TRAINING PAPER 〔特許出願中〕

DAILY® PROGRAM

高校理科——物理Ⅱ（見本）

1

自然界には，太陽のまわりをまわる惑星の運動や，ばねにつるされたおもりの往復運動のように，一定の時間間隔で同じ動きがくり返されるものがあります。この巻では，等速円運動，単振動，万有引力について学習します。

運動とエネルギー(1)

第１章　円運動・単振動・万有引力

KYOIKUSHA

本書の構成と使い方

高校物理Ⅱトレーニングペーパーは，学校の授業と並行して使う学習書として，学習項目ごとのていねいな説明と必要な練習問題を用意してあります。復習用としてだけでなく，予習用としても利用できるようなくわしい説明です。また，定期試験対策用の問題も小冊子として用意してありますから，ぜひご利用ください。

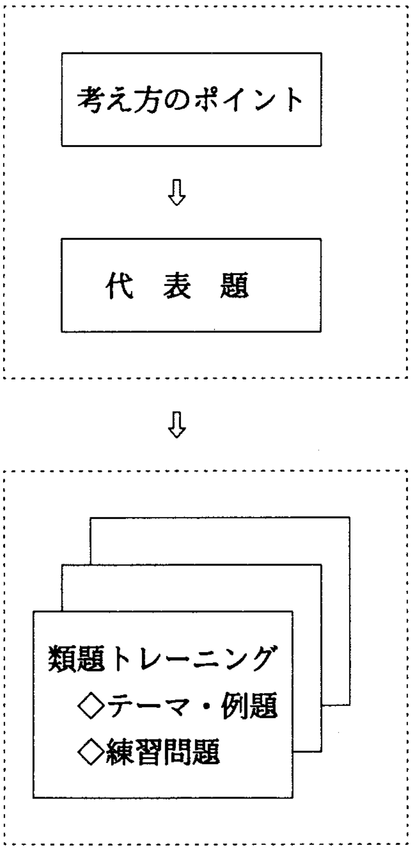
構　成

《1セクションの構成》

1日分の学習量を1セクション（§1，§2など）ごとに区切ってあります。

1セクション（10ページ前後）は，代表題部分と類題部分から構成されています。

（§タイトルの右にある番号は定期試験対策と関連します）



【代表題部分】

まず，そのセクションの学習内容を示し，「考え方のポイント」がまとめてあります。

そして，そのセクションを代表する問題が2～5題並べてあります。解答は巻末です。

➲代表題には類題番号およびタイトルが示してある。

例　類題 6200 単振動の周期

【類題部分】

代表題の1題ごとに「類題トレーニング」として，くわしい内容解説と練習問題を用意してあります。解答は巻末です。

➲内容解説は，テーマまたは例題の形式で説明してある。

➲代表題での類題番号と，テーマまたは例題のタイトルが示してある。

例　類題トレーニング 6200

《定期試験対策の構成》

定期試験対策用の問題が，小冊子として用意してあります。問題は章ごとに4段階に分けてあります。大学入試の基礎固めとしても，十分活用できる内容です。

・チェック……教科書の基本的なことがらをチェックする問題。
・基本問題……教科書の中にあるような基本的な問題。2回分ある。
・標準問題……教科書の章末問題レベルまでの問題。
・実力問題……入試問題の中から選んだ入試での基本的な問題。

使い方

本書の構成をよくつかみ，効率のよい学習をしてください。
参考までに，使い方の例を示しておきます。

復習型の使い方

◇学校の授業の補習用として使用する。
このときには，【代表題部分】を中心に学習する。

◇まず，１セクションの【代表題部分】をやってみて，かんたんにわかるようであれば，【類題部分】は省略してもよい。

◇ただし，わかりづらい問題があれば，問題に示してある類題番号とタイトルの内容の「類題トレーニング」部分をよく読み，練習問題もやっておく。

➡このような使い方をすれば，学校の授業での理解の程度により学習の省力化ができる。

➡代表題の問題番号の右側にチェック欄があるので，この欄を有効に利用するとよい。

予習型の使い方

◇予習用または自学自習用として使用する。
このときには，【類題部分】を中心に学習する。

◇まず，１セクションの【類題部分】を順にやっていき，全部やり終えたあとで，【代表題部分】で理解の程度を確かめてみる。

◇または，全部のセクションの【類題部分】だけを順にやっていき，章単位で【代表題部分】を一気にやってみてもよい。

定期試験対策

◇定期試験前の学習に使用する。
小冊子になっているから，それだけをとり出してやればよい。

◇問題のレベルが４段階に分かれているので，まずは「チェック」で教科書の基本的な内容を確認したあと，「基本問題」にとり組む。基本問題までは，完全にわかるようにしておきたい。

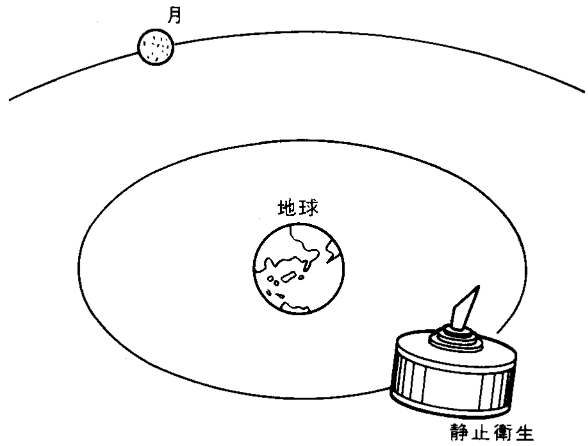
◇次に，「標準問題」をやってみる。標準問題は教科書の章末問題レベルの問題も入っているので，すこし手ごわい。

◇余裕があれば，「実力問題」もやってみるとよい。入試問題でのやさしい問題を中心に選んである。

➡それぞれの問題のあとに，「関連§番号」としてセクション番号または類題番号を示してあるので，どうしてもわからない問題は，関連する本文にもどるとよい。

※本書の構成と使い方をよくつかみ，自分なりの学習法で有効に活用してください。

第 1 章
円運動・単振動・万有引力



§1 等速円運動

M01

このセクションでは等速円運動に関する学習をします。関係式が多く出てきますが，単に式だけを覚えるのではなく，物理的な意味をよく理解した上で，重要な公式をしっかりと記憶し，応用ができるようにしましょう。

◇考え方のポイント◇

◆等速円運動

物体が円周上を一定の速さで移動するとき，この運動を「等速円運動」という。

◆等速円運動の周期と速さ

等速円運動している物体が1周するのにかかる時間を「周期」という。

周期を T〔s〕，半径を r〔m〕とすれば，速さ v〔m/s〕は，

$$v=\frac{2\pi r}{T}$$

◆等速円運動の回転数と速さ

回転数を n〔Hz〕とすると，　$v=2\pi rn$

周期 T と回転数 n の関係は，　$n=\frac{1}{T}$

◆等速円運動の角速度

等速円運動の角速度 ω〔rad/s〕は，

$$\omega=\frac{\Delta\theta}{\Delta t}=\frac{2\pi}{T}=2\pi n=\frac{v}{r}$$

また，この式から，　$v=r\omega$

◆等速円運動の加速度

等速円運動の加速度の大きさ a〔m/s^2〕は，速さを v〔m/s〕，角速度を ω〔rad/s〕とすると，

$$a=r\omega^2=\frac{v^2}{r}$$

加速度の向きは，いつも回転の中心に向かう向きである。

1　(0001) □　➲類題 6010　周期と速さ

等速円運動をしている物体について，次の問いに答えなさい。

(1) 半径 0.30 m の円周上を，周期 1.2 s で等速円運動している物体の速さはいくらか。

〔　　　　　　〕

(2) 半径 25 m の円周上を，速さ 9.8 m/s で等速円運動している物体の周期はいくらか。

〔　　　　　　〕

(3) 物体が速さ 9.8 m/s，周期 16 s で等速円運動をしている。このときの半径はいくらか。

〔　　　　　　〕

2　(0002) □　➲類題 6020　回転数と速さ

等速円運動について，次の問いに答えなさい。

(1) 半径 r の円周上を速さ v で運動する物体がある。この運動の回転数と周期を求めなさい。

回転数〔　　　　　　〕　周期〔　　　　　　〕

(2) 半径 0.80 m の円周上を周期 0.020 s で運動している物体がある。この物体の回転数はいくらか。また，速さはいくらか。

回転数〔　　　　　　〕 速さ〔　　　　　　〕

(3) ある半径の円周上を回転数 20 Hz で運動している物体の速さが 10 m/s であったという。このときの周期はいくらか。また，半径はいくらか。

周期〔　　　　　　〕 半径〔　　　　　　〕

3 (0003) ☐ ➡類題 6030 角速度

等速円運動について，次の問いに答えなさい。

(1) 周期 2.0 分の場合の角速度を求めなさい。

〔　　　　　　〕

(2) 半径 2.0 m の円周上を 8.0 m/s の速さで等速円運動している場合の角速度を求めなさい。

〔　　　　　　〕

4 (0004) ☐ ➡類題 6040 等速円運動の加速度

次のような等速円運動をしている物体の加速度を求めなさい。

(1) 半径 0.50 m の円周上を 0.80 rad/s の角速度で運動している場合

〔　　　　　　〕

(2) 半径 0.20 m の円周上を 1.4 m/s の速さで運動している場合

〔　　　　　　〕

5 (0005) ☐ ➡類題 6050 等速円運動

半径 2.0 m の円周上を 1 分間に 120 周の割合で等速円運動する物体がある。次の問いに答えなさい。

(1) この運動の回転数を求めなさい。

〔　　　　　　〕

(2) この運動の周期を求めなさい。

〔　　　　　　〕

(3) この物体の角速度を求めなさい。

〔　　　　　　〕

(4) この物体の速さを求めなさい。

〔　　　　　　〕

(5) この物体にはたらく加速度の大きさを求めなさい。

〔　　　　　　〕

類題トレーニング(6010)

●学習の視点　　物体が円運動しているとき，その特徴を示す量に「周期」がある。ここでは，周期が具体的に何を表すものか，また，それを使って等速円運動がどのように表すことができるかがポイントになっている。

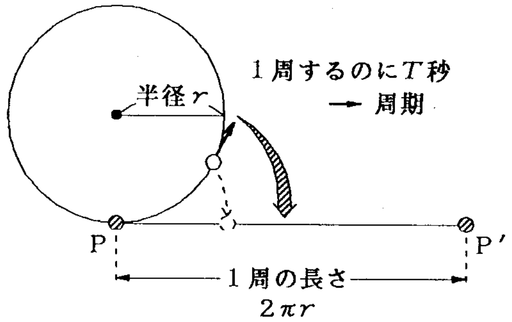
テーマ　周期と速さ

●物体が円周上を一定の速さで移動するとき，これを「等速円運動」という。

●等速円運動している物体は，一定の時間で円を1周する。この1周に要する時間を等速円運動の「周期」という。

【周期と速さ】

半径 r〔m〕の円周上を，周期 T〔s〕で等速円運動する物体の速さ v〔m/s〕は，次の式で表される。



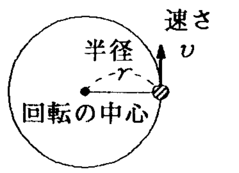
$$v=\frac{2\pi r}{T}$$
………1周の長さ（分子）
………1周に要する時間（分母）

■■説　明■■

●円運動の速さ　　円運動で速さが v〔m/s〕というのは，円周上を1〔s〕間に v〔m〕移動する速さのことである。

●周期と速さ　　t〔s〕間に s〔m〕進むときの速さ v は，

$$v=\frac{s}{t}\text{〔m/s〕}$$



したがって，周期が T〔s〕の等速円運動では，T〔s〕間に $2\pi r$〔m〕進むから，その速さ v は，

$$v=\frac{2\pi r}{T}\text{〔m/s〕}$$

例　半径1.5 mの円周上を2周するのに0.60 sかかる物体の周期と速さを求めてみると，周期 T は物体が1周するのにかかる時間であるから，

$$T=\frac{0.60}{2}=0.30\text{〔s〕}$$

また，速さ v は，　$v=\dfrac{2\pi r}{T}=\dfrac{2\times3.14\times1.5}{0.30}=31.4\fallingdotseq31$〔m/s〕

1　(6011)　M01

等速円運動について，次の問いに答えなさい。

(1)　等速円運動とは，円周上をどのような速さで移動する運動のことか。

〔　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　〕

(2)　周期 T〔s〕で半径 r〔m〕の円周上を等速円運動する物体は，T〔s〕間にどれだけ移動するか。

〔　　　　　　　　〕

(3)　半径 r〔m〕の円周上を，周期 T〔s〕で等速円運動する物体の速さ v〔m〕はいくらか。

〔　　　　　　　　〕

(4) 一定の半径で等速円運動している物体の周期が2倍になると，速さは何倍になるか。

〔　　　　　　〕

2 (6012) M01

等速円運動の半径と周期から，速さを求めなさい。

(1) 半径 12.0 m の円周上を周期 1.00 s で等速円運動している物体の速さはいくらか。

〔　　　　　　〕

(2) 半径 0.400 m の円周上を周期 3.14 s で等速円運動している物体の速さはいくらか。

〔　　　　　　〕

(3) 半径 6.40×10^3 km の円周上を周期 24 時間で等速円運動する物体の速さは何 m/s か。

〔　　　　　　〕

3 (6013) M01

等速円運動で，半径と速さがわかっている場合の周期を求めなさい。

(1) 半径 r〔m〕，速さ v〔m/s〕の等速円運動の周期はいくらか。

〔　　　　　　〕

(2) 半径 10.0 m，速さ 1.00 m/s の等速円運動の周期はいくらか。

〔　　　　　　〕

(3) 半径 2.00 m，速さ 31.4 m/s の等速円運動の周期はいくらか。

〔　　　　　　〕

4 (6014) M01

等速円運動で，次のように速さと周期がわかっている場合の半径を求めなさい。

(1) 速さ 8.00 m/s の物体が円周上を1周するのに 6.28 s かかった。半径はいくらか。

〔　　　　　　〕

(2) 速さ 2.00 m/s のミニＳＬが，円形レール上を同じ速さで進行して1周するのに 50.0 s かかった。この円の半径を求めなさい。

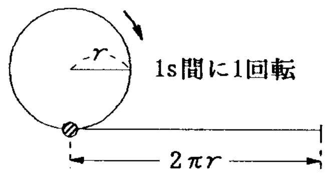
〔　　　　　　〕

類題トレーニング(6020)

●学習の視点　　物体が等速円運動しているとき，回転する速さがたいせつな要素になる。ここでは，回転数とは何か，また，回転数と速さおよび周期の間にどのような関係があるのかを学習する。

テーマ　回転数と速さ

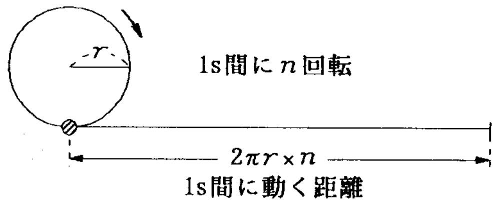
●単位時間（1 s 間）に物体が回転する回数のことを「回転数」という。単位は「ヘルツ（記号 Hz）」である。



【回転数と速さ】

等速円運動の速さ v〔m/s〕，半径 r〔m〕，回転数 n〔Hz〕の間には，次の関係式が成り立つ。

$$v=\underbrace{2\pi r}_{\text{1周の長さ}}\overset{\text{回転数}}{n}$$



【回転数と周期】

等速円運動の回転数 n〔Hz〕と周期 T〔s〕の関係は，次の式で表せる。

$$n=\frac{1}{T}$$

➲回転数の単位〔Hz〕は，$\frac{1}{T}$ の単位〔1/s〕（回/s）のことである。

■■説　明■■

●回転数と速さ　　等速円運動する物体が，半径 r〔m〕の円周上を 1 s 間に 1 回転したとき，物体の動いた距離は $2\pi r$〔m〕となる。また，1 s 間に動く距離が速さであるから，このときの速さは $2\pi r$〔m/s〕となる。同様に，1 s 間に 2 回転するならば，速さは $2\pi r\times2=4\pi r$〔m/s〕である。

一般に，1 s 間に n 回転する場合の速さ v は，　$v=2\pi rn$

例　半径 2.0 m の円周上を回転数 5.0 Hz で等速円運動している物体の速さ v は，

$$v=2\pi rn=2\times3.14\times2.0\times5.0=62.8\fallingdotseq63\text{〔m/s〕}$$

●回転数と周期　　1 s 間に回転する回数（回転数）を n とすれば，1 回転に要する時間，すなわち周期 T は，

1〔s〕：n〔回〕＝T〔s〕：1〔回〕

より，　$\therefore\ n=\frac{1}{T}$

したがって，n と T はたがいに逆数の関係であることがわかる。

1　(6021)　M01

等速円運動について，次の問いに答えなさい。

(1)　等速円運動する物体が 1 s 間に n 回まわるとき，回転数は何 Hz か。

〔　　　　　　　　〕

(2)　半径 r〔m〕の円周上を回転数 n〔Hz〕で運動する物体の速さ v は，何 m/s か。

〔　　　　　　　　〕

(3) 等速円運動する物体の回転数が 3 倍になると，速さは何倍になるか。

〔　　　　　　　　〕

(4) 等速円運動の周期が T〔s〕のときの回転数 n〔Hz〕はいくらか。式で表しなさい。

〔　　　　　　　　〕

(5) 等速円運動する物体の周期が 2 倍になると，回転数は何倍になるか。

〔　　　　　　　　〕

2 (6022) M01

等速円運動における回転数と半径，速さについて，次の問いに答えなさい。

(1) 半径 0.20 m の円周上を回転数 5.0 Hz で運動する物体の速さはいくらか。

〔　　　　　　　　〕

(2) 半径 6.0 m の円周上を速さ 10 m/s で運動する物体の回転数はいくらか。

〔　　　　　　　　〕

(3) ある半径の円周上を回転数 10 Hz で運動してる物体の速さが 4.0 m/s であるという。この円の半径を求めなさい。

〔　　　　　　　　〕

3 (6023) M01

等速円運動の回転数と周期について，次の問いに答えなさい。

(1) 周期が 0.25 s のとき，回転数はいくらか。

〔　　　　　　　　〕

(2) 回転数が 20 Hz のとき，周期はいくらか。

〔　　　　　　　　〕

類題トレーニング(6030)

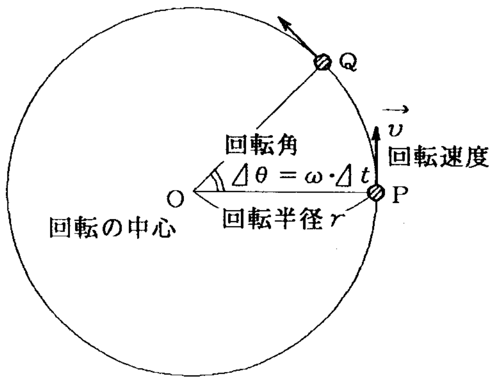
●学習の視点　　物体が円運動しているとき，回転する角度のふえる割合という新しい考え方を導入するところがポイント。この大きさと周期，速度などの間にどのような関係があるかを学習する。角度の単位にrad（ラジアン）を用いるので，しっかり理解しておくように。

テーマ　角速度

●物体が円運動しているとき，単位時間（1 s間）に回転する角度を「角速度」という。

●Δt〔s〕間に，PからQに物体が回転したときの回転角を$\Delta\theta$〔rad〕とすると，角速度ω（オメガ）は，次の式で表される。

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}\ \text{〔rad/s〕}$$



【角速度】

角速度ω〔rad/s〕と，周期T〔s〕，回転数n〔Hz〕，半径r〔m〕，速さv〔m/s〕との間には，次の関係式が成り立つ。

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi n = \frac{v}{r}$$

回転角$\Delta\theta$の単位は「ラジアン（記号rad）」である。

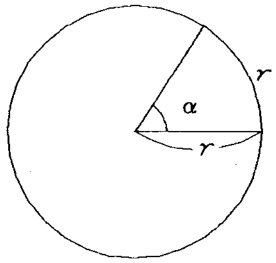
■■説　明■■

●弧度法　　半径rの円において，弧の長さrに対応する中心角αの大きさを調べてみよう。

弧の長さは中心角に比例するので，円周の長さ$2\pi r$と円周全体の中心角360°との比例式をつくれば，

$$r : 2\pi r = \alpha : 360^\circ$$

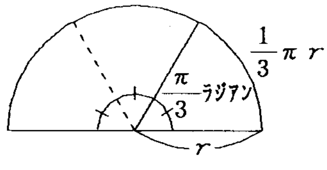
$$\therefore\quad \alpha = \frac{180^\circ}{\pi} \fallingdotseq 57.2958^\circ$$



となる。この中心角は，半径の大きさに関係なく一定である。この角を，

　1ラジアン（弧度）

といい，これを単位として角の大きさを測る方法を「弧度法」という。単位のラジアンは，radとも書き，単位を省略して数値だけで表す場合が多い。

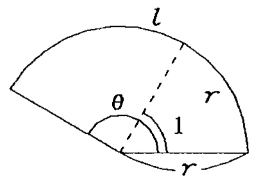


➡なお，単位のradは無次元量である。

以上の定義から，一般に弧の長さ l に対応する中心角 θ の大きさは，中心角が弧の長さに比例するので，

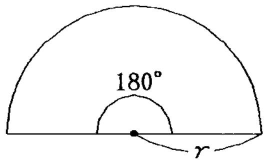
$$1 : \theta = r : l$$

が成り立つ。すなわち，中心角 θ，半径 r，弧の長さ l には次のような関係がある。



$$l = r\theta \qquad \theta = \frac{l}{r}$$

また，この関係から，半径 r の半円を考えると，中心角は 180° で，弧の長さは πr であるから，



$$180^\circ = \frac{\pi r}{r} = \pi$$

ということになる。したがって，

$$1^\circ = \frac{\pi}{180}$$

以上のことから，角の大きさを表す度と弧度は，次のように対応する。

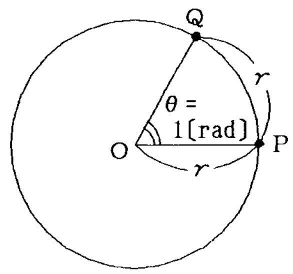
度	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
弧度	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π

● 角速度と周期　　物体が1s間に回転する角をラジアン単位で表したのが角速度である。周期 T〔s〕の間に 2π〔rad〕だけ回転するから，定義より角速度 ω と T の関係は，

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{2\pi}{T} \qquad \text{あるいは，} \qquad T = \frac{2\pi}{\omega}$$

となる。

角速度の単位は，ラジアン毎秒（記号 rad/s）で表す。



$\overline{\mathrm{OP}} = \mathrm{PQ} = r$ のとき
$\theta = 1$〔rad〕

● 回転数と角速度　　$\frac{1}{T} = n$ という関係式を用いれば，角速度 ω は，$\omega = 2\pi n$ とも書ける。

● 角速度と速さ　　すでに学習したように，速さ v は回転数 n と半径 r を用いて，$v = 2\pi r n$ と書ける。一方，角速度 ω は，$\omega = 2\pi n$ と表せるから，両者の間には，

$$v = 2\pi r n = r \times 2\pi n = r\omega \qquad \therefore \quad \omega = \frac{v}{r} \qquad \text{あるいは，} \qquad v = r\omega$$

という関係式が成り立つことがわかる。

---

1 (6031) M01

等速円運動の角速度について，次の問いに答えなさい。

(1) 等速円運動では，角速度は時間に対して変化するか，一定か。〔　　　　　　〕

(2) 等速円運動で角速度 ω と周期 T の関係を表す式を書きなさい。

〔　　　　　　〕

(3) 等速円運動で周期が3倍になると角速度は何倍になるか。

〔　　　　　　〕

(4) 等速円運動で角速度 ω と回転数 n の関係を表す式を書きなさい。

〔　　　　　　〕

(5) 等速円運動で角速度 ω を速さ v と半径 r を使って表す式を書きなさい。

〔　　　　　　〕

2 (6032) M01

等速円運動する物体の周期または回転数が次のようにあたえられたとき，その角速度を求めなさい。

(1) 周期が0.20 s の場合 〔　　　　　　　〕

(2) 周期が60分の場合 〔　　　　　　　〕

(3) 回転数が4.5 Hz の場合 〔　　　　　　　〕

3 (6033) M01

等速円運動する物体の半径と速さが次のようにあたえられたときの角速度を求めなさい。

(1) 半径0.10 m の円周上を2.0 m/s の速さで等速円運動している場合

〔　　　　　　　〕

(2) 半径10 m の円形レール上をミニ ＳＬ が4.0 m/s の速さで進行している場合

〔　　　　　　　〕

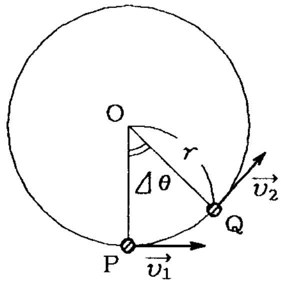
(3) 半径20 cm の円周上を0.20 m/s の速さで等速円運動している場合

〔　　　　　　　〕

類題トレーニング(6040)

●学習の視点　　等速円運動している物体の速さは一定であるが，向きは変わっている。つまり，速度としてはたえず変化していることになる。ここでは，単位時間あたりの速度変化，すなわち加速度がどのように求められるかを回転半径，角速度などとの関連で学習する。

テーマ　等速円運動の加速度



●等速円運動では速度の大きさ（速さ）は一定であるが，進行方向はたえず変わっているから，速度としては変化している。つまり，加速度が生じているのである。

●図のＰ，Ｑにおける速度ベクトルをそれぞれ $\vec{v_1}$，$\vec{v_2}$ とすれば，この間の速度変化 $\Delta\vec{v}$ は，

$$\Delta\vec{v}=\vec{v_2}-\vec{v_1}$$

●θ が十分小さければ，$\Delta v=v\cdot\Delta\theta$ が成り立つから，加速度の大きさ a は，

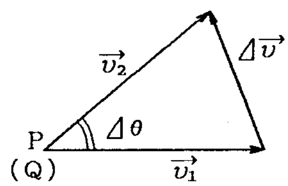
$$a=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{v\cdot\Delta\theta}{\Delta t}$$

【等速円運動の加速度】

速さを v〔m/s〕，半径を r〔m〕，角速度を ω〔rad/s〕とすると，加速度の大きさ a〔m/s^2〕は，

$$a=v\omega=r\omega^2=\frac{v^2}{r}$$

向きはいつも回転の中心に向かう向きである。



■■説　明■■

●瞬間の加速度（ある時刻の加速度）と平均の加速度　　テーマの図で等速円運動をしている物体の速度が時刻 t_1 のとき $\vec{v_1}$，時刻 t_2 のとき $\vec{v_2}$ であったとする。２つの時刻の間隔を $t_2-t_1=\Delta t$ とおくと，Δt 間の平均の加速度 $\vec{a}$ は定義から，

$$\vec{a}=\frac{\vec{v_2}-\vec{v_1}}{\Delta t}=\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

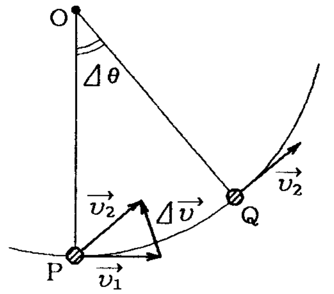
である。

この式で t_2 を t_1 にどんどん近づけて考えていくと（Δt をどんどん小さくして考えていくと），平均の加速度 $\dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$ は，時刻 t_1 における加速度にどんどん近づいていく。つまり，ある時刻における加速度を求めようとするときは，Δt をきわめて小さくとって考える必要がある。

● 加速度の向き　　Δt がひじょうに小さければ $\Delta\theta$ も微小角である。

つまり，Q点をしだいにP点に接近させていくと $\Delta\theta$ は限りなく0に近づき，$\overrightarrow{\Delta v}$ の方向は結局回転の中心Oの方向に一致する。これが，加速度の向きである。

このように加速度の向きが円の中心に向かうので，「向心加速度」といわれる。

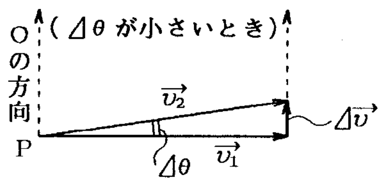


● 加速度の大きさ　　$\Delta\theta$ がひじょうに小さいとき，△PAB は扇形と考えてよいので次の式が成り立つ。

$$\overset{\frown}{AB} = |\vec{v}| \times \Delta\theta = \Delta v$$

$\Delta\theta = \omega\,\Delta t$ だから加速度の大きさ a は，

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v \cdot \Delta\theta}{\Delta t} = v\,\omega$$



● 半径，角速度，速さと加速度　　加速度の式

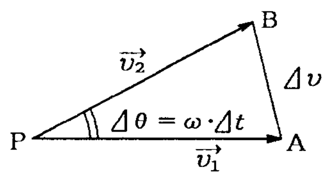
$$a = v\,\omega$$

に，$v = r\,\omega$ を代入すれば，

$$a = r\,\omega \cdot \omega = r\,\omega^2$$

また，$\omega = \dfrac{v}{r}$ を代入すれば，

$$a = v \cdot \frac{v}{r} = \frac{v^2}{r}$$



等速円運動では，r や ω，v は一定だから，加速度の大きさもつねに一定になる。ただし，加速度の向きは，つねに中心向きだから，加速度は一定ではない。

1　(6041)　M01

等速円運動の加速度について，次の問いに答えなさい。

(1) 等速円運動する物体の加速度の大きさは，時間とともに変化するか，それとも一定か。

〔　　　　　　　　　　〕

(2) 等速円運動で，半径はそのままで角速度だけが2倍になると加速度の大きさはどうなるか。

〔　　　　　　　　　　〕

(3) 等速円運動の加速度はいつもどの向きを向いているか。

〔　　　　　　　　　　〕

2　(6042)　M01

次のような等速円運動をしている物体の加速度の大きさを求めなさい。

(1) 半径 r の円周上を角速度 ω で運動している場合

〔　　　　　　　　　　〕

(2) 半径1.2 m の円周上を 0.20 rad/s の角速度で運動している場合

〔　　　　　　　　　　〕

(3) 半径5.0 m の円周上を 0.40 rad/s の角速度で運動している場合

〔　　　　　　　　　　〕

3　(6043)　M01

次のような等速円運動をしている物体の加速度を求めなさい。

(1) 半径 r の円周上を速さ v で運動している場合　〔　　　　　　　　　　〕

(2) 半径0.10 m の円周上を 0.20 m/s の速さで運動している場合

〔　　　　　　　　　　〕

(3) 半径 50 m の円周上を 20 m/s の速さで運動している場合

〔　　　　　　　　　　〕

(4) 半径 2.0 m の円周上を 8.0 m/s の速さで運動している場合

〔　　　　　　　　　　〕

類題トレーニング(6050)

●例題の視点　　ここでは等速円運動をする物体について，いろいろな条件のときの速さ，加速度，周期，角速度，回転数などを求めてみる。これまでに学習した等速円運動について，総合的な問題にチャレンジしてみよう。

基本例題　等速円運動

半径 0.50 m の円周上を等速円運動している物体 P がある。P が毎分 180 回転するとき，次の問いに答えなさい。

(1) 速さは何 m/s か。

(2) 加速度の大きさは何 $\mathrm{m/s^2}$ か。また，その向きはどうか。

●半径と回転数があたえられている場合について，等速円運動する物体の速さと加速度を求める問題である。

●問題であたえられているのは毎分の回転数だから，まず毎秒の回転数を求めなければならない。

■■考え方■■

(1) 半径 r〔m〕の円周上を毎秒 n 回転するときの速さ v は，

$$v=2\pi r\times n\ \text{〔m/s〕}$$

で求められる。

また，1 分間に N 回転する等速円運動の回転数 n は，

$$n=\frac{N}{60}\ \text{〔Hz〕}$$

である。

(2) (1)で速さがわかり，半径はあたえられているから，加速度の大きさ a は，

$$a=\frac{v^2}{r}\ \text{〔m/s}^2\text{〕}$$

で求められる。

■■解　答■■

(1) 1 分間に 180 回転するから，1 s 間当りの回転数 n は，　$n=\frac{180}{60}=3.0$〔Hz〕

よって，$r=0.50$〔m〕，$n=3.0$〔Hz〕だから，速さ v は，

$$v=2\pi rn=2\times3.14\times0.5\times3.0=9.42\fallingdotseq9.4\ \text{〔m/s〕}$$

答え　9.4 m/s

(2) 加速度の大きさ a は，　$a=\frac{v^2}{r}$

これに，$r=0.50$〔m〕，$v=9.42$〔m/s〕を代入すると，

$$a=\frac{9.42^2}{0.50}=1.77\cdots\times10^2\fallingdotseq1.8\times10^2\ \text{〔m/s}^2\text{〕}$$

また，向きはつねに回転の中心方向である。

答え　大きさ… $1.8\times10^2\ \mathrm{m/s^2}$，向き…回転の中心方向

□ここがポイント!□

等速円運動では，次の式が重要である。

$$v = \frac{2\pi r}{T} = 2\pi r n = r\omega, \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$a = r\omega^2 = \frac{v^2}{r}$$

1 (6051) M01

半径1.5 mの円周上を1分間に30周の割合で等速円運動する物体がある。次の問いに答えなさい。

(1) この運動の周期を求めなさい。

〔　　　　　　〕

(2) この物体の角速度を求めなさい。

〔　　　　　　〕

(3) この物体の速さを求めなさい。

〔　　　　　　〕

(4) この物体にはたらく加速度の大きさを求めなさい。

〔　　　　　　〕

2 (6052) M01

半径1.5 m，周期3.0 sで等速円運動している物体がある。次の問いに答えなさい。

(1) この物体の角速度を求めなさい。

〔　　　　　　〕

(2) この物体の加速度の大きさを求めなさい。

〔　　　　　　〕

3 (6053) M01

糸の一端におもりをつけ，水平面内で等速円運動させた。糸の長さとおもりの速さを次の表のように変えた場合，周期，回転数，角速度はそれぞれどのように変化するか。

	周　期	回転数	角速度
(1) 速さのみを2倍にする	(　　)倍	(　　)倍	(　　)倍
(2) 長さのみを2倍にする	(　　)倍	(　　)倍	(　　)倍
(3) 速さを2倍にし，長さを$\frac{1}{2}$倍にする	(　　)倍	(　　)倍	(　　)倍
(4) 速さを$\frac{1}{2}$倍にし，長さを2倍にする	(　　)倍	(　　)倍	(　　)倍

§2 向心力

M02

§1では，等速円運動の速度，加速度等について学習をしましたが，ここではそれらをもとに，円運動している物体にはたらく力について学習を進めていきましょう。

◇考え方のポイント◇

◆向心力

向心力の大きさ F〔N〕は，回転する物体の質量を m〔kg〕，角速度を ω〔rad/s〕，速さを v〔m/s〕，半径を r〔m〕として，

$$F = m r \omega^2 = m \frac{v^2}{r}$$

また，向心力の向きは，加速度の向きと同じでつねに回転の中心の向きである。

◆摩擦力と向心力

垂直抗力を N〔N〕，静止摩擦係数を μ とすれば，最大静止摩擦力 F〔N〕は，次の式で表される。

$$F = \mu N$$

摩擦のある回転台を一定の速さで回転させると，その上に置かれた物体にはたらく摩擦力が向心力として作用し，物体は等速円運動する。

◆弾性力と向心力

ばねの弾性力 F〔N〕は，ばね定数を k〔N/m〕，ばねののびを x〔m〕とすると，

$$F = k x$$

ほかに力がはたらいていなければ，ばねで回転台につながれた物体にはばねの弾性力がはたらき，この力が向心力として作用するので物体は等速円運動をする。

1　(0006) ☐　➲類題 6060　向心力

次の問いに答えなさい。

(1) 質量1.2kgの物体が，半径5.0mの円周上を角速度0.40rad/sで等速円運動している。このとき，この物体にはたらく向心力の大きさはいくらか。

〔　　　　　〕

(2) 質量2.0kgの物体が，半径0.40mの円周上を速さ2.0m/sで等速円運動をしている。このとき，この物体にはたらく向心力の大きさはいくらか。

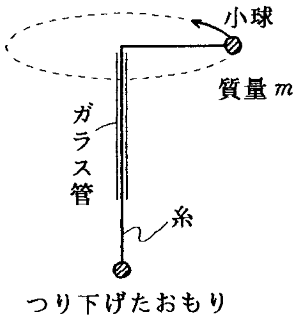
〔　　　　　〕

(3) (1)，(2)のとき，物体にはたらく向心力の向きは，どちらを向いているか。

〔　　　　　〕

2 (0007) $\square$ ➡類題 6070 角速度と向心力

図のように，質量 0.050 kg の小球におもりをつるしたじょうぶな糸をつけ，毎秒 2.4 回転で等速円運動をさせたところ，回転半径は 0.30 m であった。小球の軌道と回転の中心は同じ水平面内にあり，摩擦は無視できるとして，次の問いに答えなさい。



(1) 小球の角速度は何 rad/s か。

〔　　　　　　　〕

(2) 小球の速さは何 m/s か。

〔　　　　　　　〕

(3) 小球の加速度の大きさは何 m/s^2 か。

〔　　　　　　　〕

(4) 小球に糸からはたらく向心力の大きさは何 N か。

〔　　　　　　　〕

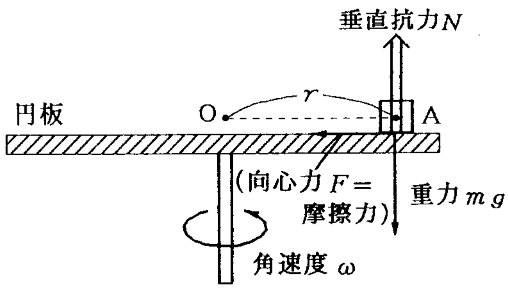
(5) おもりの質量は何 kg か。ただし，重力加速度の大きさを $g=9.8$〔m/s^2〕とする。

〔　　　　　　　〕

3 (0008) $\square$ ➡類題 6080 摩擦力と向心力

鉛直な軸のまわりに，水平に回転できるように取りつけられた円板があり，この上に質量 m〔kg〕の物体 A をのせた。

円板と物体 A の間の静止摩擦係数を μ，重力加速度の大きさを g〔m/s^2〕とする。次の問いに答えなさい。



(1) A が面から受ける垂直抗力はいくらか。

〔　　　　　　　〕

(2) 面との間の最大静止摩擦力はいくらか。

〔　　　　　　　〕

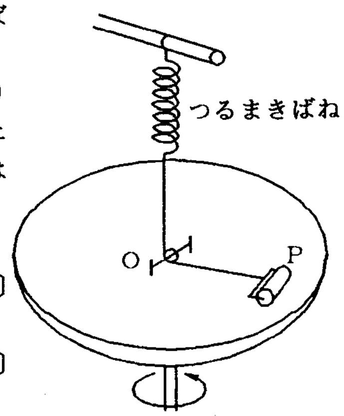
(3) 中心 O から r〔m〕離れた点に A を置いて円板を回転させた。A がすべりだす直前の回転数はいくらか。

〔　　　　　　　〕

4 (0009) $\square$ ➡類題 6090 弾性力と向心力

右図の装置で，おもり P の質量は m〔kg〕，つるまきばねのばね定数は k〔N/m〕である。

回転台を n〔Hz〕で回転させると，回転の中心 O からおもり P までの距離が r〔m〕で一定になった。このとき，次の問いに答えなさい。ただし，おもり P にはたらくばね方向の摩擦力は無視できるものとする。



(1) おもりの加速度を求めなさい。

〔　　　　　　　〕

(2) おもり P にはたらく向心力 F はいくらか。

〔　　　　　　　〕

(3) ばねは何 m のびるか。

〔　　　　　　　〕

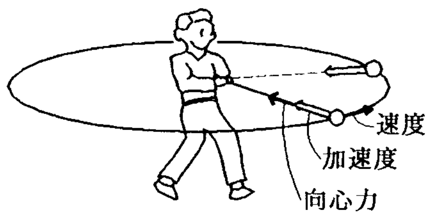
類題トレーニング(6060)

●学習の視点　　物体が等速円運動しているとき，その物体にはたえず円の中心の向きに大きさ一定の加速度が生じているから，運動の第２法則（$F=ma$）をあてはめてみると，この物体にはつねに中心の向きに力がはたらいていることになる。等速円運動における速度，角速度などとこの力はどのような関わりをもっているのかを考えていこう。

テーマ　向心力

●向心力　　等速円運動している物体には，中心の向きに一定の大きさの加速度が生じている。

$$a=r\omega^2=\frac{v^2}{r}$$



また，運動の第２法則によれば，物体に加速度が生じているということは，その物体に加速度の向きに力が作用していることになる。

$$F=ma$$

等速円運動の場合，その力を「向心力」という。

【向心力の大きさ】

物体の質量を m〔kg〕，円運動の半径を r〔m〕，角速度を ω〔rad/s〕，速さを v〔m/s〕とすれば，向心力の大きさ F〔N〕は，

$$F=mr\omega^2=m\frac{v^2}{r}$$

【向心力の向き】

向きはいつも回転の中心に向かう向き。

■■説　明■■

●向心力　　どのような運動現象でも，運動している物体に加速度が生じていれば，例外なく力が作用している。その大きさ F は運動の第２法則から，質量を m，加速度を a として，

$$F=ma$$

また，力と加速度の向きは同じであるから，等速円運動している物体にはたらいている向心力は，回転の中心の向きを向いている。

加速度の大きさ a は，角速度を ω，速さを v，回転半径を r とすると，

$$a=r\omega^2=\frac{v^2}{r}$$

よって，向心力の大きさ F は，

$$F=ma=mr\omega^2=m\frac{v^2}{r}$$

と表される。m や a は一定だから，向心力の大きさも一定である。

➲向心力がないと，慣性の法則より，物体は円の接線方向に飛んでいってしまう。

1 (6061) M02

次の問いに答えなさい。

(1) 等速円運動する物体にはたらく力を何というか。

〔　　　　　　　　　　〕

(2) 等速円運動する物体にはたらく向心力の大きさは，時間とともに変化するか，一定か。

〔　　　　　　　　　　〕

(3) 等速円運動する物体にはたらく向心力の向きは，どちらを向いているか。

〔　　　　　　　　　　〕

(4) 物体の質量を m，円運動の半径を r，角速度を ω とするとき，向心力の大きさ F を表す式を書きなさい。

〔　　　　　　　　　　〕

(5) 物体の質量を m，円運動の半径を r，速さを v とするとき，向心力の大きさ F を表す式を書きなさい。

〔　　　　　　　　　　〕

2 (6062) M02

次のような等速円運動をしている物体にはたらく向心力を求めなさい。

(1) 質量 1.0 kg の物体が，半径 1.5 m の円周上を角速度 2.0 rad/s で運動している場合

〔　　　　　　　　　　〕

(2) 質量 0.30 kg の物体が，半径 0.50 m の円周上を角速度 0.50 rad/s で運動している場合

〔　　　　　　　　　　〕

(3) 質量 800 g の物体が，半径 1.0 m の円周上を角速度 2.5 rad/s で運動している場合

〔　　　　　　　　　　〕

3 (6063) M02

次のような，半径 2.0 m の円周上を等速円運動している物体にはたらく向心力を求めなさい。

(1) 質量 3.0 kg の物体が 6.0 m/s の速さで運動している場合

〔　　　　　　　　　　〕

(2) 質量 10 kg の物体が 4.0 m/s の速さで運動している場合

〔　　　　　　　　　　〕

(3) 質量 5.0 kg の物体が 10 km/h の速さで運動している場合

〔　　　　　　　　　　〕

4 (6064) M02

一定の半径で等速円運動している物体の質量，向心力，加速度に関して，次の 3 つの文の中で正しいものを選びなさい。

〔　　　　　　　　　　〕

(ア) 物体の質量が 2 倍，加速度が 3 倍になると，向心力の大きさは 5 倍になる。

(イ) 物体の質量が 2 倍になっても，向心力の大きさが $\frac{1}{2}$ 倍になれば加速度は変わらない。

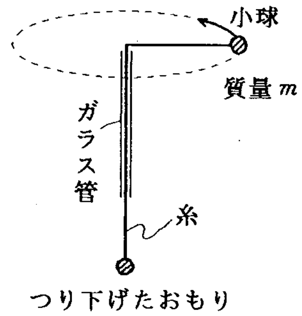
(ウ) 物体の質量が $\frac{1}{2}$ 倍，向心力の大きさが 5 倍であれば，加速度の大きさは 10 倍である。

類題トレーニング(6070)

● 例題の視点　　等速円運動の速度，加速度，向心力にはいずれも角速度が関係する。この問題を解くポイントは，つねに角速度に着目することである。

基本例題　角速度と向心力

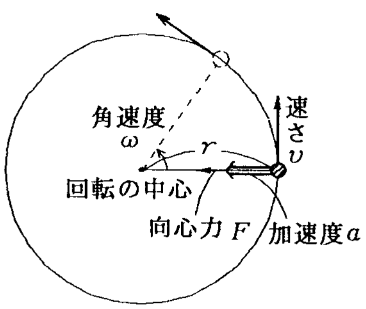
図のように，質量 0.10 kg の小球にじょうぶな糸をつけ，毎分150回転で等速円運動させたところ，回転半径は 0.40 m であった。次の問いに答えなさい。ただし，ガラス管と糸との摩擦は無視できるものとする。



(1) 小球の角速度はいくらか。
(2) 小球の速さはいくらか。
(3) 小球に生じる加速度はいくらか。
(4) 小球に作用する向心力はいくらか。

● 小球にはたらく糸の張力が向心力として作用し，小球は等速運動することを，まずはっきり理解しよう。
● 等速円運動するおもりの質量，半径，回転数から，おもりの角速度，速さ，加速度，向心力を順に求めていく問題である。
● 角速度は回転数から求められるが，あたえられているのは毎分の回転数なので，1 s 間の値を求める必要がある。

■■考え方■■



(1) 角速度 ω は回転数を n とすると，$\omega=2\pi n$ であるから，まず，1 s 間あたりの回転数 n を求める。
(2) 速さ v は角速度と回転半径の積から計算する。
$v=r\omega$
(3) 加速度の大きさ a は，
$a=r\omega^2$
(4) 向心力 F は加速度と質量の積から得られる。

■■解　答■■

(1) 毎分150回転するので，回転数 n は，　$n=\dfrac{150}{60}=2.5$ 〔Hz〕
よって，角速度 ω は，
$\omega=2\pi n=2\times3.14\times2.5=15.7\fallingdotseq16$ 〔rad/s〕

答え　16 rad/s

(2) 速さ v は，角速度 ω と回転半径 r を用いて，　$v=r\omega$
これに，$\omega=15.7$〔rad/s〕，$r=0.40$〔m〕を代入すると，
$v=r\omega=0.40\times15.7=6.28\fallingdotseq6.3$ 〔m/s〕

答え　6.3 m/s

(3) 加速度の大きさ a は，$a=r\omega^2$
これに，$\omega=15.7$〔rad/s〕，$r=0.40$〔m〕を代入すると，
$a=r\omega^2=0.40\times15.7^2=98.5\cdots\fallingdotseq99$ 〔m/s^2〕

答え　99 m/s^2

(4) 向心力 F は，おもりの質量を m として，　$F=ma$
これに，$m=0.10$〔kg〕，$a=98.5$〔m/s^2〕を代入すると，
$F=ma=0.10\times98.5=9.85\fallingdotseq9.9$〔N〕

答え　9.9 N

□ここがポイント!□

◆等速円運動で回転数や周期があたえられているときは，まず，角速度を求める。
◆角速度がわかれば，速さ，加速度，向心力の大きさは求められる。
速さ：$v=r\omega$　　加速度：$a=r\omega^2$　　向心力：$F=mr\omega^2$

---

1 (6071) M02

質量 1.0 kg の物体が半径 1.5 m，周期 2.0 s の等速円運動をしている。このとき，次の問いに答えなさい。

(1) 等速円運動の角速度は何 rad/s か。

〔　　　　　　〕

(2) 物体に生じる加速度はいくらか。

〔　　　　　　〕

(3) 向心力の大きさは何 N か。また，向きはどうか。

大きさ〔　　　　　　〕

向き〔　　　　　　〕

2 (6072) M02

質量 2.0 kg の物体が，毎分 60 回転で半径 0.40 m の等速円運動をしている。このとき，次の問いに答えなさい。

(1) 等速円運動の角速度は何 rad/s か。

〔　　　　　　〕

(2) 物体に生じる加速度はいくらか。

〔　　　　　　〕

(3) 向心力の大きさは何 N か。また，向きはどうか。

大きさ〔　　　　　　〕

向き〔　　　　　　〕

3 (6073) M02

質量 3.0 kg の小球にじょうぶな糸をつけて毎秒 0.40 回転で等速円運動させたところ，回転半径は 1.0 m であった。このとき，次の問いに答えなさい。

(1) 小球の角速度はいくらか。

〔　　　　　　〕

(2) このときの糸の張力の大きさは何 N か。

〔　　　　　　〕

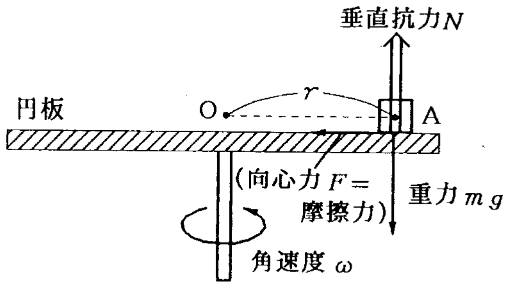
類題トレーニング(6080)

● 例題の視点　　物体が等速円運動を続けるには，つねに回転の中心に向かう一定の大きさの力，すなわち向心力が必要である。摩擦力が向心力として作用する例を考える。

基本例題　摩擦力と向心力

鉛直な軸のまわりに，水平に回転できるように取りつけられた円板があり，この上に質量 0.50 kg の物体 A をのせた。

円板と物体 A の間の静止摩擦係数 μ を 0.40，重力加速度の大きさを $g=9.8$ 〔m/s^2〕とする。次の問いに答えなさい。



(1)　A が面から受ける垂直抗力はいくらか。

(2)　面との間の最大静止摩擦力はいくらか。

(3)　中心 O から 0.80 m 離れた点に A をおいて円板を回転させた。A がすべりだす直前の回転数はいくらか。

- 垂直抗力は，面が物体を支える力で，面に垂直にはたらく。
- 最大静止摩擦力は，動きだす直前の摩擦力である。
- 軸を回転させると，円板上にある物体も回転する。この物体を回転させる力，つまり向心力がこの場合摩擦力である。

