式 $(x-1)(x+1)(x+2)$ を考えてみましょう。
この整式は，$x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$ の倍数にも，$x^2+x-2=(x-1)(x+2)$ の倍数にもなっていますね。
このように，2 つ以上の整式すべての倍数になっている整式を，それらの整式の公倍数といいます。
$(x-1)(x+1)(x+2)$ は x^2+3x+2 と x^2+x-2 の公倍数です。
このほかに，次のような式はすべて x^2+3x+2 と x^2+x-2 の公倍数です。

$$x(x-1)(x+1)(x+2),\ (x-1)^2(x+1)(x+2),\ (x-1)(x+1)^3(x+2),\cdots\cdots$$

一般に，公倍数はいくらでもあります。

➜基本的なことがらはわかりましたね。考え方は整数の場合と同じです。整数の場合，素因数分解したように，整式の場合は因数分解することがポイントです。
すこしトレーニングしてみましょう。

約数，倍数といっても，整式のことですよ。

■■■トレーニング■■■

1 (0116)

次の各組の公約数と公倍数を，下の［　　］の中の整式から選びなさい。

(1) x^3y^2, xy^2z　　(2) x^5y^5, $x^3y^3z^3$

$[x,\ xy,\ xyz,\ y^3z,\ x^3y^4z^2,\ x^4y^4,\ x^5y^5z^3]$

2 (0117)

次の各組の公約数と公倍数を，下の［　　］の中の整式から選びなさい。

(1) $x(x+2)^2$, $x^2(x+2)(x-1)$　　(2) x^2+x-2, x^2+4x+4

$\left[\begin{array}{l} x+2,\ x(x+2),\ x(x+1)(x+2),\ x^2(x-1)^2(x+1)^2 \\ (x+1)^2(x+2)^2,\ (x-1)(x+2)^2,\ x^2(x-1)^2(x+2)^2 \end{array}\right]$

3 (0118)

次の各組の公約数と公倍数を，下の［　　］の中の整式から選びなさい。

(1) x^2+x, x^2-1, $2x^2-x-3$　　(2) x^2-x, x^2-1, $2x^2-5x+3$

$\left[\begin{array}{l} x,\ x-1,\ x+1,\ x(x+1),\ x(x-1)^2,\ (2x-3)^2 \\ x(x+1)(x-1)(2x-3),\ x(x+1)(x-1)^3(2x-3) \end{array}\right]$

➜整式の公約数・公倍数についてはわかりましたね。では，このことをもとにして，整式の最大公約数・最小公倍数についての学習に進みましょう。

〔2〕最大公約数と最小公倍数

◇最大公約数

2つの整式 $x^2(x+1)$, $x(x+1)(x+2)$ の公約数は，次の4つですね。

$1,\quad x,\quad x+1,\quad x(x+1)$

これらの公約数の次数を調べてみましょう。

1 ……0次，　x ……1次，　$x+1$ ……1次，　$x(x+1)$ ……2次

で，$x(x+1)$ の次数がいちばん高くなっていますね。

このように，公約数の中で，いちばん次数の高いものを最大公約数といいます。

上の場合，$x(x+1)$ が，$x^2(x+1)$ と $x(x+1)(x+2)$ の最大公約数で，これは，右の図からわかるように，共通な因数について，次数の最低のものの積になっています。

$$\begin{array}{lll} x^2 & (x+1) & \\ x & (x+1) & (x+2) \\ \hline \downarrow 1次 & \downarrow 1次 & \\ x & (x+1) & \end{array}$$

共通な因数の最低次の積

……… 最大公約数

◇最小公倍数

こんどは，2つの整式 $x^2(x+1)$, $x(x+1)(x+2)$ の公倍数の次数を調べてみましょう。
公倍数は，次のようにいくらでもあります。

$$\begin{array}{cccc} x^2(x+1)(x+2), & x^2(x+1)^2(x+2), & x^2(x+1)(x+2)^2, & x^2(x+1)^3(x+2), \cdots\cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 4\text{次} & 5\text{次} & 5\text{次} & 6\text{次} \end{array}$$

このうち，$x^2(x+1)(x+2)$ の次数がいちばん低くなっていますね。

このように，公倍数の中で，いちばん次数の低いものを最小公倍数といいます。

上の場合，$x^2(x+1)(x+2)$ が，$x^2(x+1)$ と $x(x+1)(x+2)$ の最小公倍数で，これは，右の図からわかるように，すべての因数について，次数の最高のものの積になっています。

$$\begin{array}{lll} x^2 & (x+1) & \\ x & (x+1) & (x+2) \\ \hline \downarrow 2\text{次} & \downarrow 1\text{次} & \downarrow 1\text{次} \\ x^2 & (x+1) & (x+2) \end{array}$$

すべての因数の最高次の積

……最小公倍数

◇互いに素

2つの整式 $x+1$ と $x+2$ には，共通な1次以上の整式はありませんね。つまり，$x+1$ と $x+2$ の最大公約数は1です。

このとき，$x+1$ と $x+2$ は互いに素であるといいます。

また，$x+1$ と $x+2$ の最小公倍数は $(x+1)(x+2)$ ですね。

このように，互いに素な2つの整式の最小公倍数は，その2式の積になります。

〈注意〉　上で，2つの整式 $x^2(x+1)$，$x(x+1)(x+2)$ の最大公約数は $x(x+1)$，最小公倍数は $x^2(x+1)(x+2)$ としましたね。

これを，たとえば，最大公約数は $2x(x+1)$，最小公倍数は $2x^2(x+1)(x+2)$ としてもかまいません。ふつう，定数倍を無視して，どれか1つだけ答えます。

このように，整式の約数，倍数を考えるときは，定数倍は無視することにします。

➜整式の最大公約数と最小公倍数についてはわかりましたね。次の基本例題1の問題を考えて，その求め方をはっきりさせましょう。

基本例題1　　最大公約数と最小公倍数

次の各組の最大公約数と最小公倍数を求めなさい。

(1)　x^2y^3，x^3yz　　　(2)　$5x^2-2x-3$，x^2-2x+1

◆考え方◆

まず，整式を積の形で表します。つまり，多項式は因数分解します。

最大公約数を求めるには，共通な因数それぞれについて，次数のいちばん低いものを選び，それらの積をつくります。

最小公倍数を求めるには，すべての因数それぞれについて，次数のいちばん高いものを選び，それらの積をつくります。

◆解　答◆

(1)　最大公約数は　　x^2y

➜共通な因数は x と y で，それぞれについて最低次のものは x^2，y

最小公倍数は　　x^3y^3z

➜x，y，z それぞれについて最高次のものは x^3，y^3，z

(2)　$5x^2-2x-3=(x-1)(5x+3)$　　➜因数分解します。

$x^2-2x+1=(x-1)^2$

だから

最大公約数は　$x-1$

➜共通な因数は $x-1$ で，最低次のものは $x-1$

最小公倍数は　$(x-1)^2(5x+3)$

➜ $x-1$，$5x+3$ について，それぞれ最高次のものは $(x-1)^2$，$5x+3$

➜整数の場合と考え方はよく似ていますね。整数のとき素因数分解して，その指数を比べたように，整式では，因数の次数を比べるのです。さあ，すこし練習してみましょう。

■■■トレーニング■■■

4 (0119)

次の各組の最大公約数と最小公倍数を求めなさい。

(1) x^3，x^2　　(2) x^2y，xy^3

5 (0120)

次の各組の最大公約数と最小公倍数を求めなさい。

(1) $x^2y^2z^2$，x^3y，y^3z　　(2) ab^2c^4，a^3c^2，a^5bc^3

6 (0121)

次の各組の最大公約数と最小公倍数を求めなさい。

(1) $(x+1)^2(2x+1)^2$，$(x+1)(x+2)(2x+1)$

(2) $2x^2+5x+3$，$2x^2+x-6$

(3) $(x+y)(x+2y)$，$x^2+4xy+4y^2$

(4) $x^2+5xy+6y^2$，$2x^2+7xy+3y^2$

7 (0122)

次の各組の最大公約数と最小公倍数を求めなさい。

(1) $2x^2+5x-3$，$2x^2-3x+1$，$4x^2-4x+1$

(2) $3x^2+10xy+3y^2$，$2x^2+3xy-9y^2$，$3x^2+7xy-6y^2$

➜いくつかの整式の最大公約数・最小公倍数は求められるようになりましたね。では，2つの整式の最大公約数・最小公倍数ともとの式との関係はどうなっているのでしょうか。もうすこしくわしく調べてみましょう。