■■考え方■■

(1)　物体にはたらく重力の大きさが面の垂直抗力 N に等しい。物体 A の質量を m とすると，

$$N=mg$$

(2)　最大静止摩擦力 f は，静止摩擦係数を μ とすると，

$$f=\mu N=\mu mg$$

(3)　回転数 n で等速円運動する物体の角速度 ω は，

$$\omega=2\pi n$$

であるから，向心力 F は，

$$F=mr\omega^2=mr(2\pi n)^2$$

(2)で求めた摩擦力が向心力として作用することから n を求める。

■■解　答■■

(1)　垂直抗力 N と重力 mg がつりあうから，　$N=mg=0.50\times9.8=4.9$〔N〕

答え　4.9 N

(2)　最大静止摩擦力 f は，垂直抗力 N と静止摩擦係数 μ の積に等しいから，

$$f=\mu N=0.40\times4.9=1.96\fallingdotseq2.0\text{〔N〕}$$

答え　2.0 N

(3)　向心力 F は，回転半径 r，角速度 ω を用いて，

$$F=mr\omega^2$$

ここで，角速度 ω は回転数 n を用いて $\omega=2\pi n$ と表せるから，

$$F=mr(2\pi n)^2$$

この式に，$m=0.50$〔kg〕，$r=0.80$〔m〕を代入すると，

$F=0.50\times0.80\times(2\times3.14\times n)^2=15.7\cdots\times n^2$

最大静止摩擦力が向心力として作用するから，$F=f$ より，

$15.7\times n^2=1.96 \qquad n^2=0.124\cdots \qquad \therefore \quad n=0.352\cdots\fallingdotseq0.35$〔Hz〕

答え　0.35 Hz

□ここがポイント!□

> 回転円板上の物体にどのような力が作用しているかを明確にすることがたいせつである。

1　(6081)　M02

鉛直な軸のまわりに水平に回転できる円板があり，この上に質量 0.30 kg の物体をのせた。円板と物体間の静止摩擦係数 μ を 0.20，重力加速度の大きさを 9.8 m/s^2 として，次の問いに答えなさい。

(1)　面の垂直抗力はいくらか。

〔　　　　　　〕

(2)　円板と物体の間の最大静止摩擦力はいくらか。

〔　　　　　　〕

(3)　中心から 0.40 m のところに物体が置かれた円板を回転させたとき，物体がすべりだす直前の角速度はいくらか。

〔　　　　　　〕

2　(6082)　M02

中心に垂直に回転軸の通っている円板を水平にし，その上に質量 0.10 kg の小物体を中心から 0.20 m のところにのせて回転させたところ，回転数が毎分 60 回転のとき小物体はすべりだした。重力加速度の大きさを 9.8 m/s^2 として，次の問いに答えなさい。

(1)　小物体がすべりだす直前の加速度はいくらか。

〔　　　　　　〕

(2)　円板と小物体の間にはたらく最大静止摩擦力はいくらか。

〔　　　　　　〕

(3)　静止摩擦係数はいくらか。

〔　　　　　　〕

類題トレーニング(6090)

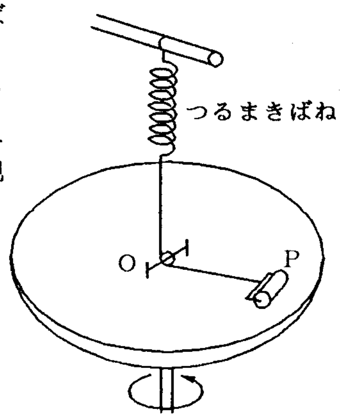
●例題の視点　　等速円運動をしている物体にはたらく力を，ばねにはたらく力で実験的に調べ，その関連を考察する。実験装置の各部分の役割と全体のはたらきをよく考えることが問題を解くカギとなる。ここでは，弾性力が向心力として作用する場合である。

基本例題　弾性力と向心力

右図の装置で，おもり P の質量は 0.20 kg，つるまきばねのばね定数は 12 N/m である。

回転台を毎分 27 回転させると，回転の中心 O からおもり P までの距離が 38 cm で一定になった。このとき，次の問いに答えなさい。ただし，おもり P にはたらくばね方向の摩擦力は無視できるものとする。

(1)　おもりの加速度を求めなさい。
(2)　おもり P にはたらく向心力 F はいくらか。
(3)　ばねは何 cm のびるか。



●おもりは回転の方向にはすべらないで，回転台とともに回転する。
●このとき，ばねは少しのびて，もとにもどろうとする変位に比例した大きさの力が P にはたらく(フックの法則)。このばねが縮もうとする力がおもりの回転運動の向心力の役割をはたしている。
●わかっているのは，おもりの質量と回転半径，回転数およびつるまきばねのばね定数である。

■■考え方■■

(1)　おもりは等速円運動をする。

まず，あたえられた 1 分間の回転数から 1 s 間の回転数を求めて，角速度 ω を計算する。

ω がわかれば加速度の大きさ a は，回転半径を r として，

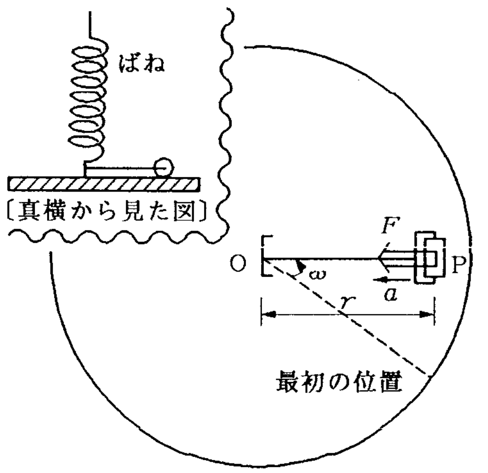
$$a = r\omega^2$$

で求まる。

(2)　おもりにはたらく向心力 F は，(1)で求めた加速度 a から，おもりの質量を m として，

$$F = ma$$

で求まる。



〔真上から見た図〕

(3)　ばねが縮んでもとにもどろうとする力がおもりにはたらく向心力となっている。

一般に，ばね定数 k のばねののびを x とすれば，その弾性力の大きさ F' は，

$$F' = kx$$

これが，(2)で求めた向心力に等しいことから，のび x が求まる。

■■解　答■■

(1)　1分間に27回転するから，回転数 n は，　$n=\dfrac{27}{60}=0.45$〔Hz〕

よって，角速度 ω は，

$\omega=2\pi n=2\times3.14\times0.45=2.826\fallingdotseq2.8$〔rad/s〕

以上より，おもりの加速度 a は，$r=38$〔cm〕$=0.38$〔m〕であるから，

$a=r\omega^2=0.38\times2.82^2=3.02\cdots\fallingdotseq3.0$〔$m/s^2$〕

答え　$3.0\,m/s^2$

(2)　おもりの質量が0.20〔kg〕であるから，おもりにはたらく向心力 F は，

$F=ma=0.20\times3.02=0.604\fallingdotseq0.60$〔N〕

答え　0.60 N

(3)　ばねののびが x〔m〕のとき，ばね定数 k のばねの弾性力の大きさ F' は，

$F'=kx$

これがおもりの向心力 F に等しく，$k=12$〔N/m〕であるから，

$12\times x=0.604$　　$\therefore$　$x=\dfrac{0.604}{12}=0.0503\cdots\fallingdotseq0.050$〔m〕

したがって，ばねは5.0 cmのびる。　　答え　5.0 cm

□ここがポイント!□

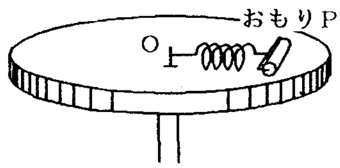
◆ばねの基本的な性質（フックの法則）：ばねが変形したとき，ばねにはたらく力の大きさは変位に比例する。

$F=kx$

◆おもりにはたらく力はばねにはたらく力と同じ大きさで，これが向心力として作用する。

1　(6091)　M02

水平に置かれた回転台の上で，質量0.12 kgのおもりPがつるまきばねを通して回転軸に結ばれている。つるまきばねのばね定数は10 N/mで，自然長は0.20 mであった。次の問いに答えなさい。ただし，ばね方向の摩擦力は無視するものとする。



(1)　このばねを1.0 cmのばすには何Nの力が必要か。

〔　　　　　　　　〕

(2)　回転台を等速円運動させたら，OPの長さが0.25 mとなった。ばねがおもりを引っぱる力は何Nか。

〔　　　　　　　　〕

(3)　(2)のときの回転数は何Hzか。

〔　　　　　　　　〕

2　(6092)　M02

ばね定数5.0 N/mのつるまきばねの先端に0.20 kgのおもりをつけ，毎分30回の割合でなめらかな水平面上で等速円運動させたところ，おもりと回転の中心との距離は0.24 mとなった。次の問いに答えなさい。

(1)　おもりの角速度はいくらか。

〔　　　　　　　　〕

(2)　このばねののびはいくらか。

〔　　　　　　　　〕

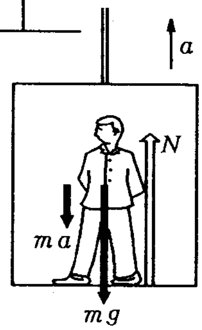
§3 慣性力と遠心力

M03

これまで，等速円運動や向心力について学んできました。これまでは，運動を外から見る立場だったわけですが，円運動する乗り物の中では，あたかも円の中心に向かって力がはたらいているように感じる経験をしたことがあるでしょう。ここでは，物理ⅠBでも学習した慣性力をまず復習し，遠心力や円すい振り子について学習します。

◇考え方のポイント◇

◆慣性力



加速度運動する物体と等しい加速度で運動する非慣性系から物体の運動を見ると，加速度運動をするために物体に加わっている力と大きさが等しく向きが逆の見かけの力がはたらき，これらの力がつりあって物体は静止しているように見える。

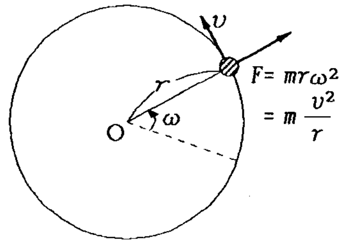
この見かけの力を「慣性力」という。慣性力 $\vec{F}$ は，物体の質量を m，加速度を $\vec{a}$ とすると，

$$\vec{F}=-m\vec{a}$$

◆等加速度運動するエレベーター内の物体にはたらく慣性力

等加速度運動するエレベーター内の物体には慣性力がはたらく。この慣性力 ma と，重力 mg と，床からの垂直抗力 N とがつりあう。

◆遠心力



等速円運動する物体にはたらく慣性力を「遠心力」という。遠心力の大きさ F〔N〕は，物体の質量を m〔kg〕，回転半径を r〔m〕，角速度を ω〔rad/s〕，速さを v〔m/s〕とすると，

$$F=mr\omega^2=m\frac{v^2}{r}$$

遠心力の向きは，回転の中心方向と逆向きである。

◆円すい振り子

振り子の長さ l〔m〕，鉛直線と糸のなす角を θ，おもりの質量を m〔kg〕，重力加速度の大きさを g〔m/s²〕とすると，周期 T〔s〕は，

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{l\cos\theta}{g}}$$

1 (0010) □ ➲類題6100 慣性力

一定の加速度 a〔m/s²〕で等加速度直線運動をしている電車の車内に，軽い糸でつり下げてあった質量 m〔kg〕のおもりが，鉛直方向と θ の角をなして静止しているとき，次の問いに答えなさい。

(1) おもりにはたらく慣性力の大きさはいくらか。 〔　　　　　　　　〕

(2) 加速度 a を，θ，g を使って表しなさい。

〔　　　　　　　　〕

(3) $\theta=45^\circ$ のとき，おもりにはたらく慣性力は何 N か。ただし，重力加速度の大きさを $g=9.8$〔m/s^2〕とする。

〔　　　　　　　　〕

2 (0011) □ ➲類題6110 エレベーターの動きと慣性力

静止しているエレベーターに台はかりをのせ，ある人の体重を測ったら50 kg であった。このことについて，次の問いに答えなさい。ただし，重力加速度の大きさを $9.8\,m/s^2$ とする。

(1) エレベーターが等加速度で上昇しているとき，台はかりの指針は52 kg であった。このときのエレベーターの加速度はいくらか。また，慣性力の大きさはいくらか。

加速度〔　　　　　　　　〕 慣性力〔　　　　　　　　〕

(2) エレベーターが動きだしたとき，台はかりの指針は48 kg であった。このとき，エレベーターはどちらにどれだけの加速度で動いているか。

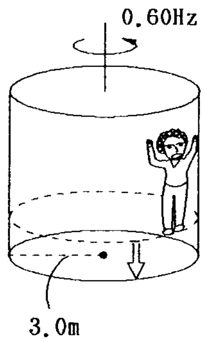
向き〔　　　　　　　　〕 加速度〔　　　　　　　　〕

3 (0012) □ ➲類題6120 遠心力

遊園地の回転ローターは，円形の部屋が回転し，床が下方にずれていくが，遠心力のはたらきでからだが壁におしつけられて，からだは落ちないようになっている。ローターの円形の部屋の半径が3.0 m，回転数が0.60 Hz のとき，からだには重力の何倍の遠心力が現れるか。

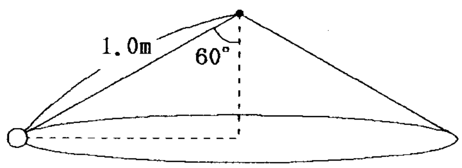
ただし，重力加速度の大きさを $9.8\,m/s^2$ とする。

〔　　　　　　　　〕



4 (0013) □ ➲類題6130 円すい振り子

図のように，糸の長さ 1.0 m，おもりの質量 0.20 kg の円すい振り子がある。次の問いに答えなさい。ただし，重力加速度の大きさを $9.8\,m/s^2$ とする。



(1) おもりの等速円運動の周期はいくらか。

〔　　　　　　　　〕

(2) おもりにはたらく遠心力はいくらか。

〔　　　　　　　　〕

(3) おもりの回転する速さはいくらか。

〔　　　　　　　　〕

類題トレーニング(6100)

●学習の視点　走りだした電車の中のような加速度運動をしている車の中の観測者が，物体にはたらく力について考えるときには，見かけの力をつけ加えて考えなければならないところがポイントである。物理ＩＢでやった人は，ここを飛ばしてよい。

テーマ　慣性力

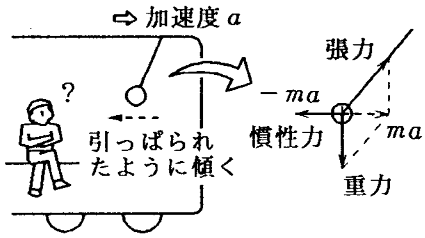
●電車の中に球がつり下げられている。

●電車が加速度 a で右向きに動きだすと，球は左に引っぱられたようになって，糸が傾く。

●電車の中から見れば，この物体は電車に対して静止している。

●したがって，球にはたらく重力,張力のほかに，これらとつりあう力を考えなければならない。

この見かけの力を，「慣性力」という。その大きさは，ma になる。



【慣性力】

加速度運動をする物体を基準にしてみたとき，見かけ上現れる力を「慣性力」という。

【慣性力の大きさ】

加速度 $\vec{a}$ で運動する物体を基準にしたとき，質量 m の物体に現れる慣性力 $\vec{F}$ は $\vec{a}$ の向きを正とすると，

$$\vec{F} = -m\vec{a}$$

【慣性力の向き】

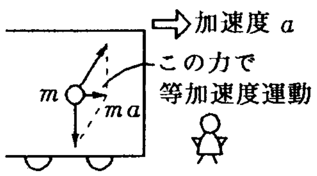
慣性力の向きは，基準にした物体の加速度の向きと反対である。

■■説　明■■

●慣性力は見かけの力　力は２物体間ではたらきあうから,１つの力を考えるときは，必ずこれにかかわる２物体（力の作用を受ける物体と，力の作用をおよぼす物体）が存在する。たとえばテーマの図で，重力は地球が球を引く力，張力は糸が球を引く力である。

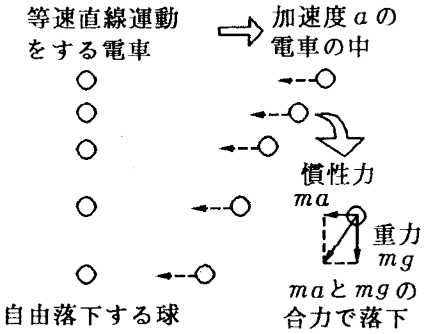
ところが，$-ma$ という力（慣性力）には，この力をおよぼす物体が存在しない。これが見かけの力といわれる理由である。相手がいないのだから，当然，慣性力には反作用がないことになる。

●運動を観測する基準　電車の中の球の運動を例にとると，電車内の観測者は,球には重力,張力,慣性力（$-ma$）の３力がはたらき，これらの３力がつりあって球は電車に対して静止していると判断をし，電車外の静止（あるいは等速直線運動）している観測者は，球には重力と張力の２力がはたらき，この２力の合力によって球は加速度運動をすると判断する。



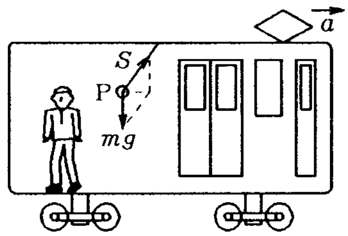
電車内の観測者の立場を「非慣性系」，電車外の観測者の立場を「慣性系」という。慣性系では運動の法則がそのまま成り立ち，非慣性系では，慣性力をつけ加えて物体の運動を考えなければならない。

●慣性力による運動の例　走りだす電車の床を空きかんがコロコロころがりだす，というようなことを見たことがあるだろう。この場合，電車に対して空きかんを加速度運動させた力は，慣性力である。また，電車の中で球を自由落下させたとする。電車が静止しているときや等速直線運動しているときには，球は真下の床に落ちる。ところが，電車が加速度運動すると，電車の加速度の向きとは逆向きに，ずれて落ちる。ずらすようにはたらいているように見える力は，慣性力である。



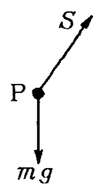
1　(6101)　M03

加速度 a で等加速度直線運動する電車の天井から，質量 m のおもり P をつり下げると，電車の中にいる人から見て，P は鉛直方向から傾いた状態で静止しているように見える。このとき，次の問いに答えなさい。



(1) 電車の中にいる人から見て，おもり P が静止して見えるためには，糸の張力 S，重力 mg の２力のほかに，もう１つの力が必要である。その力を何というか。また，次の図に，その力 F を作図しなさい。

〔　　　　　　〕



(2) P にはたらく慣性力 F を，進行方向を正として，P の質量 m と電車の加速度 a で表しなさい。

〔　　　　　　　　　〕

(3) P にはたらく慣性力の向きは，加速度の向きと同じ向きか，反対向きか。

〔　　　　　　　　　〕

2　(6102)　M03

進行方向を正の向きとして，次のような等加速度直線運動する電車の床の上に置かれた物体にはたらく慣性力の大きさと向きを求めなさい。

(1) 5 m/s^2 で加速している電車の中に置かれた質量 2 kg の物体にはたらく慣性力。

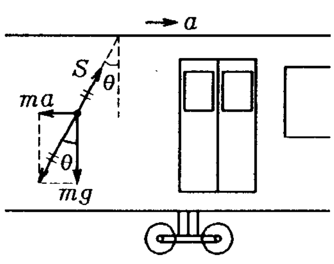
大きさ〔　　　　　〕　向き〔　　　　　　　　　〕

(2) 3 m/s^2 で減速している電車の中に置かれた質量 1 kg の物体にはたらく慣性力。

大きさ〔　　　　　〕　向き〔　　　　　　　　　〕

3　(6103)　M03

加速度 a〔m/s^2〕で等加速度直線運動する電車の天井から，質量 m〔kg〕のおもりを糸でつるしたところ，糸は鉛直方向から θ の角だけ傾いた状態でつりあった。このとき，次の問いに答えなさい。



(1) 電車の加速度の大きさ a を θ を使って表しなさい。

〔　　　　　　　　　　〕

(2) θ が 30° のとき，電車の加速度 a の大きさを求めなさい。ただし，重力加速度の大きさを 9.8 m/s^2，$\sqrt{3}=1.73$ とする。

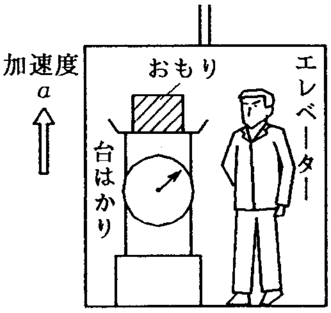
〔　　　　　　　　　〕

類題トレーニング(6110)

●例題の視点　　前のテーマでは，水平方向に加速度運動する場合に慣性力を考えたが，こんどは，物体が鉛直方向に加速度運動をする場合について調べてみる。代表的な例として，エレベーターの問題を考える。重力加速度とエレベーターの加速度の向きと慣性力の関係についての理解を深める。ここも物理ＩＢでやった人は，飛ばしてよい。

基本例題　エレベーターの動きと慣性力

静止しているエレベーターに台はかりをのせ，おもりをはかったら，指針は 10.0 kg を示した。これについて，次の問いに答えなさい。

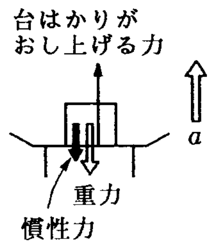


(1)　エレベーターが等加速度で上昇しているときの指針は 12.0 kg を示していた。このときのエレベーターの加速度はいくらか。また，おもりにはたらく慣性力はいくらか。重力加速度の大きさを 9.80 m/s^2 として答えなさい。

(2)　エレベーターは動いているが，指針は 10.0 kg を示していた。このとき，エレベーターはどのような運動をしていたか。

●おもりはエレベーター内の台はかりの上に置かれているので，エレベーターの加速度とおもりの加速度は等しい。

●物体が加速度運動するとき，物体には加速度と逆向きの慣性力がはたらく。



■■考え方■■

エレベーターが等加速度で上昇しているとき，おもりも等しい加速度で上昇している。

エレベーターとともに上昇する非慣性系からみると，おもりにはたらく重力と慣性力の合力が，台はかりがおもりをおし上げる力とつりあっていて，おもりは静止して見える。

したがって，これらの力のつりあいの式を考えればよい。質量 m，加速度 a の物体にはたらく慣性力は，加速度と逆向きで，大きさは ma である。

加速度が一定で 0 でなければ，エレベーターは等加速度直線運動，0 ならば等速直線運動をする。

■■解　答■■

(1)　台はかりがおもりをおし上げる力は，指針の読みから，　12.0〔kgw〕＝12.0 g〔N〕

物体にはたらく重力は，　10.0〔kgw〕＝10.0 g〔N〕

上向きの加速度を a〔m/s^2〕とすると慣性力は，下向きに 10.0 a である。ここで，重力，慣性力の合力と台はかりがおもりをおし上げる力がつりあっているから，

$$12.0\,g = 10.0\,g + 10.0\,a \qquad \therefore\ a = \frac{2.0}{10.0}g = \frac{2.0}{10.0} \times 9.80 = 1.96\ \text{〔m/s}^2\text{〕}$$

慣性力は，　$10.0\,a = 10.0 \times 1.96 = 19.6$〔N〕

答え　加速度… 1.96 m/s^2　慣性力… 19.6 N

別解

このエレベーターの加速度を，エレベーター外の慣性系の観測者の立場で求めると次

のようになる。
このおもりには重力 mg と台はかりからの抗力 N がはたらき，その合力によって a の加速度で上昇する。（この場合，慣性力は観測されない。）
上向きを正の向きにとれば，おもりの運動方程式は，　$ma = N - mg$
$N = 12.0 \times 9.80$〔N〕，$m = 10.0$〔kg〕，$g = 9.80$〔m/s^2〕を代入すると，
$a = 1.96$〔m/s^2〕

(2) おもりの加速度を a〔m/s^2〕とすると，おもりにはたらく重力 $10.0g$ と慣性力 $10.0a$ の合力と，台はかりがおもりをおし上げる力 $10.0g$ がつりあっているから，
$10.0g = 10.0g + 10.0a$　　∴　$a = 0$〔m/s^2〕
よって，等速直線運動をしていた。

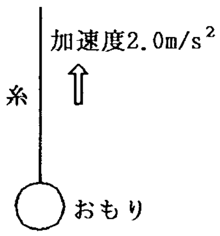
答え　等速直線運動

□ここがポイント！□

- ◆エレベーター内の観測者（非慣性系）から見ると，おもりには，慣性力がはたらいているように見える。
- ◆エレベーターが運動していても，止まっていても，エレベーター内の物体には，つねに重力がはたらいている。
- ◆加速度運動している観測者に対して静止している物体については，慣性力をつけ加えて，この物体にはたらくすべての力のつりあいの式を求めることが重要である。

1　(6111)　M03

質量 0.40 kg のおもりに糸をつけ，加速度 2.0 m/s^2 で引き上げるときの運動を，おもりを基準として考え，重力加速度の大きさを 9.8 m/s^2 として，次の問いに答えなさい。



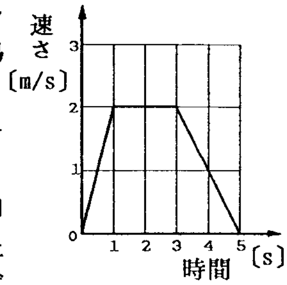
(1) おもりにはたらく慣性力の大きさはいくらか。また，その向きは上下どちらか。
大きさ〔　　　　　　　　〕 向き〔　　　　　　　　〕
(2) 糸の張力は何 N か。
〔　　　　　　　　〕
(3) 糸の張力を，慣性系の観測者の立場で求めなさい
〔　　　　　　　　〕

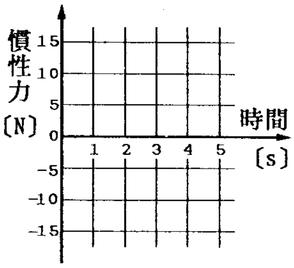
2　(6112)　M03

体重 60.0 kg の人が乗っているエレベーターが，0.200 m/s^2 の加速度で下降するとき，次の問いに答えなさい。ただし，重力加速度の大きさを 9.80 m/s^2 とする。
(1) エレベーター内の人にはたらく慣性力の大きさはいくらか。また，その向きは上下どちらか。
大きさ〔　　　　　　　　〕 向き〔　　　　　　　　〕
(2) この人の体重は，見かけ上，何 kg になるか。
〔　　　　　　　　〕

3 (6113) M03

質量5.0kgの物体をのせてあるエレベーターの速さが図のように変化した場合，次の問いに答えなさい。

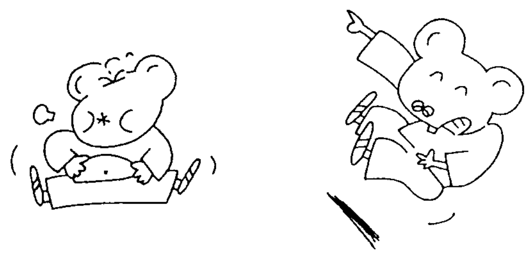




(1) 動きだして1.0s間のエレベーターの加速度はいくらか。

〔　　　　　　　　〕

(2) エレベーターが動きだしてから静止するまでの物体にはたらく慣性力をグラフにかきなさい。



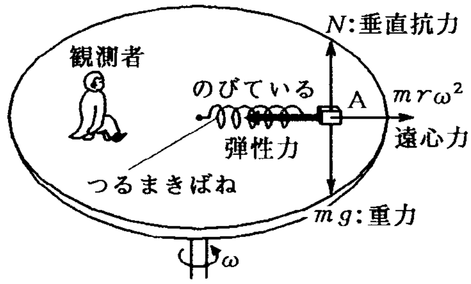
類題トレーニング(6120)

●学習の視点　　等速円運動する台上にある物体を観測するのに，台上から観測するか，台の外から観測するかで，物体の運動現象の記述がまったく別なものとなる。基準となる立場をどこにするかが，加速度運動する物体の現象を理解するにはたいせつなことである。

テーマ　遠心力

●遠心力　　右図のように等速円運動しているなめらかな回転台上に物体Aがあるとき，その回転台上でともに回転する人から物体Aを見ると，物体Aには見かけ上の力がはたらいているように見える。この力を「遠心力」という。

●遠心力の大きさは，向心力の大きさに等しく，向きは向心力の向きとは逆である。



【遠心力の大きさ】

等速円運動する物体にはたらく遠心力の大きさ F は，物体の質量を m，半径を r，角速度を ω とすると，

$$F=mr\omega^2$$

【遠心力の向き】

遠心力の向きは，円の中心と物体を結ぶ線上で外向きにはたらく。

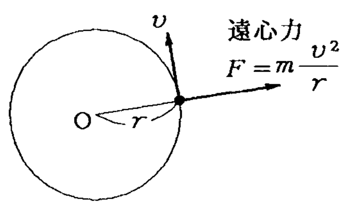
■■説　明■■

●遠心力　　なめらかな回転台上の物体Aに実際にはたらいている力は，重力 mg と垂直抗力 N，ばねの縮もうとする弾性力である。このうち，mg と N は，物体の回転運動には関係ない。

台とともに回転する非慣性系から見ると，弾性力と大きさが等しく逆向きの慣性力が物体Aにはたらいて，弾性力とつりあって，物体Aは静止しているように見える。この力が「遠心力」で，慣性系から見ると，この力は存在しない。つまり，遠心力は等速円運動する物体にはたらく慣性力である。

Aの運動を回転台の外から観測すると，Aにはたらくばねの弾性力が向心力として作用し，Aは等速円運動をすると判断される。

●等速円運動する物体の速さと遠心力　　速さ v〔m/s〕で半径 r〔m〕の円周上を等速円運動する物体にはたらく遠心力 F の大きさは，$F=m\dfrac{v^2}{r}$〔N〕と表される。このときの角速度を ω〔rad/s〕とすると，$v=r\omega$〔m/s〕となるから，これを使うと，



$$F=m\frac{v^2}{r}=m\frac{(r\omega)^2}{r}=mr\omega^2\text{〔N〕}$$

➲力の大きさは向心力と同じ式である。しかし，向心力と遠心力は向きが逆である点に注意すること。

1 (6121) M03

等速円運動する物体にはたらく遠心力について，次の問いに答えなさい。

(1) 質量 m〔kg〕，半径 r〔m〕，角速度 ω〔rad/s〕で等速円運動する物体にはたらく遠心力の大きさ F〔N〕は，どのような式で表されるか。

〔　　　　　　　〕

(2) 遠心力の向きは，円の中心と物体を結ぶ線上で，内外どちら向きか。

〔　　　　　　　〕

(3) (1)の遠心力の大きさを求める式は，速さ v〔m/s〕を使って表すと，どのようになるか。

〔　　　　　　　〕

2 (6122) M03

次のような等速円運動する物体や人にはたらく遠心力の大きさを求めなさい。

(1) 半径5.0 m，角速度2.0 rad/s で等速円運動する質量3.0 kg の物体。

〔　　　　　　　〕

(2) 半径2.0 m，角速度3.0 rad/s で等速円運動する質量0.50 kg の物体。

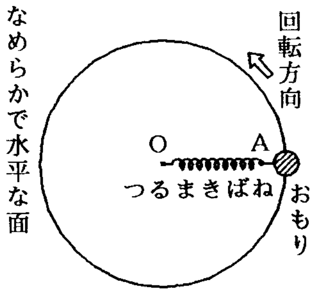
〔　　　　　　　〕

(3) 半径200 m の弧をえがいている線路上を，速さ 10 m/s で通る電車内にいる体重50 kg の人。

〔　　　　　　　〕

3 (6123) M03

図のようになめらかな水平な面上で，質量0.20 kg のおもりを等速円運動させた。周期が4.0 s，回転の中心 O からおもりの重心までの長さが0.80 m の場合，次の問いに答えなさい。



(1) 角速度は何 rad/s か。

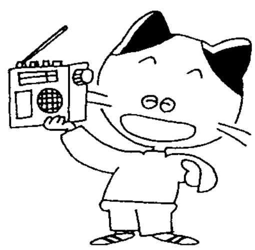
〔　　　　　　　〕

(2) おもりが受ける遠心力の大きさはいくらか。

〔　　　　　　　〕

(3) つるまきばねのばね定数は4.0 N/m である。ばねののびはいくらか。

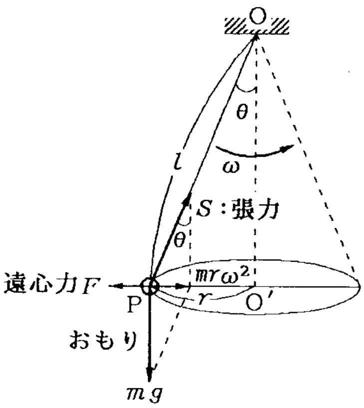
〔　　　　　　　〕



類題トレーニング(6130)

●学習の視点　　糸の一端におもりをつけて，他端を持ってはげしく振りまわしても，糸，おもりを含めた水平面上の円運動とはならない。重力の影響を受けて，いわゆる「円すい振り子」となる。この振り子に作用する力に，慣性力を加味し，円すい振り子の運動を考えてみる。

テーマ　円すい振り子



●軽い糸の一端を O 点に固定し，他端におもりをつけ，水平面内でおもりを等速円運動させたものを「円すい振り子」という。

●おもりには，実際には，重力 mg，糸の張力 S がはたらいている。

●おもりといっしょに回転する非慣性系から見たとき，この2力と遠心力 F がつりあっている。

つりあいの関係から，

$$F = S\sin\theta \qquad S\cos\theta = mg$$

この2式より，S を消去すると，

$$F = mg\tan\theta$$

ところで，遠心力は r，ω を使って，$F = mr\omega^2$ とも表せるから，

$$mr\omega^2 = mg\tan\theta$$

が成り立つ。

●$\tan\theta = \dfrac{r}{l\cos\theta}$ であることを使えば，ω は次のようになる。

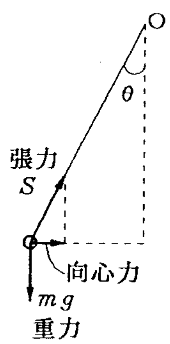
$$\omega = \sqrt{\frac{g}{r}\cdot\tan\theta} = \sqrt{\frac{g}{r}\cdot\frac{r}{l\cos\theta}} = \sqrt{\frac{g}{l\cos\theta}}$$

【円すい振り子の周期】

糸の長さを l〔m〕，鉛直方向と糸とのなす角を θ，重力加速度の大きさを g〔m/s²〕とすると，円すい振り子の周期 T〔s〕は，次式で表される。

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l\cos\theta}{g}}$$

■■説　明■■



●円運動の向心力　　円すい振り子の運動を外（慣性系）から見れば，おもりにはたらく糸の張力 S と地球の重力 mg の合力が向心力として作用し，おもりは等速円運動をすることになる（右図）。

右図のように，その力の大きさは，$mg\tan\theta$ となるから，これをもとにしても，テーマと同じように，ω や T を求めることができる。

$$mg\tan\theta = ma = mr\omega^2 \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

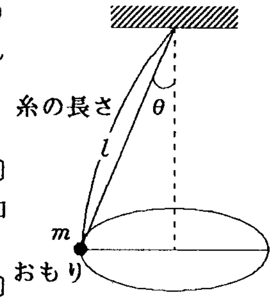
$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l\cos\theta}} \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{l\cos\theta}{g}}$$

ここで，①の式は，おもりについての運動方程式である。

テーマでは，慣性力である遠心力をもとにして，つりあいの式で考えたわけである。このように，慣性力を用いると，同じ場面を，運動方程式のかわりにつりあいで考えることになる。

1 (6131) M03

長さ l〔m〕の糸の先端に，質量 m〔kg〕のおもりをつけて，おもりを水平面内で角速度 ω〔rad/s〕で等速円運動させ円すい振り子にした。このとき，次の問いに答えなさい。



(1) おもりにはたらく遠心力を m，g，θ を使って表しなさい。

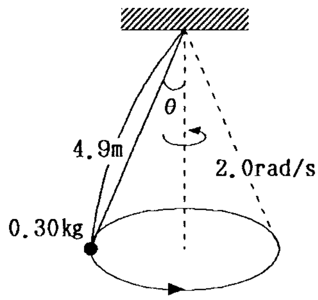
〔　　　　　　　　　　　〕

(2) 円すい振り子の周期 T を表す式を書きなさい。ただし，重力加速度の大きさを g とする。

〔　　　　　　　　　　　〕

2 (6132) M03

糸の長さが4.9 m，角速度が2.0 rad/s,おもりの質量が0.30 kgの円すい振り子について，次の問いに答えなさい。ただし，重力加速度の大きさを9.8 m/s^2 とする。



(1) 振り子の長さを l，糸が鉛直線となす角度を θ，重力加速度の大きさを g とすると，周期 T はどのように表されるか。

〔　　　　　　　　　　　〕

(2) 振り子と鉛直線のなす角度はいくらか。

〔　　　　　　　　　　　〕

(3) 遠心力の大きさはいくらか。

〔　　　　　　　　　　　〕

(4) 糸の張力はいくらか。

〔　　　　　　　　　　　〕

3 (6133) M03

糸の長さが1.00 m，周期が0.628 s，おもりの質量が0.100 kgの円すい振り子について，次の問いに答えなさい。ただし，重力加速度の大きさを9.80 m/s^2 とする。

(1) 角速度はいくらか。

〔　　　　　　　　　　　〕

(2) おもりに作用する遠心力の大きさはいくらか。

〔　　　　　　　　　　　〕

ヒント (2) $\cos\theta$ を求めるとごく小さい値になるので，$\sin\theta \fallingdotseq 1$ として，糸の張力と慣性力の関係を考える。

§4 単振動

M04

等速円運動をしている物体の動きを用いて，単振動の式を導き，単振動する物体の速度や加速度を求め，さらに，周期や振動数の関係を調べるのが，ここでの学習の目的です。

それでは，まず単振動を式で表すことから学んでいこう。

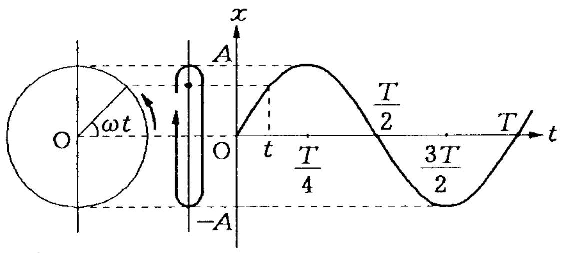
◇考え方のポイント◇

◆単振動の変位の式

単振動の変位の式は，円運動の正射影から求められる。

$x = A\sin\omega t$

ここで，ω を「角振動数」という。



◆単振動の周期・振動数・角振動数

周期 T，振動数 f，角振動数 ω の関係は，

$$T=\frac{1}{f}=\frac{2\pi}{\omega},\qquad \omega=2\pi f$$

したがって，変位の式は，

$$x=A\sin\omega t=A\sin\frac{2\pi t}{T}=A\sin 2\pi f t$$

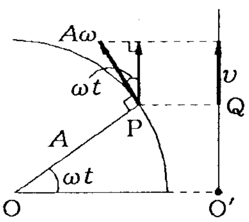
◆単振動の速度

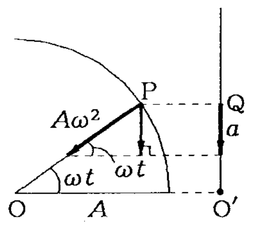
$v = A\omega\cos\omega t$

◆単振動の加速度

単振動の加速度は，つねに振動の中心を向いている。

$a = -A\omega^2\sin\omega t$
$\quad = -\omega^2 x$





1 (0014) ☐ ➲類題 6140 単振動

変位 x〔m〕が $x=0.10\sin\frac{\pi}{2}t$ で表される単振動をしている物体について，次の問いに答えなさい。

(1) 振幅は何 m か。〔　　　　　〕

(2) 角振動数は何 rad/s か。〔　　　　　〕

(3) $t=1.0$〔s〕のときの変位は何 m か。〔　　　　　〕

2 (0015) ☐ ➲類題 6150 単振動の周期・振動数

周期 2.0 s で，ある点を中心に ±0.30 m の範囲で単振動している物体がある。次の問いに答えなさい。

(1) 振動数は何 Hz か。

〔　　　　　〕

(2) 角振動数は何 rad/s か。

〔　　　　　〕

(3) この物体の t〔s〕後の変位 x〔m〕を表す式を書け（$t=0$ のとき $x=0$ とする)。

〔　　　　　　　　　　　〕

3 (0016) □ ➲類題 6160 単振動の速度

速度が $v=3.0\cos\frac{\pi}{2}t$〔m/s〕であたえられる単振動の $t=2.0$〔s〕における速度は何 m/s か。

〔　　　　　　　〕

4 (0017) □ ➲類題 6170 単振動の加速度

次の単振動の加速度を求めなさい。

(1) 加速度が $a=-3.0\sin\frac{\pi}{4}t$〔m/s^2〕であたえられる単振動の $t=2.0$〔s〕における加速度

〔　　　　　　　〕

(2) 角振動数 5.0 rad/s で単振動している物体の，振動の中心からの変位が 0.10 m のときの加速度

〔　　　　　　　〕

5 (0018) □ ➲類題 6180 単振動の速度と加速度

単振動をしている物体が，$t=0$〔s〕のとき速度最大で，その値は 2.0 m/s であった。また，変位 x が 0.30 m のところでの加速度は -4.8 m/s^2 であった。次の問いに答えなさい。

(1) この運動についての単振動の変位の式をつくりなさい。

〔　　　　　　　　　　　　　　　　〕

(2) この単振動の周期を求めなさい。

〔　　　　　　　〕

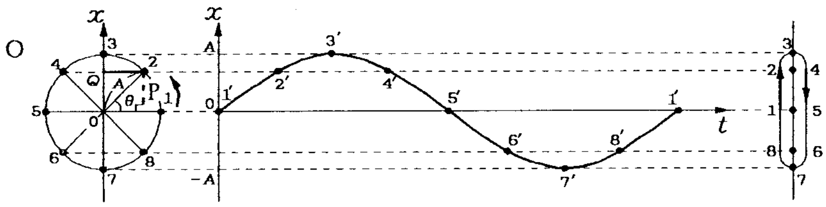
類題トレーニング(6140)

●学習の視点　　等速円運動する物体に真横から光を当てて，スクリーンに写した影の動きを調べることから始めて，単振動の式を求めたり，そのグラフのようすをつかむのが，ここでの学習の目的である。

テーマ　単振動

●物体に平行光線を当てて，光線に垂直に置いたスクリーン上に写した影を，「正射影」という。

●等速円運動する物体 P の x 軸への正射影を調べると，次の図のようになる。



●動点 P と正射影 Q の位置は，上の図のように時間とともに変化し，Q は O を中心として，$+A$ から $-A$ までの間を往復運動する。

● P が円周上を角速度 ω〔rad/s〕で動くとき，O から見た Q の位置 x は，

$$x = A\sin\theta = A\sin\omega t$$

で表される。

【単振動】

等速円運動をする物体の正射影の運動を「単振動」という。単振動する物体の中心からの変位 x は，次の式で表される。

$$x = A\sin\omega t$$

A を単振動の「振幅」という。また，ω は「角振動数」といい，円運動の角速度に対応する。

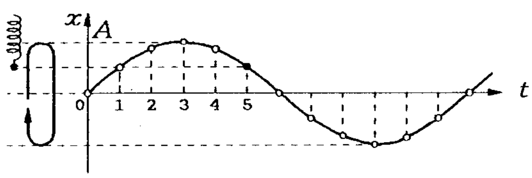
■■説　明■■

●単振動の式から変位を求める　　変位 x〔m〕が，$x = 8\sin\dfrac{\pi}{6}t$ であたえられる単振動の振幅は，$A = 8$〔m〕，角振動数は $\omega = \dfrac{\pi}{6}$〔rad/s〕である。この単振動の $t = 5$〔s〕における変位は，

$$x = 8\sin\left(\frac{\pi}{6}\times 5\right) = 8\sin\frac{5\pi}{6} = 8\times\frac{1}{2} = 4\text{〔m〕}$$

となる。

●ばね振り子の振動　　振動しているばね振り子のおもりは単振動をしている。この振動のようすを，カメラを等速で移動させながらストロボ写真にとると，おもりの軌跡は，右の図のような曲線をえがく。



●単振動のグラフ　　単振動する物体の変位を縦軸に，時間を横軸にとると，グラフは上の図のような曲線になる。このような曲線を「正弦曲線」という。

●単振動の位相　　単振動 $x = A\sin\theta = A\sin\omega t$ で，θ や ωt を振動の「位相」

という。x が正の向きにはじめて最大になるのは，位相が $\frac{\pi}{2}$ のときである。また，負の向きにはじめて最大になるのは，位相が $\frac{3}{2}\pi$ のときである。

位相が 2π 進むと，x はもとの状態にもどり，以後，2π ごとに同じ変化がくり返される。

---

1 (6141) M04

次の問いに答えなさい。

(1) 物体の変位 x が，$x=A\sin\omega t$ で表される運動を何というか。

〔　　　　　　〕

(2) 単振動の式 $x=A\sin\omega t$ で，x，A，ω はそれぞれ何を表しているか。

x〔　　　　　　〕 A〔　　　　　　〕 ω〔　　　　　　〕

(3) 単振動する物体の変位 x を縦軸，時間 t を横軸にとってグラフをかくと，何という曲線ができるか。

〔　　　　　　〕

2 (6142) M04

t〔s〕後の変位 x〔m〕が次の式で表される単振動について，あとの問いに答えなさい。

㋐ $x=1.5\sin\frac{\pi}{4}t$　　㋑ $x=0.20\sin5\pi t$

(1) 振幅はそれぞれ何 m か。

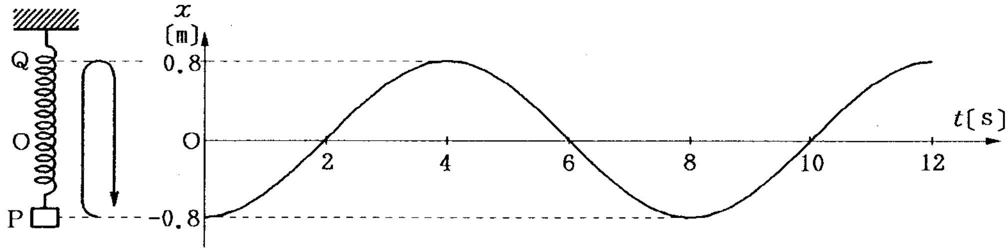
㋐〔　　　　　　〕 ㋑〔　　　　　　〕

(2) 角振動数はそれぞれ何 rad/s か。

㋐〔　　　　　　〕 ㋑〔　　　　　　〕

3 (6143) M04

次の図は，ばねにおもりをつけて静かにつるし，静止点 O からさらに P 点まで引きおろしてから手をはなして，単振動させたときのおもりの動きを表したものである。



(1) 振幅は何 m か。

〔　　　　　　〕

(2) 2 s 後におもりはどの点をどちら向きに動いているか。

〔　　　　　　〕

(3) 振動を始めてから，最初に P 点にもどってきたのは，何 s 後か。

〔　　　　　　〕

(4) おもりが O 点を上向きに通過する時間は，何 s おきか。

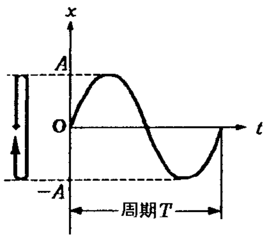
〔　　　　　　〕

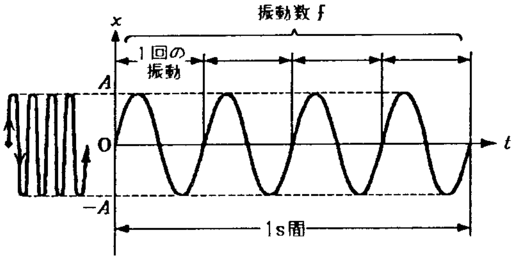
類題トレーニング(6150)

●学習の視点　　円運動のとき，1 s 間に回転する数を「回転数」，1 回回転するのにかかる時間を「周期」とよんだ。単振動についても同様に，1 s 間に振動する回数や，1 回の振動にかかる時間を考えることができる。そこで，ここでは振動数や周期を定義し，これらの関係，および，これらを用いた単振動の式を考えることにする。

テーマ　単振動の周期・振動数

● 1 回の振動にかかる時間を，単振動の「周期」という。等速円運動の周期と同じになる。単位は s である。
● 1 s 間に振動する回数を，「振動数」という。等速円運動の回転数と同じになる。単位は Hz (ヘルツ) である。
● 1 s 間に f 回振動するとき，1 回の振動にかかる時間，すなわち周期 T は $\frac{1}{f}$ となる。したがって，周期と振動数は，たがいに逆数になっている。





【周期と振動数の関係】

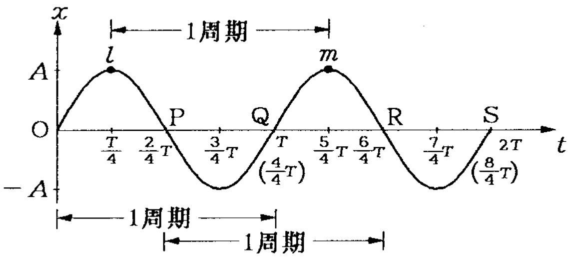
周期を T〔s〕，振動数を f〔Hz〕とすると，

$$T=\frac{1}{f}=\frac{2\pi}{\omega},\quad \omega=2\pi f \qquad (\omega \text{ は角振動数，単位は rad/s})$$

■■説　明■■

● T と t の区別　　T は周期で，1 回振動するのにかかる時間である。一方，t はそのときどきの時刻を表す。

● グラフ上でみた周期　　変位 x と時刻 t のグラフ上でみた周期は，右の図のようになる。1 周期は，O から Q までの時間である。これは，P から R でも，Q から S でも，さらに，l から m でも同じことである。



● T，f，ω と単振動の式　　T，f を使うと，単振動の式は，次のように変形できる。

$$\boxed{x=A\sin\omega t=A\sin\frac{2\pi t}{T}=A\sin 2\pi f t}$$

1 (6151) M04

単振動について，次の問いに答えなさい。

(1) 1回振動するのにかかる時間を何というか。また，その単位は何か。

〔　　　　　〕 単位〔　　　　　〕

(2) 1 s 間に振動する回数を何というか。また，その単位を書きなさい。

〔　　　　　〕 単位〔　　　　　〕

(3) 周期を T，振動数を f として，T と f の関係を式で表しなさい。

〔　　　　　〕

2 (6152) M04

振動数が次のような単振動の周期を求めなさい。答えは有効数字2桁で答えなさい。

(1) 振動数 50 Hz の単振動

〔　　　　　〕

(2) 振動数 250 Hz の単振動

〔　　　　　〕

3 (6153) M04

角振動数が次のような単振動の周期を求めなさい。答えは有効数字2桁で答えなさい。

(1) 角振動数 $\frac{\pi}{6}$〔rad/s〕の単振動

〔　　　　　〕

(2) 角振動数 4π〔rad/s〕の単振動

〔　　　　　〕

4 (6154) M04

振動数が次のような単振動の角振動数を求めなさい。答えは有効数字2桁で答えなさい。

(1) 振動数 5.0 Hz の単振動　〔　　　　　〕

(2) 振動数 300 Hz の単振動　〔　　　　　〕

類題トレーニング(6160)