〔3〕最大公約数・最小公倍数と整式の決定

◇2つの整式とその最大公約数との関係

〔2〕で調べたように，2つの整式 $A=x^2(x+1)$，$B=x(x+1)(x+2)$ の最大公約数は $x(x+1)$ でしたね。

この最大公約数を G とおくと，A も B も G で割り切れて

$A=x^2(x+1)=Gx$　➜ x は，A を G で割った商です。

$B=x(x+1)(x+2)=G(x+2)$　➜ $x+2$ は，B を G で割った商です。

となります。

ここで，x と $x+2$ は互いに素になっていますね。

このように，2つの整式 A，B を，その最大公約数 G でそれぞれ割った商を A'，B' とすると

$A=GA'$，$B=GB'$　A' と B' は互いに素

という関係があります。

→A' と B' が互いに素でなかったら，共通な因数をもち，最大公約数は，G とその共通な因数の積になり矛盾します。

◇最大公約数と最小公倍数の関係

上の2つの整式 A，B の最小公倍数は $x^2(x+1)(x+2)$ でしたね。

この最小公倍数を L とおくと，L と，$G=x(x+1)$，$A'=x$，$B'=x+2$ の間には次のような関係があります。

$$L=x^2(x+1)(x+2)$$
$$=x(x+1)\cdot x\cdot(x+2)$$
$$=GA'B'$$

このことから，最大公約数 G は，最小公倍数 L の約数であることがわかります。

逆に考えると，L は G の倍数になっています。

G は L の約数

$L=GA'B'$

L は G の倍数

◇2つの整式と最大公約数，最小公倍数の関係

上の式 $L=GA'B'$ で，両辺に G をかけてみましょう。

$$LG=GA'B'G$$

すなわち　$LG=GA'\cdot GB'$

となりますね。

ここで，$GA'=A$，$GB'=B$ ですから

$$LG=AB$$

という関係があることがわかります。

つまり，2つの整式の積は，それらの最大公約数と最小公倍数の積に等しいのです。

→では，上の関係を使って，最大公約数や最小公倍数がわかっているときに，もとの2つの整式を求めてみましょう。

例題1　　最大公約数・最小公倍数と整式の決定

最大公約数が $2x+1$，最小公倍数が $2x^3+3x^2-11x-6$ である2つの整式を求めなさい。

◆考え方◆

2つの整式を A，B とし，その最大公約数を G とすると

$$A=GA',\ B=GB' \qquad A' と B' は互いに素$$

という関係があります。

いま，G がわかっているのですから，A'，B' がわかれば A，B が求められます。

ところで，この2つの整式の最小公倍数を L とすると

$$L=GA'B'$$

で，L，G がわかっていますから，$A'B'$ が求められます。

◆解　答◆

求める2つの整式を A，B とすると

$$A=(2x+1)A',\ B=(2x+1)B' \qquad A' と B' は互いに素$$

→$A=GA'$，$B=GB'$ で，$G=2x+1$

また，$2x^3+3x^2-11x-6=(2x+1)A'B'$ から

→$L=GA'B'$ で，$G=2x+1$，$L=2x^3+3x^2-11x-6$

$A'B'=(2x^3+3x^2-11x-6)\div(2x+1)$　　→実際に割り算をします。

$=x^2+x-6$

$=(x+3)(x-2)$

よって，A'，B' の組は　$\begin{cases} x+3 \\ x-2 \end{cases}$　または　$\begin{cases} (x+3)(x-2) \\ 1 \end{cases}$

➜積が $(x+3)(x-2)$ になる互いに素な２つの整式の組をつくります。２番目の組は忘れやすいので注意しましょう。

したがって，求める２つの整式は

$\begin{cases} (2x+1)(x+3) \\ (2x+1)(x-2) \end{cases}$　または　$\begin{cases} (2x+1)(x+3)(x-2) \\ 2x+1 \end{cases}$

➜最大公約数・最小公倍数ともとの整式の関係をうまく使っていますね。では，トレーニングです。

■■■トレーニング■■■

8 ＊ (0123)

最大公約数が $3x+2$，最小公倍数が $3x^3-13x^2+8x+12$ である２つの整式を求めなさい。

➜実は，こういう問題は，整式が因数分解されていると見通しよく考えることができます。その例を１つやってみましょう。

9 ＊ (0124)

積が $(x-1)^2(x+2)(2x+3)$，最小公倍数が $(x-1)(x+2)(2x+3)$ である２つの整式を求めなさい。

10 ＊ (0125)

積が $2x^4-11x^3+6x^2+45x-54$，最大公約数が $x-3$ である２つの２次の整式を求めなさい。

11 ＊ (0126)

$3x^2-7x-6$ との最小公倍数が $3x^3+8x^2-41x-30$ である２次の整式を求めなさい。

➜整式の最大公約数や最小公倍数の求め方やそれらの関係について，きちんと覚えましたね。ここでの学習は，これで終わりです。

まとめておこう！

２つの整式 A，B の最大公約数を G，最小公倍数を L とすると

1.　$A=GA'$，$B=GB'$

A' と B' は互いに素

2.　$L=GA'B'$

3.　$LG=AB$

§ 14　分数式の計算(1)* 約分，乗法・除法

整数どうしの割り算を思い出してみましょう。その結果を１つの数で表すために分数を使いましたね。ここでは，整式どうしの割り算の結果を１つの式で表すことを考えます。分数を考えたときと，よく似ていますから，比較しながら学習を進めていきましょう。

➜ではまず，整式どうしの割り算の商を表す式とその性質から始めましょう。

〔1〕分数式とその基本性質

◇分数式

たとえば，整式 $A=x^2+1$，$B=x-2$ について，その計算結果を調べてみましょう。

$$A+B=x^2+x-1,\quad A-B=x^2-x+3,\quad A\times B=x^3-2x^2+x-2$$

となり，和・差・積はどれも整式となりますね。

ところが $A\div B$ を計算してみると，右のように割りきれなくて商と余りが出てきますから，その結果を１つの整式で表すことはできません。

$$\begin{array}{r|l} & x+2 \quad\cdots\cdots\text{商} \\ \hline x-2 & x^2 \qquad +1 \\ & x^2-2x \\ \hline & 2x+1 \\ & 2x-4 \\ \hline & 5 \quad\cdots\cdots\text{余り} \end{array}$$

そこで，たとえば $2\div3$ という整数どうしの割り算で，割りきれないときでも

$$2\div3=\frac{2}{3}$$

として，その結果を１つの分数で表したように，整式 A を整式 B で割った結果を

$$A\div B=\frac{A}{B}\qquad ➜A=x^2+1,\ B=x-2\text{ のとき }\frac{x^2+1}{x-2}$$

で表します。

そして，この形の式を分数式ということにします。

ここで，B は定数でない整式，つまり１次以上の整式であるとします。

➜$\dfrac{x^2+1}{3}$ は定数３で割ったものだから分数式ではありません。

このとき，分数と同じように，A を分子，B を分母といいます。

〈注意〉　分数式の分母の文字は，かならず分母を０にしないことが前提となります。そこで以後，このことをいちいちことわらないことにします。

◇有理式

整数と分数を合わせて有理数といいましたね。

式のときもこれと同じように，整式と分数式を合わせて有理式といいます。

$$\text{有理式}\begin{cases}\text{整式}\begin{cases}\text{単項式}\cdots\cdots\ \frac{1}{2}x,\ -x^2,\ xy^2\\ \text{多項式}\cdots\cdots\ x^2+1,\ x-2,\ x^2+xy+y^2\end{cases}\\ \text{分数式}\cdots\cdots\cdots\cdots\ \dfrac{x^2+1}{x-1},\ \dfrac{y^2+1}{2x}\end{cases}$$

◇分数式の基本性質

分数のとき，次のようなことが成り立ちますね。

$$\frac{3}{4}=\frac{3\times5}{4\times5}=\frac{15}{20} \qquad \frac{24}{60}=\frac{24\div12}{60\div12}=\frac{2}{5}$$

これと同じように，分数式では，分母・分子に0でない同じ整式をかけても，分母・分子をその共通な因数で割っても，もとの分数式に等しくなります。

つまり，次のような性質があります。

$$\frac{A}{B}=\frac{A\times C}{B\times C} \qquad \frac{A}{B}=\frac{A\div D}{B\div D} \qquad (C\neq0,\ D\neq0)$$

◇約分

分数式は，上の基本性質から，たとえば

$$\frac{x^2-1}{x^2-2x+1}=\frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)^2}=\frac{x+1}{x-1}$$

のように，分母・分子をその共通因数で割ることによって，より簡単な分数式に直すことができます。

このようにすることを，約分するといいます。

◇既約分数式

$\frac{2}{3}$ のように，分母と分子が共通な約数をもたない分数を既約分数といいます。

同じように，$\frac{x+2}{x+1}$ のような，分母と分子が共通な因数をもたない分数式のことを，既約分数式といいます。

すなわち，既約分数式とは，それ以上約分できない分数式のことです。

既約分数式に直すには，分母・分子をその最大公約数で割ります。

--------• ちょっとひとこと •--------

◦ どうして0で割ってはいけないのか考えてみましょう。

たとえば，方程式 $2x=1$ の解は,2倍すると1になる x の値で，これは $x=\frac{1}{2}$，つまり，1を2で割った値です。

同じように，方程式 $0\cdot x=1$ の解は，0倍すると1になる x の値です。ところが，左辺はどんな x の値に対しても0になりますから，左辺が右辺の1に等しくなるような x の値はありません。

これは，1を0で割った値は考えられないこと，つまり，0で割ることは不合理であることを示します。

➜分数式について，たくさんのことがわかりましたね。では，さっそく，分数式を見分けるトレーニングから始めましょう。

■■■トレーニング■■■

1 (0127)

次の式の中から分数式を選び，記号で答えなさい。

㋐ $\dfrac{x+3}{2}$　　㋑ $\dfrac{1}{x^2+2}$　　㋒ $\dfrac{3x^2}{x-1}$

㋓ $\dfrac{2}{\sqrt{x+1}}$　　㋔ $\dfrac{2}{x+1}$　　㋕ $\dfrac{\sqrt{x^2+x+1}}{x}$

2 (0128)

次の式の中から，$\dfrac{2x}{x^2+1}$ に等しい分数式を選び，記号で答えなさい。

㋐ $\dfrac{2x+2}{(x^2+1)+2}$　　㋑ $\dfrac{2x\times2}{(x^2+1)\times2}$

㋒ $\dfrac{2x\div2}{(x^2+1)\div2}$　　㋓ $\dfrac{2x-2}{(x^2+1)-2}$

➜どんな式が分数式なのかはわかりましたね。では，つぎに分数式の約分を考えてみましょう。

基本例題 1　　分数式の約分

次の分数式を約分しなさい。

(1) $\dfrac{8a^3x}{12a^2x^2}$　　(2) $\dfrac{x^2-x-2}{x^2+2x+1}$

◆考え方◆

分母・分子をその共通因数で割ることを約分するといいます。

(2)では，まず，分母・分子をそれぞれ因数分解します。そして，分母・分子の共通因数を求め，それで分母・分子を割ります。

◆解　答◆

(1) $\dfrac{8a^3x}{12a^2x^2}=\dfrac{2a}{3x}$　　➜共通因数は，$4a^2x$ です。

(2) $\dfrac{x^2-x-2}{x^2+2x+1}$

$=\dfrac{(x-2)(x+1)}{(x+1)^2}$　　➜分母・分子をそれぞれ因数分解します。

$=\dfrac{x-2}{x+1}$　　➜分母・分子をその共通因数 $x+1$ で割ります。

➜ふつう，「約分しなさい」といわれたら，もうそれ以上約分できない形，つまり既約分数式に直します。トレーニングしてみましょう。

■■■トレーニング■■■

3 (0129)

次の分数式を約分しなさい。

(1) $\dfrac{6a^2b}{8ab^3}$　　(2) $\dfrac{18a^2b^3x}{24abx^4}$

4 (0130)

次の分数式を約分しなさい。

(1) $\dfrac{6ax^2-9a^3x}{3a^2x}$　　　(2) $\dfrac{4a^2xy^3}{2x^3y+12a^2x^2y^2}$

5 (0131)

次の分数式を約分しなさい。

(1) $\dfrac{2x+1}{(2x+1)(x-1)}$　　　(2) $\dfrac{3x-6}{x^2-x-2}$

(3) $\dfrac{x^2+6xy+9y^2}{x^2+xy-6y^2}$　　　(4) $\dfrac{a^2-(b-c)^2}{(a+b)^2-c^2}$

6 (0132)

次の分数式を約分しなさい。

(1) $\dfrac{3x^3y-3x^2y+3xy}{x^3+1}$　　　(2) $\dfrac{x^3+x-x^2-1}{x^4-1}$

(3) $\dfrac{ax^2-ay^2}{a^2y-a^2x}$　　　(4) $\dfrac{a^4-b^4}{a^3-b^3}$

➜分数式を約分する方法はわかりましたね。こんどは，分数式の乗法と除法について学習しましょう。

〔2〕分数式の乗法・除法

◇分数式の乗法

分数どうしの乗法では，たとえば

$$\frac{3}{4}\times\frac{2}{5}=\frac{3\times2}{4\times5}=\frac{6}{20}=\frac{3}{10}$$

➜分母どうし，分子どうしをそれぞれかけ合わせます。

と計算しましたね。

分数式の乗法においても同じように

$$\frac{x^2+2}{x+1}\times\frac{2}{x+1}=\frac{(x^2+2)\times2}{(x+1)\times(x+1)}=\frac{2(x^2+2)}{(x+1)^2}$$

と計算します。

このように，分数式の乗法は

$$\frac{A}{B}\times\frac{C}{D}=\frac{A\times C}{B\times D}=\frac{AC}{BD}$$

と，分母どうし，分子どうしをそれぞれかけ合わせて計算します。

◇逆数

2と$\dfrac{1}{2}$，-3と$-\dfrac{1}{3}$のように，2つの数の積が1になるとき，2つの数はたがいに逆数の関係にあるといいましたね。

同じように，分数式でも，$\dfrac{x+3}{x+2}$と$\dfrac{x+2}{x+3}$のように，2つの分数式の積が1になるとき2つの分数式はたがいに逆数であるといいます。

◇分数式の除法

分数の除法では，たとえば

$$\frac{9}{4}\div\frac{3}{2}=\frac{9}{4}\times\frac{2}{3}$$ ➜ ÷ の後の分数 $\frac{3}{2}$ の逆数 $\frac{2}{3}$ をかける形に直します。

のように計算しましたね。

分数式のときもまったく同じように，

$$\frac{x+1}{(x-1)^2}\div\frac{2x}{x+2}=\frac{x+1}{(x-1)^2}\times\frac{x+2}{2x}$$

と直して計算します。

このように，分数式の除法は

$$\frac{A}{B}\div\frac{C}{D}=\frac{A}{B}\times\frac{D}{C}=\frac{A\times D}{B\times C}=\frac{AD}{BC}$$

と，÷ の後の分数式の逆数をかける形に直して計算します。

➜分数のときと同じように，乗法では，分母どうし，分子どうしをそれぞれかけ合わせ，除法では，÷ の後の分数式の逆数をかけた形に直して計算するのですね。

基本例題 2 　　分数式の乗法・除法

次の計算をしなさい。

(1) $\frac{x^2}{x^2-1}\times\frac{x^2-x-2}{x^2-x}$ 　　(2) $\frac{3x^2+x}{x^2-4}\div\frac{3x+1}{x^2+4x+4}$

◆ 考え方 ◆

(1)は乗法です。分母どうし，分子どうしをそれぞれかけ合わせます。

(2)は除法です。÷ の後の分数式の逆数をかける形に直して，乗法の計算をします。

◆ 解　答 ◆

(1) $\frac{x^2}{x^2-1}\times\frac{x^2-x-2}{x^2-x}$

$=\frac{x^2}{(x+1)(x-1)}\times\frac{(x-2)(x+1)}{x(x-1)}$ ➜分母・分子をそれぞれ因数分解します。

$=\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$ ➜約分します。分母・分子の共通因数は $x(x+1)$ です。

(2) $\frac{3x^2+x}{x^2-4}\div\frac{3x+1}{x^2+4x+4}$

$=\frac{3x^2+x}{x^2-4}\times\frac{x^2+4x+4}{3x+1}$ ➜ $\div\frac{3x+1}{x^2+4x+4}$ を $\times\frac{x^2+4x+4}{3x+1}$ に直します。

$=\frac{x(3x+1)}{(x+2)(x-2)}\times\frac{(x+2)^2}{3x+1}$

$=\frac{x(x+2)}{x-2}$

■■■トレーニング■■■

7 (0133)

次の計算をしなさい。

(1) $\frac{a^2x^3}{b^3y^2}\times\frac{b^4y^3}{a^3x^5}$ 　　(2) $\frac{3a^2}{4x}\times\frac{8x^3}{9a^3}$

(3) $\frac{16b^3y^2}{27a^4x^3}\times\left(-\frac{81a^3x^6}{64by^4}\right)$ 　　(4) $\left(-\frac{20ab^3}{21x^3y^2}\right)\times\left(-\frac{49x^4y}{15a^3b^3}\right)$

--------• ちょっとひとこと •--------

- 約分するときに，累乗の指数に注目して計算することもできます。指数の計算では次の法則があります。

$$\frac{a^5}{a^2}=\frac{a^2\cdot a^3}{a^2}=a^3=a^{5-2}\quad つまり\quad \frac{a^5}{a^2}=a^{5-2}$$

$$\frac{a^2}{a^5}=\frac{a^2}{a^2\cdot a^3}=\frac{1}{a^3}=\frac{1}{a^{5-2}}\quad つまり\quad \frac{a^2}{a^5}=\frac{1}{a^{5-2}}$$

この法則を使うと，割り算がひき算だけでできるので，暗算でできて便利です。

----

8 (0134)

次の計算をしなさい。

(1) $\dfrac{3x^2+4x+1}{x^2-1}\times\dfrac{x-x^2}{9x^2+6x+1}$

(2) $\dfrac{x^3-1}{x^2-2x-3}\times\dfrac{x^2+6x+5}{x^2+x+1}$

(3) $\dfrac{x^2-4x+4}{x^2+3x-4}\times\dfrac{x^2+x-2}{x^3-6x^2+12x-8}$

(4) $\dfrac{a^2-4b^2}{a^3-b^3}\times\dfrac{a^3b+a^2b^2+ab^3}{a^2+ab-2b^2}$

➜(3)の分母にある $x^3-6x^2+12x-8$ は，公式

$$a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=(a-b)^3$$

を利用して因数分解します。

9 (0135)

次の計算をしなさい。

(1) $\dfrac{a^3b}{xy^2}\div\left(-\dfrac{a^2b^3}{x^4y}\right)$

(2) $\dfrac{ab^3}{x}\div3a^2b$

(3) $\dfrac{15a^4b^3}{8x^3y^2}\div\dfrac{10ab^3}{9x^3y}$

(4) $\left(-\dfrac{9a^4b^5}{4x^2y^3}\right)\div\dfrac{(-3a^2b)^3}{8x^4y^2}$

10 (0136)

次の計算をしなさい。

(1) $\dfrac{a+2}{a^2-2a}\div\dfrac{a+2}{a-2}$

(2) $\dfrac{6x^2+3x}{3x^2+8x-3}\div\dfrac{4x^2-1}{x^2+6x+9}$

(3) $\dfrac{x^2+x-2}{x^2-2x}\div\left(-\dfrac{x^2+2x-3}{x^3-4x}\right)$

(4) $\dfrac{x^3+9x^2+27x+27}{x^2+3x+9}\div\dfrac{x^2-x-12}{x^3-27}$

➜分数式の乗法・除法はできるようになりましたね。ではこんどは，分数式の乗法と除法の混じっている式の計算のしかたを学習しましょう。

〔3〕分数式の乗法と除法の混じった計算

分数の計算の場合を思い出してみましょう。たとえば，

$$\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\div\frac{10}{9}=\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\times\frac{9}{10}=\frac{1\times4\times9}{2\times3\times10}=\frac{3}{5}$$

➜ $\div\dfrac{10}{9}$ を $\times\dfrac{9}{10}$ に直します。

のように，分数の乗法と除法の混じった計算は，除法を，割る分数の逆数をかける形に直して，乗法だけの式にし，分母どうし，分子どうしをかけ合わせて計算します。

分数式の場合もまったく同じで

$$\frac{x}{x-1}\times\frac{x+1}{x+2}\div\frac{x^2+1}{x}=\frac{x}{x-1}\times\frac{x+1}{x+2}\times\frac{x}{x^2+1}$$