●学習の視点　　単振動をしている物体の速度はつねに変化している。ところで，単振動は等速円運動の正射影と同じ運動であった。そこで，単振動の速度はどのように表されるかを等速円運動の速度をもとに考えるのがここでの学習の目的である。

テーマ　単振動の速度

●単振動する物体の速度は，等速円運動をする物体の速度の正射影によって考えることができる。

●右の図で，等速円運動をしている物体が S 点から $\theta=\omega t$ だけ回転して P 点に達したとする。このとき Q 点は，P 点にきた物体の x 軸への正射影である。

●このとき，Q 点での速度 $\overrightarrow{v_x}$ は，P 点にある物体の速度 $\vec{v}$ の正射影に等しく，

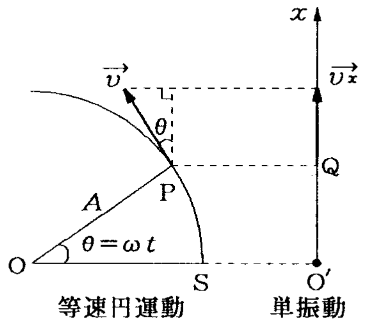
$$v_x=v\cos\theta=v\cos\omega t$$

である。

●この物体の等速円運動の半径を A，角速度を ω，速さを v としたとき，

$$v=A\omega$$

の関係がある。A は Q の振幅，ω は Q の角振動数に等しい。



・Pは等速運動をする点，Qは単振動をする点で，QはPの正射影になっている。

【単振動の速度】

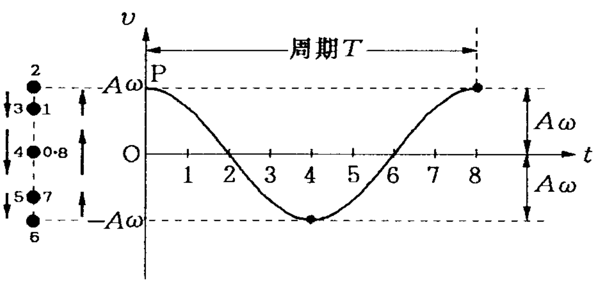
振幅が A，角振動数が ω の単振動をする物体の速度は，

$$v=A\omega\cos\omega t$$

■■説　明■■

● $v=A\omega\cos\omega t$ の図解

右の図は単振動の速度 v と時刻 t の関係を示したグラフである。



$0<t<2$：向きは上向きで，大きさはしだいに減少

$2<t<4$：向きは下向きで，大きさはしだいに増加

$4<t<6$：向きは下向きで，大きさはしだいに減少

$6<t<8$：向きは上向きで，大きさはしだいに増加

➲単振動の速度は，振動の中心で最大となる。

●速さの計算　　振幅 0.20 m，角振動数 π〔rad/s〕で単振動している物体の 2.0 s 後の速さを求めるには次のようにする。

$$v=A\omega\cos\omega t=0.20\times\pi\times\cos(\pi\times2.0)=0.20\times\pi\times1=0.20\pi$$
$$=0.20\times3.14=0.628\fallingdotseq0.63\ \text{〔m/s〕}$$

1 (6161) M04

単振動について，次の問いに答えなさい。

(1) $v = A\omega\cos\omega t$ で表される式は単振動の何を表しているか。

〔　　　　　　　〕

(2) 速度が $v = A\omega\cos\omega t$ であたえられる単振動で，A，ω は何を表しているか。

A〔　　　　　　　〕 ω〔　　　　　　　〕

(3) 振幅 0.10 m，角振動数 π〔rad/s〕の単振動の速度 v〔m/s〕を求める式を書きなさい。

〔　　　　　　　〕

2 (6162) M04

次の単振動の速度を求めなさい。答えは有効数字 2 桁で答えなさい。

(1) 速度が $v = \pi\cos\frac{\pi}{6}t$〔m/s〕であたえられる単振動の $t = 2.0$〔s〕における速度

〔　　　　　　　〕

(2) 速度が $v = 0.50\pi\cos 10\pi t$〔m/s〕であたえられる単振動の $t = 0.10$〔s〕における速度

〔　　　　　　　〕

(3) 速度が $v = 6.0\cos\frac{\pi}{4}t$〔m/s〕であたえられる単振動の $t = 6.0$〔s〕における速度

〔　　　　　　　〕

類題トレーニング(6170)

●学習の視点　　速度が変化するにつれて加速度も変化する。単振動の加速度は速度と同様に等速円運動の加速度の正射影を図解して求めるとわかりやすい。加速度は，単振動をする物体にはたらく力を求めるときにも必要な物質量なので（運動の第２法則　$ma=F$），しっかり学習しよう。

テーマ　単振動の加速度

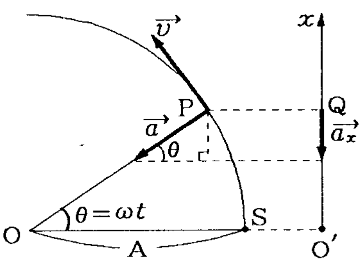
●単振動の加速度は等速円運動の加速度の正射影によって考えることができる。

●右の図で，等速円運動をしている物体がＳ点から　$\theta=\omega t$　だけ回転してＰ点に達したとする。Ｑ点は，Ｐ点にきた物体の正射影である。このとき，Ｑの加速度 $\overrightarrow{a_x}$ はＰ点にある物体の加速度 $\vec{a}$ の正射影に等しく，

$$a_x=-a\sin\theta=-a\sin\omega t$$

である。

➲ －の符号に注意。



●この物体の等速円運動の半径を A，角速度を ω，加速度を a とすると，

$$a=A\omega^2$$

の関係がある。A はＱの振幅，ω はＱの角振動数に等しい。

【単振動の加速度】

変位が　$x=A\sin\omega t$　であたえられる単振動の加速度は，

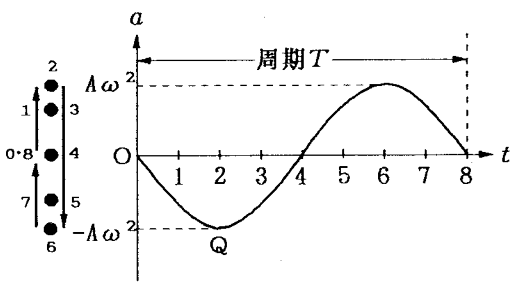
$$a=-A\omega^2\sin\omega t=-\omega^2 x$$

■■説　明■■

●　$a=-A\omega^2\sin\omega t$　の図解

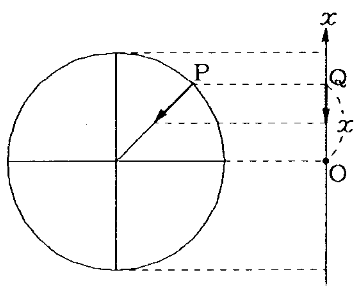
右の図は単振動の加速度 a と時刻 t の関係を示したグラフである。

$0<t<2$：下向きの加速度が増加
$2<t<4$：下向きの加速度が減少
$4<t<6$：上向きの加速度が増加
$6<t<8$：上向きの加速度が減少



●加速度の向きと変位　　右の図からわかるように，上向きを正として，単振動する点Ｑの変位 x が正の範囲にあるとき，加速度 a の向きは負で，中心を向いている。逆に，変位 x が負なら加速度 a の向きは正である。$a=-\omega^2 x$ の式の－の符号は，このことを表している。

このように，加速度はどの場所をとっても振動の中心点Ｏを向いている。加速度の大きさは変位 x に比例している。



➲加速度の大きさは，振動の中心のところでは０で，振動の両端にあるとき最大となる。

●加速度の計算　　振幅 0.20 m，角振動数 π〔rad/s〕で単振動している物体の 0.50 s

後の加速度を求めるには，次のようにする。

$$a = -0.20 \times \pi^2 \sin(\pi \times 0.50) = -0.20\pi^2$$
$$= -2.0 \times 3.14^2 = -1.97\cdots \fallingdotseq -2.0\ \text{〔m/s}^2\text{〕}$$

➡ $\sin\frac{\pi}{2} = 1$

よって，加速度の大きさは，2.0 m/s^2 である。

---

1 (6171) M04

次の問いに答えなさい。

(1) $a = -A\omega^2 \sin\omega t$ という式は単振動の何を表しているか。

〔　　　　　　　　〕

(2) 加速度が $a = -A\omega^2 \sin\omega t$ であたえられる単振動で，A，ω は何を表しているか。

A〔　　　　　　　　〕　ω〔　　　　　　　　〕

(3) 角振動数 ω〔rad/s〕で単振動している物体の変位が x〔m〕のときの加速度 a〔m/s^2〕は，どのような式で表されるか。

〔　　　　　　　　〕

2 (6172) M04

次の単振動の加速度を求めなさい。答えは有効数字 2 桁で答えなさい。

(1) 加速度が $a = -\pi^2 \sin\frac{\pi}{6} t$〔m/s^2〕であたえられる単振動の $t = 1.0$〔s〕における加速度

〔　　　　　　　　〕

(2) 加速度が $a = -0.50\pi^2 \sin 10\pi t$〔m/s^2〕であたえられる単振動の $t = 0.10$〔s〕における加速度

〔　　　　　　　　〕

(3) 加速度が $a = -6.0 \sin\frac{\pi}{4} t$ であたえられる単振動の $t = 6.0$〔s〕における加速度

〔　　　　　　　　〕

3 (6173) M04

次の単振動の加速度を求めなさい。

(1) 変位 0.050 m，角振動数 4.0 rad/s の単振動の加速度

〔　　　　　　　　〕

(2) 変位 1.0 m，角振動数 10 rad/s の単振動の加速度

〔　　　　　　　　〕

(3) 変位 −0.50 m，角振動数 2.0 rad/s の単振動の加速度

〔　　　　　　　　〕

類題トレーニング(6180)

●例題の視点　　いままでは，速度と加速度をべつべつに扱ってきた。この問題では，これらをまとめて扱い，複数の条件から速度や加速度の式をどのように組み立てていくかを学習する。あたえられた条件をどの式に代入するかがポイントである。

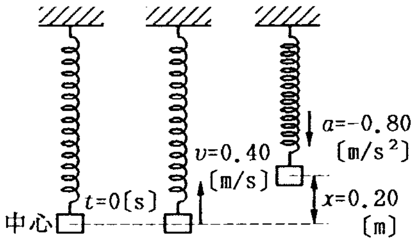
基本例題　単振動の速度と加速度

単振動をしている物体が，$t=0$〔s〕のとき速度最大で，その値は0.40 m/sであった。また，変位 x が0.20 mのところでの加速度は -0.80 m/s^2 であった。

この運動についての単振動の変位 x の式をつくりなさい。また，周期を求めなさい。

●問題の内容を図にえがくと右のようになる。t と v の関係と，x と a の関係から，それぞれの式をたてるのである。

●単振動する物体は，速度最大のとき振動の中心を通過する。



■■考え方■■

単振動の速度の式 $v=A\omega\cos\omega t$，加速度の式 $a=-\omega^2 x$ にあたえられた条件を代入する。

これらの式から振幅と角振動数を求める。そして得られた振幅と角振動数を用いて単振動の変位の式をつくる。

周期は角振動数から求める。

■■解　答■■

振幅 A，角振動数 ω の単振動をする物体の速度 v は $v=A\omega\cos\omega t$ で表される。これに $t=0$〔s〕，$v=0.40$〔m/s〕を代入すると，

$0.40=A\omega\cos(\omega\times0)$　$\therefore$　$0.40=A\omega$　………①

この物体の加速度 a は $a=-\omega^2 x$。これに，$x=0.20$〔m〕，$a=-0.80$〔m/s^2〕を代入すると，

$-0.80=-\omega^2\times0.20$　$\therefore$　$\omega=2.0$〔rad/s〕　………②

②を①に代入して A を求めると，

$0.40=A\times2.0$　$\therefore$　$A=0.20$〔m〕

ゆえに，$x=A\sin\omega t$ に代入して，　$x=0.20\sin2.0t$〔m〕

また，周期は $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$ より，　$T=\dfrac{2\times3.14}{2.0}=3.14\fallingdotseq3.1$〔s〕

答え　単振動の変位の式… $x=0.20\sin2.0t$〔m〕，周期…3.1 s

□ここがポイント!□

まず，変位 x と加速度 a がわかっているから，$a=-\omega^2 x$ を使って ω を求める。次に，この ω と v，t の値を使って $v=A\omega\cos\omega t$ から A を求めればよい。

1 (6181) M04

単振動をしている物体が，$t=0$〔s〕のとき速度が最大で，その値は1.2 m/s であった。また，変位が0.20 m のところでの加速度は -3.2 m/s^2 であった。次の問いに答えなさい。

(1) 振幅を A，角振動数を ω として，単振動の速度の式から A と ω に関する式をたてなさい。

〔　　　　　　　　　　〕

(2) 単振動の加速度の式から，角振動数を求めなさい。

〔　　　　　　　　　　〕

(3) 振幅は何 m か。

〔　　　　　　　　　　〕

(4) 以上のことから，単振動の変位の式をつくりなさい。

〔　　　　　　　　　　〕

(5) この単振動の周期は何 s か。

〔　　　　　　　　　　〕

2 (6182) M04

単振動をしている物体が，$t=0$〔s〕のとき速度が最大で，その値は0.80 m/s であった。また，変位 x が0.40 m のところの加速度は -1.6 m/s^2 であった。

この運動について単振動の変位の式をつくり，振動数を求めなさい。

式〔　　　　　　　　　　〕

振動数〔　　　　　　　　　　〕

3 (6183) M04

振幅0.50 m で，$t=0$〔s〕のとき速度が最大で，その値が2.0 m/s で単振動している物体について，単振動の変位の式，および $x=0.20$〔m〕での加速度を求めなさい。

式〔　　　　　　　　　　〕

加速度〔　　　　　　　　　　〕

§5 復元力・ばね振り子(1)

M05

§4では，単振動の式・速度・加速度の式を学習しました。このセクションでは，その発展として単振動する物体にはたらく力を運動の第2法則から求め，また，その具体例として，ばね振り子について学習していきます。では，しっかり学習していきましょう。

◇考え方のポイント◇

◆復元力

物体が単振動するのは，その物体に振動の中心からの距離 x に比例し（比例定数 k），つねに振動の中心を向いている力 F が存在するときである。このような力を「復元力」という。

$$F=-m\omega^2x=-kx$$

◆単振動の周期

周期は振幅とは無関係で，おもりの質量 m と比例定数 k の値のみによって定まる。

◆ばね振り子のおもりにはたらく力

おもりがつりあいの位置から x 下がった点で，おもりにはたらく力の合力 F は，ばね定数 k を用いて次の式のように表される。ばね振り子の場合，下向きを正とすると考えやすい。

$$F=-kx$$

◆ばね振り子の周期

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

おもりの質量が大きいほど，振動はゆっくりになる。ばね定数が大きいばねほど，振動は速くなる。

---

1 (0019) [　　] ➲類題 6190　復元力

次の問いに答えなさい。

(1) 角振動数 π〔rad/s〕で単振動している質量 0.20 kg の物体の変位が -0.40 m のときに，物体にはたらいている力は何 N か。

〔　　　　　　　　〕

(2) 単振動する物体にはたらく力と変位の比例定数が，$k=1.0$〔N/m〕のとき，変位が $x=-0.30$〔m〕での物体にはたらく力は何 N か。

〔　　　　　　　　〕

2 (0020) [　　] ➲類題 6200　単振動の周期

質量 1.8 kg の物体が，$F=-0.20x$〔N〕で表される力を受けて単振動している。このときの周期は何 s か。

〔　　　　　　　　〕

3 (0021) [　　] ➲類題 6210　ばね振り子のおもりにはたらく力

ばね定数 9.8 N/m のつるまきばねを鉛直につるして，下端に 0.20 kg のおもりをつけ，つりあいの位置からさらに 0.020 m 下げて手をはなした。重力加速度の大きさを $g=9.8$〔m/s^2〕として，次の問いに答えなさい。

(1) つりあいの位置は，自然の長さより何 m のびたところか。

〔　　　　　　　　〕

(2) このばね振り子の振幅は何 m か。

〔　　　　　　　　〕

(3) つりあいの位置から 1.0 cm 下がった点を通過したとき，おもりに作用している力の合力の大きさはいくらか。

〔　　　　　　　　〕

(4) おもりにはたらく合力が -4.9×10^{-2} N になるのは，おもりがどの位置にきたときか。ただし，鉛直下向きを正の向きとする。

〔　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　〕

4 (0022) □ ➡類題 6220 ばね振り子の周期

ばね定数 10 N/m のばねを鉛直につるし，下端におもりをつけて振動させた。次の問いに答えなさい。

(1) 0.10 kg のおもりをつけると，周期は何 s か。

〔　　　　　　　　〕

(2) 周期を 1.0 s にするには，おもりの質量を何 kg にすればよいか。

〔　　　　　　　　〕

(3) 0.40 kg のおもりをつけると，周期は 0.10 kg のおもりのときの何倍になるか。

〔　　　　　　　　〕

類題トレーニング(6190)

●学習の視点　　§4で学習した単振動の加速度から発展させて，単振動をする物体にはどのような力がはたらいているかを考え，その力の大きさ・向きを調べるのがここでの学習の目的である。

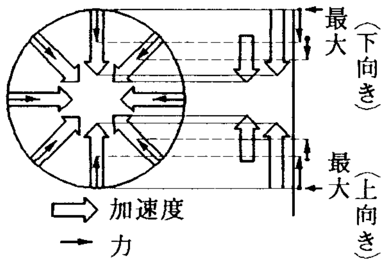
テーマ　復元力

●単振動する物体の加速度は，

$$a=-A\omega^2\sin\omega t=-\omega^2 x$$

●その加速度を生じさせる力は，運動の第2法則 $F=ma$ から求めることができる。向きは加速度の向きと同じである。

●力と加速度の関係を，円運動と対比させると右の図のようになる。



【復元力の大きさと向き】

角振動数 ω で単振動する質量 m の物体の変位が x のとき，その物体にはたらく力は，

$$F=-m\omega^2 x$$

となる。

いま，m や ω は一定であるから，$m\omega^2=k$（正の定数）とおけば，

$$F=-kx$$

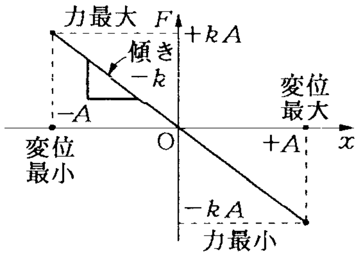
と表される。これが単振動の運動方程式である。

ここで，$x>0$ のとき $F<0$，$x<0$ のとき $F>0$ となるから，この力はつねに振動の中心を向き，大きさは変位 x に比例している。単振動を起こすこのような力を「復元力」という。

■■説　明■■

●復元力　　物体が単振動をするのは，その物体に，振動の中心からの距離に比例して，つねに振動の中心を向いている力が存在するときである。

●$F=-kx$ の図解　　F を縦軸に，x を横軸にとって，F と x の関係をグラフにすると右図のようになる。グラフの傾きが定数 k を表している。



●力の単位　　通常，MKS単位を用いるので特別の指定がないかぎり〔N〕(ニュートン)を用いる。

●力の変化を表す式　　単振動の加速度は，$a=-\omega^2 x$ と表される。これを，$F=ma$ に代入すると，$F=-m\omega^2 x$ というテーマの式が導かれる。ここで x は単振動の変位だから，$x=A\sin\omega t$ と表せる。これを力の式に代入すると，

$$F=-m\omega^2 A\sin\omega t$$

となる。これは，力が時間とともにどう変化するかを表している式である。

1　(6191)　M05

次の問いに答えなさい。

(1)　単振動する物体の質量を m，角振動数を ω，変位を x とするとき，$F=-m\omega^2 x$ で表される F は何を意味しているか。　〔　　　　　　　　　〕

(2) k を定数，変位を x として，$F=-kx$ であたえられる力 F が物体にはたらくとき，物体はどんな運動をするか。

〔　　　　　　　　　　〕

(3) 復元力はどこを向いているか。

〔　　　　　　　　　　〕

2 (6192) M05

質量 0.10 kg の物体が角振動数 $\frac{\pi}{2}$〔rad/s〕で単振動している。次の問いに答えなさい。

(1) 物体の質量を m，角振動数を ω，変位を x としたときの物体にはたらく力 F を求める式を書きなさい。

〔　　　　　　　　　　〕

(2) 変位が 0 m のとき，および 0.20 m のときに物体にはたらいている力はそれぞれ何 N か。

0 m〔　　　　　　　　　　〕

0.20 m〔　　　　　　　　　　〕

(3) $F=2.5\times10^{-2}$〔N〕の力がはたらくのは，物体が振動の中心から何 m 変位したときか。

〔　　　　　　　　　　〕

3 (6193) M05

k を定数として変位 x に比例する力 $F=-kx$〔N〕が物体にはたらくとき，物体は単振動する。$k=0.50$〔N/m〕のとき，次の問いに答えなさい。

(1) $x=0$〔m〕，および $x=0.20$〔m〕のとき物体にはたらく力をそれぞれ求めなさい。

0 m〔　　　　　　　　　　〕 0.20 m〔　　　　　　　　　　〕

(2) $F=1.5$〔N〕となるのは，変位がいくらのときか。

〔　　　　　　　　　　〕

類題トレーニング(6200)

●学習の視点　　復元力の式から，単振動の周期を求める式を導き，単振動の周期の特徴を知ることが，ここでの学習の目的である。ここは重要であるので，しっかり理解しておくこと。

テーマ　単振動の周期

●復元力は，$F=-m\omega^2x=-kx$ である。ここで，定数 k は $k=m\omega^2$ である。

●周期と角振動数の関係は，$T=\dfrac{2\pi}{\omega}$ である。

●これらより，周期を m と k で表すことができる。

【単振動の周期の式】

単振動する物体にはたらく力が $F=-m\omega^2x=-kx$ のとき，周期 T は，

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

【周期の特徴】

T は振幅には無関係で，m と k の値のみによって定まる。

■■説　明■■

●式の導き方　　$F=-m\omega^2x=-kx$ より，$m\omega^2=k$，これを変形して，$\omega=\sqrt{\dfrac{k}{m}}$。これを $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$ に代入すると，

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

となる。

➲この式より，周期は振幅に関係しないことがわかる。

1　(6201)　M05

次の問いに答えなさい。

(1)　単振動する物体にはたらく力 F が $F=-m\omega^2x=-kx$ のとき，$T=2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$ で表される T は何を意味しているか。

〔　　　　　　〕

(2)　単振動の周期は振幅と関係あるか。

〔　　　　　　〕

(3)　単振動する物体の質量が2倍になると周期は何倍になるか。

〔　　　　　　〕

2　(6202)　M05

次の単振動の周期を求めなさい。

(1)　質量3.6 kg の物体が，$F=-0.90x$〔N〕で表される力を受けて単振動している。このときの周期は何 s か。

〔　　　　　　〕

(2)　質量0.32 kg の物体が，$F=-2.0x$〔N〕で表される力を受けて単振動している。このときの周期は何 s か。

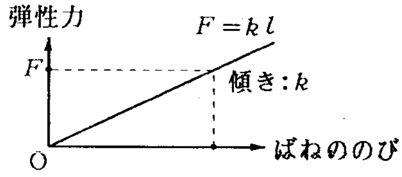
〔　　　　　　〕

類題トレーニング(6210)

●学習の視点　　ばねにおもりをつけて振らせた振り子は，「ばね振り子」とよばれる。ばね振り子は，これまで学習してきた単振動の代表的な例である。ここでは，ばねにつけたおもりにはたらく力を考え，おもりが単振動することを確かめる。

テーマ　ばね振り子のおもりにはたらく力

●ばねののびが l〔m〕のときのばねの弾性力 F〔N〕は，$F=kl$ で表される（フックの法則）。このとき，k〔N/m〕を「ばね定数」という。

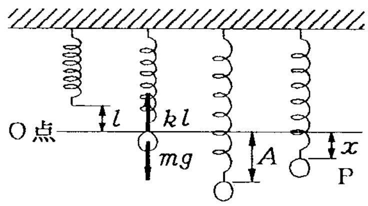


フックの法則

●ばね定数とは，ばねを単位長（1 m）のばすのに必要な力。

●ばね振り子　　ばね定数 k〔N/m〕の軽いつるまきばねを鉛直につるし，下端に質量 m〔kg〕のおもりをつるす。

●つりあいの位置では，おもりに作用している力は，下向きに重力 mg〔N〕，上向きにばねの弾性力 kl〔N〕であるが，つりあっているので，$mg=kl$ である。



●おもりがつりあいの位置 O 点から x〔m〕下がった地点 P 点において作用している力は，下向きに重力 mg〔N〕，上向きにばねの弾性力 $k(l+x)$〔N〕である。差し引き，おもりに加わる力は，

$$F=mg-k(l+x)=mg-kl-kx=-kx$$

【ばね振り子のおもりにはたらく力】

おもりが，つりあいの位置から x〔m〕下がった地点で，おもりに作用している力の合力 F〔N〕は，鉛直下向きを正とすると，

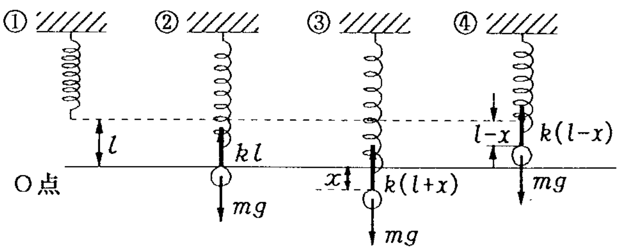
$$F=-kx \quad (k：ばね定数〔N/m〕)$$

となる。ゆえに，おもりはつりあいの位置 O 点を中心として単振動する。

➲鉛直なばね振り子の場合，つりあいの位置が単振動の中心になることが重要である。

■■説　明■■

●おもりにはたらいている力



上の図で②の状態では，$F=mg-kl=0$。③の状態では，$F=mg-k(l+x)=-kx$。したがって合力 F は，上向きに kx〔N〕となる。④の状態では，$F=mg-k(l-x)=kx$。したがって，合力 F は下向きに kx〔N〕となる。

このように，おもりが O 点より下にあるときは，上向きに大きさ kx〔N〕の力が，そして O 点より上にあるときは，下向きに大きさ kx〔N〕の力が作用している。

●ばねを水平面に置いたとき　　なめらかな水平面におもりをつけたばねを置く。このとき重力は関係しない。したがって，つりあいの位置からの変位を x とすると，力は，

$F=-kx$ となる。よって，この場合も，おもりは単振動をする。

➲水平なばね振り子の場合，当然だが，単振動の中心はつりあいの位置（ばねの自然長の位置）である。

● 力の計算　　ばね定数 2.0 N/m のつるまきばねにおもりをつるし，さらに，つりあいの位置から 0.10 m 下がった地点でのおもりにはたらく合力の大きさを求めるには，次のようにする。

$$F=-2.0\times 0.10=-0.20\ [\mathrm{N}]$$

合力の大きさは，0.20 N である。

● ばね振り子の変位　　ばね振り子の変位は，次のように表される。

$$F=-m\omega^2 x=-kx$$

から，

$$k=m\omega^2,\quad 変形して，\quad \omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$$

したがって，

$$x=A\sin\omega t=A\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot t\right)$$

1　(6211)　M05

ばね定数 k のばねにおもりをつけ，鉛直につり下げた。これについて，次の問いに答えなさい。

(1) ばねは長さ l のびてつりあった。このときのばねの弾性力 f と l の関係を表す式を示しなさい。

〔　　　　　　　　　　〕

(2) つりあいの位置からさらに x 下がった点で，おもりにはたらく弾性力と重力の合力 F を表す式を示しなさい。ただし，鉛直下向きを正とする。

〔　　　　　　　　　　〕

(3) ばねにつけたおもりにはたらく力が(2)の式で表されることから，おもりはどんな運動をするか。

〔　　　　　　　　〕

2　(6212)　M05

ばね定数 10 N/m のつるまきばねを鉛直につるして下端におもりをつけ，振幅 5.0 cm で振らせた。次の問いに答えなさい。ただし，鉛直下向きを正の向きとする。

(1) おもりが最下端にきたとき，おもりにはたらく合力はいくらか。

〔　　　　　　　　　　〕

(2) おもりが振動の中心から上方 3.0 cm の地点にきたとき，おもりにはたらく合力はいくらか。

〔　　　　　　　　　　〕

(3) おもりにはたらく合力が，+0.10 N になるのは，おもりがどの位置にきたときか。

〔　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　〕

3　(6213)　M05

なめらかな水平面上に，ばね定数 10 N/m のつるまきばねを置き，一端を固定し，他端におもりをつけて振幅 5.0 cm で振らせた。次の問いに答えなさい。ただし，ばねがのびる方向を正とする。

(1) ばねがもっとものびたとき，おもりにはたらく合力はいくらか。

〔　　　　　　　　〕

(2) おもりが振動の中心にきたとき，おもりにはたらく合力はいくらか。

〔　　　　　　　　〕

(3) おもりにはたらく合力が，＋0.10 N になるのは，おもりがどの位置にきたときか。

〔　　　　　　　　　　〕

4 (6214)　M05

ばね定数4.9 N/m のつるまきばねを鉛直につるして，下端に0.10 kg のおもりをつけ，つりあいの位置からさらに0.10 m 下げて手をはなした。重力加速度の大きさを $g=9.8$ 〔m/s²〕として，次の問いに答えなさい。

(1) つりあいの位置は，自然の長さより何 m のびたところか。

〔　　　　　　　　　　〕

(2) このばね振り子の振幅は何 m か。

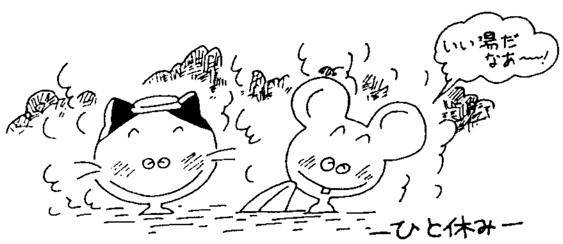
〔　　　　　　　　　　〕

(3) おもりが最下端にきたとき，ばねの弾性力の大きさは何 N か。

〔　　　　　　　　　　〕

(4) つりあいの位置から1.0 cm 下がった点を通過したとき，おもりに作用している力の合力の大きさはいくらか。

〔　　　　　　　　　　〕



類題トレーニング(6220)

●学習の視点　　ばね振り子のおもりは，$F=-kx$ という力を受けて振動をくり返す。ここでは，この周期の表し方，特徴などについて学習する。

テーマ　ばね振り子の周期

●ばね定数 k のばね振り子のおもりにはたらく力 F は，$F=-kx$ で表される。
●角振動数 ω で単振動する質量 m の物体にはたらく力 F は，$F=-m\omega^2x$ である。
●周期は上の2つの式から ω を求めて，$T=\dfrac{2\pi}{\omega}$ に代入すると求められる。

【ばね振り子の周期の式】

質量 m のおもりをつるした，ばね定数 k のばね振り子の周期の式は，

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

➲この周期の式は，しっかり覚えること。

【周期の特徴】

おもりの質量が大きいほど，周期は長くなる。ばね定数が大きい（ばねがのびにくい）ほど，周期は短くなる。

■■説　明■■

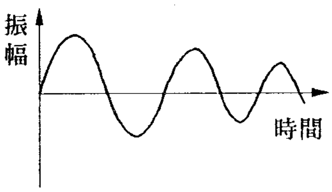
●おもりの質量と周期の関係　　ばね振り子の周期は，$T=2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$ で表せる。したがって周期は $\sqrt{m}$ に比例する。おもりの質量が大きいほど $\sqrt{m}$ も大きくなり，周期も長くなる。

●ばね定数と周期の関係　　周期は $\sqrt{k}$ に反比例する．したがって．ばね定数が大きいほど $\sqrt{k}$ も大きくなり，周期は短くなる。

参考

●減衰振動

普通は，ばねを振動させると，じょじょに振動は小さくなって，やがては止まってしまう。そのようすを横軸に時間をとってグラフにすると，右図のようになる。このような振動のことを，「減衰振動」という。



1　(6221)　M05

ばね振り子の周期について，次の問いに答えなさい。

(1)　おもりの質量を4倍にすると周期は何倍になるか。

〔　　　　　　〕

(2)　ばねをもっと強いものと取りかえたとき，周期はどうなるか。

〔　　　　　　〕

2　(6222)　M05

なめらかな水平面上に，ばね定数1.0 N/mのばねを置き，一端を固定し，他端におもりをつけて振動させた。このとき，次の問いに答えなさい。

(1) おもりの質量が0.16 kg のとき，周期は何 s か。

〔　　　　　　　　〕

(2) おもりの質量が4.0 kg のとき，周期は何 s か。

〔　　　　　　　　〕

3 (6223) M05

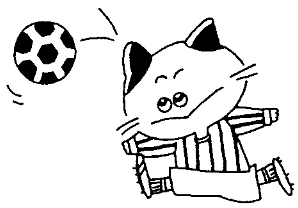
質量100 g のおもりをつるすと9.8 cm のびるばねを鉛直につるし，下端に質量81 g のおもりをつけて振動させた。次の問いに答えなさい。ただし，重力加速度の大きさを9.8 m/s^2 とする。

(1) ばね定数は何 N/m か。また，振動の周期は何 s になるか。

ばね定数〔　　　　　　〕 周期〔　　　　　　〕

(2) 周期を2.0 s にするには，おもりの質量を何 kg にすればよいか。

〔　　　　　　　　〕



§6 ばね振り子(2)

M06

§5では，復元力と，ばね振り子について学習しました。ばね振り子については，いろいろな場合が考えられます。そこで，このセクションでは，ばね振り子についての代表的な場面を問題を通して考えていきます。なお，平方根（$\sqrt{\quad}$）の数値計算では，電卓または平方根表を用いて計算しなさい。（今後とも同じようにしなさい。）

◇考え方のポイント◇

◆ばね定数や，おもりの質量があたえられていない場合

ばね定数は，つりあいの条件から求める。すなわち，　$mg = kl$

おもりの質量があたえられてない場合は，とりあえず質量を文字 m として計算を進める。

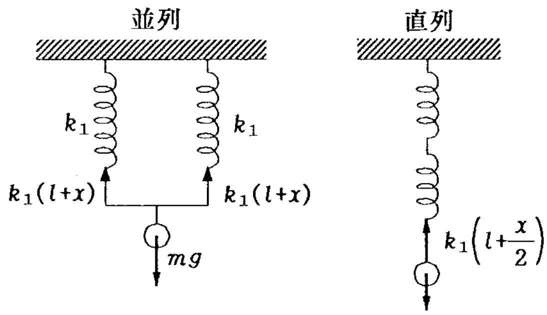
◆接続されたばね振り子の周期

ばね定数 k_1 の等しいばねを2本並列につないだとき，全体のばね定数 k は1本のときの2倍になる。

$$k = 2k_1$$

ばね定数 k_1 の等しいばねを2本直列につないだとき，全体のばね定数 k は1本のときの $\frac{1}{2}$ 倍になる。

$$k = \frac{k_1}{2}$$

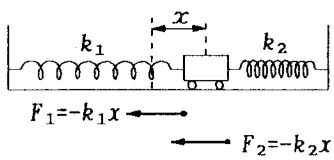


◆2個のばねにはさまれた物体の運動

物体が運動する方向にはたらいている力をすべて書きだす。

その合力を求め，$F = -kx$ の形をつくる。

ばね定数 k_1，k_2 の2本のばねにはさまれた物体にはたらく力は，それぞれのばねが物体におよぼす力の合力である。

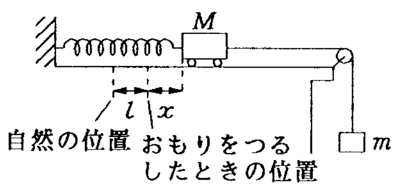


$$F = (-k_1x) + (-k_2x) = -(k_1 + k_2)x$$

よって，物体は単振動する。

◆ばねとおもりの影響を受ける物体の運動

変位 x において，物体が運動する方向にはたらいている力をすべて書きだし，運動方程式をつくる。



この物体にはたらく合力 F が，

$$F = -kx \quad (k \text{ は定数})$$

の形で表されれば，この物体は単振動をする。

1 (0023) □ ➲類題 6230 ばね振り子の振動数

軽くて，重さの無視できるつるまきばねを垂直につるし，下端におもりをつけたら，ばねののびは4.9 cm であった。さらにおもりを少し下へ引いて手をはなすと，おもりは単振動をした。重力加速度の大きさを $g=9.8$〔m/s^2〕として，次の問いに答えなさい。

(1) この単振動の周期はいくらか。

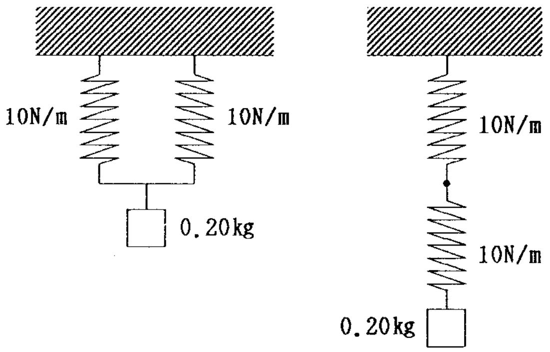
〔　　　　　　〕

(2) この単振動の振動数はいくらか。

〔　　　　　　〕

2 (0024) □ ➲類題 6240 接続されたばね振り子の周期

ばね定数が 10 N/m の2つの同じ軽いばねがある。おもりの質量を 0.20 kg，重力加速度の大きさを $g=9.8$〔m/s^2〕として，次の問いに答えなさい。



(1) 2本を並列につないで鉛直につるしたときの，ばね振り子の周期を求めなさい。

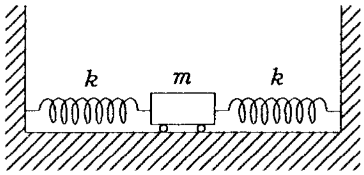
〔　　　　　　〕

(2) 2本を直列につないで鉛直につるしたときの，ばね振り子の周期を求めなさい。

〔　　　　　　〕

3 (0025) □ ➲類題 6250 2個のばねにはさまれた物体の運動

なめらかな水平面上に置かれた質量 m〔kg〕の物体に，右図のように同じばね定数 k〔N/m〕のばねが連結され，いずれも自然の長さになっている。次の問いに答えなさい。



(1) 物体を右のばねのほうに少し動かしてからはなすと，物体は単振動することを示しなさい。

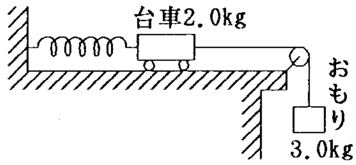
〔　　　　　　〕

(2) そのときの周期は何 s か。

〔　　　　　　〕

4 (0026) □ ➲類題 6260 ばねとおもりの影響を受ける物体の運動

図のように，なめらかな机の上に置いた質量 2.0 kg の台車に，ばね定数 98 N/m のばねをつけ，その端を固定する。さらに，台車に軽い糸をつけ，滑車を通した糸の先に質量 3.0 kg のおもりをつるした。これについて，次の問いに答えなさい。



(1) つりあって静止したときのばねののびは何 m か。ただし，重力加速度の大きさを 9.8 m/s^2 とする。

〔　　　　　　〕

(2) つりあいの位置から右に x〔m〕ずれたところまでおもりを下げて静かにはなすと，おもりが単振動をした。そのときの角振動数は何 rad/s か。

〔　　　　　　〕

(3) (2)のときの周期はいくらか。 〔　　　　　　〕

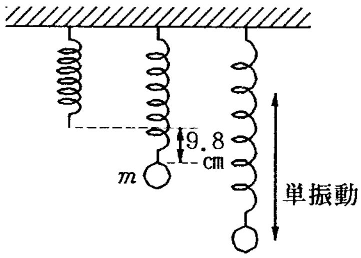
類題トレーニング(6230)

●例題の視点　　ここではばね定数があたえられていない場合について，どのような方法で周期，あるいは振動数を求めていくのかを学習する。

基本例題　ばね振り子の振動数

軽くて，重さを無視できるつるまきばねを垂直につるし，下端におもりをつけたら，ばねののびは9.8 cmであった。そのままおもりを少し下へ引いて手をはなしたとき，その振動数はいくらになるか。ただし，重力加速度の大きさを9.8 m/s^{2}とする。

●振動数と周期の関係を用いて，周期から振動数を求める問題。周期は，ばね定数と質量からわかる。
●おもりの質量がわかっていないので，ばね定数は具体的な値としては求まらない。



■■考え方■■

重力と弾性力のつりあいの式 $mg=kl$ の関係からばね定数 k を求める。ただし，おもりの質量はあたえられていないので，かりに m〔kg〕としておく。

周期の式 $T=2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$ に，上で求めた k を代入する。

振動数と周期の関係は，$f=\dfrac{1}{T}$ である。

■■解　答■■

おもりの質量を m〔kg〕として，ばねののびを l〔m〕，ばね定数を k〔N/m〕，重力加速度の大きさを g〔m/s^2〕とすると，$l=9.8\times10^{-2}$〔m〕，$g=9.8$〔m/s^2〕だから，

$$m\times9.8=k\times9.8\times10^{-2}\qquad\therefore\quad k=\frac{m\times9.8}{9.8\times10^{-2}}=100m\ \text{〔N/m〕}$$

よって周期 T は，

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}=2\times3.14\times\sqrt{\frac{m}{100m}}=2\times3.14\times0.1=0.628\fallingdotseq0.63\ \text{〔s〕}$$

これより，　$f=\dfrac{1}{T}=\dfrac{1}{0.628}=1.59\cdots\fallingdotseq1.6$〔Hz〕

答え　1.6 Hz

□ここがポイント!□

◆のびがあたえられている場合はばね定数 k は，$mg=kl$ から求める。
◆おもりの質量があたえられていない場合は，とりあえず m として計算を進める。

■1 (6231) M06

軽くて，重さを無視できるつるまきばねを鉛直につるし，下端におもりをつけたら，ばねののびは 20 cm であった。そのままおもりを少し下へ引いて手をはなしたとき，おもりは単振動をした。重力加速度の大きさを $9.8\,\mathrm{m/s^2}$ として，次の問いに答えなさい。

(1) おもりの質量を m とすると，ばね定数は何 N/m になるか。

〔　　　　　　　　〕

(2) 周期の式から，この振動の周期を求めなさい。

〔　　　　　　　　〕

(3) この振動の振動数は何 Hz か。

〔　　　　　　　　〕

■2 (6232) M06

軽くて，重さを無視できるつるまきばねを鉛直につるし，下端におもりをつけたら，ばねののびは 19.6 cm であった。そのままおもりを少し下へ引いて手をはなしたとき，その振動数は何 Hz になるか。ただし，重力加速度の大きさを $9.80\,\mathrm{m/s^2}$ とする。

〔　　　　　　　　〕

■3 (6233) M06

自然の長さが L で，軽くて重さの無視できるつるまきばねを鉛直につるし，下端に質量 m のおもりをつるしたところ，ばねが l だけのびたところでつりあって静止した。次に，おもりを支え上げて，ばねを自然の長さまでもどして手をはなした。このときの振動数を g，l を用いて表しなさい。ただし，重力加速度の大きさを g とする。

〔　　　　　　　　〕

類題トレーニング(6240)

● **例題の視点**　ここでは，2本のばねを並列や直列につないで振動させたとき，その周期がどのように表されるかを学習する。おもりにはたらく力をきちんと表すところがたいせつである。

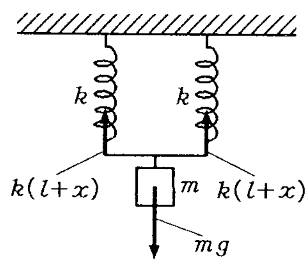
基本例題　接続されたばね振り子の周期

ばね定数 k〔N/m〕の同じ長さの軽いばね2本を並列につないで鉛直につるしたときの，ばね振り子の周期を求めなさい。ただし，おもりの質量は m〔kg〕，重力加速度の大きさは g〔m/s^2〕とする。

● つりあったときのばねののびを l とし，つりあいの位置からさらに x 下がった点について，問題の内容を図にかくと右のようになる。

● おもりに上向きにはたらく力は，2本のばねの弾性力である。

● 下向きには，重力がはたらいている。



■■考え方■■

つりあいの位置からの変位を x とする。そのときの力が，

$F=-kx$

の形になれば，周期は，　$T=2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$

より求められる。

➲力を考えるときには，向きに注意する必要があるので，図をうまく利用するとよい。

■■解　答■■

つりあったときのばねののびを l〔m〕とし，つりあいの位置からさらに x〔m〕下がった地点で考える。その場所でおもりにはたらいている力は，下向きに重力 mg〔N〕，上向きに $2k(l+x)$〔N〕である。したがって，おもりにはたらく合力 F は，下向きを正として，　$F=mg-2k(l+x)$

ここで，つりあい位置では，$mg=2kl$ だから，

$F=2kl-2k(l+x)=-2kx$

よって，$K=2k$ とすると，$F=-Kx$ となるので，おもりは単振動をする。したがって，ばね定数が $2k$ のばね振り子と考えてよいから，周期 T は，

$T=2\pi\sqrt{\dfrac{m}{2k}}$〔s〕　　答え　$2\pi\sqrt{\dfrac{m}{2k}}$〔s〕

➲このように，同じばね（ばね定数 k）を2本並列につないだときは，ばね定数が $2k$ であるばねが1本あるときと同じであると考えてよい。（これは電気のコンデンサーの電気容量の合成のときの並列接続の場合と似ている。）

なお，ばね定数が k_1，k_2 のばねを2本並列につないだときの，合成ばね定数を k とすると，次の関係がある。

$K=k_1+k_2$

別解

同じばね（ばね定数 k）を2本並列につないだときは，ばね定数が $2k$ であるばねが1本あるときと同じであると考えてよい。したがって，周期を T とすると，

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}}\,〔\mathrm{s}〕$$

答え　$2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}}$〔s〕

□ここがポイント!□

◆並列につないだばねの弾性力と重力の合力を考える。
◆つりあいの位置では，$mg=2kl$ となる。
◆$F=-kx$ の形になれば，単振動である。

1　(6241)　M06

おもりにばね定数 k〔N/m〕の同じ長さの軽いばね２本を並列につないで鉛直につるした。おもりの質量を m〔kg〕，重力加速度大きさを g〔m/s^2〕として，次の問いに答えなさい。

(1)　つりあいの位置でのばねののびを l〔m〕とし，さらに x〔m〕下がった場所で，２つのばねの弾性力の合力は何 N か。

〔　　　　　　　　〕

(2)　おもりにはたらく力（(1)の弾性力と重力の合力）F を，k と x で表せ。

〔　　　　　　　　〕

(3)　このときの振動の周期は何 s か。

〔　　　　　　　　〕

2　(6242)　M06

おもりにばね定数5.0 N/m の同じ長さの軽いばね２本を並列につないで鉛直につるして上下に振動させた。おもりの質量を 0.10 kg として，次の問いに答えなさい。

(1)　つりあいの点から x〔m〕下がった場所で，おもりにはたらく力の大きさは何 N か。

〔　　　　　　　　〕

(2)　この振動の周期は何 s か。

〔　　　　　　　　〕

3　(6243)　M06

ばね定数 k〔N/m〕の２つの同じ軽いばねを直列につなぎ，上端を固定して下端に質量 m〔kg〕のおもりをつるした。この物体が上下に振動するときの周期を求めなさい。

〔　　　　　　　　〕

ヒント　直列につないだ２本のばねがそれぞれ l のびると，全体ののびは $2l$ となる。また，２本のばねの両端でのばねの弾性力の大きさは等しく，２本のばねの間ではたらく力は，作用・反作用の関係にあって同じ大きさである。これらをもとに，おもりの変位と力の関係式を求める。

4　(6244)　M06

ばね定数4.0 N/m の２つの同じ軽いばねを直列につなぎ，上端を固定して下端に質量0.020 kg のおもりをつけて鉛直につるした。おもりが上下に振動するとき，次の問いに答えなさい。

(1)　つりあいの点を原点とし，下向きを正とするとき，おもりの変位が -0.020 m になるときのおもりにはたらく力は何 N か。

〔　　　　　　　　〕

(2)　この振動の周期は何 s か。

〔　　　　　　　　〕

類題トレーニング(6250)

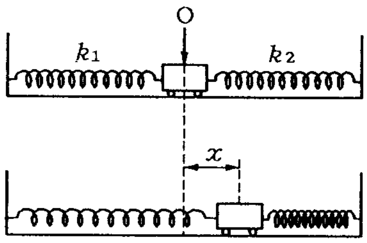
● 例題の視点　　ここでは，水平に置かれた2つのばねの中間に物体を置き，これを振動させたときの運動について考える。2つのばねから物体にはたらく力，およびその力と変位との関係を導くのがポイントである。

基本例題　2個のばねにはさまれた物体の運動

なめらかな水平面上に置かれた質量 m〔kg〕の物体の左右に，それぞれ，ばね定数 k_1，k_2〔N/m〕のばねが連結され，いずれのばねも自然の長さになるように他端が固定されている。

物体を右のばねのほうに少し動かしてからはなすと，物体は単振動をすることを示しなさい。また，その周期は何 s か。

● 問題の内容を図にかくと右のようになる。変位が x〔m〕のとき，物体にはたらく力がどのようになるかを考えるのである。



■■考え方■■

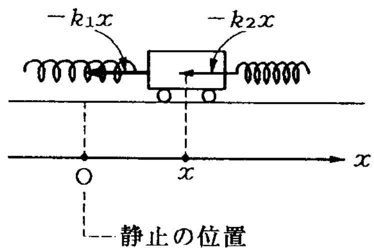
物体の静止の位置（つりあいの位置）を O 点とし，変位 x〔m〕の場所で左右のばねが物体にどれだけの力をおよぼしているかを考える。

その2つの合力を求め，これが $F=-kx$ の形になっていれば，単振動していることになる。

次に k の値を，k_1，k_2 を用いて表し，周期の式に代入して周期を求める。

■■解　答■■

右向きを正として x 軸を図のように表しておくと，左のばねが物体におよぼす力 F_1 は，ばねがのびているので，$F_1=-k_1x$ となる。また，右のばねが物体におよぼす力 F_2 は，ばねが縮んでいるので，$F_2=-k_2x$ となる。



したがって，物体にはたらくこれらの力の合力 F〔N〕は，

$$F=-k_1x+(-k_2x)=-(k_1+k_2)x$$

$k_1+k_2=k$ とおくと，$F=-kx$

よって，この物体は単振動をする。

$k=k_1+k_2$ であるから，$T=2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$ に代入して，周期を求めると，

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1+k_2}}\ \text{〔s〕}$$

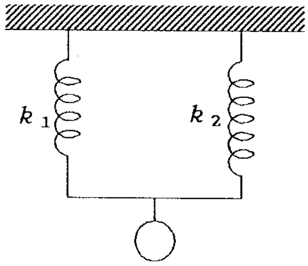
答え　周期…$2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k_1+k_2}}$〔s〕