→ $\div\frac{x^2+1}{x}$ を $\times\frac{x}{x^2+1}$ に直します。

のように，乗法と除法が混じっているときは，除法を割る分数式の逆数をかける形に直して，乗法だけの式にし，次のように計算します。

$$\frac{A}{B}\times\frac{C}{D}\div\frac{E}{F}=\frac{A}{B}\times\frac{C}{D}\times\frac{F}{E}=\frac{ACF}{BDE}$$

$$\frac{A}{B}\div\frac{C}{D}\times\frac{E}{F}=\frac{A}{B}\times\frac{D}{C}\times\frac{E}{F}=\frac{ADE}{BCF}$$

$$\frac{A}{B}\div\frac{C}{D}\div\frac{E}{F}=\frac{A}{B}\times\frac{D}{C}\times\frac{F}{E}=\frac{ADF}{BCE}$$

乗法だけの形にして，
後は，分母どうし，
分子どうしをそれぞれ
かけ合わせます。

→それでは，乗法と除法の混じった計算のしくみが理解できたかどうか，確認してみましょう。

基本例題3　分数式の乗法と除法の混じった計算

$\frac{x^2-x-2}{x^2+x-2}\times\frac{x^2-9}{x^3-4x}\div\frac{x^2-2x-3}{x^2+4x+4}$ を計算しなさい。

◆ 考え方 ◆

乗法と除法が混じっていますから，除法を，割る分数式の逆数をかける形に直して，乗法だけの式にします。そして，分母どうし，分子どうしをかけ合わせて計算します。

◆ 解　答 ◆

$$\frac{x^2-x-2}{x^2+x-2}\times\frac{x^2-9}{x^3-4x}\div\frac{x^2-2x-3}{x^2+4x+4}$$

$$=\frac{x^2-x-2}{x^2+x-2}\times\frac{x^2-9}{x^3-4x}\times\frac{x^2+4x+4}{x^2-2x-3}$$

→ $\div\frac{x^2-2x-3}{x^2+4x+4}$ を $\times\frac{x^2+4x+4}{x^2-2x-3}$ と直して，乗法だけの式にします。

$$=\frac{(x-2)(x+1)}{(x+2)(x-1)}\times\frac{(x+3)(x-3)}{x(x+2)(x-2)}\times\frac{(x+2)^2}{(x-3)(x+1)}$$

$$=\frac{x+3}{x(x-1)}$$

■■■トレーニング■■■

11　(0137)

次の計算をしなさい。

(1) $\frac{b}{a^2}\times\frac{2a}{3b}\times\frac{9b^2}{4a}$

(2) $\frac{by}{ax}\times\frac{a^2x^3}{b^3y^2}\div ax$

(3) $\frac{ab}{xy^2}\div\frac{8x^2}{27y}\times\left(-\frac{16x^3y}{81ab}\right)$

(4) $\dfrac{(-3a^2x)^2}{8by^2} \div \left(-\dfrac{9a^2x^2}{4b^4y^2}\right) \div \dfrac{(-a^2b)^2}{x(-y)^3}$

12 (0138)

次の計算をしなさい。

(1) $\dfrac{a^3-b^3}{a+b} \times \dfrac{a^2b+ab^2}{a^2-2ab+b^2} \times \dfrac{a^2-b^2}{ab}$

(2) $\dfrac{6x^2-7x-20}{x^2-4} \div \dfrac{5x-2x^2}{2x^2-3x-2} \times \dfrac{x^2+2x}{3x^2+7x+4}$

(3) $\dfrac{x^2-x-2}{x-1} \times \dfrac{x^2-1}{6x^2+5x+1} \div \dfrac{x^2+2x+1}{3x^2+x}$

(4) $\dfrac{x^2+2xy+y^2}{x^2-xy-xz} \div \dfrac{x^2-y^2}{x^2-(y+z)^2} \div \dfrac{(x+y)^2-z^2}{x^2-xy}$

➜ここでは，分数式の計算のうち，乗法と除法について学習しました。計算の方法は，分数とまったく同じなので，よくわかりましたね。おつかれさまでした。

§15　分数式の計算(2)*　通分，加法・減法

前回は，分数式の意味と，分数式の乗法・除法について学習しました。ここでは，分数式の加法・減法について学習します。前回の学習は，分数の場合と比べながら進めましたね。ここでも，分数の加法・減法を思い出しながら，学習しましょう。

➜では，分数式の加法・減法のしかたから学習しましょう。

〔1〕分数式の加法・減法

◇分母の等しい分数式の加法・減法

分母の等しい分数の和や差は，次のようにして求めましたね。

$$\frac{3}{5}+\frac{1}{5}=\frac{3+1}{5}=\frac{4}{5} \qquad \frac{3}{5}-\frac{1}{5}=\frac{3-1}{5}=\frac{2}{5}$$

➜分母は共通な分母で，分子は分子どうしの和や差です。

同じように，分数式でも，分母が等しいときの和や差は

$$\frac{x+2}{x+1}+\frac{2x}{x+1}=\frac{(x+2)+2x}{x+1}=\frac{3x+2}{x+1}$$

$$\frac{x+2}{x+1}-\frac{2x}{x+1}=\frac{(x+2)-2x}{x+1}=\frac{-x+2}{x+1}$$

として，求めます。

つまり，分母の等しい分数式の和や差は，次のように，共通な分母を分母とし，分子どうしの和や差を分子として，求めることができます。

$$\frac{B}{A}+\frac{C}{A}=\frac{B+C}{A} \qquad \frac{B}{A}-\frac{C}{A}=\frac{B-C}{A}$$

◇通分する

たとえば，2つの分数式 $\frac{3}{x+1}$ と $\frac{2}{x-1}$ で，$\frac{3}{x+1}$ の分母・分子に $x-1$ をかけ，$\frac{2}{x-1}$ の分母・分子に $x+1$ をかけると

$$\frac{3}{x+1}=\frac{3(x-1)}{(x+1)(x-1)}$$

$$\frac{2}{x-1}=\frac{2(x+1)}{(x+1)(x-1)}$$

となり，2つの分数式の分母が $(x+1)(x-1)$ で等しくなりますね。

このように，いくつかの分数式の分母を等しくすることを通分するといいます。

ここで，通分したときの分母 $(x+1)(x-1)$ は，通分する前の2つの分母 $x+1$ と $x-1$ の最小公倍数になっています。

このように，分数式を通分するときも，分数の場合と同じで，分母の最小公倍数を共通の分母にすればよいのです。

◇分母の異なる分数式の加法・減法

分母の異なる分数式の加法・減法は，たとえば

$$\frac{3}{x+1}+\frac{2}{x-1}=\frac{3(x-1)}{(x+1)(x-1)}+\frac{2(x+1)}{(x+1)(x-1)}$$ ➜通分します。

$$=\frac{(3x-3)+(2x+2)}{(x+1)(x-1)}$$ ➜分母の等しい分数式の和です。

$$=\frac{5x-1}{(x+1)(x-1)}$$

のように，通分してから計算します。

➜分数式の加法・減法のしかたは分数の場合と同じですね。さっそく計算してみましょう。

基本例題 1　　分数式の加法・減法(1)

次の計算をしなさい。

(1) $\dfrac{x-2}{x(x-1)}+\dfrac{4}{(x-1)(x-2)}$　　(2) $\dfrac{3}{x^2-x-2}-\dfrac{2}{x^2-1}$

◆考え方◆

分母の異なる分数式の和・差ですから，通分してから，分母の等しい分数式の和・差として，下のように計算します。

$$\frac{B}{A}+\frac{C}{A}=\frac{B+C}{A} \qquad \frac{B}{A}-\frac{C}{A}=\frac{B-C}{A}$$

通分するには，それぞれの分母の最小公倍数を分母にすればよいのだから，まず，それぞれの分母を因数分解して，その最小公倍数を求めます。

そして，それぞれの分数式で，分母が上で求めた最小公倍数になるような式を，分母・分子にかけます。

◆解　答◆

(1) $\dfrac{x-2}{x(x-1)}+\dfrac{4}{(x-1)(x-2)}$

$$=\frac{(x-2)^2}{x(x-1)(x-2)}+\frac{4x}{x(x-1)(x-2)}$$ ➜通分します。

$$=\frac{(x^2-4x+4)+4x}{x(x-1)(x-2)}$$ ➜分母は共通の分母にし，分子どうしの和を求めます。

$$=\frac{x^2+4}{x(x-1)(x-2)}$$

(2) $\dfrac{3}{x^2-x-2}-\dfrac{2}{x^2-1}$

$$=\frac{3}{(x-2)(x+1)}-\frac{2}{(x+1)(x-1)}$$ ➜分母を因数分解します。

$$=\frac{3(x-1)}{(x-2)(x+1)(x-1)}-\frac{2(x-2)}{(x-2)(x+1)(x-1)}$$ ➜通分します。

$$=\frac{(3x-3)-(2x-4)}{(x-2)(x+1)(x-1)}$$

$$=\frac{x+1}{(x-2)(x+1)(x-1)}$$

$$=\frac{1}{(x-2)(x-1)}$$ ➜約分します。

➜まず，通分のトレーニングから始めましょう。

■■■トレーニング■■■

1 (0139)

次の各組の分数式を通分しなさい。

(1) $\dfrac{1}{(x-1)(x+2)}$, $\dfrac{x}{(x+2)(x+3)}$　　(2) $\dfrac{3}{x^2-x-2}$, $\dfrac{2}{x^2-1}$

(3) $\dfrac{1}{x^2-x}$, $\dfrac{1}{x^3-x^2}$　　(4) $\dfrac{x-2}{x^2-4x+3}$, $\dfrac{3x-1}{2x^2-3x+1}$

➜通分はできるようになりましたね。では，いよいよ，分数式の加法・減法をしてみましょう。

2 (0140)

次の計算をしなさい。

(1) $\dfrac{3x+1}{x+1}+\dfrac{2}{x+1}$　　(2) $\dfrac{3x}{x^3+y^3}+\dfrac{3y}{x^3+y^3}$