研究

この問題のように，ばね定数 k_1，k_2 の2本のばねにはさまれた物体の運動では，合成ばね定数 k が，

$$k = k_1 + k_2$$

の1本のばねとしてはたらいているとみなすことができる。これは，右図のように，2本のばねを並列にした場合の合成ばね定数の考え方に似ている。



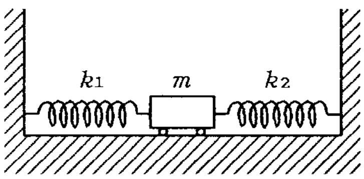
□ここがポイント!□

- ◆物体の運動する方向にはたらいているすべての力を図にかきだして，物体にはたらく合力を求める。
- ◆2つのばねで，変位や力の向きは共通にとる。
- ◆k を定数，変位を x としたとき，物体にはたらく力が $F = -kx$ であたえられる運動は単振動である。

---

1 (6251) M06

なめらかな水平面上に置かれた質量 m〔kg〕の物体に，図のようにばね定数 k_1，k_2〔N/m〕のばねが連結され，いずれのばねも自然の長さになっている。次の問いに答えなさい。



(1) 物体を右のほうに x〔m〕だけ動かしたとき，左右のばねが物体におよぼしている力はそれぞれ何 N か。右向きを正として求めなさい。

左のばね〔　　　　　〕 右のばね〔　　　　　〕

(2) 物体を右のほうに x〔m〕だけ動かしてからはなすと，物体は単振動することを示せ。

［　　　　　　　　　　］

(3) そのときの周期は何 s か。

〔　　　　　〕

2 (6252) M06

なめらかな水平面上に置かれた質量 0.20 kg の物体に，ばね定数 12 N/m，8.0 N/m の2つのばねが図のように連結され，ばねは自然の長さになっている。いま，物体を右のほうへ少し動かしてからはなすと，物体は単振動することを示せ。また，その周期は何 s か。

［　　　　　　　　　　］

周期〔　　　　　〕

3 (6253) M06

なめらかな水平面上に置かれた質量 0.40 kg の物体に，同じ強さの2つのばねが図のように連結され，ばねは自然の長さになっている。いま，物体を右へ少し動かしてからはなしたら，物体は周期 2.0 s で振動した。このばねの，ばね定数は何 N/m か。

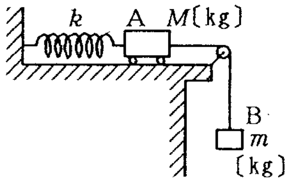
〔　　　　　〕

類題トレーニング(6260)

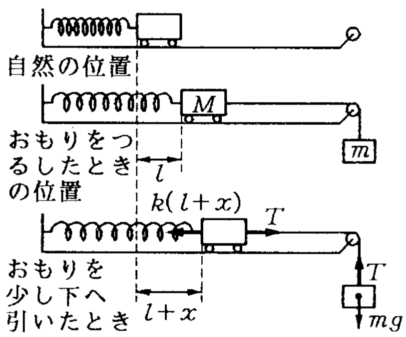
●例題の視点　運動の第2法則を用いて，物体にはたらいている力を表し，それと単振動の加速度の式を比較することがポイントである。

基本例題　ばねとおもりの影響を受ける物体の運動

図のように，なめらかな机の上に置いた質量 M〔kg〕の台車 A に，ばね定数 k〔N/m〕のばねをつけ，その端を固定する。さらに台車 A には軽い糸をつけ，その糸は滑車を通して，その先に質量 m〔kg〕のおもり B をつるしたら，台車は l〔m〕動いてつりあった。おもり B を少し下へ引いてからはなすとき，その振動の周期は何 s になるか。



●つりあいの位置からの変位を x，糸の張力を T として，問題の内容を図にかくと，右のようになる。

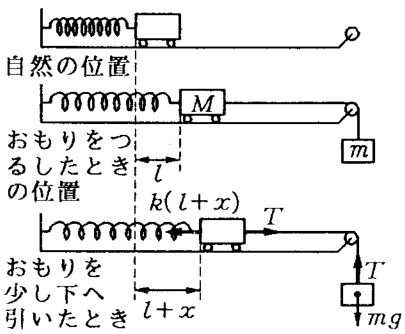


■■考え方■■

●つりあいの位置（図の l のびた位置）より台車 A の変位が x〔m〕の点 P において，台車 A について運動方程式をたてる。図のように，左向きにはばねの弾性力 $k(l+x)$，右向きには糸の張力 T がはたらいている。

●この状態でおもり B についても運動方程式をたてる。図のように，上向きには張力 T，下向きには重力 mg がはたらいている。

●2つの運動方程式から T を消去して物体の加速度 a を求める。



●次に，$F=-kx$ の形で表されることから，台車 A が単振動することを確かめる。

●そして，$a=-\omega^2x$ の関係から ω を出し，さらに周期を求める。

■■解　答■■

つりあいの位置を図のように，自然の位置から右へ l〔m〕のところとする。台車 A がつりあいの位置から右へ x だけ変位しているときの台車 A についての運動方程式をたてる。加速度を a として，右向きを正とすると，

$T-k(l+x)=Ma$　………①

おもり B について運動方程式をたてる。下向きを正とすると，

$mg-T=ma$　………②

①，②より T を消去すると，

$mg-k(l+x)=(M+m)a$　………③

一方，$mg=kl$ であるから③は，　$-kx=(M+m)a$

となる。ゆえに加速度 a は，

$$a=-\frac{kx}{M+m} \quad \cdots\cdots④$$

台車にはたらく合力を F とすると，

$$F=Ma=-\frac{Mk}{M+m}x$$

よって，$K=\dfrac{Mk}{M+m}$ とすると，$F=-Kx$ という形で表されるから，台車は単振動をすることがわかる。

ここで，角振動数を ω とすると，$a=-\omega^2 x$ であるから，この式に④を代入すると，

$$-\frac{kx}{M+m}=-\omega^2 x \qquad \therefore \quad \omega=\sqrt{\frac{k}{M+m}} \quad \cdots\cdots⑤$$

⑤を単振動の周期と角振動数の関係式に代入すると，

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{M+m}{k}}\ \text{〔s〕}$$

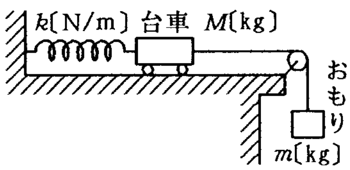
答え　$2\pi\sqrt{\dfrac{M+m}{k}}$ 〔s〕

□ここがポイント!□

◆変位 x において運動方程式をたて，物体の加速度を求める。
◆運動方程式はそれぞれの物体についてたてる。糸の張力を忘れないようにする。
◆次に，$F=-kx$ の形で表されることから，物体が単振動することを確かめる。
◆そして，次に角振動数を求めてから周期を求める。

1　(6261)　M06

図のように，なめらかな机の上に置いた質量 M〔kg〕の台車にばね定数 k〔N/m〕のばねをつけ，その端を固定する。さらに台車に軽い糸をつけ，滑車を通した糸に質量 m〔kg〕のおもりをつるしたら，台車は l〔m〕動いてつりあった。次に，おもりを少し下へ引いてはなした。次の問いに答えなさい。



(1)　つりあいの位置から右に x〔m〕ずれたところで台車にはたらいている力の合力を求めなさい。ただし，糸の張力を T〔N〕，右向きを正とする。

〔　　　　　　　　　　〕

(2)　台車とおもり，それぞれについて運動方程式をたてなさい。ただし，加速度は a〔m/s²〕，下向きを正とする。

台車〔　　　　　　　　　　〕

おもり〔　　　　　　　　　　〕

(3)　これらのことから，加速度 a を M，m，k，x で表しなさい。

〔　　　　　　　　　　〕

(4)　台車にはたらく合力を F として，台車が単振動することを確かめなさい。

（　　　　　　　　　　）

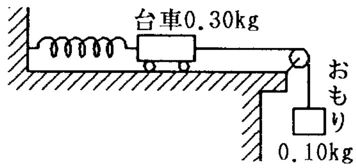
(5)　この振動の角振動数は何 rad/s か。また，周期は何 s か。

角振動数〔　　　　　　　　　　〕

周期〔　　　　　　　　　　〕

2 (6262) M06

図のように，なめらかな机の上に置いた質量0.30 kgの台車に，ばね定数10 N/mのばねをつけ，その端を固定する。さらに，台車に軽い糸をつけ，滑車を通した糸の先に質量0.10 kgのおもりをつるした。これについて，次の問いに答えなさい。



(1) つりあって静止したときのばねののびは何mか。ただし，重力加速度の大きさを9.8 m/s^{2}とする。

〔　　　　　　　　〕

(2) つりあいの位置から右に x〔m〕ずれたところで，台車，おもり，それぞれについて運動方程式をたてなさい。ただし，加速度を a〔m/s^2〕，糸の張力を T〔N〕とする。

台車〔　　　　　　　　〕

おもり〔　　　　　　　　〕

(3) これらのことから，加速度 a を求めなさい。

〔　　　　　　　　〕

(4) 台車にはたらく合力を F として，台車が単振動することを確かめなさい。

(　　　　　　　　)

(5) この振動の角振動数は何rad/sか。また，周期は何sか。

角振動数〔　　　　　　　　〕　周期〔　　　　　　　　〕

§7 単振り子

M07

§5，6と単振動の代表的な例としてばね振り子を学習しました。このセクションでは，単振動のもう1つの代表的な例として，「単振り子」について学習します。

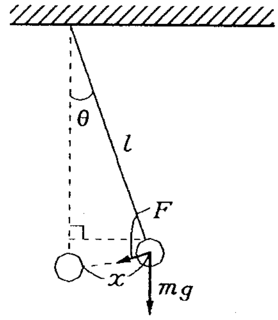
単振り子というのは，糸の先におもりをつけて，これを鉛直面内で振らせたもの，すなわち，私たちがごく普通に振り子とよんでいるものです。では，この単振り子について学習していきましょう。

◇考え方のポイント◇

◆単振り子のおもりを単振動させる力

$$F=-mg\frac{x}{l}\quad（右向きを正とする）$$

ただし，糸の振れは小さい範囲である。



◆単振り子の周期

長さが l の単振り子の周期は，

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

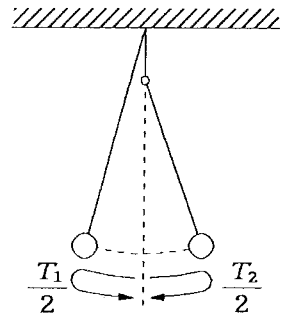
◆単振り子の特徴

単振り子の周期は，糸の長さだけで決まり，$T\propto\sqrt{l}$ である。おもりの質量や振幅には関係しない（振り子の等時性）。

◆振り子の長さが変わる場合

鉛直線をさかいに長さが変わるとき，鉛直線の左右でべつべつの振り子を考える。このときの周期は，それぞれの振り子の $\frac{1}{2}$ 周期の和になる。

$$T=\frac{T_1+T_2}{2}$$



◆加速度運動している物体内での単振り子

上向きの加速度 a で振り子が運動するとき，おもりに下向きにはたらく力は，重力と慣性力の合力と考える。

このときの振り子の周期は，

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g+a}}$$

1 (0027) ☐ ➡類題6270 単振り子の単振動

長さ1.0 m の糸の先に0.40 kg のおもりをつけた単振り子がある。重力加速度の大きさを9.8 m/s^2 として，次の問いに答えなさい。ただし，右向きを正とし，おもりの大きさは無視できるとする。

(1) おもりを鉛直線から0.10 m 右に引いてからはなすとき，おもりに単振動をさせている力は何 N か。

〔　　　　　　　　〕

(2) おもりが最下点を通過するとき，おもりに単振動させている力は何 N になっているか。

〔　　　　　　　　〕

2 (0028) □ ➡類題 6280 単振り子の周期

次の問いに答えなさい。ただし，重力加速度の大きさを $g=9.8$〔m/s^2〕とする。

(1) 糸の長さが 0.50 m の単振り子の周期はいくらか。

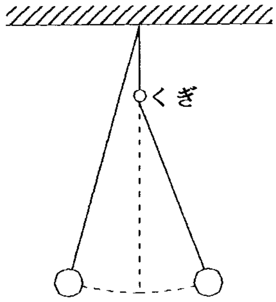
〔　　　　　　〕

(2) 周期が 4.0 s の単振り子をつくるには，糸の長さをいくらにすればよいか。

〔　　　　　　〕

3 (0029) □ ➡類題 6290 長さの変わる単振り子

長さ 4.0 m の単振り子がある。いま，振り子の支点から鉛直下方 0.40 m のところに細いくぎを打ちつけた。この単振り子を，くぎの鉛直下方からわずかに左に引いてはなしたとき，次の問いに答えなさい。ただし，重力加速度の大きさを 9.8 m/s^2 とする。



(1) 鉛直線の左半分での単振り子の周期 T_1 は何 s か。

〔　　　　　　〕

(2) 鉛直線の右半分での単振り子の周期 T_2 は何 s か。

〔　　　　　　〕

(3) この単振り子の周期は何 s か。

〔　　　　　　〕

4 (0030) □ ➡類題 6300 エレベーター内での単振り子

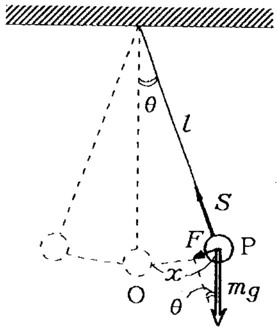
停止していたエレベーターが，一定の割合で速度を増しながら上昇し，10 s 後には 20 m/s になった。このエレベーターの中で，糸の長さ 2.0 m の単振り子を振らせたとき，周期は何 s になるか。ただし，重力加速度の大きさを $g=9.8$〔m/s^2〕とする。

〔　　　　　　〕

類題トレーニング(6270)

●学習の視点　　ここでは，単振り子のおもりにはどのような力がはたらいているのかを考え，単振り子も単振動の仲間であることを学習する。

テーマ　単振り子の単振動



●右図のように長さ l〔m〕の軽い糸の一端を固定し，他端に質量 m〔kg〕のおもりをつけて鉛直につるす。

おもりを鉛直線より少し横に引いてからはなすと，おもりの最下点 O 点を中心として振動する。これが「単振り子」である。

●おもりを接線方向に加速させる力は，重力の接線方向の成分

$$F = mg\sin\theta$$

だけである。

●糸の振れが小さいとき，つまり θ が小さいときは，O 点から円周に沿った変位を x〔m〕とすると，

$$\sin\theta \fallingdotseq \theta = \frac{x}{l}$$

として扱うことができる。

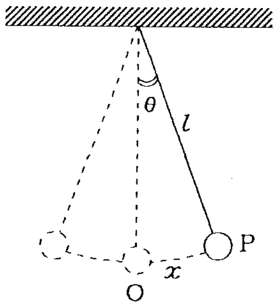
【単振り子の単振動】

糸の振れの角 θ が小さいとき，糸の長さ l のふりこの変位を x（右向きを正とする）とし，力の向きが変位 x と逆向きであることを考慮すると，おもりを接線方向に加速する力 F は，右向きを正として，次のように表される。

$$F = -mg\frac{x}{l}$$

ここで，$\dfrac{mg}{l} = k$ とおけば，$F = -kx$ となり，おもりは単振動することがわかる。

■■説　明■■



●おもりにはたらく力　　単振り子のおもりには重力 mg，張力 S がはたらいているが，おもりを接線方向に加速させる力は重力の接線成分だけである。糸の鉛直線となす角を θ とすれば，

$$F = mg\sin\theta$$

●$\sin\theta = \dfrac{x}{l}$ としてよいわけ　　おもりの O 点からの変位（$\overset{\frown}{\mathrm{OP}}$）を x〔m〕とする。糸の振れが小さいとき，つまり θ が小さいとき $\sin\theta \fallingdotseq \theta$ とみなせる。$l\theta = x$ より，$\theta = \dfrac{x}{l}$ だから $\sin\theta = \dfrac{x}{l}$ として扱うことができる。

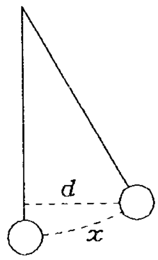
➲§1の「弧度法」より，中心角 θ，半径 l の弧の長さ x には，$x = l\theta$ の関係がある。

●力の計算　　長さ 1.0 m の糸の先に 0.20 kg のおもりをつけ，鉛直線から 5.0 cm 右に引いてからはなしたとき，おもりがもっとも左に達したときにおもりにはたらいている力 F は，

$$F=-0.20\times9.8\times\frac{(-0.050)}{1.0}=0.098\,[\mathrm{N}]$$

➡おもりがもっとも左に達したときの力だから，$x=-0.050$〔m〕として代入する。すなわち，$F>0$ となったので，右向きに 9.8×10^{-2}N である。

●変位のとり方　実際に単振動を実験で調べたりするときには，変位として右図の d を測る。これは，弧の長さ x は測定しにくく，振れの角が小さいときには，$x\fallingdotseq d$ としてさしつかえないからである。



研究

● θ と $\sin\theta$ の値

θ が小さい場合と大きい場合について，θ と $\sin\theta$ の値を比べると次の表のようになる。このことから，θ が小さい場合は，$\sin\theta\fallingdotseq\theta$ としてよいことがわかる。

θ が小さいとき

角度	θ〔rad〕	$\sin\theta$
1°	0.0175	0.0175
2°	0.0349	0.0349
3°	0.0524	0.0523
4°	0.0698	0.0698
5°	0.0873	0.0872

θ が大きいとき

角度	θ〔rad〕	$\sin\theta$
35°	0.6109	0.5736
40°	0.6981	0.6428
45°	0.7854	0.7071
50°	0.8727	0.7660
55°	0.9599	0.8192

1 (6271) M07

単振り子について，次の問いに答えなさい。

(1) 単振り子のおもりにはたらく力が $F=-mg\frac{x}{l}$ で表される F は，おもりにどのような運動をさせるか。

〔　　　　〕

(2) 単振り子が単振動をするのは糸の振れ角がどのようなときか。

〔　　　　〕

2 (6272) M07

長さ1.0mの糸の先に0.20kgのおもりをつけた単振り子がある。重力加速度の大きさを9.8 $\mathrm{m/s^2}$ として，次の問いに答えなさい。ただし，右向きを正とし，おもりの大きさは無視できるとする。

(1) おもりを鉛直線から0.10m右に引いてからはなすとき，おもりに単振動をさせている力は何Nか。

〔　　　　〕

(2) おもりが最下端を通過するとき，おもりに単振動をさせている力は何Nになっているか。

〔　　　　〕

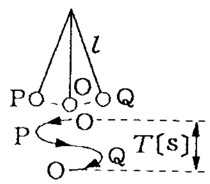
(3) おもりが最下端を通りすぎて，最下端から左へ0.12mの点を通過するとき，おもりに単振動をさせている力は何Nか。

〔　　　　〕

類題トレーニング(6280)

●学習の視点　　ここでは，単振り子の周期がどのように表されるか，また，その特徴について学習する。

テーマ　単振り子の周期



●おもりを単振動させる力は，　$F=-mg\dfrac{x}{l}$

●一方，角振動数 ω で単振動をする物体にはたらく力は，
$F=-m\omega^2x$ で表される。

●この2式より，$\dfrac{mg}{l}=m\omega^2$，$\omega=\sqrt{\dfrac{g}{l}}$ となる。

●長さ l の単振り子は角振動数 $\omega=\sqrt{\dfrac{g}{l}}$ の単振動をするといえる。

【単振り子の周期】

長さが l の単振り子の周期は，　$T=\dfrac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$

【単振り子の特徴】

周期は糸の長さだけで決まり，$T\propto\sqrt{l}$ である。おもりの質量には関係しない。これを「振り子の等時性」という。

■■説　明■■

●重力加速度の影響　　単振り子の周期は，糸の長さだけで決定するが，もともと重力の影響を受けているのであるから，重力加速度の異なる場所に行けば，同じ長さの単振り子でも周期は異なる。

●周期の計算　　長さ 0.20 m の単振り子の周期は次のように求める。

$$T=2\pi\sqrt{\frac{0.20}{9.8}}=0.897\cdots\fallingdotseq0.90\ \text{〔s〕}$$

●周期の式の覚え方　　ばね振り子の周期の式は $T=2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$，

単振り子では $T=2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$ である。いずれも，

$$T=2\pi\sqrt{\frac{■}{●}}$$

の形をしている。そこで，$\sqrt{}$ の中は，

◆分母は，定数（ばね定数や重力加速度）

◆分子は，振り子の条件（ばねにつけたおもりの質量や単振り子の長さ）

と覚えるとよい。

参考

●強制振動

公園でブランコに子供が乗って，お母さんがうしろから調子を合わせておしている。このような光景はよく見かける。実は，このブランコの振動はお母さんによって強制的に止まることなく振られているのである。このような，外からの力を受けて振動が持続したり，大きくなったり，あるいは小さくなったりする現象を「強制振動」という。

1 (6281) M07

単振り子の周期について，次の問いに答えなさい。

(1) 単振り子の長さを l，重力加速度の大きさを g とするとき，周期 T を l，g を用いて表しなさい。

〔　　　　　　　　　　　　　　　　　　　〕

(2) 単振り子で，おもりの重さを2倍にすると，周期は何倍になるか。

〔　　　　　　　　　　　　〕

(3) 糸の長さを2倍にすると，周期は何倍になるか。また，4倍になるとどうか。

2倍のとき〔　　　　　　　　〕 4倍のとき〔　　　　　　　　〕

2 (6282) M07

糸の長さが次のような単振り子の周期を求めなさい。ただし，重力加速度の大きさを $g=9.8$〔m/s^2〕とする。

(1) 糸の長さが0.20mのとき

〔　　　　　　　　〕

(2) 糸の長さが0.80mのとき

〔　　　　　　　　〕

(3) 糸の長さが0.40mのとき

〔　　　　　　　　〕

3 (6283) M07

周期が次のような単振り子をつくるには，糸の長さを何mにすればよいか。ただし，重力加速度の大きさを $g=9.8$〔m/s^2〕とする。

(1) 周期1.0sの単振り子

〔　　　　　　　　〕

(2) 周期2.0sの単振り子

〔　　　　　　　　〕

(3) 周期0.50sの単振り子

〔　　　　　　　　〕

4 (6284) M07

次のような場合，単振り子の周期は地球上での周期の何倍になるか。ただし，無理数は無理数のまま答えなさい。

(1) 重力加速度の大きさが $\frac{g}{6}$ の月で振らせたとき。

〔　　　　　　　　〕

(2) 火星の表面で振らせたとき。ただし，火星表面の重力加速度の大きさは地球表面の $\frac{5}{13}$ とする。

〔　　　　　　　　〕

5 (6285) M07

支点からおもりの中心までの長さが0.500mの単振り子を振らせて，10回振動するごとの時間を測定したら表のようになった。次の問いに答えなさい。

10回ごとの時間〔s〕	14.3	14.0	14.3	14.1	14.2	14.1	14.4	14.1	14.3	14.2

(1) この単振り子の周期は平均何sか。

〔　　　　　　　　〕

(2) このときの重力加速度の大きさは何m/s^2か。 〔　　　　　　　　〕

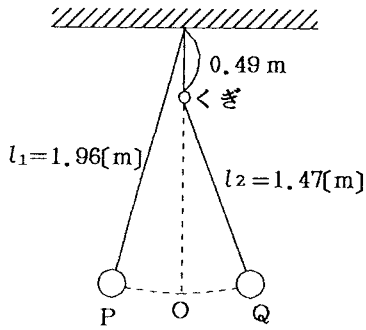
類題トレーニング(6290)

● 例題の視点　　ここでは，単振り子について，途中で糸の長さの変わる場合の周期がどのように表されるかを考える。糸の長さが変わる前と後での振り子の周期を考えるのがポイントである。

基本例題　長さの変わる単振り子

長さ 1.96 m の単振り子がある。いま，振り子の支点から鉛直下方 0.490 m のところに細いくぎを打ちつけた。この単振り子を，くぎの鉛直方向からわずかに左に引いてはなしたときの周期を求めなさい。ただし，重力加速度の大きさを 9.80 m/s^2 とする。

- 問題の内容を図に書くと，右図のようになる。
- 鉛直線の左半分では長さが 1.96 m で，右側ではくぎを支点として，長さ 1.47 m(1.96－0.490) の振り子の運動をする。



■■考え方■■

- 鉛直線の左半分では長さ l_1 の振り子，右半分ではくぎを支点とする長さ l_2 の振り子として考えるのである。
- 鉛直線の左半分では，長さ l_1 の振り子と考えて周期を計算してから，O → P → O 間を動く時間を求める。
- 鉛直線の右半分では，長さ l_2 の振り子と考えて周期を計算してから，O → Q → O 間を動く時間を求める。
- 次に，上の２つのことから，O → P → O → Q → O 間を動く時間を求めれば，これが周期になる。
- 長さが l の単振り子の周期 T は，重力加速度の大きさを g とすると，次の式で表される。

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

■■解　答■■

鉛直線左半分の周期 T_1 は，

$$T_1=2\times3.14\times\sqrt{\frac{1.96}{9.80}}=2.808\cdots\fallingdotseq2.81$$

鉛直線右半分の周期 T_2 は，

$$T_2=2\times3.14\times\sqrt{\frac{1.47}{9.80}}=2.432\cdots\fallingdotseq2.43$$

O → P → O 間を動く時間 t_1 は，　$t_1=\dfrac{2.808}{2}$

O → Q → O 間を動く時間 t_2 は，　$t_2=\dfrac{2.432}{2}$

したがって，周期 T は，$T=t_1+t_2$ より，

$$T=\frac{2.808+2.432}{2}=2.62\,\text{〔s〕}$$

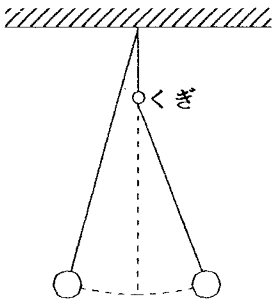
答え　2.62 s

□ここがポイント！□

◆鉛直線の左右でべつべつの振り子と考えてそれぞれの周期を求める。
◆左右では，それぞれの長さの振り子の半周期分の運動をする。
◆振幅は周期には関係ないから考える必要はない。

1　(6291)　M07

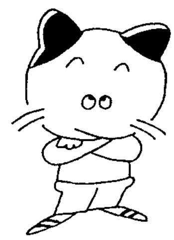
右の図のような長さ l〔m〕の単振り子がある。いま，振り子の支点から鉛直下方 l'〔m〕のところに細いくぎを打ちつけた。この単振り子を，くぎの鉛直下方からわずかに左に引いてはなしたとき，次の問いに答えなさい。ただし，重力加速度の大きさを g〔m/s^2〕とする。



(1)　鉛直線の左半分での単振り子の周期 T_1 を表す式を示しなさい。
〔　　　　　　　　　　　　〕
(2)　鉛直線の右半分での単振り子の周期 T_2 を表す式を示なさい。
〔　　　　　　　　　　　　〕
(3)　この単振り子の周期 T を表す式を示しなさい。
〔　　　　　　　　　　　　〕

2　(6292)　M07

長さ 2.30 m の単振り子がある。いま，振り子の支点から鉛直下方 0.800 m のところに細いくぎを打ちつけた。この単振り子を，くぎの鉛直下方からわずかに左に引いてはなしたときの周期を求めなさい。ただし，重力加速度の大きさを 9.80 m/s^2 とする。
〔　　　　　　　　　　　　〕



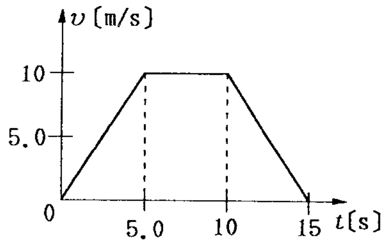
類題トレーニング(6300)

●例題の視点　　ここでは，一定の加速度で上昇中のエレベーターの中で単振り子を振らせたとき周期がどうなるかを学習する。g のほかに加速度が加わってくるところがポイントである。

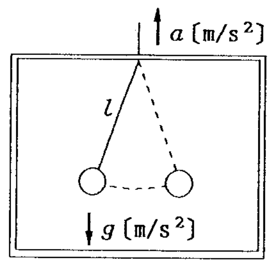
基本例題　エレベーター内での単振り子

糸の長さ 1.0 m の単振り子をエレベーターの天井に取りつけた。

このエレベーターが，図のような上昇のしかたをするとき，0〜5.0 s 間，5.0〜10 s 間，10〜15 s 間で単振り子をそれぞれ振らせると，周期は何 s か。ただし，重力加速度の大きさを $g=9.8$〔m/s^2〕とする。



●問題の内容を図にかくと，右のようになる。振り子のおもりには，重力のほかにエレベーターが上昇することによる慣性力がはたらく。すなわち，エレベーターの加速度 a の存在を考えることがポイントである。ただし，上向きの加速度を a とする。



■■考え方■■

おもりの質量を m とすると，おもりに下向きにはたらく力は，重力 mg と慣性力 $-ma$（この − の符号は慣性力が下向きにはたらくことを示す）の合力と考えればよい。上向きに加速度 a で上昇しているエレベーター内のおもりは，エレベーターに対して $g+a$ の加速度で落ちるから，見かけの重力加速度の大きさは $g+a$ であり，おもりの受ける見かけの重力は，$m(g+a)$ となる。すると，おもりを単振動させる力は，

$$F=-m(g+a)\frac{x}{l}$$

また，角振動数を ω とすると，$F=-m\omega^2 x$ だから，

$$\frac{g+a}{l}=\omega^2 \qquad \therefore\quad \omega=\sqrt{\frac{g+a}{l}}$$

したがって，周期 T は，

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{l}{g+a}}$$

0〜5.0 s 間　　グラフの 0〜5.0 s 間の傾きから加速度 a_1 を求める。

5.0〜10 s 間　　グラフの 5.0〜10 s 間の傾きから加速度 a_2 を求める。

10〜15 s 間　　グラフの 10〜15 s 間の傾きから加速度 a_3 を求める。

■■解　答■■

0〜5.0 s 間について，エレベーターの加速度 a_1 を求めると，

$$a_1=\frac{10-0}{5.0-0}=2.0\text{〔m/s}^2\text{〕}$$

このときの周期 T_1 は，$T_1=2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g+a}}$ と表されるから，

$$T_1=2\times3.14\times\sqrt{\frac{1.0}{9.8+2.0}}=1.82\cdots\fallingdotseq1.8\,[\mathrm{s}]$$

5.0〜10 s 間について，まず加速度 a_2 を求めると，　$a_2=\frac{10-10}{10-5.0}=0\,[\mathrm{m/s^2}]$

したがって，周期 T_2 は，

$$T_2=2\times3.14\times\sqrt{\frac{1.0}{9.8+0}}=2.00\cdots\fallingdotseq2.0\,[\mathrm{s}]$$

10〜15 s 間について，まず加速度 a_3 を求めると，　$a_3=\frac{0-10}{15-10}=-2.0\,[\mathrm{m/s^2}]$

したがって，周期 T_3 は，

$$T_3=2\times3.14\times\sqrt{\frac{1.0}{9.8-2.0}}=2.24\cdots\fallingdotseq2.2\,[\mathrm{s}]$$

答え　0〜5.0 s 間…1.8 s，5.0〜10 s 間…2.0 s，10〜15 s 間…2.2 s

□ここがポイント!□

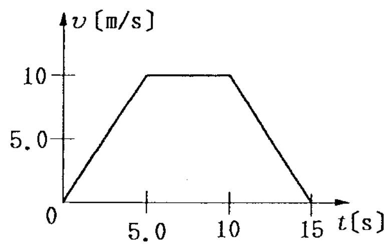
◆振り子が上向きの加速度 a [m/s²] で運動するときの周期 T_1，振り子が下向きの加速度 a [m/s²] で運動するときの周期 T_2 は，

$$T_1=2\pi\sqrt{\frac{l}{g+a}}\qquad T_2=2\pi\sqrt{\frac{l}{g-a}}$$

◆$v-t$ グラフから加速度 a を求めるには，　$a=\frac{v_2-v_1}{t_2-t_1}$

1　(6301)　M07

糸の長さ 1.0 m の単振り子をエレベーターの天井に取りつけた。このエレベーターが図のような上昇のしかたをするとき，次の問いに答えなさい。ただし，重力加速度の大きさを $g=9.8\,[\mathrm{m/s^2}]$ とする。



(1) 0〜5.0 s 間のエレベーターの加速度および振り子の周期はいくらか。

加速度 [　　　　　　　]

周期 [　　　　　　　]

(2) 5.0〜10 s の間の振り子の周期はいくらか。

[　　　　　　　]

(3) 10〜15 s 間での振り子の周期はいくらか。

[　　　　　　　]

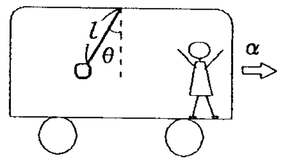
2　(6302)　M07

一定の割合で速度を増しながら降下しているエレベーターの中で，糸の長さ 1.0 m の単振り子を振らせたら，周期が 2.5 s であった。このエレベーターの降下速度は何 m/s² か。ただし，重力加速度の大きさを $g=9.8\,[\mathrm{m/s^2}]$ とする。

[　　　　　　　]

3 (6303) M07

右図のように電車の車内に糸の長さ l の単振り子がつるされている。いま，静止していた電車が水平な直線レール上を一定の加速度 α で動きだした。重力加速度の大きさを g として，次の問いに答えなさい。

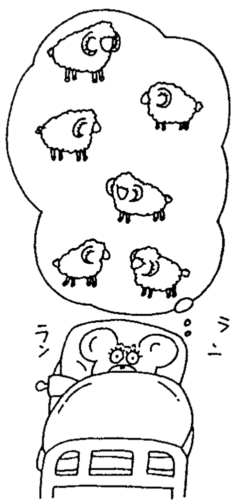


(1) 電車に乗っている人から見て，糸が鉛直方向と θ だけ傾いた位置で単振り子を静止させることができた。電車の加速度 α を g，θ の式で表しなさい。

〔　　　　　　　　　　〕

(2) おもりを少し後方を引いてはなすと，電車に乗っている人から見ておもりは単振動をする。このときの周期 T を α，l，g を用いて表しなさい。

〔　　　　　　　　　　〕



§8 いろいろな単振動

M08

前回まで，ばね振り子や単振り子という代表的な例を学習してきましたが，単振動の例としてはこのほかにもあげることができます。このセクションではそのような例について学習します。

◇考え方のポイント◇

◆うきの振動

下向きを正の向きとして，断面積 S，うきの変位が x のとき，うきにはたらく力 F は，

$$F=-Sx\rho_0 g=-kx$$

（$k=S\rho_0 g$，ρ_0：液の密度，g：重力加速度の大きさ）

となり，うきは単振動をする。

◆ U 字管内の液体の振動

U 字管内の液の振動周期は，

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}=2\pi\sqrt{\frac{m}{2S\rho g}}$$

（S：U 字管の断面積，ρ：液体の密度，m：液体の全質量）

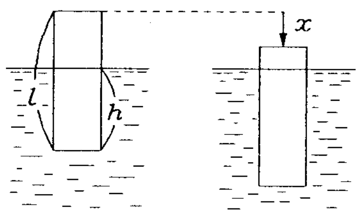
◆振動する台の上におかれた物体の運動

台上の物体が台から離れない最大振動数は，

$$f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{A}} \qquad (A：台の振幅)$$

1　(0031)　$\boxed{}$　➲類題 6310　うきの振動

右図のように，断面積 S，長さ l，密度 ρ の細長い円柱形をしたうきが，密度 ρ_0 の静かな水面に垂直に浮いている。このとき，底から水面までの高さを h とする。次の問いに答えなさい。ただし，重力加速度の大きさを g とする。



(1)　つりあいの状態で沈んでいる部分の高さ h を，ρ，ρ_0，l などを使って表しなさい。

〔　　　　　　　　〕

(2)　つりあいの状態から少し下に沈め，手をはなすと，うきは振動をした。つりあいの状態から x だけ下に変位したとき，うきにはたらく力はいくらか。ただし，下向きを正とする。

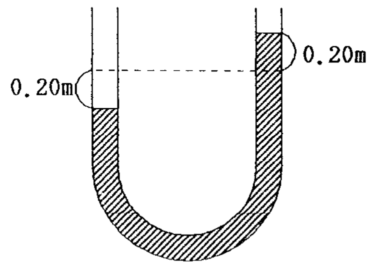
〔　　　　　　　　〕

(3)　(2)のとき，うきの振動の周期はいくらか。

〔　　　　　　　　〕

2 (0032) □ ➡類題 6320 U 字管内の液体の振動

図のように，密度 $1.0\times10^3\,kg/m^3$ の水 60 kg を断面積 $0.030\,m^2$ の U 字管に入れて振動させた。次の問いに答えなさい。ただし，重力加速度の大きさを $9.8\,m/s^2$ とし，液と管壁との間には摩擦力ははたらかないものとする。



(1) 左の液面が 0.20 m 下がったとき，液面の高さの差によって生じる左側の液面をおし上げる力は，何 N か。ただし，下向きを正とする。

〔　　　　　　　　〕

(2) この水の振動周期は何 s か。

〔　　　　　　　　〕

3 (0033) □ ➡類題 6330 単振動をする台の上に置かれた物体の運動

鉛直方向に振幅 0.40 m で振動している台の上に物体を置いたとき，この物体がつねに台から離れないための最大の振動数は何 Hz であればよいか。ただし，重力加速度の大きさを $9.8\,m/s^2$ とする。

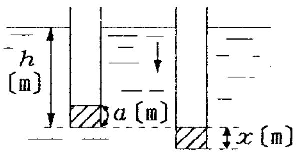
〔　　　　　　　　〕

類題トレーニング(6310)

●学習の視点　　水に浮かんでいる「うき」が上下に振動したときの運動は，単振動かどうかを考える。うきにはたらく重力と，うきの浮力との関係から，うきを上下運動させる力を求めるのがポイントである。

テーマ うきの振動

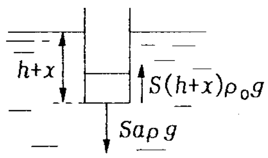
●断面積 S〔m^2〕で肉薄の一様な円筒形容器（質量は無視する）の底に a〔m〕の高さまで水銀（密度：ρ〔kg/m^3〕）を入れたうきを水に浮かべる。水の密度は ρ_0〔kg/m^3〕とする。



●このうきが静止したときの底から水面までの距離を h〔m〕，重力加速度の大きさを g〔m/s^2〕とすると，うきにはたらいている力は，下向きには水銀にはたらいている重力 $Sa\rho g$〔N〕，上向きにはうきにはたらいている浮力 $Sh\rho_0 g$〔N〕である。このとき，うきは静止しているから重力と浮力はつりあっており，

$$Sa\rho g = Sh\rho_0 g$$

●つりあいの位置から x〔m〕だけ下に変位したとき，うきにはたらく力は下向きには重力 $Sa\rho g$〔N〕，上向きには浮力 $S(h+x)\rho_0 g$〔N〕。



したがって，合力 F は下向きを正として，

$$F = Sa\rho g - S(h+x)\rho_0 g$$
$$= -Sx\rho_0 g \text{〔N〕}$$

となり，向きは上向きである。

【うきにはたらく力】

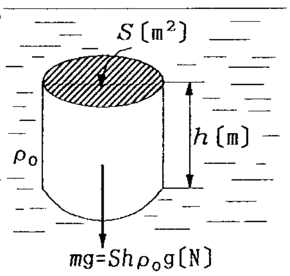
下向きを正の向きとして断面積が S〔m^2〕のうきの変位が x〔m〕のとき，うきにはたらく力は，

$$F = -Sx\rho_0 g \text{〔N〕}$$

ここで，S，ρ_0，g は一定であるから，$S\rho_0 g = k$ とおけば $F = -kx$ となり，うきは単振動をする。ただし，ρ_0 はうきを浮かべる液体の密度である。

■■説　明■■

●浮力　　物体によっておしのけられた水の重さと同じ大きさの力が，上向きにはたらいたものが浮力である。これを「アルキメデスの原理」という。よって，浮力＝おしのけられた水の体積×水の密度×重力加速度＝$Sh\rho_0 g$〔N〕となる。



●うきの振動の周期　　$F = -Sx\rho_0 g = -kx$ で，$k = S\rho_0 g$ である。一方，うきの質量 m は，$m = Sa\rho$（水銀柱の質量）と表されるから，

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{Sa\rho}{S\rho_0 g}} = 2\pi\sqrt{\frac{\rho a}{\rho_0 g}} \text{〔s〕}$$

となる。

●うきにはたらく力　　断面積 $1.0\times10^{-4}\,m^2$ のうきの変位が 0.030 m のとき，水の密度 $\rho_0 = 1.0\times10^3$〔kg/m^3〕を用いて，うきにはたらく力は次のようにして求める。

$$F = -1.0\times10^{-4}\times0.030\times1.0\times10^3\times9.8$$

$= -2.94 \times 10^{-2} \fallingdotseq -2.9 \times 10^{-2}$〔N〕
よって，うきにはたらく力の大きさは，2.9×10^{2} N となる。

---

1 (6311) M08

うきの振動について，次の問いに答えなさい。

(1) うきには２つの力がはたらいている。それは何と何か。

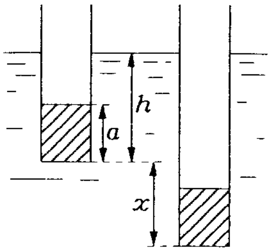
〔　　　　　　　　　　〕

(2) 断面積が S のうきの変位が x のとき，液体の密度を ρ_0，重力加速度の大きさを g とすると，うきにはたらいている２つの力の合力 F は，下向きを正として $F = -Sx\rho_0 g$ で表される。この式から，うきはどのような運動をすることがわかるか。

〔　　　　　　　　　　〕

2 (6312) M08

断面積 S〔m^2〕で肉薄の一様な円筒形容器（質量は無視する）の底に a〔m〕の高さまで水銀（密度：ρ〔kg/m^3〕）を入れたうきを水に浮かべた。このうきが静止したときの水面から底までの深さを h〔m〕とし，水の密度を ρ_0〔kg/m^3〕，重力加速度の大きさを g〔m/s^2〕として，次の問いに答えなさい。



(1) 水銀にはたらく重力はどのように表せるか。

〔　　　　　　　　　　〕

(2) つりあっている状態での，うきにはたらく浮力はどのように表せるか。

〔　　　　　　　　　　〕

(3) つりあいの位置から x〔m〕だけ下に変位したとき，うきにはたらいている力の合力はどのように表せるか。下向きを正とする。

〔　　　　　　　　　　〕

(4) $\rho_0 = 1.0 \times 10^3$〔kg/m^3〕，$g = 9.8$〔m/s^2〕の場合，つりあいの点から 0.10 m 上方の地点に変位したとき，うきにはたらく力の合力はどの向きに何 N か。ただし，うきの断面積を $S = 1.0 \times 10^{-4}$〔m^2〕とする。

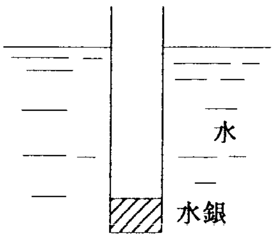
〔　　　　　　　　　　〕

(5) うきの断面積を $S = 1.0 \times 10^{-4}$〔m^2〕，水銀の高さを $a = 0.010$〔m〕，水銀の密度を $\rho = 14 \times 10^3$〔kg/m^3〕とすると，このうきの振動の周期は何 s か。

〔　　　　　　　　　　〕

3 (6313) M08

右図のような，断面積 2.0×10^{-4} m^2 の質量の無視できる容器に高さ 0.020 m の水銀（密度は 14×10^3 kg/m^3）を入れたうきが水に浮いて振動している。水の密度を 1.0×10^3 kg/m^3，重力加速度の大きさを 9.8 m/s^2 として，次の問いに答えなさい。ただし，下向きを正とする。



(1) うきの振動の中心からの変位が 0.020 m のとき，うきにはたらく力は何 N か。

〔　　　　　　　　　　〕

(2) 周期は何 s か。

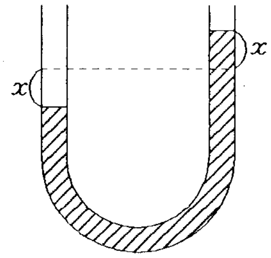
〔　　　　　　　　　　〕

類題トレーニング(6320)

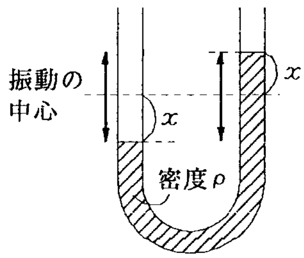
●例題の視点　　ここでは，U字管の中に入れられた液体が振動するようすを調べ，その周期がどのように表されるかを例題を通して考えていく。振動をさせようとする力として，左右の液面の圧力差を考えるところがポイントである。

基本例題　U字管内の液体の振動

図のようにU字管に密度 ρ の液体を入れ，左右の液面の高さを違えてはなしてやると振動を始める。管の断面積を S，液の全質量を m，重力加速度の大きさを g として，液の振動周期を求めなさい。
ただし，液と管壁との間には摩擦力ははたらかないものとする。



●問題の内容を図にかくと右のようになる。一方の液面がつりあいの位置より x だけ下がった位置において，両側の液面の高さの差によって生じる圧力差を考えるのである。



■■考え方■■

液面の差が $2x$ のとき，その差の部分の液体に単位面積あたりにはたらく重力が液面の高さの差によって生じる圧力差である。

この 圧力差×面積 の力が液体を振動させる力としてはたらくので，この力 F を x を使って表す。

$F=-kx$ の形になっていれば単振動するから，k の値を ρ，S，g で表し，周期の式，$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ に代入する。

■■解　答■■

左の液面が x だけ下がったときの高さの差は $2x$〔m〕だから圧力差は，$2x\rho g$ である。したがって，左側の液面をおし上げる力の大きさは，$2xS\rho g$ である。

この力が，液体を振動させる力としてはたらくので，下向きを正とすれば，

$$F=-2xS\rho g$$

S，ρ，g は定数だから，$k=2S\rho g$ とおけば，この式は，$F=-kx$ となる。

ゆえに，この液体は単振動するから，周期は，

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}=2\pi\sqrt{\frac{m}{2S\rho g}}$$

答え　$2\pi\sqrt{\frac{m}{2S\rho g}}$

研　究

● U字管内の液面の振動の周期

液体の質量 m は，液体の長さを $2l$ とすると，$m=2lS\rho$ となる。したがって，周期は，

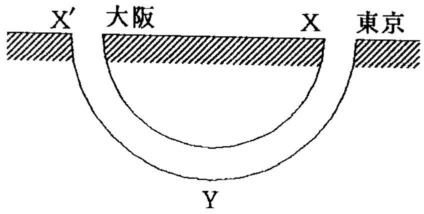
$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}=2\pi\sqrt{\frac{2lS\rho}{2S\rho g}}=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

となって，単振り子の周期の式と同じになる。

参考

●最速降下曲線

同じ高さの２点ＸＸ′の間を重力によって振動する周期をいちばん短くするように物体が運動する曲線を「最速降下曲線」という。東京・大阪間にこのようなトンネルを掘ったとすると，この中へ落とした物体は，このトンネル内を往復運動し，ＸＹＸ′を約500 kmとすると，周期は約10分となる。



□ここがポイント！□

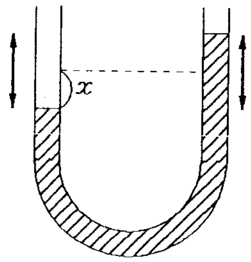
◆液を振動させようとする力は，液面の高さの差によって生じる 圧力差×面積 で求める。

◆はたらく力が $F=-kx$ の形をしていることがいえれば周期は，$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ で求められる。

---

1 (6321) M08

図のようにＵ字管に密度 ρ の液体を入れ，左右の液面の高さを違えて放してやると振動を始める。管の断面積を S，液の全質量を m，重力加速度の大きさを g として，次の問いに答えなさい。ただし，液と管壁の間には摩擦力ははたらかないものとする。



(1) 左の液面がつりあいの位置より x だけ下がったとき，液面の高さの差によって生じる圧力差はいくらか。

〔　　　　　　　〕

(2) 左の液面がつりあいの位置より x だけ下がったとき，左の液をおし上げようとしてはたらく力 F はどのように表されるか。ただし，下向きを正として考えよ。

〔　　　　　　　〕

(3) この液の振動周期を求めよ。

〔　　　　　　　〕

2 (6322) M08

密度1.0 g/cm^3 の水50 gを，断面積1.0 cm^2 のＵ字管に入れて，振動させた。次の問いに答えなさい。ただし，重力加速度の大きさを9.8 m/s^2 とし，液と管壁との間には摩擦力ははたらかないものとする。

(1) 左の液面が10 cm下がったとき，液面の高さの差によって生じる左側の液面をおし上げる力は何Ｎか。ただし，下向きを正とする。

〔　　　　　　　〕

(2) この水の振動周期は何ｓか。

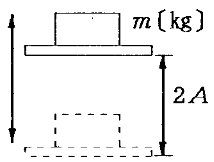
〔　　　　　　　〕

類題トレーニング(6330)

●学習の視点　　ここでは，上下に単振動をする台の上にのせた物体が，つねに台に接しているための条件を考える。単振動の下向きの加速度と重力加速度の関係から説明するところがポイントである。

テーマ　単振動をする台の上に置かれた物体の運動

●水平な台の上に，質量 m〔kg〕の物体をのせ，この台を振幅 A〔m〕，角振動数 ω〔rad/s〕で上下に単振動をさせる。



●この台の加速度は，変位 x〔m〕のとき，$a=-\omega^2 x$〔m/s^2〕である。

●台がなければ，物体は g〔m/s^2〕で落下するから，台の下向きの加速度が重力加速度より大きくならなければ，物体は台から離れることはない。

【物体が台から離れないための最大の振動数】

角振動数 ω で単振動する台の加速度の最大値 $a=-\omega^2 x=4\pi^2 f^2 A$ が，重力加速度の大きさ g に等しくなるまで物体は台から離れない。したがって，最大振動数は，

$4\pi^2 f^2 A=g$ より，

$$f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{A}}\text{〔Hz〕}$$

➲この式は覚える必要はない。導き方がたいせつである。

■■説　明■■

●台の加速度（下向き）が最大になるところ　　単振動の加速度の大きさが最大になるのは振動の両端，すなわち変位が A〔m〕の地点である。そして，下向きの加速度が最大の場所は，台がのぼりつめたとき，すなわち $x=-A$ のときである。

●台の加速度の最大値　　角振動数 $\omega=2\pi f$ の単振動の加速度は，

$$a=-\omega^2 x=-4\pi^2 f^2 x$$

だから，最大値は $x=-A$ を代入して，

$$a=4\pi^2 f^2 A$$

●物体が台から離れないための条件　　台が最高点から降下を始めるときの加速度が下向きで最大であるから，この値が自由落下の加速度すなわち，重力加速度を上まわらなければ物体はつねに台に接していることになる。

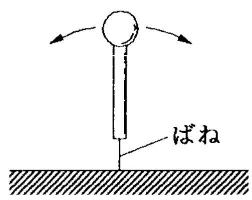
たとえば，振幅 0.20 m で上下に単振動している台の上に置かれた物体が台から離れないための最大の振動数は，

$$f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{9.8}{0.20}}=\frac{7}{2\times 3.14}=1.11\cdots\fallingdotseq 1.1\text{〔Hz〕}$$

参　考

●逆立ち振り子

細い棒の上におもりをつけたものは，そのままではすぐ倒れてしまう。そこで，根もとにばねをつけて，倒そうとする重力のはたらきにやっと打ち勝つようにしたものを「逆立ち振り子」という。これは振動の周期が長いので，地震計に応用されている。



1 (6331) M08

鉛直方向に単振動をする台の上におかれた物体の運動について，次の問いに答えなさい。

(1) 台の加速度が物体にはたらく何より小さければ物体は台から離れないか。

〔　　　　　　〕

(2) $f=\dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{g}{A}}$ で表される f は何を意味しているか。ただし，A は単振動の振幅，g は重力加速度の大きさを表す。

〔　　　　　　〕

2 (6332) M08

鉛直方向に振幅 0.10 m で振動している台の上に物体を置いたとき，この物体が，つねに台から離れないための最大の振動数は何 Hz であればよいか。ただし，重力加速度の大きさを 9.8 m/s^2 とする。

〔　　　　　　〕

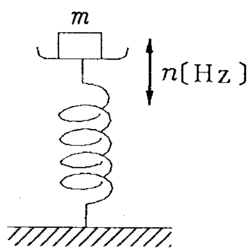
3 (6333) M08

水平な台の上に物体をのせ，台を 1.0 Hz で鉛直方向に単振動させても物体が台から離れないようにするためには，台の振幅を何 m にすればよいか。ただし，重力加速度の大きさを 9.8 m/s^2 とする。

〔　　　　　　〕

4 (6334) M08

鉛直方向に n〔Hz〕で単振動をしている皿がある。この皿の上に質量 m〔kg〕の物体がのせてある。重力加速度の大きさを g〔m/s^2〕として，次の問いに答えなさい。ただし，皿の質量は無視できるものとし，上向きを正とする。



(1) 物体が皿から離れることなく振動しているとき，物体にはたらいている力は何と何か。ただし，物体が皿から受ける垂直抗力を N〔N〕としなさい。

〔　　　　　　〕

(2) 変位 x〔m〕の地点で，単振動をしている物体にはたらく力を，n，m，x を用いて表しなさい。

〔　　　　　　〕

(3) (1)の２つの力の合力が(2)に等しいとして垂直抗力 N を求めなさい。

〔　　　　　　〕

(4) 物体が皿から離れないための，最大振幅はいくらか。

〔　　　　　　〕

ヒント　物体が皿から離れない間は，垂直抗力 N は，$N\geqq 0$ である。

§9 万有引力

M09

このセクションでは，惑星の運動に関するケプラーの法則，およびニュートンの万有引力の法則について調べ，それらの法則を用いて，直接はかることのできない太陽，地球の質量などを計算から求めてみます。よく，天文学的な数値といわれるのですが，ひじょうに大きな数，ときには小さい数を扱います。計算にあたっては，ミスのないように注意しましょう。

◇考え方のポイント◇

◆ケプラーの法則

第1法則　惑星は太陽を1つの焦点とするだ円上を運動する。

第2法則　惑星の太陽に対する面積速度は一定である。

第3法則　惑星の公転周期 T の2乗は，軌道だ円の半長軸 r の3乗に比例する。

$$T^2 = k r^3$$

◆万有引力の法則

2つの物体がおよぼし合う万有引力の大きさ F は，2物体の質量 m_1，m_2 の積に比例し，2物体間の距離 r の2乗に反比例する。

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

万有引力定数 G は，$6.67\times10^{-11}\ \mathrm{N\cdot m^2/kg^2}$ である。

◆天体の質量

求める天体の質量を M，その天体から半径 r の等速円運動をしている別の天体の周期を T，角速度を ω，万有引力定数を G とすると，遠心力と万有引力がつりあうことから，

$$G\frac{Mm}{r^2} = m r \omega^2 = m r\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2$$

$$\therefore\ M = \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2}$$

◆地球の質量

求める地球の質量を M，地球の半径を R，地上にある物体の質量を m，地表における重力加速度の大きさを g，万有引力定数を G とすると，重力が物体と地球との間にはたらく万有引力であるから，

$$m g = G\frac{Mm}{R^2} \qquad \therefore\ M = \frac{R^2 g}{G}$$

1　(0034) ☐　➲類題 6340　惑星の運動

木星の公転軌道の半長軸は，地球の公転軌道の半長軸の約5.2倍である。ケプラーの第3法則を用いて，次の問いに答えなさい。

(1) 木星の公転周期は地球の何倍か。

〔　　　　　　〕

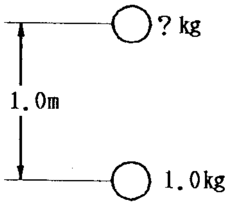
(2) 地球の公転周期を365日とすると木星の公転周期は何日か。有効数字2桁で答えなさい。

〔　　　　　　〕

2 (0035) □ ➡類題 6350 万有引力の法則

1.0 kg の物体を空中で静止させるためには，その上 1.0 m のところに，何 kg の物体をもってくればよいか。ただし，万有引力定数を $6.7\times10^{-11}\ \mathrm{N\cdot m^2/kg^2}$，重力加速度の大きさを $9.8\ \mathrm{m/s^2}$ とする。

〔　　　　　　　　〕



3 (0036) □ ➡類題 6360 天体の質量

地球の公転周期は，1〔年〕$=3.15\times10^{7}$〔s〕，軌道半径は 1.50×10^{11} m である。万有引力定数を $G=6.67\times10^{-11}$〔$\mathrm{N\cdot m^2/kg^2}$〕として，太陽の質量を求めなさい。

〔　　　　　　　　〕

4 (0037) □ ➡類題 6370 地球の質量

地球の半径を R，重力加速度を g，万有引力定数を G として，次の問いに答えなさい。

(1) 地球の体積を R で表しなさい。

〔　　　　　　　　〕

(2) 地球の質量を R，g，G で表しなさい。

〔　　　　　　　　〕

(3) 地球の平均密度 d を R，g，G で表しなさい。

〔　　　　　　　　〕

(4) $R=6.4\times10^{3}$〔km〕，$g=9.8$〔$\mathrm{m/s^2}$〕，$G=6.7\times10^{-11}$〔$\mathrm{N\cdot m^2/kg^2}$〕とすると，d は何 $\mathrm{kg/m^3}$ か。

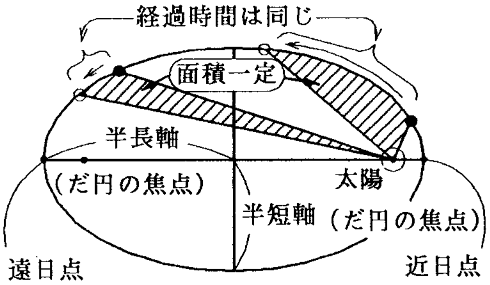
〔　　　　　　　　〕

類題トレーニング(6340)

●学習の視点　　火星，金星などの惑星の動きは，一見複雑でその規則性はなかなかわからなかった。この惑星の運動について，ケプラーは豊富な観測資料をもとに，簡単な法則にまとめた。このケプラーの法則の意味を，ここでつかもう。

テーマ　惑星の運動

● ケプラーの法則は，3つの内容からなっている。
● 1番めは，惑星の公転軌道が円ではなく，だ円になっているというものである。
● 2番めは，惑星の運動の速度についてである。
● そして，3番めは公転周期についてである。



【ケプラーの法則】

第1法則　　惑星は太陽を1つの焦点とするだ円上を運動する。

第2法則　　惑星の太陽に対する面積速度は一定である。

第3法則　　惑星の公転周期の2乗は，軌道だ円の半長軸の3乗に比例する。

■■説　明■■

●惑星の公転軌道　　惑星の軌道はすべてだ円形をしており，太陽の位置はだ円の焦点上にある。ただ，だ円といっても，ほとんど円とみなせるものが多い。それを半長軸と半短軸の比でみると，地球の場合は，1：0.999859できわめて1に近く，円と考えてかまわない（円は，半長軸＝半短軸　のだ円）。比の大きいのは，冥王星と水星である。

●面積速度　　惑星と太陽を結ぶ線分を考える。惑星が動いて単位時間が経過したのち，この線分が通過してえがいた扇形の面積（これを面積速度という）は，いつでも一定になる。したがって，太陽と惑星の距離が長いと惑星の動きは遅く，太陽に近いところでは惑星は速く動くことになる。

●第3法則を確認してみよう　　公転周期を T，半長軸を r とすれば，第3法則は次式で表せる。

$$T^2 = kr^3 \qquad (k\text{ は比例定数})$$

太陽系の惑星について，T と r から k を計算すると，表のようになる。どの場合も，k の値はほとんど同じになっていることがわかる。なお，半長軸のことを，惑星の太陽からの平均距離ともいう。

惑星の軌道の公転周期と半長軸

惑　星	公転周期 T（年）	半長軸 r	T^2/r^3	惑　星	T	r	T^2/r^3
水　星	0.2409	0.3871	1.0005	土　星	29.458	9.5549	0.9948
金　星	0.6152	0.7233	1.0002	天王星	84.022	19.2184	0.9946
地　球	1.0000	1.0000	1.0000	海王星	164.774	30.1104	0.9946
火　星	1.8809	1.5237	1.0001	冥王星	247.796	39.5401	0.9933
木　星	11.862	5.2026	0.9992				

〔注〕r は地球を1としてある（これを天文単位という）

1 (6341) M09

ケプラーの法則について，次の問いに答えなさい。

(1) 惑星の公転軌道は円ではない。どのような形か。また，太陽はその形のどこにあるか。

形〔　　　　　〕 場所〔　　　　　〕

(2) 惑星の太陽に対する面積速度は一定である。では,惑星が太陽に近いときと遠いときとで,速く動くのはどちらか。

〔　　　　　〕

(3) 惑星の公転周期を T，軌道の長半径の長さを r として,第3法則を表す式を書きなさい。比例定数は k とする。

〔　　　　　〕

2 (6342) M09

地球の公転軌道の半長軸を 1.00 とすると，火星は 1.52 である。公転周期は地球が 1.00 年に対し，火星は 1.88 年である。これをもとに，ケプラーの第3法則を確かめたい。

(1) 地球について，$k=\dfrac{T^2}{r^3}$ (T：公転周期，r：半長軸) を求めなさい。

〔　　　　　〕

(2) 火星について，$k=\dfrac{T^2}{r^3}$ を求めなさい。

〔　　　　　〕

3 (6343) M09

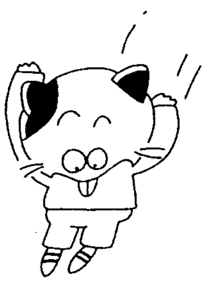
土星の公転軌道の半長軸は，地球の公転軌道の半長軸の約 9.5 倍である。ケプラーの第3法則を用いて，次の問いに答えなさい。

(1) 土星の公転周期は地球の何倍か。

〔　　　　　〕

(2) 地球の公転周期を 365 日とすると土星の公転周期は何日か。有効数字2桁で答えなさい。

〔　　　　　〕



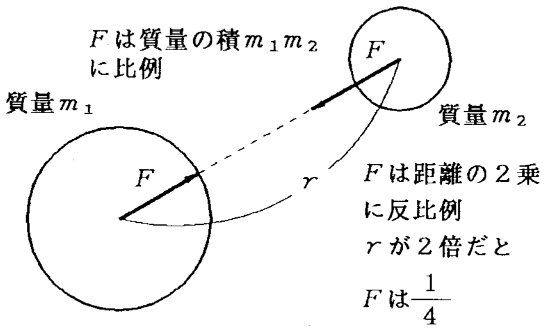
類題トレーニング(6350)

●学習の視点　　万有引力が，どのような量によって決まるのかがポイント。

テーマ　万有引力の法則

●一般に２つの物体間には，つねに引き合う力，万有引力が作用する。

●万有引力の大きさは，２つの物体間の距離と２つの物体の質量に関係する。



【万有引力】

２つの物体がおよぼし合う万有引力の大きさF〔N〕は，２つの物体の質量m_1〔kg〕，m_2〔kg〕の積に比例し，２物体間の距離r〔m〕の２乗に反比例する。

$$F=G\frac{m_1m_2}{r^2}$$

Gは物体によらない比例定数で，「万有引力定数」といわれ，次の値が求められている。

$$G=6.67259\times10^{-11}≒6.67\times10^{-11}\ 〔\mathrm{N\cdot m^2/kg^2}〕$$

■■説　明■■

●万有引力　　ケプラーの法則が発見されてから約半世紀後，イギリスのニュートンにより万有引力の法則が発見された。太陽のまわりを惑星がだ円運動をするのは，空間を隔てて太陽が惑星に力をおよぼしているため，とニュートンは考えたのだった。

惑星の軌道はだ円であるが，計算しやすいように円として扱ってみよう。

太陽からrの距離にある質量mの惑星が，速度vで円軌道をえがいて運動しているときの向心力の大きさF，また，周期Tは，

$$F=m\cdot\frac{v^2}{r}\quad\cdots\cdots\cdots①\qquad T=\frac{2\pi r}{v}\quad\cdots\cdots\cdots②$$

また，ケプラーの第３法則は，　$T^2=kr^3$　………③

②を③に代入して，

$$\left(\frac{2\pi r}{v}\right)^2=kr^3\ \text{より，}\qquad v^2=\frac{4\pi^2}{kr}\quad\cdots\cdots\cdots④$$

④を①に代入して，

$$F=\frac{4\pi^2}{k}\cdot\frac{m}{r^2}$$

となる。$\frac{4\pi^2}{k}$は定数だから，この式の意味は，「運動する惑星には，太陽からの距離rの２乗に反比例し，惑星の質量mに比例する力が向心力としてはたらいている」ということになる。一方，作用・反作用の法則から，太陽にも惑星にはたらいているのと同じ大きさの力が作用しているはずである。ニュートンは，この力が太陽の質量に比例すると考えた。つまり，太陽と惑星の間にはたらく力Fは，太陽の質量をM，比例定数をGとして，

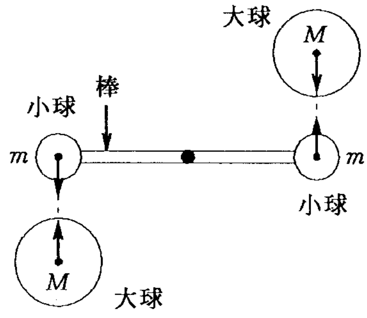
$$F=G\frac{Mm}{r^2}$$

となる。惑星の運動から導かれたこの式は，すべての物体間にもあてはまるのではないかとニュートンは推論した。G の値は，イギリスのキャベンディッシュにより，はじめて測定された。

参考

● 万有引力定数の測定

万有引力定数 G はごく小さな値となる。キャベンディッシュは，次のようにくふうをして G を測定した。



右の図は，キャベンディッシュの実験装置を上から見たものである。2つの小球をじょうぶな棒の両端に固定し，その中点に細い金属製の糸をつけて，2つの小球を水平につり下げる。2つの大球を小球に近づけると，大球と小球が引き合い棒は回転して金属線をねじる。このねじる力を測定し，大球と小球の間にはたらく力を求めた。

---

1 (6351) M09

万有引力について，次の問いに答えなさい。

(1) 2物体間にはたらく万有引力の大きさは，どんな量に関係するか。

〔　　　　　　　　　　　　〕

(2) 質量がそれぞれ m_1，m_2 の2球を，中心間の距離が r となるように保ったとき，2球間に作用する万有引力の大きさ F を求めなさい。ただし，万有引力定数を G とする。

〔　　　　　　　　　　　　〕

2 (6352) M09

次の(1)～(3)の場合のとき，2つの球の間ではたらく万有引力の大きさを求めなさい。ただし，万有引力定数を $G=6.7\times10^{-11}$〔$\mathrm{N\cdot m^2/kg^2}$〕とする。

(1) 質量 15 kg の球と質量 40 kg の球の中心間の距離を 2.0 m にした場合

〔　　　　　　　　　　　　〕

(2) 質量 50 kg の2つの球の中心間の距離を 0.50 m にした場合

〔　　　　　　　　　　　　〕

(3) 質量 60 kg の球と質量 300 g の球の中心間の距離を 30 cm にした場合

〔　　　　　　　　　　　　〕

3 (6353) M09

キャベンディシュは質量 158 kg と 738 g の大小2球を用いて，万有引力定数 G を求めた。次の問いに答えなさい。

(1) 2球の中心間の距離を 0.400 m に保ったところ，引力の大きさは 4.86×10^{-8} N であったという。G の値はいくらか。有効数字3桁で求めなさい。

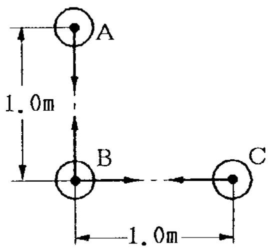
〔　　　　　　　　　　　　〕

(2) (1)において，2球の中心間の距離を 0.800 m にすると，引力の大きさはいくらになるか。

〔　　　　　　　　　　　　〕

4 (6354) M09

体重がそれぞれ50 kg，60 kg，45 kg の A，B，C の3人が，図の A，B，C 点にいる。3者の体重は各点に集中しているとして，次の問いに答えなさい。ただし，∠ABC＝90°，AB間と BC間は1.0 m，万有引力定数を $G=6.7\times10^{-11}$〔$N\cdot m^2/kg^2$〕とする。



(1) B が A を引く力はいくらか。

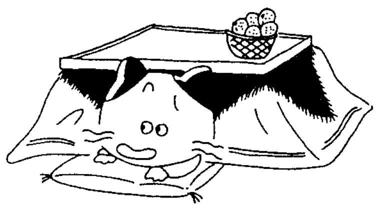
〔　　　　　　　　〕

(2) C が A を引く力はいくらか。

〔　　　　　　　　〕

(3) A は，B，C から同時にいくらの力で引かれているか。

〔　　　　　　　　〕



類題トレーニング(6360)

●学習の視点　　太陽や地球などの質量はどのくらいあるのだろうか。その値はどのようにして知ることができるのだろうか。これまでの向心力，遠心力の考え，万有引力の法則を用いると，膨大な天体の質量を計算から求めることができる。ここがポイントである。

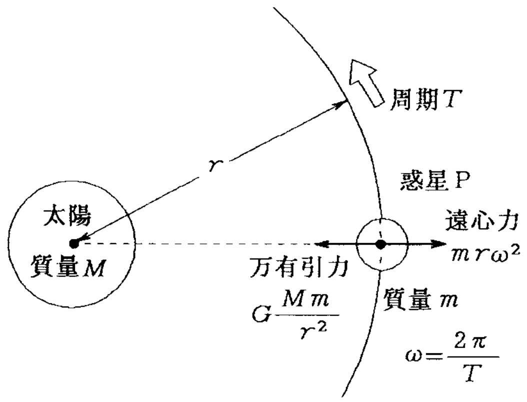
テーマ　天体の質量

●周期 T，半径 r で円運動をしている惑星Pがあるとして，太陽の質量を考えてみる。

●惑星に関して，図のように遠心力と万有引力がつりあっていることになるから，

$$G\frac{Mm}{r^2}=mr\omega^2=mr\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2$$

　この式で，惑星の質量 m は消去できるので，M を T，r から求めることができる。



【天体の質量】

求める天体の質量を M〔kg〕，その天体から半径 r〔m〕の等速円運動をしている別の天体の周期を T〔s〕，万有引力定数を G〔N・m²/kg²〕とすると，

$$M=\frac{4\pi^2r^3}{GT^2}$$

➲この結果の式を覚える必要はない。導き方が重要である。

■■説　明■■

●天体の質量を求める式　　テーマの式をよく見てみよう。M の値は，$\frac{4\pi^2}{G}$ という定数と，$\frac{r^3}{T^2}$ の積になっている。ところで，ケプラーの第3法則より，$T^2=kr^3$ だから，この関係をあてはめると，$M=\frac{4\pi^2}{kG}$ と書くことができる。

●太陽の質量　　テーマの式を用いて，太陽の質量 M を計算してみよう。

地球の公転周期 $T=365$〔日〕$=365\times24\times60\times60$〔s〕$\fallingdotseq3.15\times10^7$〔s〕

また，地球，太陽間の距離 $r=1.49\times10^{11}$〔m〕であるから，

$$M=\frac{4\pi^2r^3}{GT^2}=\frac{4\times3.14^2\times(1.49\times10^{11})^3}{6.67\times10^{-11}\times(3.15\times10^7)^2}\fallingdotseq1.97\times10^{30}\text{〔kg〕}$$

●式が使用できる場合　　このテーマの式は，太陽と地球の間だけでなく，地球と月の場合でもあてはめられる。つまり，ある天体（物体）のまわりを他の天体（物体）が回転していて，その周期と回転半径がわかればよいわけである。

1　(6361)　M09

質量 M の天体Sのまわりを，質量 m の天体Pが周期 T で円運動をしている。M を求める方法について，次の問いに答えなさい。ただし，SとPの距離を r，万有引力定数を G とする。

(1)　S と P の間にはたらく万有引力 F を表す式を書きなさい。

〔　　　　　　　　　　〕

(2)　P にはたらく遠心力の大きさ F' を T などで表す式を書きなさい。

〔　　　　　　　　　　〕

(3)　(1), (2)の式から m を消去し，M を求める式を書きなさい。

〔　　　　　　　　　　〕

2　(6362)　M09

金星の公転周期は 0.615 年，軌道半径は 1.08×10^{11} m である。1 年を 3.15×10^{7}〔s〕，万有引力定数を 6.67×10^{-11} N·m²/kg² として，太陽の質量を求めなさい。

〔　　　　　　　　　　〕

3　(6363)　M09

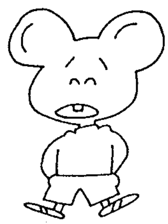
月に関して，次の問いに答えなさい。

(1)　地球から月までの平均距離は $r=3.84\times10^{8}$〔m〕，公転周期は $T=27.3$〔日〕$=2.36\times10^{6}$〔s〕である。$\dfrac{r^3}{T^2}$ はいくらか。

〔　　　　　　　　　　〕

(2)　地球の質量 M を求めなさい。ただし，万有引力定数を 6.67×10^{-11} N·m²/kg² とする。

〔　　　　　　　　　　〕



類題トレーニング(6370)

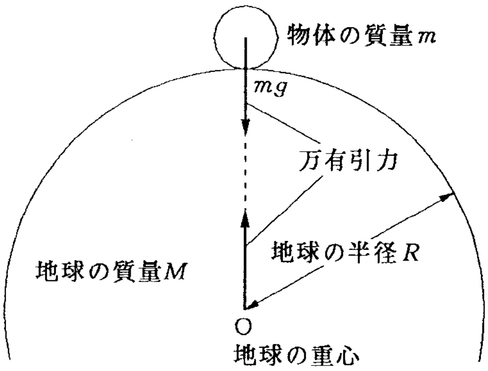
●学習の視点　　ここでは，地球の質量を求める。地球上の物体に地球からはたらく重力が，万有引力にほかならない。このことをもとに，地球の質量を考える。

テーマ　地球の質量

●地上にある質量 m の物体には，mg の重力がはたらく。

●地球の質量を M とすると，質量 m の物体にはたらく万有引力は，$G\dfrac{Mm}{R^2}$ となる。ここで R は，地球の半径である。

●地上にある物体にはたらく重力が万有引力にほぼ等しいことから，地球の質量が求められる。



【地球の質量】

地球の質量を M〔kg〕，半径を R〔m〕，地上にある物体の質量を m〔kg〕，重力加速度の大きさを g〔m/s^2〕，万有引力定数を G〔N·m^2/kg^2〕とすると，重力が物体と地球との間にはたらく万有引力であるから，

$$mg=G\frac{Mm}{R^2}\qquad \therefore\ M=\frac{R^2g}{G}$$

➡最初の式を覚えておくこと。あとの式は導けばよい。

■■説　明■■

●地球の質量　　地球と他の物体の間にはたらく万有引力を考えるとき，地球を構成している物質は広く分布してはいるが，全質量が重心 O 点に集中しているとしてよい。したがって，距離を地球の半径として計算する。実際に，R，g，G の値から，地球の質量を求めてみよう。

地球の半径を $R=6.38\times10^6$〔m〕，地球の重力加速度の大きさを $g=9.8$〔m/s^2〕，万有引力定数を $G=6.67\times10^{-11}$〔N·m^2/kg^2〕とするとき，地球の質量 M は，

$$M=\frac{R^2g}{G}\ \text{より，}\qquad M=\frac{(6.38\times10^6)^2\times9.8}{6.67\times10^{-11}}\fallingdotseq5.98\times10^{24}\ \text{〔kg〕}$$

1　(6371)　M09

地球の質量の求め方について，次の問いに答えなさい。

(1)　地上にある質量 m の物体にはたらく重力はいくらか。重力加速度の大きさを g として示しなさい。

〔　　　　　　　　　　〕

(2)　地球の質量を M，地球の半径を R，万有引力定数を G として，地上の質量 m の物体にはたらく万有引力を求めなさい。ただし，地球の質量が地球の中心に集中していると考えてよい。

〔　　　　　　　　　　〕

(3)　(1)，(2)より，M を求めなさい。

〔　　　　　　　　　　〕

2 (6372) M09

地球の半径 R は約 6.4×10^3 km，重力加速度の大きさの平均値 g の値を $9.8\ \mathrm{m/s^2}$，万有引力定数 G を $6.7\times10^{-11}\ \mathrm{N\cdot m^2/kg^2}$ として，次の問いに答えなさい。

(1) 地球の質量 M を R，G，g で表しなさい。

〔　　　　　　〕

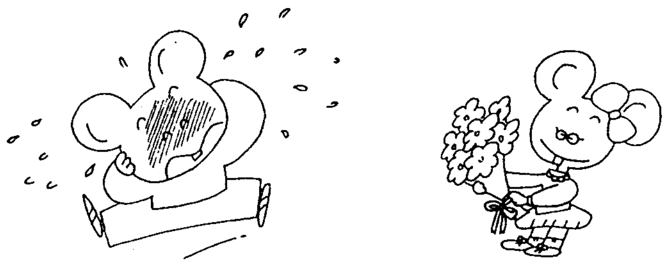
(2) 地球の質量 M は何 kg か。

〔　　　　　　〕

3 (6373) M09

月は地球に比べて質量が 0.012 倍，半径が 0.27 倍の大きさである。月面での重力加速度の大きさは，地球表面での何倍か。

〔　　　　　　〕



§10 地球の重力

M10

§9では，惑星の運動がケプラーの法則としてまとめられ，それがもとになって万有引力の法則が導かれたことを学習しました。この法則を用いて，太陽をはじめとする天体の質量などを計算しましたね。ここでは，地球の自転と重力，重力加速度と高度の関係，人工衛星の問題などについて，学習します。

◇考え方のポイント◇

◆地球の自転と重力

物体にはたらく重力は，万有引力と遠心力の合力である。遠心力は低緯度ほど大きいので，重力の大きさは低緯度ほど小さい。

◆地球上空での重力加速度

地表から h の位置における重力加速度の大きさ g' は，地球の質量を M,半径を R，万有引力定数を G，地表での重力加速度の大きさを g とすれば，上空での重力が万有引力となるから，

$$mg' = G\frac{Mm}{(R+h)^2} \qquad \therefore \quad g' = G\frac{M}{(R+h)^2}$$

◆人工衛星の速さと公転周期

地球の質量を M，半径を R，万有引力定数を G，地表の重力加速度の大きさを g とし，地表からの高さ h のところでまわる人工衛星の質量を m，速さを v，公転周期を T とすると，万有引力が向心力としてはたらくから，

$$G\frac{Mm}{(R+h)^2} = m\frac{v^2}{R+h} \qquad \therefore \quad v = \sqrt{\frac{GM}{R+h}}$$

$$T = \frac{2\pi(R+h)}{v}$$

➲地表での重力加速度の大きさを g とすると，地表にある質量 m' の物体にはたらく万有引力がこの物体の重力となるので，

$$m'g = G\frac{Mm'}{R^2} \qquad \therefore \quad GM = gR^2$$

これを使って，v を R，h，g を使って表すことができる。

$$v = \sqrt{\frac{gR^2}{R+h}} = R\sqrt{\frac{g}{R+h}}$$

1 (0038) $\boxed{}$ ➲類題6380 地球の自転と重力

地球を半径 6.38×10^6 m の球とし，地球の自転周期を24時間，地球の質量を 5.98×10^{24} kg とすると，赤道において，遠心力の大きさは，万有引力の大きさのおよそ何分の1か。ただし，万有引力定数を $G=6.67\times10^{-11}$〔N・m²/kg²〕とする。 〔　　　　〕

2 (0039) $\boxed{}$ ➲類題6390 地球上空での重力加速度

地球の半径を R，質量を M，万有引力定数を G として，次の問いに答えなさい。

(1) 地表の重力加速度の大きさ g を R，M，G で表しなさい。ただし，自転の影響は考えないものとする。

〔　　　　〕

(2) 地表からの高さ h の上空における重力加速度の大きさ g' を R，M，G，h で表しなさい。

〔　　　　　　　　　　〕

(3) g' を g，R，h で表しなさい。

〔　　　　　　　　　　〕

(4) $\dfrac{g'}{g}=\dfrac{1}{2}$ となる高さ h を求めなさい。ただし，無理数はそのままで答えなさい。

〔　　　　　　　　　　〕

3 (0040) □ ➡類題 6400 人工衛星の速さと公転周期

地表からの高さが h のところで，円軌道を回っている質量 m の人工衛星がある。地球の半径を R，地表での重力加速度の大きさを g として，次の問いに答えなさい。

(1) 人工衛星にはたらく万有引力の大きさを，m，R，h，g を用いて表しなさい。

〔　　　　　　　　　　〕

(2) 人工衛星の速さを，R，h，g を用いて表しなさい。

〔　　　　　　　　　　〕

(3) 人工衛星の周期を R，h，g を用いて表しなさい。

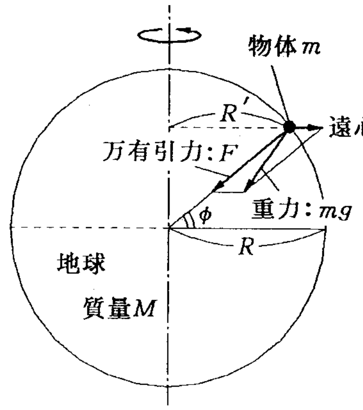
〔　　　　　　　　　　〕

類題トレーニング(6380)

●学習の視点　　地球上にある物体には，地球上にいる観測者から見ると，万有引力と慣性力である遠心力が作用する。重力はこの２つの力の合力であることがポイント。

テーマ　地球の自転と重力

●地上の物体には，地球から万有引力がはたらく。
●また，地上の物体は，地球の自転につれて，円運動をしている。
●したがって，地上の物体には，遠心力がはたらく。



【自転と重力】

物体にはたらく重力は，物体と地球間の万有引力と，地球の自転による遠心力との合力である。

■■説　明■■

●重力　　地球が自転していないとすれば，地上にある質量 m の物体に作用する万有引力の大きさ F は，地球の質量を M，半径を R，万有引力定数を G とすれば，

$$F=G\frac{Mm}{R^2}$$

である。しかし，地球は自転をしているので，質量 m の物体に作用する力は，万有引力と遠心力との合力となる。この合力が重力である。重力の大きさは，万有引力の大きさ F と遠心力の大きさ f を２辺とする平行四辺形の対角線の長さとして求められる。また重力の向きは，その対角線の向きである。つまり，地球の中心方向とずれることになる。

●赤道での重力　　物体が赤道上にある場合，重力の大きさ mg は F と f の差である。つまり，

$$mg=F-f \qquad f=mR\omega^2 \qquad \therefore\quad mg=G\frac{Mm}{R^2}-mR\omega^2$$

（ω は地球自転の角速度）

となり，重力は，地球の中心を向く。

●極での重力　　両極においては，回転半径 R' は０であるから遠心力も０となり，重力の大きさは，

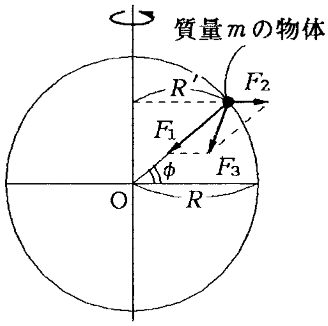
$$mg=G\frac{Mm}{R^2}$$

である。重力は，地球の中心を向く。

●緯度と重力　　地上の物体は，みな同じ周期（同じ角速度）で円運動をする。遠心力は $mR'\omega^2$ だから，半径（上図の R'）が大きいほど遠心力が大きくなる。つまり，重力は低緯度ほど小さくなる。ただし，赤道でも遠心力は重力の約 $\frac{1}{300}$ だから，ほとんど無視してよい。

1 (6381) M10

右図のような地上にある質量 m の物体にはたらく重力について，次の問いに答えなさい。



(1) この物体にはたらく万有引力は，図の F_1 から F_3 までのどれか。また，その大きさを，地球の質量を M，半径を R，万有引力定数を G として表しなさい。

〔　　　〕〔　　　〕

(2) この物体は地球の自転とともに回転する。それによる遠心力を表すのは F_1 から F_3 までのどれか。また，その大きさを角速度を ω として，m，R' で表しなさい。

〔　　　〕〔　　　〕

(3) 図の F_1 から F_3 までのうち，重力を表すのは，どれか。

〔　　　〕

2 (6382) M10

地球上に置かれた物体に関して，次の問いに答えなさい。

(1) 地球の半径を 6.38×10^6 m，自転周期を 24 時間として，赤道上にある質量 1.00 kg の物体にはたらく遠心力の大きさ F_1 を求めなさい。

〔　　　〕

(2) 地球の質量を 5.98×10^{24} kg とすると，赤道上に置かれた 1.00 kg の物体に作用する万有引力の大きさ F_2 はいくらか。また，万有引力と遠心力の比 $\frac{F_2}{F_1}$ を求めなさい。ただし，万有引力定数を $G=6.67\times10^{-11}$〔$\mathrm{Nm^2/kg^2}$〕とする。

F_2〔　　　〕　$\frac{F_2}{F_1}$〔　　　〕

3 (6383) M10

地球の半径を 6380 km，赤道上での重力加速度の大きさを $9.80\ \mathrm{m/s^2}$，万有引力定数を $6.67\times10^{-11}\ \mathrm{N\cdot m^2/kg^2}$ として，次の問いに答えなさい。

(1) 赤道上にある質量 1.00 kg の物体に作用する万有引力はいくらか。ただし，地球の質量を 5.98×10^{24} kg とする。

〔　　　〕

(2) 地球の自転の速さが現在の約何倍になれば，見かけの重さがなくなるか。

〔　　　〕

類題トレーニング(6390)

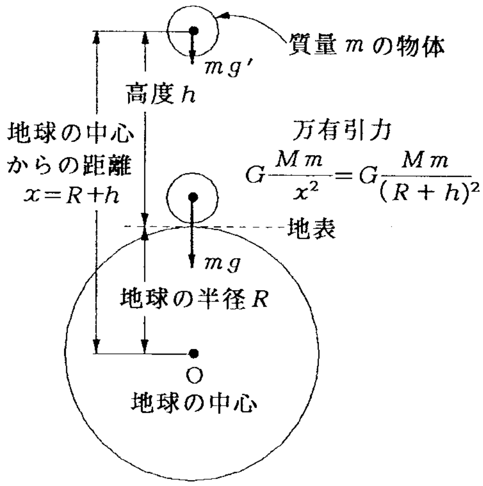
●学習の視点　　地表における重力は，地球自転による遠心力と万有引力に起因することを学習したが，次は地球上空での重力について考える。高さとともに万有引力がどのように変化し，それによって生ずる加速度は，どう変わるかがポイント。

テーマ　地球上空での重力加速度

●地球上空の離れた場所にある物体にも，地球から万有引力がはたらく。

●このとき，距離として考えるのは，地球の中心からの距離であり，地表からの高さではない。

●地球中心から x の位置に，質星 m の物体が静止しているとすれば，物体は地球の中心方向に，$G\frac{Mm}{x^2}$ の万有引力を受ける。



【地球上空での重力加速度】

地表から h〔m〕の上空での重力加速度の大きさ g'〔m/s²〕は，地球の質量を M〔kg〕，半径を R〔m〕，万有引力定数を G〔N・m²/kg²〕とすると，

$$g'=G\frac{M}{(R+h)^2}$$

➲結果の式を覚えるよりは，導き方を覚えること。

■■説　明■■

●地球上空での重力加速度　　物体が地球の表面から h の高さにある場合，物体の質量を m，地球の質量を M，半径を R とすると，両者間に次の万有引力 F_1 が作用する。

$$F_1=G\frac{Mm}{(R+h)^2} \quad \cdots\cdots\cdots①$$

また，その物体に生ずる加速度を g' とすると，物体に作用する重力の大きさ F_2 は，

$$F_2=mg' \quad \cdots\cdots\cdots②$$

$F_1=F_2$ であるから，①，②より，

$$g'=G\frac{M}{(R+h)^2}$$

●地表での重力加速度との比較　　地表での万有引力は，$G\frac{Mm}{R^2}$ である。自転の影響などを無視すれば，これが地球の重力となるので，

$$mg=G\frac{Mm}{R^2} \quad \therefore \quad g=G\frac{M}{R^2}$$

これを上の g' と比較すると，

$$\frac{g'}{g}=\frac{R^2}{(R+h)^2}$$

となる。

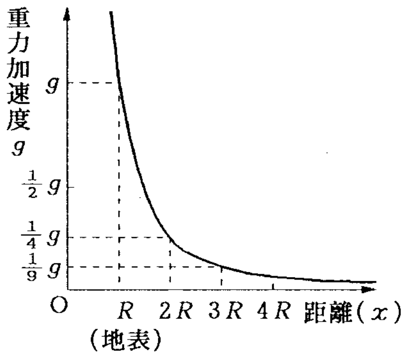
参考

● 地球上空での重力加速度

地球上空での重力加速度の大きさは，地球の中心からの距離の2乗に反比例する。

縦軸に重力加速度，横軸に地球中心からの距離をとったグラフは，図のように上空にいくほど急激に小さくなる。

横軸の1めもりは，地球の半径 R を単位としてある。



---

1 (6391) M10

上空での重力加速度について，次の問いに答えなさい。

(1) 地球の中心から x の位置にある質量 m の物体にはたらく万有引力はいくらか。地球の質量を M，万有引力定数を G とする。

〔　　　　　　　〕

(2) 地球の中心から x の位置での重力加速度の大きさを g' として，質量 m の物体にはたらく重力の大きさを表しなさい。

〔　　　　　　　〕

(3) (1)，(2)より，位置 x での重力加速度の大きさ g' を M，G，x で表しなさい。

〔　　　　　　　〕

2 (6392) M10

万有引力定数を $G=6.7\times10^{-11}$〔N・m²/kg²〕，地球の質量を $M=6.0\times10^{24}$〔kg〕，地球の半径を $R=6.4\times10^{6}$〔m〕として，次の問いに答えなさい。

(1) 地表における重力加速度の大きさ g を G，M，R で表しなさい。ただし，地球の自転の影響は考えないものとする。

〔　　　　　　　〕

(2) 地表より h の上空における重力加速度の大きさ g' を，g，R，h で表しなさい。

〔　　　　　　　〕

(3) 地表より 3600 km 上空における重力加速度の大きさは何 m/s^2 か。

〔　　　　　　　〕

3 (6393) M10

地球の半径を $R=6.4\times10^{6}$〔m〕，地表における重力加速度の大きさを $g=9.8$〔m/s^2〕として，次の問いに答えなさい。

(1) 地表より h の上空における重力加速度の大きさ g' を g，R，h で表しなさい。

〔　　　　　　　〕

(2) 地表から高さ 1600 km のところの重力加速度の大きさを求めなさい。

〔　　　　　　　〕

(3) 地球の中心から 3.8×10^{5} km（ほぼ月までの距離）の上空における重力加速度の大きさを求めなさい。

〔　　　　　　　〕

4 (6394) M10

地上より高さ h における重力の大きさが地上の $\frac{1}{5}$ であるとき，地球の自転の影響は考えないものとして，次の問いに答えなさい。

(1) h は地球の半径 R の何倍か。　〔　　　　　　　〕

(2)　$R=6.4\times10^6$〔m〕として，h の数値を求めなさい。

〔　　　　　　　　　　　　〕

(3)　地上での重力加速度の大きさを $9.8\,\mathrm{m/s^2}$ としたとき，地上より高さ h における重力加速度の大きさはいくらか。

〔　　　　　　　　　　　　〕

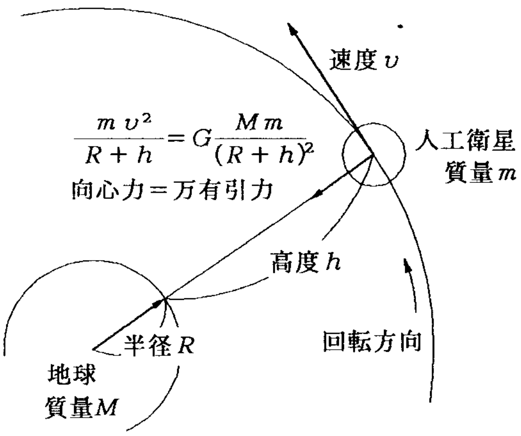
類題トレーニング(6400)

●学習の視点　　人工衛星には万有引力がはたらき，その力が向心力として作用して地球のまわりをまわると考えるところが要点である。

テーマ　人工衛星の速さと公転周期

●地球のまわりを人工衛星が等速円運動をしていると考える。

●人工衛星には，地球との間に万有引力がはたらく。これが円運動の向心力となる。このことから，人工衛星の速さや周期を求めることができる。



【人工衛星の速さと公転周期】

地球の質量を M〔kg〕，半径を R〔m〕，万有引力定数を G〔N·m²/kg²〕，地表での重力加速度の大きさを g〔m/s²〕として，地表からの高さ h〔m〕をまわる人工衛星の速さ v〔m/s〕，周期 T〔s〕は，

$$v=\sqrt{\frac{GM}{R+h}}=R\sqrt{\frac{g}{R+h}}\qquad T=\frac{2\pi(R+h)}{v}$$

➡結果の式を覚えるよりは，導き方を覚えたほうがよい。

■■説　明■■

●式の導き方　　地球の質量を M，半径を R，万有引力定数を G，衛星の質量を m，地球から衛星までの距離を h とする。地球の中心と衛星との距離は $(R+h)$ だから，万有引力 F_1 は，

$$F_1=G\frac{Mm}{(R+h)^2}$$

一方，半径 $(R+h)$ の円運動の向心力 F_2 は，衛星の速度を v とすると，

$$F_2=m\frac{v^2}{R+h}$$

万有引力 F_1 が向心力 F_2 としてはたらくから，

$$G\frac{Mm}{(R+h)^2}=m\frac{v^2}{R+h}\qquad \therefore\quad v=\sqrt{\frac{GM}{R+h}}\qquad\cdots\cdots\cdots①$$

また，地表での重力加速度の大きさを g とすると，地表にある質量 m' の物体にはたらく重力が，この物体と地球との間にはたらく万有引力であるから，

$$m'g=G\frac{Mm'}{R^2}\qquad \therefore\quad GM=gR^2\qquad\cdots\cdots\cdots②$$

②を①に代入すると，

$$v=\sqrt{\frac{R^2g}{R+h}}=R\sqrt{\frac{g}{R+h}}\qquad\cdots\cdots\cdots③$$

G，M，R，g は，一定値であるから，h が大きいほど，つまり高度が大きい人工衛星ほど円運動の速さは，ゆるやかである。また，③の式を使うと，G，M の値のかわりに g の値を使って v が求められる。

●人工衛星の公転周期　　周期を T とすると，等速円運動と考えてよいから，

$$T=\frac{2\pi(R+h)}{v}=2\pi\sqrt{\frac{(R+h)^3}{GM}}=2\pi\sqrt{\frac{(R+h)^3}{gR^2}}=\frac{2\pi}{R}\sqrt{\frac{(R+h)^3}{g}}$$

1　(6401)　M10

地表からの高さ h で円運動している人工衛星について，次の問いに答えなさい。ただし，地球の質量を M，半径を R，衛星の質量を m，万有引力定数を G とする。

(1)　地球と人工衛星の間の万有引力を求めなさい。

〔　　　　　　　　　　〕

(2)　衛星の速さを v として，半径 $(R+h)$ の円運動の向心力を表しなさい。

〔　　　　　　　　　　〕

(3)　(1)の万有引力が(2)の向心力になっているとして，v を求めなさい。

〔　　　　　　　　　　〕

(4)　地表での重力加速度の大きさ g を用いて，(3)の v を求めなさい。

〔　　　　　　　　　　〕

(5)　周期 T は $\frac{2\pi(R+h)}{v}$ だから，(3)より，T を求めなさい。

〔　　　　　　　　　　〕

(6)　g を用いて，(5)の T を求めなさい。

〔　　　　　　　　　　〕

2　(6402)　M10

地球の半径を $R=6.4\times10^6$〔m〕，地表での重力加速度の大きさを $g=9.8$〔m/s^2〕として，次の問いに答えなさい。

(1)　地表すれすれに円軌道をえがいてまわる人工衛星の速さ（これを第１宇宙速度という）はいくらか。

〔　　　　　　　　　　〕

(2)　地表すれすれに円軌道をえがいてまわる人工衛星の公転周期はいくらか。

〔　　　　　　　　　　〕

(3)　地上 3.6×10^6 m を円軌道をえがいてまわる人工衛星の速さはいくらか。

〔　　　　　　　　　　〕

3　(6403)　M10

地上から高さ 400 km のところで，地球のまわりを円運動をしている人工衛星がある。地球の半径を 6400 km，地表での重力加速度の大きさを 9.8 m/s^2 として，次の問いに答えなさい。

(1)　高さ 400 km における重力加速度の大きさはいくらか。

〔　　　　　　　　　　〕

(2)　人工衛星の速さはいくらか。

〔　　　　　　　　　　〕

(3)　人工衛星の公転周期はいくらか。

〔　　　　　　　　　　〕

4　(6404)　M10

公転周期が 24 時間の人工衛星（静止衛星）がある。地球の半径を 6.4×10^6 m，地表における重力加速度の大きさを 9.8 m/s^2 として，次の問いに答えなさい。ただし，必要ならば $\sqrt[3]{76}=4.24$ として計算しなさい。

(1)　この衛星は，地表から何 km のところをまわっているか。

〔　　　　　　　　　　〕

(2)　この衛星の位置での重力加速度の大きさはいくらか。

〔　　　　　　　　　　〕

§ 11 円運動・単振動・万有引力と力学的エネルギーの保存

M11

ここでは，円運動と単振動および万有引力と力学的エネルギー保存について考えていきます。ここは，試験によく出るところなので，しっかり理解しておくように。まずはじめに，円運動について考えていきましょう。

◇考え方のポイント◇

◆鉛直面内での円運動と力学的エネルギー保存の法則

最高点を通過するための最下点での速度を v_0，最高点での速度を v' とすれば，半径を r として，

物体を棒の先につけたとき　$\frac{1}{2}mv_0{}^2=mg\cdot 2r$

物体を糸の先につけたとき　$\frac{1}{2}mv_0{}^2=mg\cdot 2r+\frac{1}{2}mv'^2$　　$mg=m\frac{v'^2}{r}$

◆単振動のエネルギー

単振動する物体の運動エネルギーと位置エネルギーの和を「単振動のエネルギー」という。その大きさは，物体の位置によらず一定で，$E=2\pi^2mf^2A^2$ となる。(f は振動数，A は振幅)

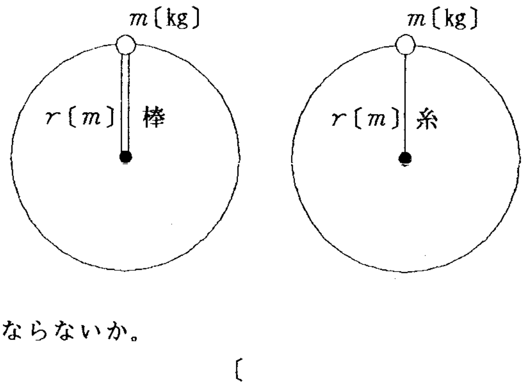
◆万有引力による位置エネルギー

地球の中心から r〔m〕離れたところにある質量 m〔kg〕の物体のもつ万有引力による位置エネルギー U〔J〕は，基準を無限遠にとって，次のように表される。

$$U=-G\frac{Mm}{r}$$ （G：万有引力定数　M：地球の質量）

1　(0041)　□　➲類題 6410　鉛直面内の円運動と力学的エネルギー保存の法則

図のように，質量 m〔kg〕の小球を糸と棒の端につけ，それぞれの他端を中心に鉛直面内で円運動させた。これについて，次の問いに答えなさい。ただし，糸と棒の長さはともに r〔m〕，重力加速度の大きさを g〔m/s²〕とし，糸や棒の質量は無視できるものとする。



(1)　棒を使った場合，棒の先につけられた小球が最高点を通過するためには，最下点での速さを最低何 m/s にしなければならないか。

〔　　　　　　　　〕

(2)　糸を使った場合，糸の先につけられた小球が最高点を通過するためには，最下点での速さを最低何 m/s にしなければならないか。

〔　　　　　　　　〕

(3)　(2)のときの速さは(1)のときの速さの何倍になるか。

〔　　　　　　　　〕

2 (0042) □ ➡類題 6420 単振動のエネルギー

次の問いに答えなさい。

(1) 質量 1.0 kg の物体が振幅 0.40 m，振動数 20 Hz で単振動している。この単振動のエネルギーはいくらか。

〔　　　　　　　　〕

(2) 振幅が 0.10 m，周期が 0.50 s の単振動をしている物体がある。物体の質量を 2.0 kg とすると，この単振動のエネルギーはいくらか。

〔　　　　　　　　〕

3 (0043) □ ➡類題 6430 万有引力と力学的エネルギー

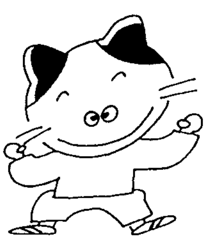
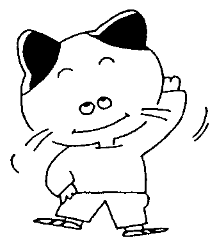
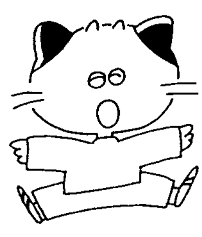
万有引力と力学的エネルギーについて，次の問いに答えなさい。

(1) 万有引力による位置エネルギーはどこを基準として考えるか。

〔　　　　　　　　〕

(2) 地上 3.60×10^{7} m の高さにある質量 1.20×10^{2} kg の物体の万有引力による位置エネルギーは何 J か。ただし，万有引力定数を 6.67×10^{-11} N·m^2/kg^2，地球の半径を 6.38×10^{6} m，地球の質量を 5.97×10^{24} kg とする。