➜分数式の計算では，答えが約分できるときは，必ず約分しておきましょう。

3 (0141)

次の計算をしなさい。

(1) $\dfrac{3a}{b^2}+\dfrac{2b}{a^3}$　　(2) $\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{x+5}{(x-1)(x+2)}$

4 (0142)

次の計算をしなさい。

(1) $\dfrac{1}{x^2-1}+\dfrac{1}{x^2+2x+1}$　　(2) $\dfrac{1}{x^2+3x+2}+\dfrac{3}{x^2-x-2}$

(3) $\dfrac{a+3b}{a^2-4ab+3b^2}+\dfrac{a+5b}{a^2+ab-2b^2}$　　(4) $\dfrac{x+5y}{x(x-y)}+\dfrac{6y}{x^2-3xy+2y^2}$

5 (0143)

次の計算をしなさい。

(1) $\dfrac{x+y}{x^3-y^3}-\dfrac{1}{x^2-y^2}$

(2) $\dfrac{4}{x^2-4x+3}-\dfrac{2}{x^2-3x+2}$

(3) $\dfrac{5}{x^2-xy-6y^2}-\dfrac{4}{x^2-4y^2}$

(4) $\dfrac{x-2y}{2x^2-5xy+3y^2}-\dfrac{y-3x}{2x^2+xy-6y^2}$

➜２つの分数式の和や差は求められるようになりましたね。では，つぎに，３つの分数式の和や差を求めてみましょう。

例題１　　分数式の加法・減法(2)

$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2-x}-\dfrac{2}{x^2-1}$ を計算しなさい。

◆考え方◆

3つの分数式の和・差も，2つの分数式の和・差と同じように，通分してから，下のように，共通な分母を分母とし，分子どうしの和・差を分子として求めます。

$$\frac{B}{A}+\frac{C}{A}-\frac{D}{A}=\frac{B+C-D}{A}$$

◆解　答◆

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2-x}-\frac{2}{x^2-1}$$

$$=\frac{1}{x}+\frac{1}{x(x-1)}-\frac{2}{(x+1)(x-1)}$$ ➜分母を因数分解します。

$$=\frac{(x-1)(x+1)}{x(x-1)(x+1)}+\frac{x+1}{x(x-1)(x+1)}-\frac{2x}{x(x-1)(x+1)}$$ ➜通分します。

$$=\frac{(x^2-1)+(x+1)-2x}{x(x-1)(x+1)}$$

$$=\frac{x^2-x}{x(x-1)(x+1)}$$

$$=\frac{x(x-1)}{x(x-1)(x+1)}$$

$$=\frac{1}{x+1}$$

〈注意〉　次のように，2つの分数式の和・差を，つぎつぎに求めて計算してもかまいません。

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2-x}-\frac{2}{x^2-1}=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2-x}\right)-\frac{2}{x^2-1}$$

➜まず，$\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2-x}$ を計算します。

$$=\frac{(x-1)+1}{x(x-1)}-\frac{2}{x^2-1}$$

$$=\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}$$

➜つづいて，$\frac{2}{x^2-1}$ をひきます。

$$=\frac{(x+1)-2}{(x-1)(x+1)}$$

$$=\frac{x-1}{(x-1)(x+1)}$$

$$=\frac{1}{x+1}$$

➜分数式が3つになっただけですから，簡単ですね。さあ，トレーニングしましょう。

■■■トレーニング■■■

6 ＊ (0144)

次の計算をしなさい。

(1) $-\frac{x+y}{x+y+z}-\frac{y+z}{x+y+z}-\frac{z+x}{x+y+z}$

(2) $\frac{2x^2}{x^3-1}-\frac{3x+2}{x^3-1}+\frac{5x+4}{x^3-1}$

7 * (0145)

次の計算をしなさい。

(1) $\dfrac{x-y}{xy}+\dfrac{y-z}{yz}+\dfrac{z-x}{zx}$　　(2) $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{x+2}$

(3) $\dfrac{a}{a-b}+\dfrac{b}{b-c}+\dfrac{c}{c-a}$

(4) $-\dfrac{a}{(a-b)(c-a)}-\dfrac{b}{(b-c)(a-b)}-\dfrac{c}{(b-c)(c-a)}$

8 * (0146)

次の計算をしなさい。

(1) $x+\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x^2-1}$　　(2) $\dfrac{1}{a-b}-\dfrac{1}{a+b}-\dfrac{2a}{a^2-b^2}$

(3) $\dfrac{3x^2-2x}{x^2-4}-\dfrac{1}{x^2-2x}-\dfrac{1}{x}$

(4) $\dfrac{1}{x^2-5x+6}-\dfrac{1}{x^2-3x+2}+\dfrac{1}{x^2-4x+3}$

→３つ以上の分数式の和・差を求めるとき，ちょっとしたくふうで，楽に計算できる場合があります。こんどは，そのような場合の計算のしかたを覚えましょう。

例題２　分数式の加法・減法(3)

$\dfrac{2}{1+a^2}+\dfrac{1}{1+a}+\dfrac{1}{1-a}$ を計算しなさい。

◆考え方◆

たくさんの分数式の加法・減法は，一度に通分してもできますが，計算の順序を変えたり，いくつかの組に分けたりすると，楽に計算できる場合があります。

ここでは，通分するときに，乗法公式 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ を使うことをくり返します。

そのために，まず，後ろの２つの分数式の和 $\dfrac{1}{1+a}+\dfrac{1}{1-a}$ から計算します。

◆解　答◆

$$\frac{2}{1+a^2}+\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1-a}=\frac{2}{1+a^2}+\frac{(1-a)+(1+a)}{(1+a)(1-a)}$$

→まず $\dfrac{1}{1+a}+\dfrac{1}{1-a}$ を計算。

$$=\frac{2}{1+a^2}+\frac{2}{1-a^2}$$

$$=\frac{2(1-a^2)+2(1+a^2)}{(1+a^2)(1-a^2)}$$

$$=\frac{4}{(1+a^2)(1-a^2)}$$

$$=\frac{4}{1-a^4}$$

→分数式の加法・減法でも，その計算の順序や組み合わせは自由にできますから，できるだけ計算を簡単にすませることを考えましょう。では，そのトレーニングです。

■■■トレーニング■■■

9 * (0147)

次の計算をしなさい。

(1) $\dfrac{1}{a-1}-\dfrac{1}{a+1}-\dfrac{2}{a^2+1}-\dfrac{4}{a^4+1}$

(2) $\dfrac{2x^3}{x^4+x^2+1}+\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x-1}$

→次は２つずつの組に分けて，それぞれ通分してみましょう。
うまく分けると，分子が共通な形になりますよ。

10 * (0148)

次の計算をしなさい。

(1) $\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{3}{x+4}-\dfrac{5}{x+6}+\dfrac{7}{x+8}$

(2) $\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x^2+x+1}-\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x^2-x+1}$

→たくさん分数式の加法・減法の計算をしましたね。
考えちがいや，計算まちがいをしていないか，きちんと答え合わせをして，終わりにしましょう。

まとめておこう！

1. 分母の等しい分数式の和・差は，次のようにして求めます。

$$\frac{B}{A}+\frac{C}{A}=\frac{B+C}{A},\quad \frac{B}{A}-\frac{C}{A}=\frac{B-C}{A}$$

2. いくつかの分数式の分母を等しくすることを通分するといいます。
3. 分母の異なる分数式の和・差は，通分してから，分母の等しい分数式の和・差を求める方法で求めます。

§ 16　分数式の計算(3)*　分子の次数を下げる，繁分数式

分数式の意味や，分数式の乗法・除法・加法・減法の計算のしかたは，いままでの学習でわかりましたね。ここでも，ひきつづき分数式の計算をしますが，特別な形をした分数式を変形して，簡単な形にしてから，楽に計算する方法を学習しましょう。

➜まず，$\dfrac{x^2+1}{x+1}$ のような分数式を，分子の次数が分母の次数より低い分数式で表してみましょう。

〔1〕分数式の分子の次数をさげる

◇分数式の分子の次数をさげる

仮分数 $\dfrac{14}{5}$ は，$14\div5=2$ 余り 4 であることを利用して，帯分数 $2\frac{4}{5}$ に直すことができましたね。そして，この$2\frac{4}{5}$ は，$2+\dfrac{4}{5}$ のことです。

同じようなことが分数式でもできます。

たとえば，$\dfrac{x^2+1}{x+1}$ は，分子の次数が分母の次数より高い分数式ですが，この分子の x^2+1 を分母の $x+1$ で割ると，右のように商は $x-1$，余りは 2 になります。このことを使って

$$\begin{array}{r} x-1 \\ x+1\,\overline{)\,x^2+1} \\ \underline{x^2+x} \\ -x+1 \\ \underline{-x-1} \\ 2 \end{array}$$

$$\frac{x^2+1}{x+1}=x-1+\frac{2}{x+1}$$

と変形することができます。

ここで，$x-1$ は整式，$\dfrac{2}{x+1}$ は分子の次数が分母の次数より低い分数式になっています。

◇分数式の分子の次数をさげる考え方

A，B を x についての整式(A の次数≧B の次数)とし，A を B で割ったときの商を Q，余りを R とすると，前に学習したように

$A=BQ+R$，R の次数＜B の次数

ですね。この両辺を B で割ると

$$\frac{A}{B}=Q+\frac{R}{B}$$

↑　↑

整式　R の次数＜B の次数

が得られます。

このことを利用して，分子の次数が分母の次数より高いか，等しい分数式を，整式と分子の次数が分母の次数より低い分数式の和で表すことができるのです。

➜分子の次数のさげ方はわかりましたね。では，このことを実際の計算に利用してみ

ましょう。

例題 1 分子の次数が分母の次数より低くない分数式の加法・減法

$\dfrac{x+1}{x+2}-\dfrac{x+2}{x+3}-\dfrac{x+3}{x+4}+\dfrac{x+4}{x+5}$ を計算しなさい。

◆ 考え方 ◆

そのまま通分すると，分子の次数は 4 次式になり計算がたいへんです。そこで，各分数式の分子の次数が分母の次数に等しいことに着目して，次のように計算します。

まず，それぞれの分数式を，分子 A を分母 B で割ったときの商 Q と余り R を使って $\dfrac{A}{B}=Q+\dfrac{R}{B}$ として，整式と分子の次数が分母の次数より低い分数式の和で表します。