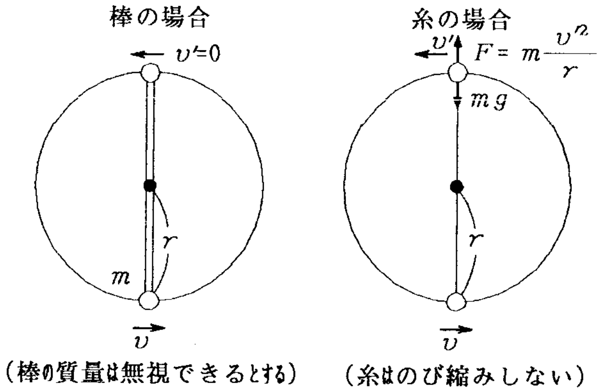
〔　　　　　　　　〕

類題トレーニング(6410)

●学習の視点　　ここでは，糸または棒の先につけた小球を鉛直面内で回転させるとき，円運動をさせるためには最下点でどれだけの初速度をあたえればよいかを力学的エネルギー保存の法則から考える。棒の場合には最高点での速度が0でよいが，糸の場合は最高点で落下しないだけの速度をもたなくてはならないところがポイントである。

テーマ　鉛直面内の円運動と力学的エネルギー保存の法則



●右図のような棒の先につけた物体と糸の先につけた物体を鉛直面内で円運動させるとき，最高点を通過できる条件を考える。

●鉛直面内での円運動は等速円運動ではない。

●最下点と最高点の2点について，力学的エネルギーが保存される。

●棒の場合は，最高点で速度0でも小球は落下しないから，最高点を通過するときの速度は $v'=0$ としてよい。

●糸の場合は，最高点で重力に逆らうだけの遠心力をもつために必要な速度 v' は，

$$mg=m\frac{v'^2}{r}$$

である。

【鉛直面内で円運動する棒の先につけられた小球が最高点を通過する条件】

最下点を通過するときの速度を v とすれば，最高点は最下点から $2r$ の高さになるから，力学的エネルギー保存の法則より，

$$\frac{1}{2}mv^2=mg(2r) \qquad \therefore \quad v^2=4gr$$

ゆえに，$v=2\sqrt{gr}$

【鉛直面内で円運動する糸の先につけられた小球が最高点を通過する条件】

最下点を通過するときの速度を v とすれば，力学的エネルギー保存の法則より，

$$\frac{1}{2}mv^2=mg(2r)+\frac{1}{2}mv'^2 \qquad \cdots\cdots\cdots①$$

である。また，最高点で小球にはたらく重力と遠心力が同じ大きさであれば，小球は落ちないから，

$$mg=m\frac{v'^2}{r} \qquad \cdots\cdots\cdots②$$

②より，$v'^2=gr$ を①に代入して整理する。

ゆえに，$v=\sqrt{5gr}$

■■説　明■■

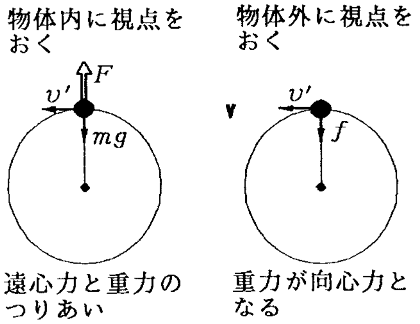
●棒の場合　　棒はたるまないから，エネルギー保存の法則だけ考えればよい。

●糸の場合　　最高点での遠心力が重力にまされば糸はたるまない。円運動している質量 m の物体にはたらく遠心力 F は，そのときの物体の速度を v' とすれば，

$$F=m\frac{v'^2}{r}$$

である。

この遠心力 F と重力 mg が同じ大きさならば，最高点で糸がたるむことはない。このことは物体の外に視点をおけば（慣性系の立場），重力 mg だけが向心力 f になっていることを示している。



1　(6411)　M11

鉛直面内での円運動と力学的エネルギー保存の法則について，次の問いに答えなさい。ただし，摩擦や空気抵抗は考えなくてよい。

(1) 鉛直面内で最下点を速度 v_0 で通過して円運動する物体は，その後等速円運動をするか。

〔　　　　　　〕

(2) 棒につけられた小球を鉛直面内で円運動させるとき，最高点を通過するために必要な最高点での最小の速度はいくらと考えてよいか。

〔　　　　　　〕

(3) 糸につけられた小球を鉛直面内で円運動させるとき，最高点を通過するためには，最高点で小球にはたらく重力がどのような条件にしたがうときか。

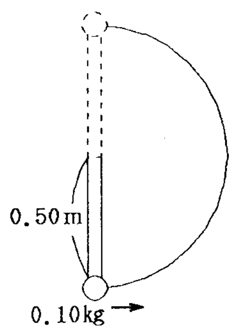
〔　　　　　　〕

(4) 鉛直面内で円運動する物体について，力学的エネルギーは保存されるか。

〔　　　　　　〕

2　(6412)　M11

質量 0.10 kg の小球を長さ 0.50 m の棒の端につけ，棒の他端を中心に鉛直面内で円運動させる。小球が最高点を通過するためには，最下点を通過する速度は最低何 m/s であればよいか。次の順に求めなさい。ただし，重力加速度の大きさを $g=9.8$〔m/s²〕とする。



(1) 小球の質量を m，最下点での最低の速度を v，棒の長さを r として，力学的エネルギー保存の法則の式を書きなさい。

〔　　　　　　〕

(2) (1)の式を使って，最下点を通過する速度を求めなさい。

〔　　　　　　〕

3　(6413)　M11

小球を糸の端につけて，鉛直面内で円運動させる。このとき，次の問いに答えなさい。

(1) 小球の質量を m，最下点での速度を v，最高点での速度を v'，糸の長さを r，重力加速度の大きさを g とするとき，力学的エネルギー保存の法則の式を書きなさい。

〔　　　　　　〕

(2) 糸がたるまないために必要な最高点での最低の速度 v' を求めなさい。

〔　　　　　　〕

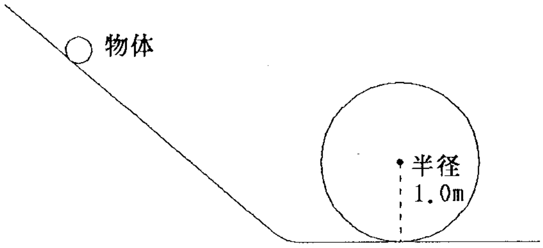
(3) (1)，(2)で求めた式から，糸がたるまずに小球が最高点を通過するために必要な最下点での最低の速度 v を求めなさい。

〔　　　　　　〕

4 (6414) M11

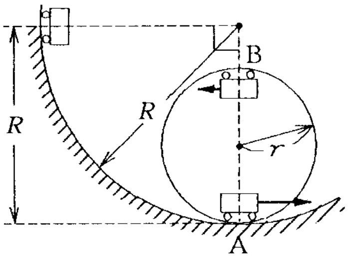
図のように，質量2.0kgの物体をある高さから初速度0ですべらせて，半径1.0mの円運動をさせるためには，最初の高さを最低何mにしなければならないか。ただし，面はすべてなめらかであるとする。

〔　　　　　　　〕



5 (6415) M11

半径 R と r の2つの円弧を組み合わせた図のような宙返りコースターがある。質量 m の車両が高さ R の位置から初速度0ですべりおりてきた。摩擦はなく，重力加速度の大きさを g として，次の問いに答えなさい。



(1) 最下点Aを通過する直前に車両が受ける遠心力と，抗力の大きさを求めなさい。

遠心力〔　　　　　　〕

抗　力〔　　　　　　〕

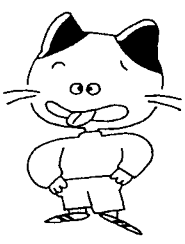
(2) 最高点Bで車両がレールから離れないためには，点Bでの速さはいくら以上でなければならないか。

〔　　　　　　　〕

(3) (2)のためには，R が r の何倍以上であることが必要か。

〔　　　　　　　〕

ヒント コースターの車両がレールから離れないためには，その地点でのレールから受ける抗力が0以上でなければならない。

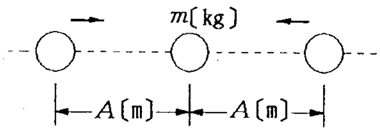


類題トレーニング(6420)

●学習の視点　　ここでは，単振動をしている物体について，その振動のエネルギーを考える。運動エネルギーの値に単振動の速度の式を代入するところがポイントである。

テーマ　単振動のエネルギー

●質量 m〔kg〕の物体が振幅 A〔m〕で単振動しているときの力学的エネルギーは，運動エネルギー E_k〔J〕と弾性力による位置エネルギー $E_{p'}$〔J〕の和である。



●つりあいの位置を通過するときの速さを v_0〔m/s〕とすると，

$$E_k=\frac{1}{2}mv_0^2\text{〔J〕}$$

このとき変位が0だから，

$$E_{p'}=0$$

●振幅 A，角振動数 ω の単振動の速度 v は，$v=A\omega\cos\omega t$ で，$t=0$ のとき，$v_0=A\omega$ となる。

【単振動のエネルギー】

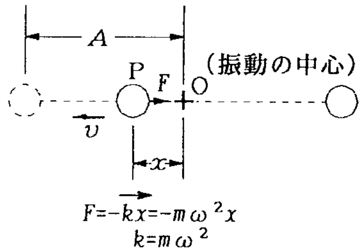
振幅 A，角振動数 ω，振動数 f の単振動のエネルギーは，次のようになる。

$$E=\frac{1}{2}mv_0^2=\frac{1}{2}m(A\omega)^2=\frac{1}{2}m(A\cdot 2\pi f)^2=2\pi^2 mf^2A^2\left(=\frac{1}{2}kA^2\right)$$

■■説　明■■

●単振動のエネルギーは物体の位置に無関係

単振動のつりあいの位置からスタートして t〔s〕後の変位は，$x=A\sin\omega t$ である。そのときの弾性力による位置エネルギー $E_{p'}$ は，



$$E_{p'}=\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}kA^2\sin^2\omega t$$

$$=\frac{1}{2}m\omega^2A^2\sin^2\omega t$$

一方，そのときの速さは $v=A\omega\cos\omega t$ だから，物体の運動エネルギー E_k は，

$$E_k=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m\times A^2\omega^2\cos^2\omega t=\frac{1}{2}m\omega^2A^2\cos^2\omega t$$

したがって，力学的エネルギーの総和 E は，

$$E=E_k+E_{p'}=\frac{1}{2}m\omega^2A^2\cos^2\omega t+\frac{1}{2}m\omega^2A^2\sin^2\omega t$$

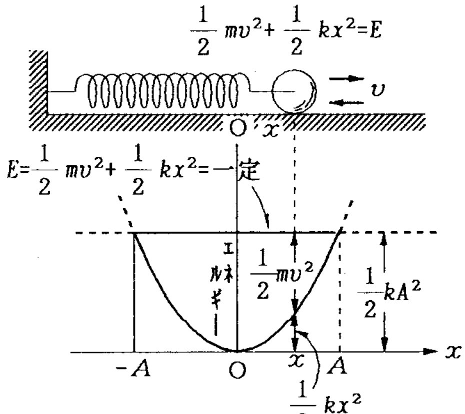
$$=\frac{1}{2}m\omega^2A^2=\frac{1}{2}kA^2$$

ゆえに，単振動のエネルギーは，$\omega=2\pi f$ を使うと，

$$E=\frac{1}{2}kA^2=\frac{1}{2}m\omega^2A^2=2\pi^2mf^2A^2$$

となる。

ここで，$\frac{1}{2}kA^2$ は最大振幅のときの弾性力による位置エネルギーであるから，単振動のエネルギーは最大振幅のときの位置エネルギーと等しい。また，この式に変位 x がはいっていないことからわかるように，単振動のエネルギーは，物体の位置に無関係である。つまり，単振動のエネルギーは任意の変位に対して，$E=\frac{1}{2}kA^2=2\pi^2mf^2A^2$ で表される。

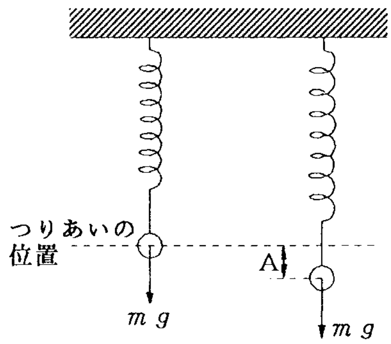


＜単振動のエネルギー＞

よって，振動の中心を通るときの速さを v_0〔m/s〕，変位 x〔m〕の位置を通るときの速さを v〔m/s〕とすると，次の式が成り立つ。

$$\frac{1}{2}kA^2=\frac{1}{2}kx^2+\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}mv_0^2$$

● 単振動の速さ　　単振動のエネルギーを使うと，振動の中心を通るときの速さがすぐに求められる。たとえば，右図のような鉛直ばね振り子の場合，ばね定数 k のばねを振動の中心（つりあいの位置）から静かに A だけ引いてからはなし，単振動させたとする。このとき，振動の中心での速さを v_0，おもりの質量を m とすると，振幅が A となるので，次の式が成り立つ。



$$\frac{1}{2}kA^2=\frac{1}{2}mv_0^2$$

$$\therefore\quad v_0=A\sqrt{\frac{k}{m}}$$

1　(6421)　M11

単振動のエネルギーについて，次の問いに答えなさい。

(1)　$E=2\pi^2mf^2A^2$ は単振動のエネルギーを表している。ただし，m は物体の質量，f は振動数，A は振幅を表す。単振動のエネルギーは変位に関係するか。

〔　　　　　　　　　　〕

(2)　振動数が2倍になると，単振動のエネルギーは何倍になるか。

〔　　　　　　　　　　〕

(3)　振幅が $\frac{1}{2}$ になると，単振動のエネルギーは何倍になるか。

〔　　　　　　　　　　〕

2　(6422)　M11

質量1.0kgの物体が振幅0.30m，振動数25Hzで単振動しているとき，次の問いに答えなさい。

(1)　この物体の単振動のエネルギーは何 J か。

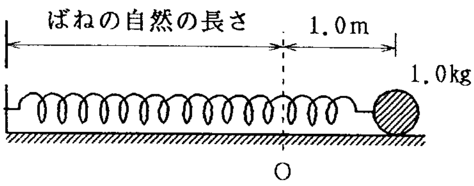
〔　　　　　　　　　　〕

(2)　振動数が100Hzになった。単振動のエネルギーは何 J か。

〔　　　　　　　　　　〕

3 (6423) M11

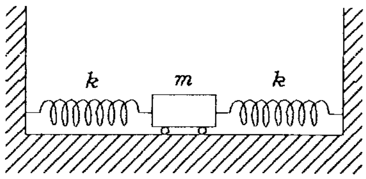
右図のように，なめらかな水平面上で，ばねにつけたおもりを1.0m引っ張ってからはなし，振動させた。おもりの質量を1.0kg,ばね定数を16N/mとして，振動の中心を通るときの速さを求めなさい。



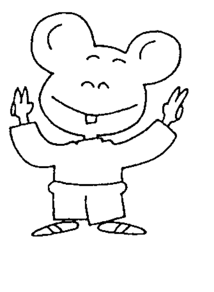
〔　　　　　　　　〕

4 (6424) M11

なめらかな水平面上に置かれた質量 m〔kg〕の物体に，右図のように同じばね定数 k〔N/m〕のばねが連結され，いずれも自然の長さになっている。物体を A〔m〕だけ右へずらせて静かにはなしたとき，振動の中心を通るときの速さを求めなさい。



〔　　　　　　　　〕



類題トレーニング(6430)

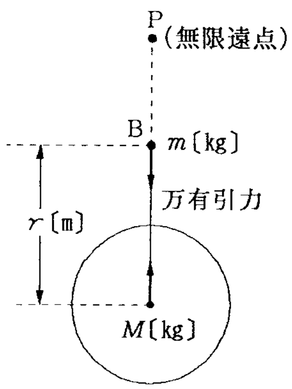
●学習の視点　　地球の表面の近くでは重力加速度を一定と考えて位置エネルギーを扱っているが，もっと大きな現象を扱う場合には，万有引力による位置エネルギーを考えなくてはならない。ここでは，万有引力による位置エネルギーおよび万有引力による運動を考える。

テーマ　万有引力と力学的エネルギー

●地球と地球上の物体は引き合っていて，重力による位置エネルギーが考えられる。同じように，2物体間には万有引力がはたらくので，万有引力による位置エネルギーが考えられる。

●右図で，物体を点Bから無限遠点Pまで万有引力に逆らって運ぶのには，$G\dfrac{Mm}{r}$の仕事が必要である。

●万有引力による位置エネルギーの基準点は無限遠点Pとする。



【万有引力による位置エネルギー】

地球の質量をM〔kg〕，地球の中心Oからr〔m〕離れたところにある物体の質量をm〔kg〕とすると，その物体のもつ万有引力による位置エネルギーU〔J〕は無限に遠い点を基準にして，次の式で表される。

$$U=-G\frac{Mm}{r}\qquad (G：万有引力定数\ \ 6.67\times10^{-11}\ \mathrm{N\cdot m^2/kg^2})$$

【万有引力のはたらく物体の力学的エネルギー】

力学的エネルギー保存の法則より，

$$E=\frac{1}{2}mv^2-G\frac{Mm}{r}=一定$$

■■説　明■■

● $G\dfrac{Mm}{r}$の仕事　　物体が地球に引かれる万有引力 $F=G\dfrac{Mm}{r^2}$ に逆らって，微小距離 dr 遠ざけるには，これと同じ大きさの力Fをはたらかせて，dr 動かす仕事

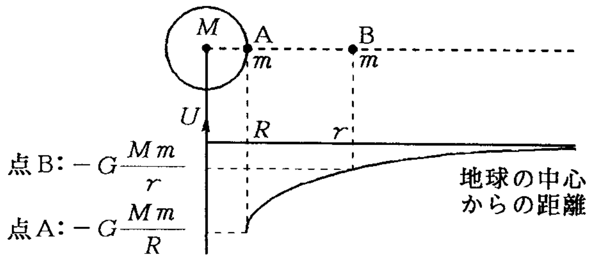
$$G\frac{Mm}{r^2}\cdot dr$$

をする必要がある。地球の中心からrの距離にあるB点から無限遠点Pまで物体を運ぶのに必要な仕事は，dr ずつに分けた道すじを運ぶ仕事をrから無限遠まで加え合わせた(積分した)ものである。したがって，

$$\int_r^\infty G\frac{Mm}{r^2}\cdot dr=GMm\int_r^\infty\frac{dr}{r^2}=GMm\left[\frac{r^{-2+1}}{-2+1}\right]_r^\infty$$

$$=GMm\left[-\frac{1}{r}\right]_r^\infty=G\frac{Mm}{r}$$

●万有引力による位置エネルギーの基準点　　右図で，地球の中心から r の距離にある B 点で，質量 m の物体のもつ万有引力による位置エネルギーを U とする。万有引力に逆らって，物体を B 点から無限遠点 P まで運ぶのには $G\dfrac{Mm}{r}$ の仕事を必要とし，この仕事分だけ無限遠点 P は点 B より万有引力による位置エネルギーが増加する。したがって，P 点における物体の万有引力による位置エネルギー U_{∞}は，$U_{\infty}=U+G\dfrac{Mm}{r}$ である。



ところが，P 点を基準点として $U_{\infty}=0$ とおくから，

$$0=U+G\frac{Mm}{r}$$

となる。

したがって，

$$U=-G\frac{Mm}{r}$$

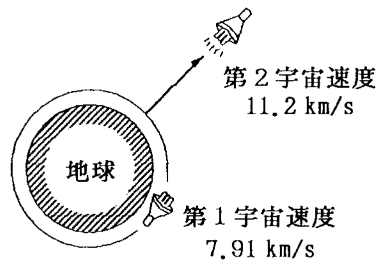
となる。すなわち，基準点を無限遠点 P にとると，U はつねに負の値となる。

研 究

●人工衛星の速度

人工衛星が地表すれすれの円軌道をえがいて回転するときの速度を第 1 宇宙速度といい，その大きさは 7.91 km/s である。

また，人工衛星が重力圏から脱出して，無限遠方へ行くための最小の初速度を第 2 宇宙速度（脱出速度）といい，その大きさは 11.2 km/s である。



1　(6431)　M11

万有引力と力学的エネルギーについて，次の問いに答えなさい。

(1)　万有引力による位置エネルギーはどこを基準点と考えるか。

〔　　　　　　　　　　　　〕

(2)　地球の中心から r〔m〕のところでの万有引力による位置エネルギー U は，地球の質量を M〔kg〕，物体の質量を m〔kg〕，万有引力定数を G〔N･m²/kg²〕とすると，何 J になるか。

〔　　　　　　　　　　　　〕

(3)　地球の半径を R〔m〕とすると，地上 h〔m〕の高さにある物体の万有引力による位置エネルギー U は何 J か。

〔　　　　　　　　　　　　〕

2　(6432)　M11

地表に置かれた質量 1.0 kg の物体の万有引力による位置エネルギーは何 J か。ただし，地球の半径を 6.4×10^{6} m，地球の質量を 6.0×10^{24} kg，万有引力定数を 6.7×10^{-11} N･m²/kg² とする。

〔　　　　　　　　　　　　〕

3 (6433) M11

質量 m の物体を地表に置いた場合と地表近くの高さ h の位置においた場合の，地球の万有引力による位置エネルギーの差が mgh とみなしてよいことを，次の小問に答えながら示しなさい。

(1) 地球の半径を R，質量を M とすると，物体が地表にあるときの万有引力による位置エネルギー U_0 はどのように表されるか。

〔　　　　　　　　　　〕

(2) 物体が地上 h の高さにあるときの万有引力による位置エネルギー U はどのように表されるか。

〔　　　　　　　　　　〕

(3) 質量 m の物体にはたらく万有引力の大きさは $G\dfrac{Mm}{R^2}$ であたえられる。一方，地表での重力加速度の大きさを g とすれば，地表にある物体にはたらく重力の大きさは mg である。これらのことから，g を G，M，R で表しなさい。

〔　　　　　　　　　　〕

(4) h が R に比べて十分小さいとして，$U-U_0$ の値を求めなさい。

〔　　　　　　　　　　〕

ヒント (4) $R \gg h$ だから，$\dfrac{h}{R} \fallingdotseq 0$ とみて，$1+\dfrac{h}{R} \fallingdotseq 1$ に近似する。

4 (6434) M11

地上から打ち上げた人工衛星が無限遠方へ行くのに必要な最小の初速度を「第２宇宙速度」という。この速度の大きさを，次の(1)〜(4)の順に求めなさい。

(1) 人工衛星の質量を m，打ち上げる初速度を v_0，地球の半径を R，地球の質量を M とすると，人工衛星がもつ地上での力学的エネルギー E はどのように表されるか。

〔　　　　　　　　　　〕

(2) 地球の中心から距離 r での速度を v とすると，その点で人工衛星のもつ力学的エネルギー E' はどのように表されるか。

〔　　　　　　　　　　〕

(3) 万有引力による運動でも力学的エネルギーが保存されることから，(1)，(2)の式の関係を式で表しなさい。

〔　　　　　　　　　　〕

(4) 物体が無限遠方へ行ってしまうには，$r \to \infty$ のときも $\dfrac{1}{2}mv^2 \geqq 0$ でなければならない。したがって，$r \to \infty$ のときの $\dfrac{1}{2}mv^2$ の最小値は０である。また，$r \to \infty$ の点が位置エネルギーの基準点だから，$-G\dfrac{Mm}{r}$ も０である。これらのことと，$mg=G\dfrac{Mm}{R^2}$ すなわち $GM=gR^2$ であることを使うと，初速度 v_0 は何 km/s 以上であることが必要か。ただし，重力加速度の大きさを $g=9.80$〔m/s^2〕，$R=6.38\times10^6$〔m〕とする。

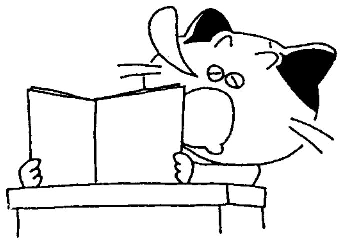
〔　　　　　　　　　　〕

5 (6435) M11

地表から 1.2×10^4 m/s で打ち上げたロケットは，地球の引力をのがれて無限遠方へ達することができるか。ただし，地球の半径を $R=6.4\times10^6$〔m〕，重力加速度の大きさを $g=9.8$〔m/s^2〕とする。

〔　　　　　　　　　　〕

memo



1 巻の解答

第1章　円運動・単振動・万有引力

≪詳解≫

§1 等速円運動

M01

1 (0001) $\square$ ➡類題 6010 周期と速さ

(1) 1.6 m/s (2) 16 s (3) 25 m

解説

(1) 半径 r 〔m〕の円周上を，周期 T 〔s〕で等速円運動する物体の速さ v 〔m/s〕は，次の式で表される。

$$v=\frac{2\pi r}{T} \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

これにあたえられた数値を代入すると，

$$v=\frac{2\times3.14\times0.30}{1.2}=1.57\fallingdotseq1.6 \text{〔m/s〕}$$

(2) ①を変形して数値を代入すると，

$$T=\frac{2\pi r}{v}=\frac{2\times3.14\times25}{9.8}=16.0\cdots\fallingdotseq16 \text{〔s〕}$$

(3) ①を変形して数値を代入すると，

$$r=\frac{vT}{2\pi}=\frac{9.8\times16}{2\times3.14}=24.9\cdots\fallingdotseq25 \text{〔m〕}$$

2 (0002) $\square$ ➡類題 6020 回転数と速さ

(1) 回転数… $\frac{v}{2\pi r}$，周期… $\frac{2\pi r}{v}$ (2) 回転数… 50 Hz，速さ… 250 m/s

(3) 周期… 0.050 s，半径… 0.080 m

解説

(1) まず，周期 T から求めると， $v=\frac{2\pi r}{T}$ ∴ $T=\frac{2\pi r}{v}$

回転数 n は周期 T の逆数だから， $n=\frac{1}{T}=\frac{v}{2\pi r}$

(2) 回転数 n は周期 T の逆数であるから， $n=\frac{1}{T}=\frac{1}{0.020}=50$ 〔Hz〕

よって，速さを v とすると，

$$v=2\pi rn=2\times3.14\times0.80\times50=251.2\fallingdotseq250 \text{〔m/s〕}$$

(3) 周期 T は回転数 n の逆数であるから， $T=\frac{1}{n}=\frac{1}{20}=0.050$ 〔s〕

また，半径を r とすると，

$$r=\frac{v}{2\pi n}=\frac{10}{2\times3.14\times20}=0.0796\cdots\fallingdotseq0.080 \text{〔m〕}$$

3 (0003) $\square$ ➡類題 6030 角速度

(1) 0.052 rad/s (2) 4.0 rad/s

解説

(1) 周期を T 〔s〕とすると，角速度 ω 〔rad/s〕は，

$$\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\times3.14}{2.0\times60}=0.0523\cdots\fallingdotseq0.052 \text{〔rad/s〕}$$

(2) 半径を r 〔m〕，速さを v 〔m/s〕とすると，角速度 ω 〔rad/s〕は，

$$\omega=\frac{v}{r}=\frac{8.0}{2.0}=4.0 \text{〔rad/s〕}$$

4 (0004) ☐ ➲類題 6040 等速円運動の加速度

(1) $0.32\,\mathrm{m/s^2}$ (2) $9.8\,\mathrm{m/s^2}$

解説

(1) 半径 r の円周上を角速度 ω で運動している場合の加速度を a とすると，

$$a = r\omega^2 = 0.50 \times 0.80^2 = 0.32\ [\mathrm{m/s^2}]$$

(2) 半径 r の円周上を速さ v で運動している場合の加速度を a とすると，

$$a = \frac{v^2}{r} = \frac{1.4^2}{0.20} = 9.8\ [\mathrm{m/s^2}]$$

5 (0005) ☐ ➲類題 6050 等速円運動

(1) 2.0 Hz (2) 0.50 s (3) 13 rad/s (4) 25 m/s (5) $310\,\mathrm{m/s^2}$

解説

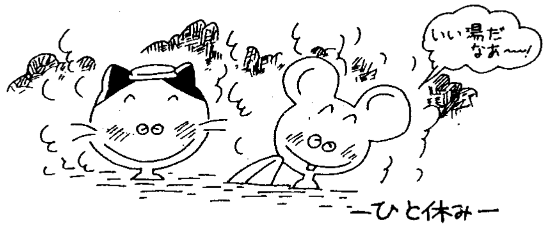
(1) 1分間に120周するから，回転数を n とすると， $n = \dfrac{120}{60} = 2.0\ [\mathrm{Hz}]$

(2) 周期を T とすると， $T = \dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{2.0} = 0.50\ [\mathrm{s}]$

(3) 角速度を ω とすると， $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = \dfrac{2 \times 3.14}{0.50} = 12.56 \fallingdotseq 13\ [\mathrm{rad/s}]$

(4) 速さ v は半径と角速度の積として， $v = r\omega = 2.0 \times 12.5 = 25\ [\mathrm{m/s}]$

(5) 加速度の大きさ a は， $a = r\omega^2 = 2.0 \times 12.5^2 = 312.5 \fallingdotseq 310\ [\mathrm{m/s^2}]$



―ひと休み―

≪詳解≫

類題トレーニング(6010)

1 (6011) M01

(1) 一定の速さ（等速度）で移動する運動　(2) $2\pi r$〔m〕

(3) $\dfrac{2\pi r}{T}$〔m/s〕　(4) $\dfrac{1}{2}$倍

解説

(2) 1周に要する時間を，等速円運動の周期という。したがって，T〔s〕間で円周上を1周するから，移動する長さは，円周に等しくなる。

(4) (3)の式より，等速円運動の速さは周期に反比例するので，周期が2倍になると，速さは$\dfrac{1}{2}$倍になる。

2 (6012) M01

(1) 75.4 m/s　(2) 0.800 m/s　(3) 465 m/s

解説

(1) 半径を r〔m〕，周期を T〔s〕とすると，求める速さ v は，

$$v=\frac{2\pi r}{T}=\frac{2\times3.14\times12.0}{1.00}=75.36\fallingdotseq75.4\ \text{〔m/s〕}$$

(2) $v=\dfrac{2\times3.14\times0.400}{3.14}=0.800$〔m/s〕

(3) 速さは〔m/s〕単位で求めるのであるから，半径は$6.40\times10^3\times10^3$〔m〕，周期は$24\times60\times60$〔s〕を用いて，

$$v=\frac{2\times3.14\times6.40\times10^3\times10^3}{24\times60\times60}=465.1\fallingdotseq465\ \text{〔m/s〕}$$

3 (6013) M01

(1) $\dfrac{2\pi r}{v}$〔s〕　(2) 62.8 s　(3) 0.400 s

解説

(1) 周期を T〔s〕とすると，　$T=\dfrac{2\pi r}{v}$〔s〕

(2) $T=\dfrac{2\pi r}{v}=\dfrac{2\times3.14\times10.0}{1.00}=62.8$〔s〕

(3) $T=\dfrac{2\times3.14\times2.00}{31.4}=0.400$〔s〕

4 (6014) M01

(1) 8.00 m　(2) 15.9 m

解説

(1) 半径 r〔m〕の円周上を，周期 T〔s〕で等速円運動する物体の速さ v〔m/s〕は，

$$v=\frac{2\pi r}{T}$$

$$\therefore\quad r=\frac{vT}{2\pi}=\frac{8.00\times6.28}{2\times3.14}=8.00\ \text{〔m〕}$$

(2) $r=\dfrac{2.00\times50.0}{2\times3.14}=15.92\cdots\fallingdotseq15.9$〔m〕

≪詳解≫

類題トレーニング(6020)

1 (6021) M01

(1) n〔Hz〕 (2) $v=2\pi rn$〔m/s〕 (3) 3倍

(4) $n=\dfrac{1}{T}$〔Hz〕 (5) $\dfrac{1}{2}$倍

解説

(3) (2)の式より，速さは回転数に比例するので，回転数が3倍になると速さも3倍になる。

(5) (4)の式より，回転数は周期に反比例するので，周期が2倍になると回転数は$\dfrac{1}{2}$倍になる。

2 (6022) M01

(1) 6.3 m/s (2) 0.27 Hz (3) 0.064 m

解説

(1) 半径 r〔m〕の円周上を回転数 n〔Hz〕で運動する物体の速さを v〔m/s〕とすると，

$$v=2\pi rn=2\times3.14\times0.20\times5.0=6.28\fallingdotseq6.3\text{〔m/s〕}$$

(2) $n=\dfrac{v}{2\pi r}=\dfrac{10}{2\times3.14\times6.0}=0.265\cdots\fallingdotseq0.27$〔Hz〕

(3) $r=\dfrac{v}{2\pi n}=\dfrac{4.0}{2\times3.14\times10}=0.0636\cdots\fallingdotseq0.064$〔m〕

3 (6023) M01

(1) 4.0 Hz (2) 0.050 s

解説

(1) 回転数 n は周期 T の逆数をとって， $n=\dfrac{1}{T}=\dfrac{1}{0.25}=4.0$〔Hz〕

(2) $T=\dfrac{1}{n}=\dfrac{1}{20}=0.050$〔s〕

≪詳解≫

類題トレーニング(6030)

1 (6031) M01

(1) 一定　(2) $\omega=\dfrac{2\pi}{T}$　(3) $\dfrac{1}{3}$倍　(4) $\omega=2\pi n$　(5) $\omega=\dfrac{v}{r}$

解説

(1) 角速度は，単位時間あたりに回転する角度であるから，一定である。

(3) (2)の式より，角速度は周期に反比例するから，周期が3倍になると角速度は$\dfrac{1}{3}$倍になる。

2 (6032) M01

(1) 31 rad/s　(2) 1.7×10^{-3} rad/s　(3) 28 rad/s

解説

(1) 円を1周，つまり，2π〔rad〕回転するのに，周期 T かかるから，角速度 ω は，

$$\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\times3.14}{0.20}=31.4\fallingdotseq31\ 〔\mathrm{rad/s}〕$$

(2) 角速度を ω とすると，周期が 60×60〔s〕だから，

$$\omega=\frac{2\times3.14}{60\times60}=1.74\cdots\times10^{-3}\fallingdotseq1.7\times10^{-3}\ 〔\mathrm{rad/s}〕$$

(3) 回転数 n は周期 T の逆数であるから，角速度は，

$$\omega=2\pi n=2\times3.14\times4.5=28.26\fallingdotseq28\ 〔\mathrm{rad/s}〕$$

3 (6033) M01

(1) 20 rad/s　(2) 0.40 rad/s　(3) 1.0 rad/s

解説

(1) 半径を r，速さを v，角速度を ω とすると，　$\omega=\dfrac{v}{r}=\dfrac{2.0}{0.10}=20$〔rad/s〕

(2) $\omega=\dfrac{4.0}{10}=0.40$〔rad/s〕

(3) $\omega=\dfrac{0.20}{20\times10^{-2}}=1.0$〔rad/s〕

≪詳解≫

類題トレーニング(6040)

1 (6041) M01

(1) 一定　(2) 4倍になる　(3) 回転の中心に向かう向き

解 説

(2) 半径を r，角速度を ω とすると，加速度 a は $a=r\omega^2$ となり，加速度は角速度の2乗に比例する。よって，角速度が2倍になると加速度は4倍になる。

2 (6042) M01

(1) $r\omega^2$　(2) 0.048 m/s^2　(3) 0.80 m/s^2

解 説

(2) 加速度の大きさを a とすると，　$a=r\omega^2=1.2\times0.20^2=0.048$ 〔m/s^2〕

(3) $a=5.0\times0.40^2=0.80$ 〔m/s^2〕

3 (6043) M01

(1) $\dfrac{v^2}{r}$　(2) 0.40 m/s^2　(3) 8.0 m/s^2　(4) 32 m/s^2

解 説

(2) 加速度の大きさを a とすると，　$a=\dfrac{v^2}{r}=\dfrac{0.20^2}{0.10}=0.40$ 〔m/s^2〕

(3) $a=\dfrac{20^2}{50}=8.0$ 〔m/s^2〕

(4) $a=\dfrac{8.0^2}{2.0}=32$ 〔m/s^2〕

≪詳解≫

類題トレーニング(6050)

1 (6051) M01

(1) 2.0 s (2) 3.1 rad/s (3) 4.7 m/s (4) 15 m/s^2

解説

(1) 1分間に30周するから，1周する時間（周期）T は， $T=\dfrac{60}{30}=2.0$〔s〕

(2) 角速度を ω とすると， $\omega=\dfrac{2\pi}{T}=\dfrac{2\times3.14}{2.0}=3.14\fallingdotseq3.1$〔rad/s〕

(3) 速さ v は半径と角速度の積として， $v=r\omega=1.5\times3.14=4.71\fallingdotseq4.7$〔m/s〕

(4) 加速度の大きさ a は， $a=r\omega^2=1.5\times3.14^2=14.7\cdots\fallingdotseq15$〔m/s^2〕

2 (6052) M01

(1) 2.1 rad/s (2) 6.6 m/s^2

解説

(1) 周期を T，角速度を ω とすると，

$$\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\times3.14}{3.0}=2.09\cdots\fallingdotseq2.1\text{〔rad/s〕}$$

(2) 半径を r，加速度の大きさを a とすると，

$$a=r\omega^2=1.5\times2.09^2=6.55\cdots\fallingdotseq6.6\text{〔m/s}^2\text{〕}$$

3 (6053) M01

（左から順に） (1) $\frac{1}{2}$，2，2 (2) 2，$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}$

(3) $\frac{1}{4}$，4，4 (4) 4，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{4}$

解説

糸の長さを r，速さを v，周期を T，回転数を n，角速度を ω とすると，次の関係がある。

$$v=\frac{2\pi r}{T}=2\pi rn=r\omega \qquad \omega=\frac{2\pi}{T}$$

(1) $T=\dfrac{2\pi r}{v}$ より，速さのみを2倍にすると，周期は $\dfrac{1}{2}$ 倍になる。

$n=\dfrac{v}{2\pi r}$ より，速さのみを2倍にすると，回転数は2倍になる。

$\omega=\dfrac{v}{r}$ より，速さのみを2倍にすると，角速度は2倍になる。

(2) (1)と同様にして，

$$T=\frac{2\pi r}{v} \qquad n=\frac{v}{2\pi r} \qquad \omega=\frac{v}{r}$$

より，考えればよい。

(3) このときの周期を T'，回転数を n'，角速度を ω' とすると，

$$\frac{T'}{T}=\frac{\dfrac{2\pi\cdot\dfrac{r}{2}}{2v}}{\dfrac{2\pi r}{v}}=\frac{1}{4}\text{〔倍〕} \qquad \frac{n'}{n}=\frac{\dfrac{2v}{2\pi\cdot\dfrac{r}{2}}}{\dfrac{v}{2\pi r}}=4\text{〔倍〕}$$

$$\frac{\omega'}{\omega}=\frac{\dfrac{\dfrac{2v}{r}}{2}}{\dfrac{v}{r}}=4\text{〔倍〕}$$

(4) (3)と同様に考える。このときの周期を T''，回転数を n''，角速度を ω'' とすると，

$$\frac{T''}{T}=\frac{\dfrac{2\pi\cdot 2r}{\dfrac{v}{2}}}{\dfrac{2\pi r}{v}}=4\text{〔倍〕}\qquad \frac{n'}{n}=\frac{\dfrac{\dfrac{v}{2}}{2\pi\cdot 2r}}{\dfrac{v}{2\pi r}}=\frac{1}{4}\text{〔倍〕}$$

$$\frac{\omega''}{\omega}=\frac{\dfrac{\dfrac{v}{2}}{2r}}{\dfrac{v}{r}}=\frac{1}{4}\text{〔倍〕}$$

§2 向心力

1 (0006) □ ➲類題 6060 向心力

(1) 0.96 N (2) 20 N (3) 回転の中心に向かう向き

解説

物体の質量を m，円運動の半径を r，角速度を ω，速さを v，向心力の大きさを F とする。

(1) $F=mr\omega^2=1.2\times5.0\times0.40^2=0.96$〔N〕

(2) $F=m\dfrac{v^2}{r}=2.0\times\dfrac{2.0^2}{0.40}=20$〔N〕

2 (0007) □ ➲類題 6070 角速度と向心力

(1) 15 rad/s (2) 4.5 m/s (3) 68 m/s²

(4) 3.4 N (5) 0.34 kg

解説

(1) 小球の回転数 n は 2.4 Hz だから，求める角速度 ω〔rad/s〕は，

$\omega=2\pi n=2\times3.14\times2.4=15.0\cdots\fallingdotseq15$〔rad/s〕

(2) 半径を r〔m〕とおくと，速さ v〔m/s〕は，

$v=r\omega=0.30\times15.0=4.5$〔m/s〕

(3) 加速度の大きさ a〔m/s²〕は，

$a=r\omega^2=0.30\times15.0^2=67.5\fallingdotseq68$〔m/s²〕

(4) 向心力 F〔N〕は，小球の質量を m〔kg〕とおくと，

$F=ma=0.050\times67.5=3.375\fallingdotseq3.4$〔N〕

(5) 小球にはたらく向心力は，おもりにはたらく重力と大きさが等しいから，おもりの質量を M〔kg〕とすると，

$F=Mg$

(4)より，$F=3.37$〔N〕だから，

$M=\dfrac{F}{g}=\dfrac{3.37}{9.8}=0.343\cdots\fallingdotseq0.34$〔kg〕

3 (0008) □ ➲類題 6080 摩擦力と向心力

(1) mg〔N〕 (2) μmg〔N〕 (3) $\dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{\mu g}{r}}$〔Hz〕

解説

(1) 垂直抗力を N とすると，N は重力とつりあうから，　$N=mg$〔N〕

(2) 最大静止摩擦力を f とすると，

$f=\mu N=\mu mg$〔N〕

(3) 回転数 n で等速円運動する物体の角速度を ω とすると，

$\omega=2\pi n$

ここで円運動の向心力を F とすると，

$F=mr\omega^2=mr(2\pi n)^2$

である。このとき，(2)で求めた最大静止摩擦力が向心力として作用するから，

$F=f$

よって，

$$m r(2\pi n)^2 = \mu m g \qquad (2\pi n)^2 = \frac{\mu g}{r}$$

$$2\pi n = \sqrt{\frac{\mu g}{r}} \qquad \therefore \quad n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\mu g}{r}} \text{〔Hz〕}$$

4 (0009) ☐ ➡類題 6090 弾性力と向心力

(1) $4\pi^2 n^2 r$〔m/s²〕　(2) $4\pi^2 m n^2 r$〔N〕

(3) $\dfrac{4\pi^2 m n^2 r}{k}$〔m〕

解説

(1) おもりは回転の方向にはすべらないで等速円運動をする。このときの角速度を ω とすると，おもりの加速度 a は，

$$a = r\omega^2 = r(2\pi n)^2 = 4\pi^2 n^2 r \text{〔m/s}^2\text{〕}$$

(2) おもりにはたらく向心力は，

$$F = ma = 4\pi^2 m n^2 r \text{〔N〕}$$

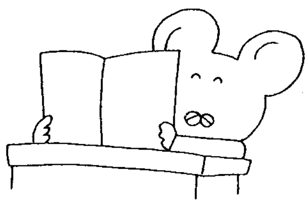
(3) ばねののびが x〔m〕のとき，ばね定数 k のばねの弾性力の大きさ F' は，

$$F' = kx$$

である。これがおもりの向心力 F に等しいから，

$$kx = 4\pi^2 m n^2 r$$

$$\therefore \quad x = \frac{4\pi^2 m n^2 r}{k} \text{〔m〕}$$



≪詳解≫

類題トレーニング(6060)

1 (6061) M02

(1) 向心力　(2) 一定　(3) 回転の中心に向かう向き

(4) $F=mr\omega^2$　(5) $F=m\dfrac{v^2}{r}$

2 (6062) M02

(1) 6.0 N　(2) 0.038 N　(3) 5.0 N

解説

(1) 物体の質量を m，円運動の半径を r，角速度を ω とすると，向心力 F は，

$$F=mr\omega^2=1.0\times1.5\times2.0^2=6.0\text{〔N〕}$$

(2) $F=0.3\times0.50\times0.50^2=0.0375\fallingdotseq0.038\text{〔N〕}$

(3) $F=0.80\times1.0\times2.5^2=5.0\text{〔N〕}$

3 (6063) M02

(1) 54 N　(2) 80 N　(3) 19 N

解説

(1) 物体の質量を m，円運動の半径を r，速さを v とすると，向心力 F は，

$$F=m\frac{v^2}{r}=3.0\times\frac{6.0^2}{2.0}=54\text{〔N〕}$$

(2) $F=10\times\dfrac{4.0^2}{2.0}=80\text{〔N〕}$

(3) $10\text{〔km/h〕}=\dfrac{10\times10^3}{60\times60}\text{〔m/s〕}=2.77\cdots\text{〔m/s〕}$ であるから，向心力 F は，

$$F=5.0\times\frac{2.77^2}{2.0}=19.1\cdots\fallingdotseq19\text{〔N〕}$$

4 (6064) M02

(ウ)

解説

質量を m，加速度を a とすれば，運動の第2法則より，向心力 F は，$F=ma$ の関係にある。これにあてはまるのは，(ウ)。

≪詳解≫

類題トレーニング(6070)

1 (6071) M02

(1) 3.1 rad/s (2) 15 m/s^2

(3) 大きさ… 15 N，向き…回転の中心に向かう向き

[解 説]

(1) 周期を T，角速度を ω とすると，

$$\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\times3.14}{2.0}=3.14\fallingdotseq3.1\ \mathrm{[rad/s]}$$

(2) 半径を r，加速度の大きさを a とすると，

$$a=r\omega^2=1.5\times3.14^2=14.7\cdots\fallingdotseq15\ \mathrm{[m/s^2]}$$

(3) 向心力の大きさ F は，質量と加速度の大きさの積として，

$$F=ma=1.0\times14.7=14.7\fallingdotseq15\ \mathrm{[N]}$$

また，その向きはつねに回転の中心に向かう向きとなる。

2 (6072) M02

(1) 6.3 rad/s (2) 16 m/s^2

(3) 大きさ… 31 N，向き…回転の中心に向かう向き

[解 説]

(1) 毎分 60 回転しているから，回転数 n は， $n=\frac{60}{60}=1.0\ \mathrm{[Hz]}$

よって，角速度 ω は，

$$\omega=2\pi n=2\times3.14\times1.0=6.28\fallingdotseq6.3\ \mathrm{[rad/s]}$$

(2) $a=r\omega^2=0.40\times6.28^2=15.7\cdots=16\ \mathrm{[m/s^2]}$

(3) $F=ma=2.0\times15.7=31.4\fallingdotseq31\ \mathrm{[N]}$

向きは，回転の中心に向かう向き。

3 (6073) M02

(1) 2.5 rad/s (2) 19 N

[解 説]

(1) 回転数を n，角速度を ω とすると，

$$\omega=2\pi n=2\times3.14\times0.40=2.512\fallingdotseq2.5\ \mathrm{[rad/s]}$$

(2) 小球にはたらく糸の張力が向心力として作用して，小球は等速円運動をする。よって，糸の張力を F，小球の質量を m，半径を r とすると，

$$F=mr\omega^2=3.0\times1.0\times2.51^2=18.9\cdots\fallingdotseq19\ \mathrm{[N]}$$

≪詳解≫

類題トレーニング(6080)

1 (6081) M02

(1) 2.9 N　(2) 0.59 N　(3) 2.2 rad/s

解説

(1) 物体は鉛直方向に動きださないから，力のつりあいで考えればよい。物体の質量を m，重力加速度の大きさを g とすると，垂直抗力 N は物体の重力 mg とつりあうから，

$$N=mg=0.30\times9.8=2.94\fallingdotseq2.9\,[\mathrm{N}]$$

(2) 最大静止摩擦力を f とすると，

$$f=\mu N=0.20\times2.94=0.588\fallingdotseq0.59\,[\mathrm{N}]$$

(3) すべりだす直前の向心力 F が,(2)で求めた f と等しいことにより,$F=f$ となる。よって,

$$F=mr\omega^2$$

$$\therefore\quad \omega=\sqrt{\frac{F}{mr}}=\sqrt{\frac{f}{mr}}=\sqrt{\frac{0.588}{0.30\times0.40}}=2.21\cdots\fallingdotseq2.2\,[\mathrm{rad/s}]$$

2 (6082) M02

(1) 7.9 m/s²　(2) 0.79 N　(3) 0.80

解説

(1) 半径を r，角速度を ω，回転数を n，求める加速度の大きさを a とすると，

$$a=r\omega^2=r(2\pi n)^2=0.20\times\left(2\times3.14\times\frac{60}{60}\right)^2=7.88\cdots\fallingdotseq7.9\,[\mathrm{m/s^2}]$$

(2) 小物体がすべりだす直前にはたらく最大静止摩擦力 f が向心力 F となるから，物体の質量を m とすると，

$$f=F=ma=0.10\times7.88=0.788\fallingdotseq0.79\,[\mathrm{N}]$$

(3) 垂直抗力を N，重力加速度の大きさを g，静止摩擦係数を μ とすれば，

$$f=\mu N=\mu mg$$

$$\therefore\quad \mu=\frac{f}{mg}=\frac{0.788}{0.10\times9.8}=0.804\cdots\fallingdotseq0.80$$

≪詳解≫

類題トレーニング(6090)

1 (6091) M02

(1) 0.10 N　(2) 0.50 N　(3) 0.65 Hz

[解 説]

(1) ばね定数は 10 N/m であるから，このばねは 1.0 m のばすのに 10 N の力を必要とする。よって，1.0 cm のばすのなら，

$$10\times\frac{1.0}{100}=0.10\ [\mathrm{N}]$$

の力を必要とする。

(2) ばねののびは，5.0 cm であるから求める力 F は，

$$F=5.0\times 0.10=0.50\ [\mathrm{N}]$$

(3) この場合，(2)で求めた F が向心力となっているから，物体の質量を m，半径を r，角速度を ω，回転数を n とすると，

$$F=mr\omega^2=mr(2\pi n)^2$$

$$\therefore\quad n=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{F}{mr}}=\frac{1}{2\times 3.14}\times\sqrt{\frac{0.50}{0.12\times 0.25}}$$

$$=0.650\cdots\fallingdotseq 0.65\ [\mathrm{Hz}]$$

2 (6092) M02

(1) 3.1 rad/s　(2) 0.095 m

[解 説]

(1) 回転数を n，角速度を ω とすれば，

$$\omega=2\pi n=2\times 3.14\times\frac{30}{60}=3.14\fallingdotseq 3.1\ [\mathrm{rad/s}]$$

(2) ばねののびによる弾性力 F が向心力となっているから，ばね定数を k，変位を x，おもりの質量を m，半径を r とすると，

$$F=kx=mr\omega^2$$

$$\therefore\quad x=\frac{mr\omega^2}{k}=\frac{0.20\times 0.24\times 3.14^2}{5.0}=0.0946\cdots\fallingdotseq 0.095\ [\mathrm{m}]$$