そして，整式どうし，分数式どうしで計算すると楽にできます。

◆ 解 答 ◆

$$\frac{x+1}{x+2}-\frac{x+2}{x+3}-\frac{x+3}{x+4}+\frac{x+4}{x+5}$$

$$=\left(1-\frac{1}{x+2}\right)-\left(1-\frac{1}{x+3}\right)-\left(1-\frac{1}{x+4}\right)+\left(1-\frac{1}{x+5}\right)$$

➜分子の次数をさげます。

$$=(1-1-1+1)+\left(-\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x+5}\right)$$

➜整式どうし，分数式どうしを計算します。

$$=-\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x+5}$$

$$=\left(-\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+3}\right)+\left(\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x+5}\right)$$ ➜ 2 つの組に分けて計算します。

$$=\frac{-(x+3)+(x+2)}{(x+2)(x+3)}+\frac{(x+5)-(x+4)}{(x+4)(x+5)}$$

$$=-\frac{1}{(x+2)(x+3)}+\frac{1}{(x+4)(x+5)}$$

$$=\frac{-(x+4)(x+5)+(x+2)(x+3)}{(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)}$$

$$=\frac{-4x-14}{(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)}$$

$$=-\frac{2(2x+7)}{(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)}$$

➜分子の次数をさげておくと，通分したあとの計算が楽にできるのですね。

それでは，まず，分子の次数をさげるトレーニングから始めましょう。

■■■トレーニング■■■

1 ＊ (0149)

次の分数式を，整式と，分子の次数が分母の次数より低い分数式の和で表しなさい。

(1) $\dfrac{5x+4}{x-2}$　　(2) $\dfrac{x^2-2}{x+1}$

(3) $\dfrac{x^3-2x^2-5x+8}{x-1}$　　(4) $\dfrac{x^3+x^2+1}{x^2+1}$

2 ＊ (0150)

次の計算をしなさい。

(1) $\dfrac{a^2+1}{a-1}-\dfrac{a^2+3a}{a+2}$　　(2) $\dfrac{x^2+1}{x+1}+\dfrac{x+1}{x+2}-\dfrac{x^2-1}{x}$

(3) $\dfrac{x+2}{x+1}-\dfrac{x+3}{x+2}-\dfrac{x+4}{x+3}+\dfrac{x+5}{x+4}$

➜つぎに，分母が２つの因数をもつ分数式を，２つの分数式の差で表すことを学習しましょう。

〔2〕１つの分数式を２つの分数式の差で表す

◇１つの分数式を２つの分数式の差で表す

たとえば，$\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+3}$ を計算すると

$$\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+3}=\frac{(x+3)-(x+1)}{(x+1)(x+3)}=\frac{2}{(x+1)(x+3)}$$

となりますね。この計算を逆にたどると

$$\frac{2}{(x+1)(x+3)}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+3}$$

という関係，つまり

分数式 $\dfrac{2}{(x+1)(x+3)}$ は，２つの分数式の差 $\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+3}$ で表される

ことがわかります。

◇もとの分数式と差をつくる２つの分数式の関係

上の関係をもう少し調べましょう。

２つの分数式の差を計算した最初の式からもわかるように，分数式 $\dfrac{2}{(x+1)(x+3)}$ で，分母 $(x+1)(x+3)$ は $x+1$ と $x+3$ の積で，分子２はその差 $(x+3)-(x+1)$ になっています。

そして，この分数式は，その分母の因数を分母にもつ２つの分数式の差 $\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+3}$ で表されているのです。

このように，分母が２つの因数をもち，分子がその因数の差に等しい分数式，つまり，$\dfrac{B-A}{AB}$ の形の分数式は，分母の因数 A，B をそれぞれ分母とする２つの分数式 $\dfrac{1}{A}$，$\dfrac{1}{B}$ の差で，次のように表すことができます。

$$\frac{B-A}{AB}=\frac{1}{A}-\frac{1}{B}\qquad \rightarrow \frac{B-A}{AB}=\frac{B}{AB}-\frac{A}{AB}=\frac{1}{A}-\frac{1}{B}$$

--------• ちょっとひとこと •--------

◦　１つの分数式を，これ以上簡単にできないいくつかの分数式の和の形で表すことを，はじめの分数式を，部分分数に分解するといい，分解したあとのそれぞれの分数式を部分分数といいます。

たとえば，上の $\dfrac{2}{(x+1)(x+3)}$ を部分分数に分解すると

$$\frac{2}{(x+1)(x+3)}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+3}$$
$$=\frac{1}{x+1}+\left(-\frac{1}{x+3}\right)$$

→差を和に直した形

で，$\dfrac{1}{x+1}$，$-\dfrac{1}{x+3}$ が部分分数です。

→では，1つの分数式を，いくつかの分数式の差で表して，分数式の和や差の計算を簡単にすませることを学習しましょう。

例題2 分数式の加法・減法

$\dfrac{1}{x(x+1)}+\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}+\dfrac{1}{(x+2)(x+3)}$ を計算しなさい。

◆考え方◆

このまま通分してもできますが，どの分数式も，分子が分母の2つの因数の差になっていることに着目して，たとえば $\dfrac{1}{x(x+1)}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}$ のように，それぞれの分数式を，分母の因数を分母とする2つの分数式の差で表してから計算すると，楽に計算できます。

◆解　答◆

$$\frac{1}{x(x+1)}+\frac{1}{(x+1)(x+2)}+\frac{1}{(x+2)(x+3)}$$
$$=\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)+\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)+\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}\right)$$

→それぞれの分数式を2つの分数式の差で表します。

$$=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+3}$$

→ $-\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x+1}=0$，$-\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{1}{x+2}=0$

$$=\frac{(x+3)-x}{x(x+3)}$$
$$=\frac{3}{x(x+3)}$$

→それぞれの分数式を2つの分数式の差で表すと，符号だけちがう分数式の組ができて，その和が0になるのですね。
2つの分数式の差で表すとき，分母の順に注意しましょう。
$\dfrac{B-A}{AB}=\dfrac{1}{A}-\dfrac{1}{B}$ です。

■■■トレーニング■■■

3 ＊ (0151)

次の分数式を，分母が x の1次式である2つの分数式の差で表しなさい。

(1) $\dfrac{3}{(x+2)(x+5)}$　(2) $\dfrac{2}{(2x+1)(2x-1)}$　(3) $\dfrac{1}{(x+1)(x+3)}$

(4) $\dfrac{2x+1}{(3x+2)(x+1)}$　(5) $\dfrac{6}{x^2-9}$　(6) $\dfrac{1}{x^2-5x+6}$

4 ＊ (0152)

次の計算をしなさい。

(1) $\dfrac{2}{(x+1)(x+3)}+\dfrac{3}{(x+3)(x+6)}+\dfrac{4}{(x+6)(x+10)}$

(2) $\dfrac{1}{(x+1)(x-1)}+\dfrac{1}{(x-1)(x-3)}+\dfrac{1}{(x-3)(x-5)}$

(3) $\dfrac{2}{x^2+2x}+\dfrac{2}{x^2+6x+8}+\dfrac{2}{x^2+10x+24}+\dfrac{2}{x^2+14x+48}$

5 ＊ (0153)

次の計算をしなさい。

(1) $\dfrac{b}{a(a+b)}+\dfrac{c}{(a+b)(a+b+c)}+\dfrac{d}{(a+b+c)(a+b+c+d)}$

(2) $\dfrac{b}{a^2+3ab+2b^2}+\dfrac{b}{a^2+5ab+6b^2}+\dfrac{b}{a^2+7ab+12b^2}$

➜いろいろな分数式の加法・減法ができるようになりましたね。では，こんどは，ちょっと複雑な分数式を考えてみましょう。

〔3〕繁(はん)分数式

◇繁分数式

たとえば $\dfrac{1-\dfrac{x+y}{x-y}}{1+\dfrac{x+y}{x-y}}$ は，$A=1-\dfrac{x+y}{x-y}$，$B=1+\dfrac{x+y}{x-y}$ と考えると，$\dfrac{A}{B}$ という形で表されます。

そして，A も B も分数式とみることができますから，$\dfrac{A}{B}$ は，分母・分子が分数式である分数式になっていると考えられます。

このような形の式を繁分数式といいます。

◇繁分数式の意味

たとえば，$\dfrac{x+y}{x-y}=(x+y)\div(x-y)$ であるように，$\dfrac{A}{B}$ の形の式は $A\div B$ を表します。

だから

繁分数式 $\dfrac{1-\dfrac{x+y}{x-y}}{1+\dfrac{x+y}{x-y}}$ は，分数式の商 $\left(1-\dfrac{x+y}{x-y}\right)\div\left(1+\dfrac{x+y}{x-y}\right)$ を表します。

◇繁分数式の性質

分数式では，分母・分子に 0 でない同じ整式をかけても，分母・分子を 0 でない同じ整式で割っても，もとの分数式に等しくなりましたね。

同じことが，繁分数式にもいえます。たとえば

$$\frac{1-\dfrac{x+y}{x-y}}{1+\dfrac{x+y}{x-y}}=\frac{\left(1-\dfrac{x+y}{x-y}\right)\times(x-y)}{\left(1+\dfrac{x+y}{x-y}\right)\times(x-y)}=\frac{(x-y)-(x+y)}{(x-y)+(x+y)}$$