§3 慣性力と遠心力

M03

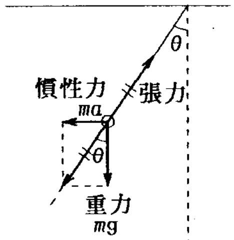
1 (0010) □ ➲類題6100 慣性力

(1) ma〔N〕 (2) $a = g\tan\theta$〔m/s²〕 (3) $9.8m$〔N〕

解説

(1) 慣性力の大きさを F とすると， $F = ma$〔N〕

(2) 糸の張力を S とすると，



$S\sin\theta = ma$ ………①

$S\cos\theta = mg$ ………②

②より， $S = \dfrac{mg}{\cos\theta}$

これを①に代入して整理すると，

$a = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}g = g\tan\theta$〔m/s²〕

(3) (2)の結果にあたえられた数値を代入すると，加速度 a は，

$a = 9.8\times\tan 45^\circ = 9.8$〔m/s²〕

よって，慣性力の大きさは，

$F = m\times 9.8 = 9.8m$〔N〕

2 (0011) □ ➲類題6110 エレベーターの動きと慣性力

(1) 加速度… 0.39 m/s²，慣性力… 20 N

(2) 向き…下向き，加速度… 0.39 m/s²

解説

(1) 台はかりが人をおし上げる力は， 52〔kgw〕$=52g$〔N〕

人にはたらく重力は， 50〔kgw〕$=50g$〔N〕

求める慣性力の大きさを F，加速度を a とすると， $F = 50a$〔N〕

台はかりが人をおし上げる力と，重力と慣性力の合力がつりあっているから，

$52g = 50g + 50a$

∴ $a = \dfrac{2}{50}g = \dfrac{2}{50}\times 9.8 = 0.392 \fallingdotseq 0.39$〔m/s²〕

∴ $F = 50a = 50\times 0.392 = 19.6 \fallingdotseq 20$〔N〕

(2) 台はかりが人をおし上げる力は $48g$〔N〕であるから，(1)と同様に，つりあいの式をたてると，

∴ $48g = 50g + 50a$

$a = -\dfrac{2}{50}g = -\dfrac{2}{50}\times 9.8 = -0.392 \fallingdotseq -0.39$〔m/s²〕

(1)では上向きが正の向きであったから，この場合，下向きに 0.39 m/s² の加速度で動いている。

別 解

慣性系の観測者の立場で求めると，次のような運動方程式をたてることができる。

(1) この人には，重力 mg と台はかりからの抗力 N がはたらき，その合力によって a の加速度で上昇しているから，上向きを正の向きにとれば，人の運動方程式は，

$ma = N - mg$

$50a = 52\times 9.8 - 50\times 9.8$ ∴ $a \fallingdotseq 0.39$〔m/s²〕

(2)も同様に， $50a = 48\times 9.8 - 50\times 9.8$ より加速度を求めることができる。

3 (0012) □ ➡類題 6120 遠心力

4.3 倍

解説

人の質量を m，ローターの半径を r，角速度を ω，回転数を n とすると，遠心力の大きさ F は，

$$F=mr\omega^2=mr(2\pi n)^2=4\pi^2mn^2r$$

一方，重力加速度の大きさを g とすると，人にはたらく重力は mg であるから，

$$\frac{F}{mg}=\frac{4\pi^2mn^2r}{mg}=\frac{4\pi^2n^2r}{g}$$

$$=\frac{4\times3.14^2\times0.60^2\times3.0}{9.8}$$

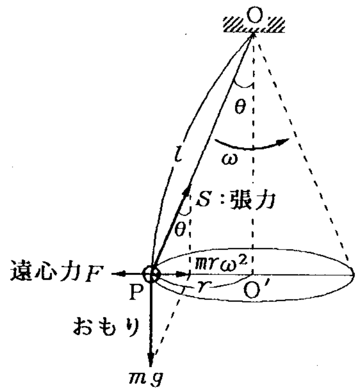
$$=4.34\cdots\fallingdotseq4.3\text{〔倍〕}$$

4 (0013) □ ➡類題 6130 円すい振り子

(1) 1.4 s (2) 3.4 N (3) 3.8 m/s

解説

(1) 糸の長さを l，鉛直方向と糸のなす角を θ，おもりの質量を m，角速度を ω，半径を r，重力加速度の大きさを g とする。おもりといっしょに回転する非慣性系から見たとき，おもりには遠心力 $mr\omega^2$，糸の張力 S，重力 mg がはたらき，この3力はつりあう。



よって，

$$S\sin\theta=mr\omega^2$$

$$S\cos\theta=mg$$

この2式より，

$$mr\omega^2=mg\tan\theta \quad\cdots\cdots①$$

一方，右図より，

$$\tan\theta=\frac{r}{l\cos\theta}$$

であるから，

$$mr\omega^2=mg\cdot\frac{r}{l\cos\theta} \qquad \omega^2=\frac{g}{l\cos\theta}$$

$$\therefore\quad \omega=\sqrt{\frac{g}{l\cos\theta}}$$

ここで，周期を T とすると，$T=\dfrac{2\pi}{\omega}$ であるから，

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l\cos\theta}{g}}$$

これにあたえられた数値を代入すると，

$$T=2\times3.14\times\sqrt{\frac{1.0\times\cos60^\circ}{9.8}}=1.41\cdots\fallingdotseq1.4\text{〔s〕}$$

(2) 遠心力を F とすると，①より，

$$F=mg\tan\theta=0.20\times9.8\times\tan60^\circ$$

$$=0.20\times9.8\times\sqrt{3}\fallingdotseq0.20\times9.8\times1.73$$

$$=3.39\cdots\fallingdotseq3.4\text{〔N〕}$$

(3) おもりの回転する速さを v とすると，等速円運動の式より，

$$F=m\frac{v^2}{r} \qquad v^2=\frac{Fr}{m}$$

$\therefore \quad v = \sqrt{\dfrac{F\,r}{m}}$

ここで，問題の図より，

$$r = l\ \sin\theta = 1.0 \times \sin 60^\circ = 1.0 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\fallingdotseq 1.0 \times \frac{1.73}{2} = 0.865$$

であるから，あたえられた数値と(2)の結果を代入すると，

$$v = \sqrt{\frac{3.39 \times 0.865}{0.20}} = 3.82\cdots \fallingdotseq 3.8\ \text{〔m/s〕}$$

≪詳解≫

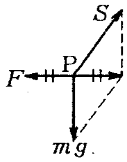
類題トレーニング(6100)

1 (6101) M03

(1) 慣性力，作図…右図

(2) $F=-ma$

(3) 反対向き



解 説

(1) まず，重力 mg と張力 S の合力を求め，その合力とつりあう力を作図すればよい。

2 (6102) M03

(1) 大きさ… 10 N，向き…進行方向と逆向き

(2) 大きさ… 3 N，向き…進行方向

解 説

(1) $F=-ma=-2\times5=-10$〔N〕　よって，進行方向と逆向きに 10 N

(2) 減速しているから，加速度は $-3\ \mathrm{m/s^2}$ として，

$F=-1\times(-3)=3$〔N〕　よって，進行方向に 3 N

3 (6103) M03

(1) $a=g\tan\theta$〔$\mathrm{m/s^2}$〕　(2) $5.7\ \mathrm{m/s^2}$

解 説

(1) 糸の張力を S〔N〕とすると，

$S\sin\theta=ma$ ………①　$S\cos\theta=mg$ ………②

②より，　$S=\dfrac{mg}{\cos\theta}$〔N〕

これを①に代入して整理すると，　$a=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}g=g\tan\theta$〔$\mathrm{m/s^2}$〕

(2) (1)の結果にあたえられた数値を代入すると，

$a=9.8\tan30^\circ=\dfrac{9.8}{\sqrt{3}}=5.66\cdots\fallingdotseq5.7$〔$\mathrm{m/s^2}$〕

≪詳解≫

類題トレーニング(6110)

1 (6111) M03

(1) 大きさ…0.80 N，向き…下　(2) 4.7 N

(3) 4.7 N (解き方も合っていたら正解)

解説

(1) 質量を m，加速度の大きさを a，慣性力の大きさを F とすると，

$F = ma = 0.40 \times 2.0 = 0.80$〔N〕

慣性力の向きは加速度の向きと反対だから，この場合，下向き。

(2) 糸の張力を T とする。おもりの重力と慣性力の合力が糸の張力とつりあっているから，

$T = 0.40 \times 9.8 + 0.80 = 4.72 \fallingdotseq 4.7$〔N〕

(3) このおもりには，糸の張力 T と重力 mg がはたらき，その合力によって，a の加速度で上昇する。上向きを正にとれば，おもりの運動方程式は，

$ma = T - mg$

$0.40 \times 2.0 = T - 0.40 \times 9.8$　$\therefore$　$T = 0.40 \times 11.8 = 4.72 \fallingdotseq 4.7$〔N〕

2 (6112) M03

(1) 大きさ…12.0 N，向き…上　(2) 58.8 kg

解説

(1) 慣性力の大きさを F とすると，

$F = ma = 60.0 \times 0.200 = 12.0$〔N〕

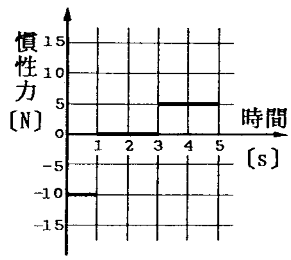
慣性力の向きは加速度の向きと反対だから，この場合，上向き。

(2) 慣性力は上向きに 12.0〔N〕$= \dfrac{12.0}{9.80}$〔kgw〕だから，その分見かけ上の体重は軽くなる。

$$60.0 - \frac{12.0}{9.80} = 58.77\cdots \fallingdotseq 58.8 \text{〔kg〕}$$

3 (6113) M03

(1) 2.0 m/s^2　(2) 右図



解説

(1) $a = \dfrac{2.0 - 0}{1.0 - 0} = 2.0$〔m/s^2〕

(2) 0 ～ 1.0 s は，加速度は 2.0 m/s^2 だから，物体にはたらく慣性力は，

$-ma = -5.0 \times 2.0 = -10$〔N〕

1.0 ～ 3.0 s は，加速度は 0 だから，慣性力も 0 である。

3.0 ～ 5.0 s は，加速度は，

$$a = \frac{0 - 2.0}{5.0 - 3.0} = -1.0 \text{〔m/s}^2\text{〕}$$

よって，慣性力は，

$-ma=-5.0\times(-1.0)=5.0$〔N〕

これらをグラフにすると，解答の図のようになる。

≪詳解≫

類題トレーニング(6120)

1 (6121) M03

(1) $F=mr\omega^2$　(2) 外向き　(3) $F=m\dfrac{v^2}{r}$

解説

(3) $\omega=\dfrac{v}{r}$ だから，　$F=mr\left(\dfrac{v}{r}\right)^2=m\dfrac{v^2}{r}$

2 (6122) M03

(1) 60 N　(2) 9.0 N　(3) 25 N

解説

(1) 物体の質量を m，半径を r，角速度を ω とすると，遠心力の大きさ F は，

$F=mr\omega^2=3.0\times5.0\times2.0^2=60$〔N〕

(2) $F=0.50\times2.0\times3.0^2=9.0$〔N〕

(3) 人の質量を m，半径を r，速さを v とすると，遠心力の大きさ F は，

$F=m\dfrac{v^2}{r}=50\times\dfrac{10^2}{200}=25$〔N〕

3 (6123) M03

(1) 1.6 rad/s　(2) 0.39 N　(3) 0.099 m

解説

(1) 周期を T とすると，角速度 ω は，

$\omega=\dfrac{2\pi}{T}=\dfrac{2\times3.14}{4.0}=1.57\fallingdotseq1.6$〔rad/s〕

(2) おもりの質量を m，半径を r とすると，遠心力の大きさ F は，

$F=mr\omega^2=0.20\times0.80\times1.57^2=0.394\cdots\fallingdotseq0.39$〔N〕

(3) (2)で求めた遠心力とばねの弾性力とがつりあう。ばねののびを x，ばね定数を k とすると，$F=kx$ であるから，

$x=\dfrac{F}{k}=\dfrac{0.394}{4.0}=0.0985\fallingdotseq0.099$〔m〕

≪詳解≫

類題トレーニング(6130)

1 (6131) M03

(1) $mg\tan\theta$　　(2) $T=2\pi\sqrt{\dfrac{l\cos\theta}{g}}$

解 説

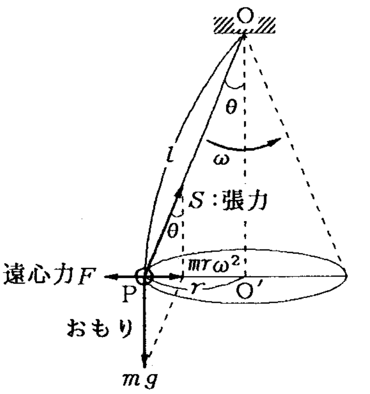
テーマの説明を読みなおしなさい。

2 (6132) M03

(1) $T=2\pi\sqrt{\dfrac{l\cos\theta}{g}}$　　(2) 60°　　(3) 5.1 N　　(4) 5.9 N

解 説

(1) おもりといっしょに回転する非慣性系から見たとき，おもりの質量を m，半径を r，角速度を ω とすると，右図のように，おもりには遠心力 $mr\omega^2$，糸の張力 S，重力 mg がはたらき，この3力はつりあう。よって，



$$S\sin\theta=mr\omega^2$$
$$S\cos\theta=mg$$

この2式より，

$$mr\omega^2=mg\tan\theta$$

一方，右図より，

$$\tan\theta=\frac{r}{l\cos\theta}$$

であるから，

$$mr\omega^2=mg\cdot\frac{r}{l\cos\theta}\qquad \omega^2=\frac{g}{l\cos\theta}$$

$$\therefore\quad \omega=\sqrt{\frac{g}{l\cos\theta}}$$

ここで，$T=\dfrac{2\pi}{\omega}$ であるから，

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l\cos\theta}{g}}$$

(2) $\omega=\sqrt{\dfrac{g}{l\cos\theta}}$ より，　$\cos\theta=\dfrac{g}{l\omega^2}=\dfrac{9.8}{4.9\times2.0^2}=\dfrac{1}{2}$　　$\therefore\ \theta=60^\circ$

(3) 遠心力の大きさを F とすると，

$$F=mg\tan\theta=0.30\times9.8\times\tan60^\circ=0.30\times9.8\times\sqrt{3}=5.08\cdots\fallingdotseq5.1\ \text{[N]}$$

(4) $S\cos\theta=mg$ より，　$S=\dfrac{mg}{\cos\theta}=\dfrac{0.30\times9.8}{\cos60^\circ}=5.88\fallingdotseq5.9\ \text{[N]}$

3 (6133) M03

(1) 10.0 rad/s　　(2) 10.0 N

解 説

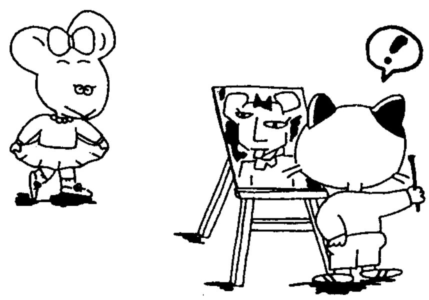
(1) 角速度 ω は，周期を T とすると，　$\omega=\dfrac{2\pi}{T}=\dfrac{2\times3.14}{0.628}=10.0\ \text{[rad/s]}$

(2) $\omega=\sqrt{\dfrac{g}{l\cos\theta}}$ より，　$\cos\theta=\dfrac{g}{l\omega^2}=\dfrac{9.80}{1.00\times10.0^2}=0.098$

$\cos\theta$ がひじょうに小さいから，$\sin\theta \fallingdotseq 1$

したがって，糸の長さを l，遠心力の大きさを F とすると，

$$F = mr\omega^2 = ml\sin\theta\,\omega^2 \fallingdotseq ml\omega^2 = 0.100 \times 1.00 \times 10.0^2 = 10.0\,[\mathrm{N}]$$



≪詳解≫

§4 単振動

M04

1 (0014) □ ➡類題 6140 単振動

(1) 0.10 m (2) $\frac{\pi}{2}$〔rad/s〕 (3) 0.10 m

解説

(1)(2) $x=A\sin\omega t$ のとき，A が振幅，ω が角振動数を表す。

(3) $x=0.10\sin\frac{\pi}{2}t$ に，$t=1.0$〔s〕を代入して，

$$x=0.10\sin\left(\frac{\pi}{2}\times1.0\right)=0.10\sin\frac{\pi}{2}=0.10\text{〔m〕}$$

2 (0015) □ ➡類題 6150 単振動の周期・振動数

(1) 0.50 Hz (2) 3.1 rad/s (3) $x=0.30\sin3.1t$

解説

(1) 周期を T，振動数を f とすると， $f=\frac{1}{T}=\frac{1}{2.0}=0.50$〔Hz〕

(2) 角振動数を ω とすると， $\omega=2\pi f=2\times3.14\times0.50=3.14\fallingdotseq3.1$〔rad/s〕

(3) $t=0$ のとき $x=0$ となるから，振幅を A とすると，この単振動は，

$$x=A\sin\omega t$$

と書ける。ここで問題文より，$A=0.30$，(2)より $\omega=3.1$ であるから，

$$x=0.30\sin3.1t$$

となる。

3 (0016) □ ➡類題 6160 単振動の速度

−3.0 m/s

解説

$t=2.0$ をあたえられた式に代入すると，

$$v=3.0\cos\left(\frac{\pi}{2}\times2.0\right)=3.0\cos\pi=-3.0\text{〔m/s〕}$$

4 (0017) □ ➡類題 6170 単振動の加速度

(1) $-3.0\,\mathrm{m/s^2}$ (2) $-2.5\,\mathrm{m/s^2}$

解説

(1) $t=2.0$ をあたえられた式に代入すると，

$$a=-3.0\sin\left(\frac{\pi}{4}\times2.0\right)=-3.0\sin\frac{\pi}{2}=-3.0\text{〔m/s}^2\text{〕}$$

(2) 加速度を a，角振動数を ω，変位を x とすると，

$$a=-\omega^2x=-5.0^2\times0.10=-2.5\text{〔m/s}^2\text{〕}$$

5 (0018) □ ➡類題 6180 単振動の速度と加速度

(1) $x=0.50\sin4.0t$〔m〕 (2) 1.6 s

解説

(1) 振幅 A，角振動数 ω の単振動をする物体の速度 v は，$v=A\omega\cos\omega t$ で表される。これに $t=0$〔s〕，$v=2.0$〔m/s〕を代入すると，

$$2.0=A\omega\cos(\omega\times0)$$

∴　$2.0=A\omega$　………①

この物体の加速度 a は，$a=-\omega^2 x$ と表される。これに $x=0.30$〔m〕，$a=-4.8$〔m/s^2〕を代入すると，

$$-4.8=-\omega^2\times0.30$$

$$\omega^2=16 \quad \therefore \quad \omega=4.0\,〔\mathrm{rad/s}〕 \quad ………②$$

②を①に代入すると，

$$4.0A=2.0 \quad \therefore \quad A=0.50\,〔\mathrm{m}〕$$

ゆえに，$x=A\sin\omega t$ に代入して，

$$x=0.50\sin4.0t\,〔\mathrm{m}〕$$

(2)　周期を T とすると，

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{4.0}=\frac{\pi}{2}=\frac{3.14}{2}=1.57\fallingdotseq1.6\,〔\mathrm{s}〕$$

≪詳解≫

類題トレーニング(6140)

1　(6141)　M04

(1)　単振動　(2)　x…変位，A…振幅，ω…角振動数　(3)　正弦曲線

2　(6142)　M04

(1)　㋐…1.5 m，㋑…0.20 m　(2)　㋐…$\frac{\pi}{4}$〔rad/s〕，㋑…5π〔rad/s〕

解説

$x=A\sin\omega t$ で，A が振幅，ω が角振動数を表す。

3　(6143)　M04

(1)　0.8 m　(2)　O 点を上向きに通過している。　(3)　8 s 後　(4)　8 s おき

解説

(1)　問題の図から読みとる。

(2)　問題の図より，2 秒後には変位 x が $x=0$ より，静止点 O を通過している。P 点まで引きおろして手をはなしたとき（$t=0$）のときの変位が負だから，図より，O 点を上向きに通過していることがわかる。

(3)　$t>0$ で最初に $x=-0.8$〔m〕になるときの t の値を読む。

(4)　はじめが 2 s のとき，次が 10 s のとき。したがって，　$10-2=8$〔s〕

≪詳解≫

類題トレーニング(6150)

1 (6151) M04

(1) 周期，単位… s (2) 振動数，単位… Hz (3) $T=\dfrac{1}{f}$

2 (6152) M04

(1) 2.0×10^{-2} s (2) 4.0×10^{-3} s

解説

(1) 周期を T，振動数を f とする。$T=\dfrac{1}{f}$ に，$f=50$〔Hz〕を代入すると，

$$T=\frac{1}{50}=2.0\times10^{-2}\ \text{〔s〕}$$

(2) $T=\dfrac{1}{250}=4.0\times10^{-3}$〔s〕

3 (6153) M04

(1) 12 s (2) 0.50 s

解説

(1) 周期を T，角振動数を ω とする。$T=\dfrac{2\pi}{\omega}$ に，$\omega=\dfrac{\pi}{6}$〔rad/s〕を代入すると，

$$T=\frac{2\pi}{\dfrac{\pi}{6}}=12\ \text{〔s〕}$$

(2) $T=\dfrac{2\pi}{4\pi}=0.50$〔s〕

4 (6154) M04

(1) 31 rad/s (2) 1.9×10^{3} rad/s

解説

(1) 振動数を f，角振動数を ω とする。$\omega=2\pi f$ に，$f=5.0$〔Hz〕を代入すると，

$\omega=2\times3.14\times5.0=31.4\fallingdotseq31$〔rad/s〕

(2) $\omega=2\times3.14\times300=1884\fallingdotseq1.9\times10^{3}$〔rad/s〕

≪詳解≫

類題トレーニング(6160)

1 (6161) M04

(1) 速度　(2) A…振幅，ω…角振動数　(3) $v=0.10\pi\cos\pi t$

2 (6162) M04

(1) 1.6 m/s　(2) −1.6 m/s　(3) 0 m/s

解説

(1) $v=\pi\cos\frac{\pi}{6}t$ に $t=2.0$〔s〕を代入して

$$v=\pi\cos\left(\frac{\pi}{6}\times2.0\right)=\pi\times\cos\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}=\frac{3.14}{2}=1.57\fallingdotseq1.6\ \text{〔m/s〕}$$

(2) $v=0.50\pi\cos(10\pi\times0.10)=-0.50\pi$

$=-0.50\times3.14=-1.57\fallingdotseq-1.6$〔m/s〕

(3) $v=6.0\cos\left(\frac{\pi}{4}\times6.0\right)=6.0\cos\frac{3\pi}{2}=6.0\times0=0$〔m/s〕

類題トレーニング(6170)

1 (6171) M04

(1) 加速度　(2) A…振幅，ω…角振動数　(3) $a=-\omega^2x$

2 (6172) M04

(1) −4.9 m/s²　(2) 0 m/s²　(3) 6.0 m/s²

解説

(1) $a=-\pi^2\sin\frac{\pi}{6}t$ に $t=1.0$〔s〕を代入して，

$$a=-3.14^2\sin\left(\frac{\pi}{6}\times1.0\right)=-3.14^2\times\frac{1}{2}=-4.92\cdots\fallingdotseq-4.9\ \text{〔m/s}^2\text{〕}$$

(2) $a=-0.50\pi^2\sin(10\pi\times0.10)=-0.50\pi^2\times\sin\pi=0$〔m/s²〕

(3) $a=-6.0\sin\left(\frac{\pi}{4}\times6.0\right)=-6.0\sin\frac{3\pi}{2}=-6.0\times(-1)=6.0$〔m/s²〕

3 (6173) M04

(1) −0.80 m/s²　(2) −100 m/s²　(3) 2.0 m/s²

解説

(1) 加速度を a，角振動数を ω，変位を x とする。$a=-\omega^2x$ に $\omega=4.0$, $x=0.050$ を代入すると，

$$a=-4.0^2\times0.050=-0.80\ \text{〔m/s}^2\text{〕}$$

(2) $a=-10^2\times1.0=-100$〔m/s²〕

(3) $a=-2.0^2\times(-0.50)=2.0$〔m/s²〕

≪詳解≫

類題トレーニング(6180)

1 (6181) M04

(1) $1.2=A\omega$　(2) 4.0 rad/s　(3) 0.30 m

(4) $x=0.30\sin 4.0t$〔m〕　(5) 1.6 s

解説

(1) $v=A\omega\cos\omega t$ に，$v=1.2$，$t=0$ を代入して，　$1.2=A\omega$

(2) $a=-\omega^2 x$ に，$a=-3.2$，$x=0.20$ を代入して，

$-3.2=-\omega^2\times 0.20$　$\omega^2=16$　∴ $\omega=4.0$〔rad/s〕

(3) $A\times 4.0=1.2$　∴ $A=0.30$〔m〕

(4) $x=A\sin\omega t$ だから，　$x=0.30\sin 4.0t$〔m〕

(5) $T=\dfrac{2\pi}{\omega}=\dfrac{2\times 3.14}{4.0}=1.57\fallingdotseq 1.6$〔s〕

2 (6182) M04

式… $x=0.40\sin 2.0t$〔m〕，振動数… 0.32 Hz

解説

変位を x，速度を v，角振動数を ω とする。

$t=0$ のとき，$v=0.80$ だから，$v=A\omega\cos\omega t$ より，

$0.80=A\omega\cos(\omega\times 0)$　∴ $0.80=A\omega$　………①

$x=0.40$ のとき，$a=-1.6$ だから，$a=-\omega^2 x$ より，

$-1.6=-\omega^2\times 0.40$　∴ $\omega=2.0$　………②

①，②より，　$A=0.40$〔m〕

ゆえに，$x=A\sin\omega t$ に代入して，

$x=0.40\sin 2.0t$〔m〕

となる。また，振動数を f とすると，

$$f=\frac{\omega}{2\pi}=\frac{2.0}{2\pi}=\frac{1}{\pi}=\frac{1}{3.14}=0.318\cdots\fallingdotseq 0.32\text{〔Hz〕}$$

3 (6183) M04

式… $x=0.50\sin 4.0t$〔m〕，加速度… $-3.2\,\mathrm{m/s^2}$

解説

$t=0$ で $v=2.0$ だから，$v=A\omega\cos\omega t$ より，

$2.0=A\omega(\cos\omega\times 0)$　∴ $2.0=A\omega$

$A=0.50$ だから，　$\omega=4.0$〔rad/s〕

$x=A\sin\omega t$ より，　$x=0.50\sin 4.0t$〔m〕

次に，$a=-\omega^2 x$ に $x=0.20$，$\omega=4.0$ を代入して，

$a=-4.0^2\times 0.20=-3.2$〔$\mathrm{m/s^2}$〕

≪詳解≫

§5 復元力・ばね振り子(1)

M05

1 (0019) □ ➡類題 6190 復元力

(1) 0.79 N (2) 0.30 N

解説

(1) 質量 m〔kg〕, 角振動数 ω〔rad/s〕で単振動する物体に変位 x〔m〕の位置ではたらく力 F〔N〕は,

$$F=-m\omega^2x$$

これにあたえられた数値を代入すると,

$$F=-0.20\times\pi^2\times(-0.40)=0.788\cdots\fallingdotseq 0.79\ \text{〔N〕}$$

(2) 力を F〔N〕とすると,

$$F=-kx$$

これにあたえられた数値を代入すると,

$$F=-1.0\times(-0.30)=0.30\ \text{〔N〕}$$

2 (0020) □ ➡類題 6200 単振動の周期

19 s

解説

質量 m〔kg〕の物体が, $F=-kx$ (k は比例定数) で表される力を受けて単振動しているときの周期 T〔s〕は, 次のように表される。

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

これにあたえられた数値を代入すると,

$$T=2\times3.14\times\sqrt{\frac{1.8}{0.20}}=18.84\fallingdotseq 19\ \text{〔s〕}$$

3 (0021) □ ➡類題 6210 ばね振り子のおもりにはたらく力

(1) 0.20 m (2) 0.020 m (2.0 cm) (3) 9.8×10^{-2} N

(4) つりあいの位置から下方に 5.0 mm のところ。

解説

(1) つりあったときのばねののびを l, おもりの質量を m, ばね定数を k とすると,

$$kl=mg$$

$$\therefore\quad l=\frac{mg}{k}=\frac{0.20\times9.8}{9.8}=0.20\ \text{〔m〕}$$

(2) つりあいの位置より 0.020 m 下げてはなしたのだから, 振幅は 0.020 m。

(3) おもりの変位を x とすると, おもりに作用している力の合力 F は,

$$F=-kx=-9.8\times0.010=-9.8\times10^{-2}\ \text{〔N〕}$$

よって, 合力の大きさは 9.8×10^{-2} N

(4) このときの変位を x とすると,

$$-4.9\times10^{-2}=-9.8\times x$$

$$\therefore\quad x=5.0\times10^{-3}\ \text{〔m〕}$$

よって, つりあいの位置から下方に 5.0 mm のところ。

4 (0022) □ ➡類題 6220 ばね振り子の周期

(1) 0.63 s (2) 0.25 kg (3) 2 倍

解 説

(1) ばね定数を k，おもりの質量を m とすると，周期 T は，

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

これに $k=10$〔N/m〕，$m=0.10$〔kg〕を代入して，

$$T=2\pi\sqrt{\frac{0.10}{10}}=0.20\pi=0.20\times3.14=0.628\fallingdotseq0.63\text{〔s〕}$$

(2) $T=1.0$〔s〕だから，　$1.0=2\pi\sqrt{\frac{m}{10}}$

$$\therefore\quad m=10\times\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2=0.253\cdots\fallingdotseq0.25\text{〔kg〕}$$

(3) 周期 T はおもりの質量を m とすると $\sqrt{m}$ に比例する。よって，おもりの質量が4倍になったから，周期は2倍。

≪詳解≫

類題トレーニング(6190)

1 (6191) M05

(1) 復元力(物体に単振動を生じさせる力)　(2) 単振動

(3) つねに振動の中心を向いている。

2 (6192) M05

(1) $F=-m\omega^2x$　(2) 0 m … 0 N, 0.20 m … -4.9×10^{-2} N

(3) -0.10 m

解説

(1) $F=-m\omega^2x$

(2) $x=0$ のとき，　$F=-m\omega^2\times0=0$〔N〕

$x=0.20$ のとき，　$F=-0.10\times\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\times0.20=-4.92\cdots\times10^{-2}$

$\fallingdotseq-4.9\times10^{-2}$〔N〕

(3) $2.5\times10^{-2}=-0.10\times\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\times x$ だから，

$$x=-\frac{2.5\times10^{-2}}{0.10\times\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}=-0.101\cdots\fallingdotseq-0.10\text{〔m〕}$$

3 (6193) M05

(1) 0 m … 0 N, 0.20 m … -0.10 N　(2) -3.0 m

解説

(1) $x=0$〔m〕のとき，$F=-kx$ において，$k=0.50$〔N/m〕だから，

$F=-0.50\times0=0$〔N〕

$x=0.20$〔m〕のとき，

$F=-0.50\times0.20=-0.10$〔N〕

(2) $F=-kx$ において，$k=0.50$〔N/m〕，$F=1.5$〔N〕だから，

$1.5=-0.50x$　$\therefore$　$x=-3.0$〔m〕

≪詳解≫

類題トレーニング(6200)

1 (6201) M05

(1) 周期　(2) 関係ない　(3) $\sqrt{2}$ 倍

解 説

(3) 質量が2倍になったときの周期を T' とすると,

$$\frac{T'}{T}=\frac{2\pi\sqrt{\frac{2m}{k}}}{2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}=\sqrt{2}\ \text{〔倍〕}$$

2 (6202) M05

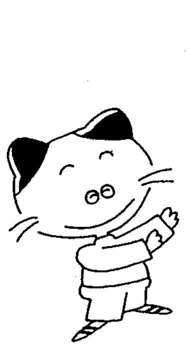
(1) 13 s　(2) 2.5 s

解 説

(1) $T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ に, $m=3.6$, $k=0.90$ を代入して,

$$T=2\pi\sqrt{\frac{3.6}{0.90}}=4\pi=12.56\fallingdotseq 13\ \text{〔s〕}$$

(2) $T=2\pi\sqrt{\frac{0.32}{2.0}}=0.8\pi=2.512\fallingdotseq 2.5\ \text{〔s〕}$



≪詳解≫

類題トレーニング(6210)

1 (6211) M05

(1) $f=kl$ (2) $F=-kx$ (3) 単振動

解 説

(2) おもりの質量を m，重力加速度の大きさを g とする。

つりあいの位置では，おもりに作用している力は，下向きに重力 mg，上向きにばねの弾性力 kl であるが，つりあっているので，

$$mg=kl \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

である。一方，おもりがつりあいの位置からさらに x 下がった点で作用している力は，下向きに重力 mg，上向きにばねの弾性力 $k(l+x)$ である。よって，この点においての合力 F は，

$$F=mg-k(l+x) \quad \cdots\cdots\cdots ②$$

ここで，②に①を代入すると，

$$F=kl-kl-kx=-kx$$

2 (6212) M05

(1) -0.50 N (2) 0.30 N

(3) つりあいの位置から上方に 1.0 cm のところ。

解 説

(1) 最下端では，$x=0.050$〔m〕だから，合力を F，ばね定数を k とすると，

$$F=-kx=-10\times0.050=-0.50\ \text{〔N〕}$$

(2) $F=-10\times(-0.030)=0.30$〔N〕

(3) $0.10=-10\times x \quad \therefore \quad x=-0.010$〔m〕

よって，つりあいの位置から上方に 1.0 cm のところ。

3 (6213) M05

(1) -0.50 N (2) 0 N

(3) つりあいの位置からばねの縮む方向へ 1.0 cm のところ。

解 説

(1) $F=-kx$ に，$k=10$〔N/m〕，$x=0.050$〔m〕を代入して，

$$F=-10\times0.050=-0.50\ \text{〔N〕}$$

(2) 振動の中心では変位 $x=0 \quad \therefore \quad F=0$〔N〕

(3) $0.10=-10\times x \quad \therefore \quad x=-0.010$〔m〕

よって，つりあいの位置からばねの縮む方向へ 1.0 cm のところ。

4 (6214) M05

(1) 0.20 m (2) 0.10 m (3) 1.5 N (4) 4.9×10^{-2} N

解 説

(1) つりあったときのばねののびを l，おもりの質量を m，ばね定数を k とすると，

$$kl=mg \quad \therefore \quad l=\frac{mg}{k}$$

$m=0.10$〔kg〕，$g=9.8$〔m/s^2〕，$k=4.9$〔N/m〕だから，

$$l=\frac{0.10\times9.8}{4.9}=0.20\ \text{〔m〕}$$

(2) このばねは，つりあいの位置を中心に単振動をする。つりあいの位置より，0.10 m 下げて手をはなしたのであるから，振幅は，0.10 m

(3) ばねの変位をつりあいの位置から x，弾性力の大きさを F とすると，

$$F=k(l+x)=4.9(0.20+0.10)=1.47\fallingdotseq 1.5\,[\mathrm{N}]$$

(4) 力の合力を F とすると，

$$F=-kx=-4.9\times 0.010=-4.9\times 10^{-2}\,[\mathrm{N}]$$

よって，合力の大きさは 4.9×10^{-2} N

≪詳解≫

類題トレーニング(6220)

1 (6221) M05

(1) 2倍　(2) ($\sqrt{k}$ に反比例するから) 周期は短くなる。

解説

(1) おもりの質量を4倍にしたときの周期を T' とすると，

$$\frac{T'}{T}=\frac{2\pi\sqrt{\dfrac{4m}{k}}}{2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}}=\sqrt{4}=2\,[倍]$$

2 (6222) M05

(1) 2.5 s　(2) 13 s

解説

(1) ばね定数を k，おもりの質量を m とすると，周期 T は，

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

これに $k=1.0\,[\mathrm{N/m}]$，$m=0.16\,[\mathrm{kg}]$ を代入して，

$$T=2\pi\sqrt{\frac{0.16}{1.0}}=0.8\pi=0.8\times 3.14=2.512\fallingdotseq 2.5\,[\mathrm{s}]$$

(2) $T=2\pi\sqrt{\dfrac{4.0}{1.0}}=4\pi=4\times 3.14=12.56\fallingdotseq 13\,[\mathrm{s}]$

3 (6223) M05

(1) ばね定数… 10 N/m，周期… 0.57 s　(2) 1.0 kg

解説

(1) つりあったときのばねののびを l，おもりの質量を m，ばね定数を k，重力加速度の大きさを g とすると，次の式が成り立つ。

$$kl=mg$$

$$\therefore\ k=\frac{mg}{l}=\frac{0.10\times 9.8}{0.098}=10\,[\mathrm{N/m}]$$

周期を T とすると，

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}=2\times 3.14\times\sqrt{\frac{0.081}{10}}=0.565\cdots\fallingdotseq 0.57\,[\mathrm{s}]$$

(2) $2.0=2\times 3.14\times\sqrt{\dfrac{m}{10}}$ より，　$m=\dfrac{10}{3.14^2}=1.01\cdots\fallingdotseq 1.0\,[\mathrm{kg}]$

§6 ばね振り子(2)

M06

1 (0023) □ ➡類題 6230 ばね振り子の振動数

(1) 0.44 s (2) 2.3 Hz

解説

(1) おもりの質量を m，ばねののびを l，ばね定数を k とすると，重力と弾性力のつりあいより，

$$mg=kl$$

$$\therefore\quad k=\frac{mg}{l}=\frac{m\times9.8}{4.9\times10^{-2}}=200m$$

周期を T とすると，

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}=2\times3.14\times\sqrt{\frac{m}{200m}}=0.444\cdots\fallingdotseq0.44\ \text{〔s〕}$$

(2) 振動数を f とすると，

$$f=\frac{1}{T}=\frac{1}{0.444}=2.25\cdots\fallingdotseq2.3\ \text{〔Hz〕}$$

2 (0024) □ ➡類題 6240 接続されたばね振り子の周期

(1) 0.63 s (2) 1.3 s

解説

(1) ばね定数を k〔N/m〕，おもりの質量を m〔kg〕とする。つりあったときのばねののびを l〔m〕とし，つりあいの位置からさらに x〔m〕下がった地点で考える。その場所でおもりにはたらいている力は，下向きに重力 mg〔N〕,上向きに $2k(l+x)$〔N〕である。したがって，おもりにはたらく合力 F は，下向きを正として，

$$F=mg-2k(l+x)$$

ここで，つりあい位置では，$mg=2kl$ だから，

$$F=2kl-2k(l+x)=-2kx$$

よって，$K=2k$ とすると，$F=-Kx$ となるので，おもりは単振動をする。したがって，ばね定数が $2k$ のばね振り子と考えてよいから，周期 T〔s〕は，

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}}\ \text{〔s〕}$$

これにあたえられた数値を代入すると，

$$T=2\times3.14\times\sqrt{\frac{0.20}{2\times10}}=0.628\fallingdotseq0.63\ \text{〔s〕}$$

(2) つりあいの位置での上のばねののびを l〔m〕とする。2本のばねの弾性力，はたらく力の大きさが等しいから下のばねののびも l〔m〕である。したがって，$mg=kl$ となる。またばね全体ののびは $2l$ である。おもりをつりあいの位置から x〔m〕下げたとき，2つのばねはそれぞれ $\frac{x}{2}$〔m〕のびており，おもりにはたらく合力 F は，下向きを正として，

$$F=mg-k\left(l+\frac{x}{2}\right)=kl-k\left(l+\frac{x}{2}\right)=-\frac{k}{2}x$$

よって，$K=\frac{k}{2}$ とすると，$F=-Kx$ となるので，おもりは単振動をする。したがって，ばね定数が $\frac{k}{2}$ のばね振り子と考えてよいから，周期 T は，

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{\frac{k}{2}}}=2\pi\sqrt{\frac{2m}{k}}$$

これにあたえられた数値を代入すると，

$$T=2\times3.14\times\sqrt{\frac{2\times0.20}{10}}=1.256\fallingdotseq1.3\ \text{〔s〕}$$

別 解

(1) 同じばね（ばね定数 k）を2本並列につないだときは，ばね定数が $2k$ であるばねが1本あるときと同じであると考えてよい。したがって，おもりの質量を m〔kg〕，周期を T〔s〕とすると，

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}}$$

$$=2\times3.14\times\sqrt{\frac{0.20}{2\times10}}=0.628\fallingdotseq0.63\ \text{〔s〕}$$

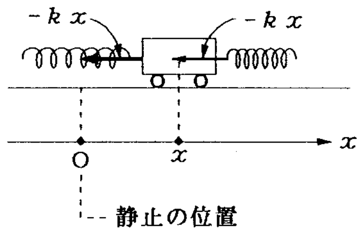
(2) 同じばね（ばね定数 k）を2本直列につないだきは，ばね定数が $\frac{k}{2}$ であるばねが1本あるときと同じであると考えてよい。したがって，

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{\frac{k}{2}}}=2\pi\sqrt{\frac{2m}{k}}$$

$$=2\times3.14\times\sqrt{\frac{2\times0.20}{10}}=1.256\fallingdotseq1.3\ \text{〔s〕}$$

3 (0025) □ ➲類題6250 2個のばねにはさまれた物体の運動

(1) 物体の静止の位置をO点とし，変位 x〔m〕の場所で考える。右向きを正として，右図のように表すと，左のばねが物体におよぼす力 F_1 は，ばねがのびているので，$F_1=-kx$ となる。また,右のばねが物体におよぼす力 F_2 は，ばねが縮んでいるので，$F_2=-kx$ となる。



したがって，物体にはたらく力の合力 F は，

$$F=-kx-kx=-2kx$$

$2k=K$ とおくと，$F=-Kx$ となる。よって，物体は単振動をする。

(2) $2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}}$〔s〕

解 説

(2) (1)の結果より，周期を T とすると，

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}}\ \text{〔s〕}$$

4 (0026) □ ➲類題6260 ばねとおもりの影響を受ける物体の運動

(1) 0.30 m　(2) 4.4 rad/s　(3) 1.4 s

解 説

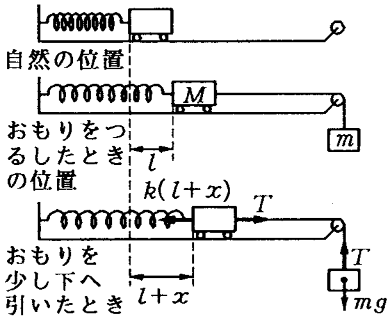
(1) ばね定数を k，おもりの質量を m，重力加速度の大きさを g，つりあって静止したときのばねののびを l とすると，おもりにはたらく重力とばねの弾性力がつりあうことから，

$$mg=kl\qquad\therefore\quad l=\frac{mg}{k}$$

これにあたえられた数値を代入すると，

$$l=\frac{3.0\times9.8}{98}=0.30\ \text{〔m〕}$$

(2) つりあいの位置からの台車の変位を x，糸の張力を T，台車の質量を M，加速度を a とする。



台車について右向きを正として運動方程式をたてると，

$$T-k(l+x)=Ma \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

おもりについて下向きを正として運動方程式をたてると，

$$mg-T=ma \quad \cdots\cdots\cdots ②$$

①，②より T を消去すると，

$$mg-k(l+x)=(M+m)a \quad \cdots\cdots\cdots ③$$

ここで(1)より，$mg=kl$ であるから，③は，

$$-kx=(M+m)a$$

$$\therefore \quad a=-\frac{k}{M+m}x \quad \cdots\cdots\cdots ④$$

おもりにはたらく合力を F とすると，

$$F=ma=-\frac{mk}{M+m}x$$

よって，$K=-\dfrac{mk}{M+m}$ とすると，$F=-Kx$ という形で表されるから，おもりは単振動をする。

ここで，角振動数を ω とすると，$a=-\omega^2x$ であるから，④より，

$$-\frac{k}{M+m}x=-\omega^2x \quad \therefore \quad \omega=\sqrt{\frac{k}{M+m}}$$

これにあたえられた数値を代入すると，

$$\omega=\sqrt{\frac{98}{2.0+3.0}}=4.42\cdots\fallingdotseq 4.4\ \text{[rad/s]}$$

(3) 周期を T とすると，

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\times 3.14}{4.42}=1.42\cdots\fallingdotseq 1.4\ \text{[s]}$$

≪詳解≫

類題トレーニング(6230)

1 (6231) M06

(1) $49m$〔N/m〕　(2) 0.90 s　(3) 1.1 Hz

解説

(1) ばねののびを l，ばね定数を k，重力加速度の大きさを g とすると，重力と弾性力がつりあうから，

$$mg=kl \quad \therefore \quad k=\frac{mg}{l}$$

ここで，$g=9.8$〔m/s^2〕，$l=20\times10^{-2}$〔m〕より，

$$k=\frac{m\times9.8}{20\times10^{-2}}=49m\ \text{〔N/m〕}$$

(2) $T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}=2\times3.14\times\sqrt{\frac{m}{49m}}=2\times3.14\times\frac{1}{7}=0.897\cdots\fallingdotseq0.90$〔s〕

(3) $f=\frac{1}{T}=\frac{1}{0.897}=1.11\cdots\fallingdotseq1.1$〔Hz〕

2 (6232) M06

1.13 Hz

解説

$mg=kl$ より，$k=\frac{mg}{l}$。$g=9.80$〔m/s^2〕，$l=0.196$〔m〕だから，

$$k=\frac{m\times9.80}{0.196}=50m$$

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}=2\times3.14\times\sqrt{\frac{m}{50m}}=2\times3.14\times\sqrt{0.02}$$

$$\fallingdotseq0.8881\cdots\fallingdotseq0.888\ \text{〔s〕}$$

$$\therefore \quad f=\frac{1}{T}=\frac{1}{0.8881}=1.125\cdots\fallingdotseq1.13\ \text{〔Hz〕}$$

3 (6233) M06

$\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}}$

解説

$mg=kl$ より，$k=\frac{mg}{l}$

$$\therefore \quad T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}=2\pi\sqrt{\frac{m}{\frac{mg}{l}}}=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \qquad \therefore \quad f=\frac{1}{T}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}}$$

≪詳解≫

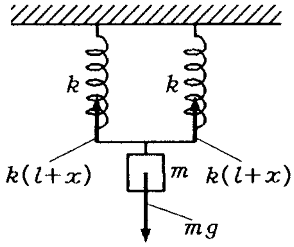
類題トレーニング(6240)

1 (6241) M06

(1) $2k(l+x)$〔N〕　(2) $F=-2kx$　(3) $2\pi\sqrt{\dfrac{m}{2k}}$〔s〕

解説

(1) 右図のようになるので，2つのばねの弾性力の合力は，$2k(l+x)$〔N〕となる。



(2) 下向きを正とすると，

$$F=mg-2k(l+x)$$

ここで，つりあいの位置では $mg=2kl$ だから，

$$F=2kl-2k(l+x)$$
$$=-2kx$$

(3) (2)の結果より，$K=2k$ とすると，

$$F=-Kx$$

となるので，おもりは単振動をする。したがって，ばね定数が $2k$ のばね振り子と考えてよいから，周期 T は，

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}}\text{〔s〕}$$

2 (6242) M06

(1) $10x$〔N〕　(2) 0.63 s

解説

(1) $F=mg-2k(l+x)$ において，$mg=2kl$ より，

$$F=2kl-2k(l+x)=-2kx$$

$$\therefore\ F=-2\times5.0\times x=-10x\text{〔N〕}$$

おもりにはたらく力は，上向きに $10x$〔N〕。

(2) ばね定数 $2k$ のばね振り子と考えてよいから，$T=2\pi\sqrt{\dfrac{m}{2k}}$ より，

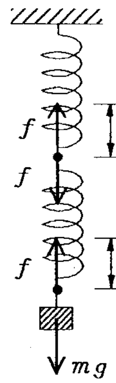
$$T=2\times3.14\times\sqrt{\frac{0.10}{2\times5.0}}=0.628\fallingdotseq0.63\text{〔s〕}$$

3 (6243) M06

$2\pi\sqrt{\dfrac{2m}{k}}$〔s〕

解説

つりあいの位置での上のばねののびを l〔m〕とすると，2本のばねの両端の弾性力の大きさは等しく，2本のばねの間ではたらく力の大きさも等しいから，下のばねののびも l〔m〕となる。したがって，$mg=kl$ である。また，ばねの全体ののびは $2l$ となっている。



おもりをつりあいの位置から x〔m〕下げたとき，2つのばねはそれぞれ $\frac{x}{2}$〔m〕のびており，おもりにはたらく力 F は，下向きを正として，

$$F=mg-k\left(l+\frac{x}{2}\right)$$

ここで，$mg=kl$ であったから，

$$F=kl-k\left(l+\frac{x}{2}\right)=-\frac{k}{2}x$$

よって，$K=\frac{k}{2}$ とすると，$F=-Kx$ となるので，おもりは単振動をする。したがって，このばねはばね定数 $\frac{k}{2}$ のばね振り子と考えてよいから，周期 T は，

$$\therefore\ T=2\pi\sqrt{\frac{m}{\frac{k}{2}}}=2\pi\sqrt{\frac{2m}{k}}\ \text{〔s〕}$$

➲このように，同じばね（ばね定数 k）を2本直列につないだときは，ばね定数が $\frac{k}{2}$ であるばねが1本あるときと同じであると考えてよい。（これは，電気のコンデンサーの直列つなぎの合成容量を求める場合と似ている。）すなわち，合成ばね定数を K とすると，

$$\frac{1}{K}=\frac{1}{k}+\frac{1}{k}$$

である。なお，ばね定数が k_1，k_2 のばねを直列につないだときの，合成ばね定数を K とすると，次の関係がある。

$$\frac{1}{K}=\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}$$

別解

同じばね（ばね定数）を2本直列につないだときは，ばね定数が $\frac{k}{2}$ であるばねが1本あるときと同じであると考えてよい。したがって，周期を T とすると，

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{\frac{k}{2}}}=2\pi\sqrt{\frac{2m}{k}}\ \text{〔s〕}$$

4 (6244) M06

(1) 0.040 N　(2) 0.63 s

解 説

(1) ばね定数を k，おもりの質量を m，重力加速度の大きさを g とし，つりあったときのそれぞれのばねののびを l とする。おもりをつりあいの位置から x 下げたとき，2つのばねはそれぞれ $\frac{x}{2}$ のびており，おもりにはたらく力 F は，下向きを正として，