➜分母・分子に $x-y$ をかけます。

$$\frac{1-\dfrac{x+y}{x-y}}{1+\dfrac{x+y}{x-y}}=\frac{\left(1-\dfrac{x+y}{x-y}\right)\div(x+y)}{\left(1+\dfrac{x+y}{x-y}\right)\div(x+y)}=\frac{\dfrac{1}{x+y}-\dfrac{1}{x-y}}{\dfrac{1}{x+y}+\dfrac{1}{x-y}}$$

➜分母・分子を $x+y$ で割ります。

のように，分母・分子に 0 でない同じ整式をかけても，分母・分子を 0 でない同じ整式で割ってももとの繁分数式に等しくなります。

➜繁分数式についてはわかりましたね。では，繁分数式の計算をしてみましょう。

例題 3 　　繁分数式の計算

$\dfrac{x-\dfrac{1}{x}}{1-\dfrac{1}{x}}$ を，式の意味を考えて，簡単にしなさい。

◆ 考え方 ◆

繁分数式 $\dfrac{x-\dfrac{1}{x}}{1-\dfrac{1}{x}}$ は，分数式の商 $\left(x-\dfrac{1}{x}\right)\div\left(1-\dfrac{1}{x}\right)$ を表しますから，この計算をします。

◆ 解　答 ◆

$$\frac{x-\dfrac{1}{x}}{1-\dfrac{1}{x}}=\left(x-\frac{1}{x}\right)\div\left(1-\frac{1}{x}\right)$$ ➜式の意味を考えます。

$$=\frac{x^2-1}{x}\div\frac{x-1}{x}$$ ➜かっこの中をそれぞれ 1 つの分数式で表します。

$$=\frac{x^2-1}{x}\times\frac{x}{x-1}$$ ➜$\div\dfrac{x-1}{x}$ を $\times\dfrac{x}{x-1}$ の形に直します。

$$=\frac{(x+1)(x-1)\times x}{x(x-1)}$$

$$=x+1$$

〈注意〉　実際の計算は，次のようにしてもかまいません。

◆ 別の考え方 ◆

繁分数式の性質を利用して，分母・分子に 0 でない同じ整式をかけて計算します。

ここでは，分母が $1-\dfrac{1}{x}$，分子が $x-\dfrac{1}{x}$ なので，この両方に x をかけてみます。

すると，分母は $x-1$，分子は x^2-1 となり，全体で $\dfrac{x^2-1}{x-1}$ というふつうの分数式に変形できます。

◆解　答◆

$$\frac{x-\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}=\frac{\left(x-\frac{1}{x}\right)\times x}{\left(1-\frac{1}{x}\right)\times x}$$ ➜分母・分子に x をかけます。

$$=\frac{x^2-1}{x-1}$$

$$=\frac{(x+1)(x-1)}{x-1}$$

$$=x+1$$

➜どちらの繁分数式の計算のしかたもわかりましたね。繁分数式の意味を考えたり，繁分数式の性質を利用したりするのです。さあ，トレーニングに移りましょう。

■■■トレーニング■■■

6 ＊ (0154)

次の式を簡単にしなさい。

(1) $\dfrac{\frac{1}{x}}{x+1}$　　(2) $\dfrac{n}{1+\frac{1}{n}}$　　(3) $\dfrac{\frac{1}{x}-\frac{1}{y}}{x-y}$

7 ＊ (0155)

次の式を簡単にしなさい。

(1) $\dfrac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x^2}}$　　(2) $\dfrac{\frac{1+x}{1-x}-\frac{1-x}{1+x}}{\frac{1+x}{1-x}+\frac{1-x}{1+x}}$

(3) $\dfrac{1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}{1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}$　　(4) $\dfrac{1+x}{1-\dfrac{1}{1-\frac{1}{1+x}}}$

➜(4)は，分母の中に，さらに繁分数式をふくんでいます。

まず，分母にある $\dfrac{1}{1-\frac{1}{1+x}}$ を，ふつうの分数式に変形してみましょう。

ここでは，分数式の計算で，ちょっとくふうして簡単にすませる方法や，分数式の意味にもどって考えることを学習しました。では，答え合わせをきちんとして，終わりにしましょう。

§ 17　指数の拡張*

これまで，a^n というと，n が正の整数の場合だけを考えましたね。ですから，$a^m \div a^n$ は，$m>n$，$m=n$，$m<n$ の場合で，指数法則を使い分けなければいけませんでした。これではすこし不便です。そこで，ここでは，このような使い分けをしなくてすむように，指数の意味を広げます。

〔1〕指数の拡張

◇a^0，a^{-1}，a^{-2}，a^{-3}，……

ここでは，$a \neq 0$ として，話を進めます。

a を2個，3個，……かけ合わせたものは，それぞれ a^2，a^3，……でしたね。

また，$a^1=a$ でした。

つまり，a を1個かけていくごとに，a の指数は1ずつふえていきます。

逆に，a で1回割るごとに，a の指数は1ずつへっていきます。

たとえば，a^5 を a で割り，その結果をさらに a で割ることをくり返すと，それらの結果は，a^4，a^3，a^2，a^1 となります。

この割り算を，このまま，ずっとつづけた結果を，a の指数を1ずつへらしつづけて

$$a^0,\quad a^{-1},\quad a^{-2},\quad a^{-3},\quad \cdots\cdots$$

と表します。このようにして，指数が0や負の整数になる場合も考えることにします。

◇a^0，a^{-1}，a^{-2}，a^{-3}，……の意味

まず，a^0 の意味を考えてみましょう。

上のことからわかるように，a^0 は a^1 を a で割った商ですから

$$a^0=a^1 \div a=1$$

です。

つぎに，a^{-1}，a^{-2}，a^{-3}，……などの意味を考えてみましょう。

a^{-1} は a^0 を a で割った商ですから

$$a^{-1}=a^0 \div a=1 \div a=\frac{1}{a}$$　➜上の結果から $a^0=1$

また，a^{-2} は a^{-1} を a で割った商，a^{-3} は a^{-2} を a で割った商ですから

$$a^{-2}=a^{-1} \div a=\frac{1}{a} \div a=\frac{1}{a^2},\qquad a^{-3}=a^{-2} \div a=\frac{1}{a^2} \div a=\frac{1}{a^3}$$

となります。上のことをまとめると，次のようになります。

> $a \neq 0$ で，n が正の整数のとき
>
> $$a^0=1,\qquad a^{-n}=\frac{1}{a^n}$$

➜$3^0=1$，$3^{-1}=\frac{1}{3}$，$3^{-2}=\frac{1}{3^2}$ なのですね。

→ a^0 や a^{-1}，a^{-2} などの意味はわかりましたね。では，具体的に，これらの指数を使って表された数を考えましょう。

基本例題 1 　　　　**指数の拡張**

次の値を求めなさい。

(1) 2^{-3} 　　　　(2) -0.2^0

◆ 考え方 ◆

$a \neq 0$，n が正の整数のとき，$a^0=1$，$a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$ を使って求めます。

(1)は，a^{-n} で，$a=2$，$n=3$ の場合です。

(2)は，0.2^0 に $-$ のついたものです。0.2^0 は，a^0 で，$a=0.2$ の場合です。

◆ 解　答 ◆

(1) $2^{-3}=\dfrac{1}{2^3}=\dfrac{1}{8}$

(2) $-0.2^0=-1$ 　　→ 0 でないどんな数でも，0 乗すると 1 になります。

→簡単ですね。では，指数がどの数についているかに注意してトレーニングしましょう。

■■■トレーニング■■■

1 (0156)

次の式を，正の整数の指数を使って表しなさい。

(1) a^{-2} 　　(2) $-a^{-4}$ 　　(3) $(-a)^{-3}$

2 (0157)

次の式を a^n の形に表しなさい。

(1) $\dfrac{1}{a}$ 　　(2) 1 　　(3) $\dfrac{1}{a^4}$

(4) $\dfrac{1}{a^{12}}$ 　　(5) $\dfrac{1}{a^{-1}}$ 　　(6) $\dfrac{1}{a^{-5}}$

3 (0158)

次の値を求めなさい。

(1) 10^0 　　(2) 10^{-2} 　　(3) 0.1^{-4}

(4) $\left(\dfrac{2}{5}\right)^0$ 　　(5) 0.23^0 　　(6) $\dfrac{5}{2^{-3}}$

4 (0159)

次の値を求めなさい。

(1) -10^0 　　(2) $(-10)^{-2}$ 　　(3) $\dfrac{3}{(-7)^0}$

(4) $-\left(\dfrac{3}{4}\right)^{-3}$ 　　(5) $(-0.5)^{-2}$ 　　(6) $(-3.5)^0$

→指数が 0 や負の整数になる場合にも慣れましたね。さて，このように指数を広げて考えると指数法則はどうなるでしょうか。つぎに，このことを考えてみましょう。

〔2〕指数法則

◇ $a^m \times a^n$, $(a^m)^n$, $(ab)^n$

ここでは，$a \fallingdotseq 0$，$b \fallingdotseq 0$ として話を進めます。

前に学習したように，m，n がともに正の整数の場合，次の指数法則が成り立ちます。

Ⅰ　$a^m \times a^n = a^{m+n}$　　Ⅱ　$(a^m)^n = a^{mn}$　　Ⅲ　$(ab)^n = a^n b^n$

では，指数に0や負の整数まで考えると，どうなるか調べてみましょう。

たとえば，$a^5 \times a^{-3}$ を，a^{-3} の意味を考えて計算すると

$$a^5 \times a^{-3} = a^5 \times \frac{1}{a^3} = \frac{a^5}{a^3} = a^2$$

です。ここで，a^2 の指数2は，$5+(-3)$ で求められます。　→ $a^5 \times a^{-3} = a^{5+(-3)}$

また，たとえば，$(a^2)^{-3}$ は

$$(a^2)^{-3} = \frac{1}{(a^2)^3} = \frac{1}{a^{2\times3}} = \frac{1}{a^6} = a^{-6}$$

ここで，a^{-6} の指数 -6 は，$2\times(-3)$ で求められます。　→ $(a^2)^{-3} = a^{2\times(-3)}$

つぎに，たとえば，$(ab)^{-2}$ を調べてみると，次のようになります。

$$(ab)^{-2} = \frac{1}{(ab)^2} = \frac{1}{a^2b^2} = \frac{1}{a^2} \times \frac{1}{b^2} = a^{-2}b^{-2} \qquad \rightarrow (ab)^{-2} = a^{-2}b^{-2}$$

これらのことからわかるように，m，n がどんな整数でも，指数法則Ⅰ，Ⅱ，Ⅲは成り立ちます。

◇ $a^m \div a^n$, $\left(\frac{a}{b}\right)^n$

指数に正の整数だけを考えているときは，$a^m \div a^n$ の計算は，右のように3つの場合に分けて考えました。

$$\text{Ⅳ}\quad a^m \div a^n = \begin{cases} a^{m-n} & \cdots\cdots\ m>n \\ 1 & \cdots\cdots\ m=n \\ \dfrac{1}{a^{n-m}} & \cdots\cdots\ m<n \end{cases}$$

ところが，指数を0や負の整数まで広げて考えると，たとえば，$a^3 \div a^3$ は，Ⅳで $m=n$ の場合で，上で調べた指数法則Ⅰから

$$a^3 \div a^3 = a^3 \times \frac{1}{a^3} = a^3 \times a^{-3} = a^{3+(-3)} = a^0 = 1$$

となります。また，$a^2 \div a^5$ は，Ⅳで $m<n$ の場合で，同じように

$$a^2 \div a^5 = a^2 \times \frac{1}{a^5} = a^2 \times a^{-5} = a^{2+(-5)} = a^{-3}$$

となって，どちらも，a の指数は $m-n$ で求められます。

つまり，$m=n$ のとき　$1 = a^0 = a^{m-n}$

$m<n$ のとき　$\dfrac{1}{a^{n-m}} = a^{-(n-m)} = a^{m-n}$

と考えることによって，Ⅳの関係は，次のように1つにまとめられます。

Ⅳ　$a^m \div a^n = a^{m-n}$

また，たとえば

$$\left(\frac{a}{b}\right)^3 = (ab^{-1})^3 = a^3(b^{-1})^3 = a^3b^{-3} = \frac{a^3}{b^3}$$

からわかるように，n が整数のとき，次の関係が成り立ちます。

Ⅴ　$\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$

◇指数法則

いままで調べたことをまとめると，次のようになります。

> $a \neq 0$，$b \neq 0$，m，n が整数のとき
>
> Ⅰ　$a^m \times a^n = a^{m+n}$　　　Ⅱ　$(a^m)^n = a^{mn}$
>
> Ⅲ　$(ab)^n = a^n b^n$　　　Ⅳ　$a^m \div a^n = a^{m-n}$
>
> Ⅴ　$\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$

➜それでは，指数法則を使って，指数のついた数をふくむ式の計算をしてみましょう。

基本例題２　　　　指数法則

次の計算をしなさい。

(1)　$10(xy^2)^2 \div 5x^{-2}y^3$　　　(2)　$(pq^{-2})^{-3} \times \left(\dfrac{p}{q}\right)^6$

◆考え方◆

指数法則 $a \neq 0$，$b \neq 0$，m，n が整数のとき，$a^m \times a^n = a^{m+n}$，$(a^m)^n = a^{mn}$，$(ab)^n = a^n b^n$，$a^m \div a^n = a^{m-n}$，$\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$ を組み合わせて使います。

◆解　答◆

(1)　$10(xy^2)^2 \div 5x^{-2}y^3$　　➜$(xy^2)^2$ は $(ab)^n = a^n b^n$ を使います。

$=10x^2(y^2)^2 \div 5x^{-2}y^3$

$=10x^2y^{2\times2} \div 5x^{-2}y^3$　　➜$(y^2)^2$ は $(a^m)^n = a^{mn}$ を使います。

$=10x^2y^4 \div 5x^{-2}y^3$

$=2x^{2-(-2)}y^{4-3}$　　➜数どうしを計算し，文字の指数をまとめます。

$=2x^4y$　　$x^2 \div x^{-2} = x^{2-(-2)}$，$y^4 \div y^3 = y^{4-3}$

(2)　$(pq^{-2})^{-3} \times \left(\dfrac{p}{q}\right)^6$　　➜$\left(\dfrac{p}{q}\right)^6$ は $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$ を使います。

$=p^{-3}(q^{-2})^{-3} \times \dfrac{p^6}{q^6}$

$=p^{-3}q^{(-2)\times(-3)} \times p^6q^{-6}$　　➜$\dfrac{1}{q^6} = q^{-6}$

$=p^{-3}q^6 \times p^6q^{-6}$

$=p^{-3+6}q^{6+(-6)}$　　➜文字の指数をまとめます。

$=p^3q^0$　　$p^{-3} \times p^6 = p^{-3+6}$，$q^6 \times q^{-6} = q^{6+(-6)}$

$=p^3$　　➜$q^0=1$

➜指数に，0や負の整数が混じっていても，計算のしかたは，すでに学習した指数が正の整数の場合と同じですね。さあ，トレーニングしましょう。

■■■トレーニング■■■

5 (0160)

次の計算をしなさい。

(1) $a^{-6}\times a^{4}$　(2) $x^{-8}\div x^{-3}$　(3) $(a^{-2})^{-3}$

(4) $(a^{-5})^{2}\times(a^{-3})^{-4}$　(5) $(6x^{-2})^{3}\div 9x^{-5}$

(6) $-12a^{-4}b^{9}\div(2a^{-3}b)^{3}$　(7) $(-10a^{2}b^{3})^{2}\times\left(\frac{2a}{b^{2}}\right)^{3}$

6 (0161)

次の計算をしなさい。

(1) $10^{-2}\times10^{3}$　(2) $5^{-4}\div5^{-6}$

(3) $(-2^{3})^{-2}$　(4) $\left(\frac{2}{5}\right)^{-2}$

7 (0162)

次の計算をしなさい。

(1) $8^{-2}\times2^{3}$　(2) $0.1^{-3}\div0.01^{-1}$

(3) $5^{-2}\div5^{-4}\times5^{-3}$　(4) $2^{4}\times2^{-6}\div2^{7}$

(5) $(5^{2})^{-3}\times2^{3}\div10^{-2}$　(6) $0.6^{-5}\times9^{2}\times15^{-3}$

➜指数のついた数をふくむ式の計算は，もう身につきましたね。さて，こんどは，指数を，非常に大きい数や，非常に0に近い数を表すのに役立ててみましょう。

➜大きい数や0に近い数は，下の例のように，整数部分が1桁の数 a と整数 n を使って，$a\times10^{n}$ と表すことがあります。

例　$3250000000=3.25\times1000000000=3.25\times10^{9}$

$0.0000325=3.25\times0.00001=3.25\times10^{-5}$

8 (0163)

次の数を，整数部分が1桁の数 a と整数 n を使って，$a\times10^{n}$ の形に表しなさい。

(1) 104000000　(2) 7540000

(3) 0.0000963　(4) 0.000707

➜では，大きい数や0に近い数を利用した問題を考えてみましょう。

基本例題3　指数の利用

電子の質量は，およそ 9.1×10^{-28} g です。

また，酸素原子の質量は，およそ 2.7×10^{-23} g です。

酸素原子の質量は，電子の質量のおよそ何倍ですか。

◆考え方◆

酸素原子の質量を電子の質量で割れば，およそ何倍かが求められます。

ここで，酸素原子の質量も電子の質量も有効数字2桁の数で表されていますから，その商も有効数字2桁の数で表します。

また，ふつう，答えは，整数部分が1桁の数 a と整数 n を使って，$a\times10^{n}$ で表します。

◆解　答◆

$(2.7\times10^{-23})\div(9.1\times10^{-28})$　➜酸素原子の質量÷電子の質量です。

$=(2.7\div9.1)\times10^{-23-(-28)}$　➜10の指数はまとめ，有効数字の計算をします。

$\fallingdotseq 0.30\times10^5$　→商を有効数字２桁の数で表します。

$=3.0\times10^4$　→整数部分が１桁の数 $\times10^n$ で表します。

<u>答　約 3.0×10^4 倍</u>

〈注意〉　記号≒は，ほぼ等しいことを表します。

また，$2.7\div9.1\fallingdotseq0.\overset{30}{296}\cdots\cdots$ です。

→商の有効数字の桁数は，割る数や割られる数の有効数字の桁数にそろえます。

■■■トレーニング■■■

9 * (0164)

地球から太陽までの距離は，およそ 1.49×10^8km です。
また，地球から月までの距離は，およそ 3.84×10^5km です。
地球から太陽までの距離は，地球から月までの距離のおよそ何倍ですか。

10 * (0165)

光の進む速さは，毎秒 3.0×10^8 m です。光は１km を何秒で進みますか。

11 * (0166)

電子の質量は，およそ 9.1×10^{-28} g です。また，水素原子の質量は，およそ 1.7×10^{-24} g です。水素原子の質量は，電子の質量のおよそ何倍ですか。

→ a^0 や a^{-1}，a^{-2} などにもすっかりなれましたね。
さあ，答え合わせをして，終わりにしましょう。

まとめておこう！

1.　$a\neq0$ で，n が正の整数のとき

$$a^0=1,\quad a^{-n}=\frac{1}{a^n}$$

2.　$a\neq0$，$b\neq0$，m，n が整数のとき

$$a^m\times a^n=a^{m+n},\quad (a^m)^n=a^{mn},$$
$$(ab)^n=a^nb^n,$$
$$a^m\div a^n=a^{m-n},\quad \left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$$

TRAINING PAPER
DAILY PROGRAM

高校数学／数学A