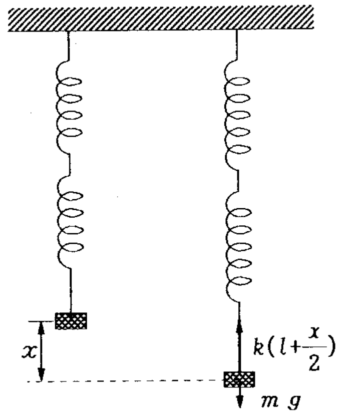
$$F=mg-k\left(l+\frac{x}{2}\right)$$

ここで，つりあいの位置では $mg=kl$ であるから，

$$F=kl-k\left(l+\frac{x}{2}\right)=-\frac{k}{2}x$$

これにあたえられた数値を代入すると，

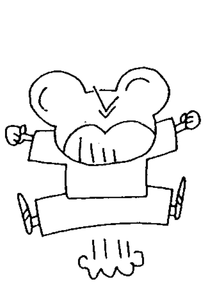
$$F=-\frac{4.0}{2}\times(-0.020)=0.040\text{〔N〕}$$



(2) (1)より，$K=\frac{k}{2}$ とすると，$F=-Kx$ となるので，おもりは単振動をする。したがって，このばねはばね定数 $\frac{k}{2}$ のばね振り子と考えてよいから，周期 T は，

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{\frac{k}{2}}}=2\pi\sqrt{\frac{2m}{k}}$$

$$=2\times3.14\times\sqrt{\frac{2\times0.020}{4.0}}=0.628\fallingdotseq0.63\text{〔s〕}$$



≪詳解≫

類題トレーニング(6250)

1 (6251) M06

(1) 左のばね… $-k_1x$〔N〕，右のばね… $-k_2x$〔N〕

(2) 2つのばねが物体におよぼす力の合力 F は，

$$F=-k_1x+(-k_2x)=-(k_1+k_2)x$$

となる。$k_1+k_2=k$ とおけば上式は，$F=-kx$。したがって，物体は単振動をする。

(3) $2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k_1+k_2}}$〔s〕

解 説

例題の「考え方」，「解答」を読みなおしなさい。

2 (6252) M06

物体にはたらく力の合力 F，つりあいの位置からの変位を x とし，右向きを正とすると，

$$F=-(12+8)x=-20x$$

これは，$F=-kx$ と同じ形をしている。よって，物体は単振動をする。

周期… 0.63 s

解 説

周期は，　$T=2\pi\sqrt{\dfrac{0.20}{20}}=0.628\fallingdotseq0.63$〔s〕

3 (6253) M06

2.0 N/m

解 説

$T=2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k_1+k_2}}$ において，$m=0.40$〔kg〕，ばね定数はどちらも等しく，$T=2.0$〔s〕だから，$k_1=k_2=k$ として，

$$2.0=2\times3.14\times\sqrt{\frac{0.40}{2k}}$$

これを解くと，　$k=1.97\cdots\fallingdotseq2.0$〔N/m〕

≪詳解≫

類題トレーニング(6260)

1 (6261) M06

(1) $T-k(l+x)$〔N〕

(2) 台車… $T-k(l+x)=Ma$，おもり… $mg-T=ma$

(3) $a=-\dfrac{kx}{M+m}$〔m/s^2〕

(4) (3)の結果より，

$$F=Ma=-\frac{Mk}{M+m}x$$

よって，$K=-\dfrac{Mk}{M+m}$ とすると，$F=-Kx$ という形で表される。したがって，台車は単振動をする。

(5) 角振動数… $\sqrt{\dfrac{k}{M+m}}$〔rad/s〕，周期… $2\pi\sqrt{\dfrac{M+m}{k}}$〔s〕

解説

(3) (2)の２つの式の辺々加えて T を消去すると，

$$mg-k(l+x)=Ma+ma$$

ここで，$mg=kl$ だから上式を整理して，

$$a=-\frac{kx}{M+m}\ \text{〔m/s}^2\text{〕}$$

(5) 角振動数を ω とすると，$a=-\omega^2x$ だから，

$$-\frac{kx}{M+m}=-\omega^2x \qquad \therefore\quad \omega=\sqrt{\frac{k}{M+m}}\ \text{〔rad/s〕}$$

周期を T とすると，

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{M+m}{k}}\ \text{〔s〕}$$

2 (6262) M06

(1) 9.8×10^{-2} m

(2) 台車… $T-10(9.8\times10^{-2}+x)=0.30a$，おもり… $0.98-T=0.10a$

(3) $-25x$〔m/s^2〕

(4) (3)の結果より，

$$F=Ma=0.30\times(-25x)=-7.5x$$

ここで $k=7.5$ とすると，$F=-kx$ という形で表される。よって，台車は単振動をする。

(5) 角振動数… 5.0 rad/s，周期… 1.3 s

解説

(1) ばね定数を k，おもりの質量を m，重力加速度の大きさを g，つりあったときのばねののびを l とすると，おもりにはたらく重力とばねの弾性力がつりあうから，

$$mg=kl \qquad \therefore\quad l=\frac{mg}{k}$$

ここで，$m=0.10$〔kg〕，$g=9.8$〔m/s^2〕，$k=10$〔N/m〕だから，

$$l=\frac{0.10\times9.8}{10}=9.8\times10^{-2}\ \text{〔m〕}$$

(2) 台車の質量を M，糸の張力を T，加速度を a とする。

台車についての運動方程式 $T-k(l+x)=Ma$ において，$k=10$〔N/m〕，$l=9.8\times10^{-2}$〔m〕，$M=0.30$〔kg〕を代入すると，

$T - 10(9.8 \times 10^{-2} + x) = 0.30a$ ………①

おもりについての運動方程式 $mg - T = ma$ において，$m = 0.10$〔kg〕，$g = 9.8$〔m/s^2〕を代入すると，

$0.98 - T = 0.10a$ ………②

(3) ①，②より T を消去すると，

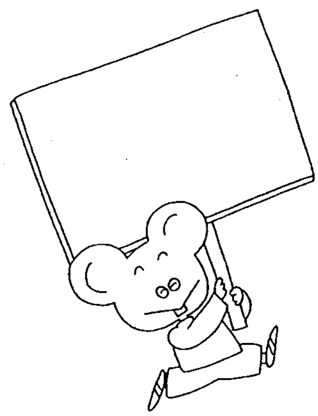
$$a = -\frac{10}{0.30 + 0.10}x = -25x \text{〔m/s}^2\text{〕}$$

(5) 角振動数を ω とすると，$a = -\omega^2 x$。これと(3)の結果 $a = -25x$ を比較すると，

$\omega^2 = 25$　　∴　$\omega = 5.0$〔rad/s〕

よって，周期を T とすると，

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{5} = 1.256 \fallingdotseq 1.3 \text{〔s〕}$$



≪詳解≫

§7 単振り子

M07

1 (0027) □ ➲類題 6270 単振り子の単振動

(1) −0.39 N (2) 0 N

解説

(1) 糸の長さを l，おもりの質量を m，最下点からの変位を x，重力加速度の大きさを g とすると，おもりに単振動をさせる力 F は，右向きを正として，

$$F=-mg\frac{x}{l}$$

これにあたえられた数値を代入すると

$$F=-0.40\times 9.8\times\frac{0.10}{1.0}=-0.392\fallingdotseq -0.39\ [\mathrm{N}]$$

(2) (1)と同様に考えると $x=0$ であるから， $F=0\ [\mathrm{N}]$

2 (0028) □ ➲類題 6280 単振り子の周期

(1) 1.4 s (2) 4.0 m

解説

(1) 振り子の長さを l とすると，周期 T は， $T=2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$ ………①

これにあたえられた数値を代入すると，

$$T=2\times 3.14\times\sqrt{\frac{0.50}{9.8}}=1.41\cdots\fallingdotseq 1.4\ [\mathrm{s}]$$

(2) ①の式を変形すると， $l=\dfrac{T^2 g}{4\pi^2}$

これにあたえられた数値を代入すると，

$$l=\frac{4.0^2\times 9.8}{4\times 3.14^2}=3.97\cdots\fallingdotseq 4.0\ [\mathrm{m}]$$

3 (0029) □ ➲類題 6290 長さの変わる単振り子

(1) 4.0 s (2) 3.8 s (3) 3.9 s

解説

(1) $T_1=2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$ に $l=4.0\ [\mathrm{m}]$， $g=9.8\ [\mathrm{m/s^2}]$ を代入して，

$$T_1=2\times 3.14\times\sqrt{\frac{4.0}{9.8}}=4.01\cdots\fallingdotseq 4.0\ [\mathrm{s}]$$

(2) 右半分では，くぎを支点とする長さ $4.0-0.40=3.6\ [\mathrm{m}]$ の振り子として考えればよいから，

$$T_2=2\times 3.14\times\sqrt{\frac{3.6}{9.8}}=3.80\cdots\fallingdotseq 3.8\ [\mathrm{s}]$$

(3) $$T=\frac{T_1+T_2}{2}=\frac{4.01+3.80}{2}=3.905\fallingdotseq 3.9\ [\mathrm{s}]$$

4 (0030) □ ➲類題 6300 エレベーター内での単振り子

2.6 s

解説

エレベーターの加速度 a は，　$a=\dfrac{20-0}{10}=2.0\,[\mathrm{m/s^2}]$

糸の長さを l とすると，周期 T は，

$$\therefore\quad T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g+a}}=2\times3.14\times\sqrt{\frac{2.0}{9.8+2.0}}=2.58\cdots\fallingdotseq2.6\,[\mathrm{s}]$$

≪詳解≫

類題トレーニング(6270)

1 (6271)　M07

(1) 単振動　(2) 振れ角が小さいとき

2 (6272)　M07

(1) -0.20 N　(2) 0 N　(3) 0.24 N

解説

(1) 糸の長さを l，おもりの質量を m，最下点からの変位を x，重力加速度の大きさを g とすると，おもりに単振動をさせる力 F は，右向きを正として，

$$F=-mg\frac{x}{l}$$

これに $m=0.20\,[\mathrm{kg}]$，$g=9.8\,[\mathrm{m/s^2}]$，$x=0.10\,[\mathrm{m}]$，$l=1.0\,[\mathrm{m}]$ を代入して，

$$F=-0.20\times9.8\times\frac{0.10}{1.0}=-0.196\fallingdotseq-0.20\,[\mathrm{N}]$$

(2) $F=-0.20\times9.8\times\dfrac{0}{1.0}=0\,[\mathrm{N}]$

(3) $F=-0.20\times9.8\times\dfrac{-0.12}{1.0}=0.2352\fallingdotseq0.24\,[\mathrm{N}]$

≪詳解≫

類題トレーニング(6280)

1 (6281) M07

(1) $T=2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$ (2) 1倍(変わらない)

(3) 2倍のとき… $\sqrt{2}$ 倍, 4倍のとき…2倍

解説

(2) (1)の式より, 周期 T は, おもりの重さには関係しないことがわかる。よって, 周期は1倍(変わらない)。

(3) 糸の長さを2倍, 4倍にしたときの周期をそれぞれ T', T'' とすると,

$$\frac{T'}{T}=\frac{2\pi\sqrt{\dfrac{2l}{g}}}{2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}}=\sqrt{2}\ 〔倍〕$$

$$\frac{T''}{T}=\frac{2\pi\sqrt{\dfrac{4l}{g}}}{2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}}=2\ 〔倍〕$$

2 (6282) M07

(1) 0.90 s (2) 1.8 s (3) 1.3 s

解説

(1) 振り子の長さを l とすると, 周期 T は,

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

これに $l=0.20$ 〔m〕, $g=9.8$ 〔m/s^2〕 を代入して,

$$T=2\times3.14\times\sqrt{\frac{0.20}{9.8}}=2\times3.14\times\frac{1}{7}=0.897\cdots\fallingdotseq0.90\ 〔s〕$$

(2) (1)の長さの4倍だから周期は2倍になる。

$0.897\times2=1.794\fallingdotseq1.8$ 〔s〕

(3) (1)の長さの2倍だから周期は $\sqrt{2}$ 倍になる。

$0.897\times\sqrt{2}\fallingdotseq0.897\times1.41=1.26\cdots\fallingdotseq1.3$ 〔s〕

3 (6283) M07

(1) 0.25 m (2) 0.99 m (3) 0.062 m

解説

(1) $T=2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$ より, $l=\dfrac{T^2}{4\pi^2}g$ ………①

これにあたえられた数値を代入すると,

$$l=\frac{1.0^2\times9.8}{4\times3.14^2}=0.248\cdots\fallingdotseq0.25\ 〔m〕$$

(2) ①の式より振り子の長さは周期の2乗に比例することがわかる。周期が(1)の2倍だから長さは4倍となるので,

$0.248\times4=0.992\fallingdotseq0.99$ 〔m〕

(3) (1)の $\dfrac{1}{2}$ 倍の周期になっているから長さは $\dfrac{1}{4}$ 倍となる。よって,

$0.248 \times \frac{1}{4} = 0.062$ 〔m〕

4 (6284) M07

(1) $\sqrt{6}$ 倍　(2) $\sqrt{\frac{13}{5}}$ 倍

解説

(1) $T \propto \frac{1}{\sqrt{g}}$ であるから，g が $\frac{1}{6}$ 倍になれば T は $\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{6}}}$ 倍になる。すなわち $\sqrt{6}$ 倍。

(2) g が $\frac{5}{13}$ 倍になれば T は $\frac{1}{\sqrt{\frac{5}{13}}}$ 倍になる。すなわち，地球の表面の $\sqrt{\frac{13}{5}}$ 倍になる。

5 (6285) M07

(1) 1.42 s　(2) 9.78 m/s^2

解説

(1) 表の平均値を求めると，

$$\frac{1}{10}(14.3+14.0+14.3+14.1+14.2+14.1+14.4+14.1+14.3+14.2)$$
$$=14.2\ 〔\mathrm{s}〕$$

よって，周期は，　$T = \frac{14.2}{10} = 1.42$ 〔s〕

(2) $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ を変形すると，$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}$。これに数値を代入する。

$$g = \frac{4 \times 3.14^2 \times 0.500}{1.42^2} = 9.779\cdots \fallingdotseq 9.78\ 〔\mathrm{m/s^2}〕$$

≪詳解≫

類題トレーニング(6290)

1 (6291) M07

(1) $T_1=2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$〔s〕 (2) $T_2=2\pi\sqrt{\dfrac{l-l'}{g}}$〔s〕

(3) $T=\pi\left(\sqrt{\dfrac{l}{g}}+\sqrt{\dfrac{l-l'}{g}}\right)$〔s〕

解説

(1) 単振り子の周期を表す式より，

$$T_1=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\text{〔s〕}$$

(2) 右半分では，くぎを支点とする長さ（$l-l'$）の振り子として考えればよいから，

$$T_2=2\pi\sqrt{\frac{l-l'}{g}}\text{〔s〕}$$

(3) 振り子の運動の左端を P 点，右端を Q 点，最下点を O とする。

O → P → O を動く時間 t_1 は， $t_1=\dfrac{T_1}{2}$

O → Q → O を動く時間 t_2 は， $t_2=\dfrac{T_2}{2}$

周期 T は，$T=t_1+t_2$ であるから，

$$T=\frac{T_1+T_2}{2}=\pi\left(\sqrt{\frac{l}{g}}+\sqrt{\frac{l-l'}{g}}\right)\text{〔s〕}$$

2 (6292) M07

2.74 s

解説

左半分の周期を T_1 とすると，

$$T_1=2\times3.14\times\sqrt{\frac{2.30}{9.80}}=3.033\cdots\text{〔s〕}$$

右半分の周期を T_2 とすると，

$$T_2=2\times3.14\times\sqrt{\frac{(2.30-0.800)}{9.80}}=2.455\cdots\text{〔s〕}$$

$$\therefore\quad T=\frac{T_1+T_2}{2}=\frac{3.033+2.455}{2}=2.744\fallingdotseq2.74\text{〔s〕}$$

≪詳解≫

類題トレーニング(6300)

1 (6301) M07

(1) 加速度… $2.0\,\mathrm{m/s^2}$，周期… $1.8\,\mathrm{s}$　(2) $2.0\,\mathrm{s}$　(3) $2.2\,\mathrm{s}$

解説

(1) エレベーター内の単振り子にはたらく加速度を a とすると，

$$a=\frac{10-0}{5.0-0}=2.0\,[\mathrm{m/s^2}]$$

振り子の長さを l とすると，周期 T は，

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g+a}}=2\times3.14\times\sqrt{\frac{1}{9.8+2.0}}=1.82\cdots\fallingdotseq1.8\,[\mathrm{s}]$$

(2) $a=0$ だから，

$$T=2\pi\sqrt{\frac{1.0}{9.8}}=2.00\cdots\fallingdotseq2.0\,[\mathrm{s}]$$

(3) $a=\dfrac{0-10}{15-10}=-2.0$

$\therefore\quad g+a=9.8-2.0=7.8$

$\therefore\quad T=2\pi\sqrt{\dfrac{1.0}{7.8}}=2.24\cdots\fallingdotseq2.2\,[\mathrm{s}]$

2 (6302) M07

$3.5\,\mathrm{m/s^2}$

解説

糸の長さを l，周期を T，加速度を a とすると，

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g-a}}$$

これを変形すると，　$a=g-\dfrac{4\pi^2 l}{T^2}$

これに，$T=2.5\,[\mathrm{s}]$，$l=1.0\,[\mathrm{m}]$，$g=9.8\,[\mathrm{m/s^2}]$ を代入すると，

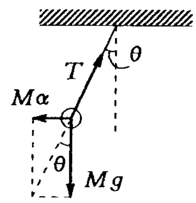
$$a=9.8-\frac{4\times3.14^2\times1.0}{2.5^2}=3.48\cdots\fallingdotseq3.5\,[\mathrm{m/s^2}]$$

3 (6303) M07

(1) $\alpha=g\tan\theta$　(2) $T=2\pi\sqrt{\dfrac{l}{\sqrt{g^2+\alpha^2}}}$

解説

(1) おもりの質量を M，糸の張力を T とすると，電車の中の人からは単振り子は，張力 T と重力 Mg と（運動の向きとは逆向きの）慣性力 $M\alpha$ がつりあっていると見える。よって，力のつりあいの式をたてると，

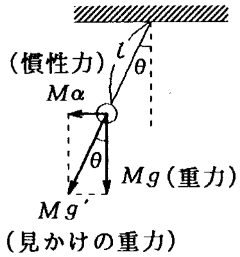


$$M\alpha=T\sin\theta\qquad Mg=T\cos\theta$$

この2式から T を消去すると，

$$\alpha=g\tan\theta$$

(2) 右の図に示すように，等加速度運動をしている電車内では慣性力 $M\alpha$ と重力 Mg の合力である見かけの重力がはたらいているように見える。これより見かけの重力加速度 g' を求めると，

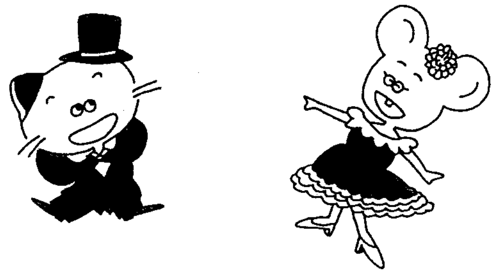


$$(Mg')^2=(Mg)^2+(M\alpha)^2$$

$$\therefore\quad g'=\sqrt{g^2+\alpha^2}$$

よって，電車内での単振り子の周期 T は，

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g'}}=2\pi\sqrt{\frac{l}{\sqrt{g^2+\alpha^2}}}$$



§8 いろいろな単振動

M08

1 (0031) ☐ ➲類題 6310 うきの振動

(1) $\dfrac{\rho}{\rho_0}l$ (2) $-Sx\rho_0 g$ (3) $2\pi\sqrt{\dfrac{\rho l}{\rho_0 g}}$

解 説

(1) このとき，うきにはたらく重力と浮力がつりあっている。浮力は，物体によっておしのけられた水の重さと同じ大きさの力である。よって，

$Sl\rho g = Sh\rho_0 g$ ………①

$\therefore\ h = \dfrac{\rho}{\rho_0}l$

(2) つりあいの状態から x だけ下に変位したとき，うきにはたらく力は，下向きには重力 $Sl\rho g$，上向きには浮力 $S(h+x)\rho_0 g$ である。よって，うきにはたらいている力の合力 F は，下向きを正として，

$F = Sl\rho g - S(h+x)\rho_0 g$ ………②

ここで①を②に代入すると，

$F = Sh\rho_0 g - Sh\rho_0 g - Sx\rho_0 g = -Sx\rho_0 g$

(3) (2)の結果の式で，$k = S\rho_0 g$ とおくと，$F = -kx$ となるので，うきは単振動をする。一方，うきの質量を m とすると，$m = Sl\rho$ であるから，周期を T とすると，

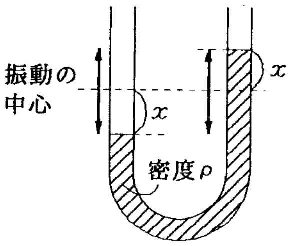
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{Sl\rho}{S\rho_0 g}} = 2\pi\sqrt{\frac{\rho l}{\rho_0 g}}$$

2 (0032) ☐ ➲類題 6320 U 字管内の液体の振動

(1) -120 N (2) 2.0 s

解 説

(1) 左の液面のつりあいの位置（振動の中心）から下がった高さを x，管の断面積を S，水の密度を ρ，重力加速度の大きさを g とする。左の液面が x だけ下がったとき，右の液面と左の液面との差は，右図のように $2x$ である。よって，この 2 つの面の圧力差は，$2xS\rho g$ となる。したがって，左側の液面をおし上げる力を F とすると，下向きを正として，



$F = -2xS\rho g$ ………①

$= -2\times0.20\times0.030\times1.0\times10^3\times9.8$

$= -117.6 \fallingdotseq -120$〔N〕

(2) (1)の F が，液体を振動させる力としてはたらく。ここで，$k = 2S\rho g$ とおくと，①より，$F = -kx$ となるので，水は単振動をする。よって，水の質量を m，周期を T とすると，

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2S\rho g}}$$

$$= 2\times3.14\times\sqrt{\frac{60}{2\times0.030\times1.0\times10^3\times9.8}}$$

$$= 2.00\cdots \fallingdotseq 2.0\,〔\mathrm{s}〕$$

3 (0033) □ ➡類題 6330 単振動をする台の上に置かれた物体の運動

0.79 Hz

解説

この振動（単振動）の振幅を A，角振動数を ω，変位を x とすると，加速度 a は，

$$a=-\omega^2 x$$

ここで，振動数を f とすると，$\omega=2\pi f$ であるから，

$$a=-4\pi^2 f^2 x \quad \cdots\cdots①$$

一方，単振動の加速度が最大になるのは，振動の両端，すなわち，変位が A のところである。そして，下向きの加速度が最大になるのは，台がのぼりつめたとき，すなわち，下向きを正として，$x=-A$ のときである。よって，①に $x=-A$ を代入すると，

$$a=4\pi^2 f^2 A$$

ここで，a の最大値が重力加速度の大きさ g に等しくなるまで，物体は台から離れない。よって，最大の振動数 f は，

$$4\pi^2 f^2 A=g \qquad f^2=\frac{g}{4\pi^2 A}$$

$$\therefore \quad f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{A}}$$

これにあたえられた数値を代入すると，

$$f=\frac{1}{2\times3.14}\times\sqrt{\frac{9.8}{0.40}}=0.788\cdots\fallingdotseq0.79\,[\mathrm{Hz}]$$

≪詳解≫

類題トレーニング(6310)

1 (6311) M08

(1) 重力と浮力　(2) 単振動

[解説]

(2) $k=S\rho_0 g$ とおけば，$F=-kx$ となるので，うきは単振動をする。

2 (6312) M08

(1) $Sa\rho g$ [N]　(2) $Sh\rho_0 g$ [N]　(3) $F=-Sx\rho_0 g$ [N]

(4) 下向きに，9.8×10^{-2} N　(5) 0.75 s

[解説]

(1) うき（水銀柱）の質量を m とする。水銀柱の質量は，

水銀の密度×水銀柱の体積

＝水銀の密度×断面積×高さ

であるから，　$m=Sa\rho$

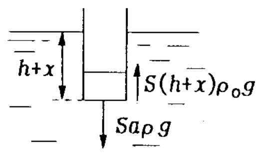
よって，水銀にはたらく重力は，　$mg=Sa\rho g$ [N]

(2) 物体によっておしのけられた水の重さと同じ大きさの力が浮力で，上向きにはたらく。よって，水中部分の容器の体積が Sh で水の密度が ρ_0 であるから，浮力は，$Sh\rho_0 g$ [N] となる。

➲浮力＝おしのけられた水の体積×水の密度×重力加速度

(3) うきが静止しているとき，重力と浮力がつりあうことから，(1)，(2)より，

$Sa\rho g=Sh\rho_0 g$　………①



つりあいの位置から x だけ下に変位したとき，右図のようにうきにはたらく力は下向きには重力 $Sa\rho g$，上向きには浮力 $S(h+x)\rho_0 g$ であるから，うきにはたらいている力の合力 F は，下向きを正として，

$F=Sa\rho g-S(h+x)\rho_0 g$　………②

ここで，①を②に代入すると，

$F=Sh\rho_0 g-Sh\rho_0 g-Sx\rho_0 g=-Sx\rho_0 g$ [N]

(4) つりあいの点から 0.10 m 上方に変位したのであるから，$x=-0.10$ [m] として，(3)の結果の式に代入すると，

$F=-1.0\times10^{-4}\times(-0.10)\times1.0\times10^{3}\times9.8=9.8\times10^{-2}$ [N]

よって合力は，下向きに，9.8×10^{-2} N である。

(5) (3)の結果の式で $k=S\rho_0 g$ とおくと，$F=-kx$ となるので，うきは単振動をする。(1)より $m=Sa\rho$ であるから，周期を T とすると，

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}=2\pi\sqrt{\frac{Sa\rho}{S\rho_0 g}}=2\pi\sqrt{\frac{\rho a}{\rho_0 g}}$$

$$=2\times3.14\times\sqrt{\frac{14\times10^{3}\times0.010}{1.0\times10^{3}\times9.8}}=0.750\cdots\fallingdotseq0.75\ [\mathrm{s}]$$

3 (6313) M08

(1) -3.9×10^{-2} N　(2) 1.1 s

[解説]

(1) $F=-Sx\rho_0 g$ に数値を代入して，

$F=-2.0\times10^{-4}\times0.020\times1.0\times10^{3}\times9.8=-3.92\times10^{-2}\fallingdotseq-3.9\times10^{-2}$ [N]

(2) $T=2\pi\sqrt{\dfrac{\rho a}{\rho_0 g}}$ に数値を代入して，

$$T=2\times3.14\times\sqrt{\frac{14\times10^3\times0.020}{1.0\times10^3\times9.8}}=1.06\cdots\fallingdotseq1.1\,[\mathrm{s}]$$

≪詳解≫

類題トレーニング(6320)

1 (6321) M08

(1) $2x\rho g$　(2) $F=-2xS\rho g$　(3) $2\pi\sqrt{\dfrac{m}{2S\rho g}}$

解説

例題の解答を読みなおしなさい。

2 (6322) M08

(1) $-0.20\,\mathrm{N}$　(2) $1.0\,\mathrm{s}$

解説

(1) 管の断面積を S，水の密度を ρ，重力加速度の大きさを g とする。つりあいの位置から左の液面が x 下がったとき，求める力を F とすると，下向きを正として，

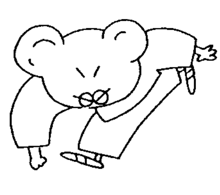
$$F=-2xS\rho g=-2\times0.10\times1.0\times10^{-4}\times1.0\times10^3\times9.8$$
$$=-0.196\fallingdotseq-0.20\,[\mathrm{N}]$$

➡N は，$\mathrm{kgm/s^2}$ だから，質量の単位は kg，長さは m に換算する必要がある。したがって，

$1.0\,[\mathrm{g/cm^3}]=1.0\times10^3\,[\mathrm{kg/m^3}]$　$1.0\,[\mathrm{cm^2}]=1.0\times10^{-4}\,[\mathrm{m^2}]$

(2) 液全体の質量を m とすると，周期 T は，

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{2S\rho g}}=2\times3.14\times\sqrt{\frac{50\times10^{-3}}{2\times1.0\times10^{-4}\times1.0\times10^3\times9.8}}$$
$$=1.00\cdots\fallingdotseq1.0\,[\mathrm{s}]$$



≪詳解≫

類題トレーニング(6330)

1 (6331) M08

(1) 重力加速度（の大きさ） (2) 物体が台から離れないための最大の振動数

2 (6332) M08

1.6 Hz

解説

この振動（単振動）の振幅を A，角振動数を ω，変位を x とすると，加速度 a は，

$$a=-\omega^2 x$$

ここで，振動数を f とすると，$\omega=2\pi f$ であるから，

$$a=-4\pi^2 f^2 x \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

一方，単振動の加速度が最大になるのは，振動の両端，すなわち，変位が A のところである。そして，下向きの加速度が最大になるのは，台がのぼりつめたとき，すなわち，下向きを正として，$x=-A$ のときである。よって，①に $x=-A$ を代入すると，

$$a=4\pi^2 f^2 A$$

ここで，a の最大値が重力加速度の大きさ g に等しくなるまで，物体は台から離れない。よって，最大の振動数 f は，

$$4\pi^2 f^2 A=g \qquad f^2=\frac{g}{4\pi^2 A}$$

$$\therefore \quad f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{A}}$$

これに $A=0.10$〔m〕，$g=9.8$〔m/s²〕を代入すると，

$$f=\frac{1}{2\times 3.14}\times\sqrt{\frac{9.8}{0.10}}=1.57\cdots\fallingdotseq 1.6\ \text{〔Hz〕}$$

3 (6333) M08

0.25 m

解説

物体が台から離れないための振動数を f，重力加速度の大きさを g，求める振幅を A とすると，次の関係がある。

$$f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{A}}$$

この式を変形すると，

$$A=\frac{g}{4\pi^2 f^2}$$

これにあたえられた数値を代入すると，

$$A=\frac{9.8}{4\times 3.14^2\times 1.0^2}=0.248\cdots\fallingdotseq 0.25\ \text{〔m〕}$$

4 (6334) M08

(1) mg〔N〕と N〔N〕 (2) $-4\pi^2 n^2 m x$〔N〕

(3) $(g-4\pi^2 n^2 x)m$〔N〕 (4) $\dfrac{g}{4\pi^2 n^2}$〔m〕

解説

(1) 物体には下向きに重力 mg〔N〕と上向きに垂直抗力 N〔N〕がはたらいている。

(2) 単振動の角振動数を ω，加速度を a とすると，$\omega=2\pi n$ であるから，

$a = -\omega^2 x = -(2\pi n)^2 x = -4\pi^2 n^2 x$

よって，単振動をしている物体にはたらく力を F とすると，

$F = ma = -4\pi^2 n^2 m x$ 〔N〕

(3) $N - mg = F$ より，

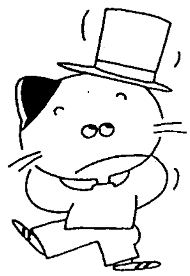
$N = mg + F = mg - 4\pi^2 n^2 m x$

$= (g - 4\pi^2 n^2 x) m$ 〔N〕

(4) $N \geqq 0$ より，　$(g - 4\pi^2 n^2 x) m \geqq 0$

$m > 0$ だから，　$g - 4\pi^2 n^2 x \geqq 0$

$g \geqq 4\pi^2 n^2 x$　　$\therefore$　$x \leqq \dfrac{g}{4\pi^2 n^2}$　　つまり，最大振幅は $\dfrac{g}{4\pi^2 n^2}$ 〔m〕



§9 万有引力

M09

1 (0034) ☐ ➲類題 6340 惑星の運動

(1) 12 倍 (2) 4.3×10^3 日

[解説]

(1) 地球の公転軌道の半長軸を r とすると，太陽から土星までの半長軸は，$5.2r$ になる。地球の公転周期を T とすると，ケプラーの第3法則より，

$$k=\frac{T^2}{r^3}\quad（k\ は比例定数）$$

木星の公転周期を T' とすると，同様に，

$$k=\frac{T'^2}{(5.2r)^3}$$

両者の k の値は等しいから，

$$\frac{T^2}{r^3}=\frac{T'^2}{(5.2r)^3}$$

$$T'^2=\frac{(5.2)^3\times r^3}{r^3}\cdot T^2=(5.2)^3T^2\qquad\therefore\quad T'=11.8\cdots\times T=12T$$

これから，木星の公転周期は，地球の 12 倍。

(2) (1)から， $365\times11.8=4.307\times10^3\fallingdotseq4.3\times10^3$〔日〕

2 (0035) ☐ ➲類題 6350 万有引力の法則

1.5×10^{11} kg

[解説]

1.0 kg の物体にはたらく重力は，質量に重力加速度をかけて，

$$1.0\times9.8=9.8\,[\mathrm{N}]$$

上方へ物体を引く力がこの重力と同じ大きさであれば，この物体は静止する。上方へ物体を引く万有引力を生じさせる物体の質量を x〔kg〕，2 物体間の距離を r〔m〕，万有引力定数を G とすると，この万有引力 F は，

$$F=G\frac{1.0\times x}{r^2}\qquad\therefore\quad x=\frac{Fr^2}{G}$$

$G=6.7\times10^{-11}$〔N・m²/kg²〕，$r=1.0$〔m〕，$F=9.8$〔N〕を代入すると，

$$x=\frac{9.8\times1.0^2}{6.7\times10^{-11}}=1.46\cdots\times10^{11}\fallingdotseq1.5\times10^{11}\,[\mathrm{kg}]$$

3 (0036) ☐ ➲類題 6360 天体の質量

2.01×10^{30} kg

[解説]

太陽の質量を M，地球の質量を m，太陽と地球の距離を r，地球の公転周期を T，地球の角速度を ω とすると，太陽と地球との間にはたらく万有引力と地球にはたらく遠心力がつりあうことから，

$$G\frac{Mm}{r^2}=mr\omega^2=mr\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2$$

$$\therefore\quad M=\frac{4\pi^2r^3}{GT^2}$$

これにあたえられた数値を代入すると，

$$M=\frac{4\times3.14^2\times(1.50\times10^{11})^3}{6.67\times10^{-11}\times(3.15\times10^7)^2}$$
$$=2.011\cdots\times10^{30}\fallingdotseq2.01\times10^{30}\ \text{[kg]}$$

4 (0037) ☐ ➲類題 6370 地球の質量

(1) $\frac{4}{3}\pi R^3$ (2) $\frac{R^2 g}{G}$ (3) $d=\frac{3g}{4\pi GR}$ (4) $5.5\times10^3\ \text{kg/m}^3$

解 説

(1) 地球は球とみなせるから，体積を V とすると，

$$V=\frac{4}{3}\pi R^3$$

(2) 地上にある質量 m の物体にはたらく重力が，物体と地球との間にはたらく万有引力であるから，地球の質量を M とすると，

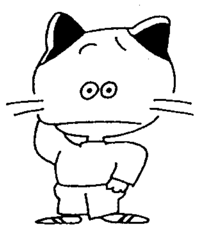
$$mg=G\frac{Mm}{R^2} \qquad \therefore\ M=\frac{R^2 g}{G}$$

(3) (2)の質量を(1)の体積で割ったものが，密度になる。

$$d=\frac{R^2 g}{G}\div\frac{4\pi R^3}{3}=\frac{3R^2 g}{4\pi GR^3}=\frac{3g}{4\pi GR}$$

(4) (3)の結果に $R=6.4\times10^6$ [m]，$g=9.8$ [m/s^2]，$G=6.7\times10^{-11}$ [N·m^2/kg^2] を代入して，

$$d=\frac{3\times9.8}{4\times3.14\times6.7\times10^{-11}\times6.4\times10^6}=5.45\cdots\times10^3\fallingdotseq5.5\times10^3\ \text{[kg/m}^3\text{]}$$



≪詳解≫

類題トレーニング(6340)

1 (6341) M09

(1) 形…だ円，場所…焦点　(2) 太陽に近いとき　(3) $T^2 = kr^3$

2 (6342) M09

(1) 1.00　(2) 1.01

解説

(1) $T = 1.00$〔年〕，$r = 1.00$ を代入して，　$k = \frac{T^2}{r^3} = \frac{1.00^2}{1.00^3} = 1.00$

(2) $T = 1.88$〔年〕，$r = 1.52$ を代入して，　$k = \frac{1.88^2}{1.52^3} = 1.006\cdots \fallingdotseq 1.01$

3 (6343) M09

(1) 29 倍　(2) 1.1×10^4 日

解説

(1) 地球の公転軌道の半長軸を r とすると，太陽から土星までの半長軸は，$9.5r$ になる。地球の公転周期を T とすると，ケプラーの第3法則より，

$$k = \frac{T^2}{r^3}$$ （k は比例定数）

土星の公転周期を T' とすると，同様に，

$$k = \frac{T'^2}{(9.5r)^3}$$

両者の k の値は等しいから，

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{T'^2}{(9.5r)^3}$$

$$T'^2 = \frac{(9.5)^3 \times r^3}{r^3} \cdot T^2 = (9.5)^3 T^2 \qquad \therefore \quad T' = 29.2\cdots \times T \fallingdotseq 29T$$

これから，土星の公転周期は，地球の 29 倍。

(2) (1)から，　$365 \times 29.2 = 1.0658 \times 10^4 \fallingdotseq 1.1 \times 10^4$〔日〕

≪詳解≫

類題トレーニング(6350)

1 (6351) M09

(1) 2物体間の距離と2物体の質量　(2) $F=G\dfrac{m_1m_2}{r^2}$

2 (6352) M09

(1) 1.0×10^{-8} N　(2) 6.7×10^{-7} N　(3) 1.3×10^{-8} N

解 説

(1) 質量が m_1〔kg〕, m_2〔kg〕の物体が距離 r〔m〕離れているとき，この2物体間にはたらく万有引力 F〔N〕は，

$$F=G\frac{m_1m_2}{r^2}=6.7\times10^{-11}\times\frac{15\times40}{2.0^2}$$
$$=1.005\times10^{-8}\fallingdotseq1.0\times10^{-8}\text{〔N〕}$$

(2) $F=6.7\times10^{-11}\times\dfrac{50\times50}{0.50^2}=6.7\times10^{-7}$〔N〕

(3) 質量をkg，距離をmになおすことに注意する。

$$F=6.7\times10^{-11}\times\frac{60\times0.30}{0.30^2}=1.34\times10^{-8}\fallingdotseq1.3\times10^{-8}\text{〔N〕}$$

3 (6353) M09

(1) 6.67×10^{-11} N·m²/kg²

(2) 1.21×10^{-8} N (1.22×10^{-8} N でも正解とする。)

解 説

(1) 大小2球の質量を M, m, 2球の距離を r，万有引力を F とすると，万有引力の法則から，

$$F=G\frac{Mm}{r^2}\qquad\therefore\quad G=\frac{Fr^2}{Mm}$$

$M=158$〔kg〕, $m=0.738$〔kg〕, $r=0.400$〔m〕, $F=4.86\times10^{-8}$〔N〕を代入すると，

$$G=\frac{4.86\times10^{-8}\times0.400^2}{158\times0.738}=6.668\cdots\times10^{-11}\fallingdotseq6.67\times10^{-11}\text{〔N·m}^2\text{/kg}^2\text{〕}$$

(2) $F=6.668\times10^{-11}\times\dfrac{158\times0.738}{0.800^2}=1.214\cdots\times10^{-8}\fallingdotseq1.21\times10^{-8}$〔N〕

➡万有引力の法則より，万有引力は距離の2乗に反比例する。距離が0.400 mから0.800 mのように2倍となったのだから，万有引力は(1)のときの $\dfrac{1}{4}$ 倍になる。よって，次のように求めてもよい。

$$F=4.86\times10^{-8}\times\frac{1}{4}=1.215\times10^{-8}\fallingdotseq1.22\times10^{-8}\text{〔N〕}$$

4 (6354) M09

(1) 2.0×10^{-7} N　(2) 7.5×10^{-8} N　(3) 2.6×10^{-7} N

解 説

(1) 2つの物体(人)の質量を m_1, m_2, 距離を r とすると，万有引力の法則から，求める力 F_1 は，

$$F_1=G\frac{m_1m_2}{r^2}$$

$m_1=50$〔kg〕, $m_2=60$〔kg〕, $r=1.0$〔m〕, $G=6.7\times10^{-11}$〔N·m²/kg²〕を代入し

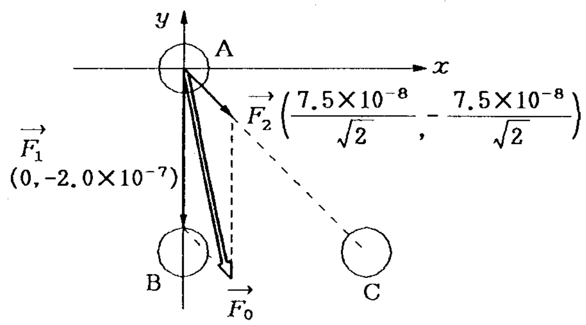
て，

$$F_1=6.7\times10^{-11}\times\frac{50\times60}{1.0^2}=2.01\times10^{-7}\fallingdotseq2.0\times10^{-7}\ \text{〔N〕}$$

(2) 上式で，m_2 を 45 kg，r を $\sqrt{2}$ m にする。求める力を F_2 とすると，(1)と同様にして，

$$F_2=6.7\times10^{-11}\times\frac{50\times45}{(\sqrt{2})^2}=7.53\cdots\times10^{-8}\fallingdotseq7.5\times10^{-8}\ \text{〔N〕}$$

(3)



図のように，xy 座標を決めて，(1)，(2)で求めた力をベクトルで表す。この２つのベクトルを合成したベクトルの大きさが求める力になる。

$$\overrightarrow{F_0}=\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}=(0,\ -2.0\times10^{-7})+\left(\frac{7.5\times10^{-8}}{\sqrt{2}},\ -\frac{7.5\times10^{-8}}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\fallingdotseq(5.28\times10^{-8},\ -2.52\times10^{-7})$$

$$\therefore\ F_0=\sqrt{(5.28\times10^{-8})^2+(-2.52\times10^{-7})^2}=2.57\cdots\times10^{-7}\fallingdotseq2.6\times10^{-7}\ \text{〔N〕}$$

F_0 が，求める力になる。

≪詳解≫

類題トレーニング(6360)

1 (6361) M09

(1) $F=G\dfrac{Mm}{r^2}$ (2) $F'=mr\left(\dfrac{2\pi}{T}\right)^2$ (3) $M=\dfrac{4\pi^2r^3}{GT^2}$

解説

(1) 万有引力の法則より， $F=G\dfrac{Mm}{r^2}$

(2) 等速円運動の式より，角速度を ω とすると遠心力 F' は，

$$F'=mr\omega^2=mr\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2$$

(3) F と F' はつりあうから，$F=F'$ より，

$$G\frac{Mm}{r^2}=mr\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \quad \therefore \quad M=\frac{4\pi^2r^3}{GT^2}$$

2 (6362) M09

1.98×10^{30} kg

解説

太陽の質量を M，金星の質量を m，太陽と金星の距離を r，万有引力定数を G，金星の公転周期を T とすると，金星と太陽との間にはたらく万有引力と金星にはたらく遠心力がつりあうことから，

$$G\frac{Mm}{r^2}=mr\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \quad \therefore \quad M=\frac{4\pi^2r^3}{GT^2}$$

$r=1.08\times10^{11}$〔m〕，$T=3.15\times10^7\times0.615$〔s〕，$G=6.67\times10^{-11}$〔$\mathrm{N\cdot m^2/kg^2}$〕を代入して，

$$M=\frac{4\times3.14^2\times(1.08\times10^{11})^3}{6.67\times10^{-11}\times(3.15\times10^7\times0.615)^2}$$

$$=1.984\cdots\times10^{30}\fallingdotseq1.98\times10^{30}\ \text{〔kg〕}$$

3 (6363) M09

(1) $1.02\times10^{13}\ \mathrm{m^3/s^2}$ (2) 6.01×10^{24} kg

解説

(1) $\dfrac{r^3}{T^2}=\dfrac{(3.84\times10^8)^3}{(2.36\times10^6)^2}=1.016\cdots\times10^{13}\fallingdotseq1.02\times10^{13}$〔$\mathrm{m^3/s^2}$〕

(2) 地球の質量を M，万有引力定数を G とすると，地球と月との間にはたらく万有引力と月にはたらく遠心力がつりあうことから，月の質量を m とすると，

$$G\frac{Mm}{r^2}=mr\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \quad \therefore \quad M=\frac{4\pi^2r^3}{GT^2}$$

$G=6.67\times10^{-11}$〔$\mathrm{N\cdot m^2/kg^2}$〕，$\dfrac{r^3}{T^2}=1.016\times10^{13}$〔$\mathrm{m^3/s^2}$〕を代入して，

$$M=\frac{4\times3.14^2}{6.67\times10^{-11}}\times1.016\times10^{13}=6.007\cdots\times10^{24}\fallingdotseq6.01\times10^{24}\ \text{〔kg〕}$$

≪詳解≫

類題トレーニング(6370)

1 (6371) M09

(1) mg　(2) $G\dfrac{Mm}{R^2}$　(3) $\dfrac{R^2g}{G}$

解説

(3) 重力が物体と地球との間にはたらく万有引力であるから，(1)，(2)より，

$$mg=G\frac{Mm}{R^2}\quad\therefore\quad M=\frac{R^2g}{G}$$

2 (6372) M09

(1) $\dfrac{R^2g}{G}$　(2) 6.0×10^{24} kg

解説

(1) 地上にある質量 m の物体にはたらく重力が，物体と地球との間にはたらく万有引力であるから，

$$mg=G\frac{Mm}{R^2}\quad\therefore\quad M=\frac{R^2g}{G}$$

(2) (1)の結果に $R=6.4\times10^6$〔m〕，$g=9.8$〔m/s^2〕，$G=6.7\times10^{-11}$〔N·m^2/kg^2〕を代入して，

$$M=\frac{(6.4\times10^6)^2\times9.8}{6.7\times10^{-11}}=5.99\cdots\times10^{24}\fallingdotseq6.0\times10^{24}\text{〔kg〕}$$

3 (6373) M09

0.16 倍

解説

地球の質量を M，半径を R とすると，月の質量は $0.012M$，半径は $0.27R$ となる。地球表面の重力加速度の大きさを g，万有引力定数を G とすると，地上にある質量 m の物体にはたらく重力が，物体と地球との間にはたらく万有引力であるから，

$$mg=G\frac{Mm}{R^2}\quad\therefore\quad G=\frac{R^2g}{M}\quad\cdots\cdots\cdots①$$

同様に，月表面の重力加速度の大きさを g' とすると，月面上にある質量 m' のはたらく重力が，物体と月との間にはたらく万有引力であるから，

$$m'g'=G\frac{0.012M\cdot m'}{(0.27R)^2}\quad\therefore\quad g'=\frac{0.012MG}{(0.27R)^2}\quad\cdots\cdots\cdots②$$

①を②に代入すると，

$$g'=\frac{0.012M}{(0.27R)^2}\times\frac{R^2}{M}g=0.164\cdots\times g\fallingdotseq0.16g$$

よって，月表面の重力加速度の大きさは，地球表面の 0.16 倍。

§10 地球の重力

M10

1 (0038) ☐ ➡類題 6380 地球の自転と重力

$\frac{1}{291}$

[解説]

赤道上に質量 m の物体を置いたとし，地球の半径を R，自転周期を T とすると，この物体にはたらく遠心力 F_1 は，

$$F_1 = mR\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2$$

一方，地球の質量を M とすると，この物体と地球との間にはたらく万有引力 F_2 は，

$$F_2 = G\frac{Mm}{R^2}$$

この2式より，

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{mR\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2}{G\frac{Mm}{R^2}} = \frac{4\pi^2R^3}{GMT^2}$$

$$= \frac{4\times3.14^2\times(6.38\times10^6)^3}{6.67\times10^{-11}\times5.98\times10^{24}\times(24\times60\times60)^2}$$

$$= 3.439\cdots\times10^{-3}$$

$$= \frac{1}{290.7\cdots} \fallingdotseq \frac{1}{291}$$

2 (0039) ☐ ➡類題 6390 地球上空での重力加速度

(1) $G\frac{M}{R^2}$ (2) $G\frac{M}{(R+h)^2}$ (3) $\frac{R^2}{(R+h)^2}g$ (4) $(\sqrt{2}-1)R$

[解説]

(1) 地表にある質量 m の物体にはたらく重力が，物体と地球との間にはたらく万有引力であるから，

$$mg = G\frac{Mm}{R^2} \quad \therefore \quad g = G\frac{M}{R^2} \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

(2) 地表から h の高さにある質量 m' の物体について，(1)と同様に考えると，

$$m'g' = G\frac{Mm'}{(R+h)^2} \quad \therefore \quad g' = G\frac{M}{(R+h)^2} \quad \cdots\cdots\cdots ②$$

(3) ①より，$GM = gR^2$ であるから，これを②に代入すると，

$$g' = \frac{R^2}{(R+h)^2}g$$

(4) (3)の結果の式より，

$$\frac{g'}{g} = \frac{R^2}{(R+h)^2} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \quad R+h = \sqrt{2}R$$

$$\therefore \quad h = (\sqrt{2}-1)R$$

3 (0040) ☐ ➡類題 6400 人工衛星の速さと公転周期

(1) $\frac{mR^2}{(R+h)^2}g$ (2) $R\sqrt{\frac{g}{R+h}}$ (3) $\frac{2\pi}{R}\sqrt{\frac{(R+h)^3}{g}}$

➲(3)は，$\dfrac{2\pi(R+h)}{R}\sqrt{\dfrac{R+h}{g}}$ でも正解。

解説

(1) 地球の質量を M，万有引力定数を G とすると，人工衛星にはたらく万有引力 F_1 は，

$$F_1=G\frac{Mm}{(R+h)^2} \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

一方，地表にある質量 m' の物体にはたらく重力が，この物体と地球との間にはたらく万有引力であるから，

$$m'g=G\frac{Mm'}{R^2} \qquad \therefore \quad GM=gR^2 \quad \cdots\cdots\cdots ②$$

②を①に代入すると，

$$F_1=\frac{mR^2}{(R+h)^2}g$$

(2) (1)の万有引力が円運動の向心力となるから，求める速さを v とすると，

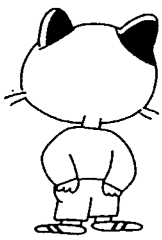
$$\frac{mR^2}{(R+h)^2}g=m\frac{v^2}{R+h}$$

$$v^2=\frac{R^2}{R+h}g \qquad \therefore \quad v=R\sqrt{\frac{g}{R+h}}$$

(3) 公転周期を T とすると，等速円運動と考えてよいから，

$$T=\frac{2\pi(R+h)}{v}=2\pi(R+h)\cdot\frac{1}{R}\sqrt{\frac{R+h}{g}}$$

$$=\frac{2\pi}{R}\sqrt{\frac{(R+h)^3}{g}}$$



≪詳解≫

類題トレーニング(6380)

1 (6381) M10

(1) F_1, $F_1=G\dfrac{Mm}{R^2}$　(2) F_2, $F_2=mR'\omega^2$　(3) F_3

2 (6382) M10

(1) 3.37×10^{-2} N　(2) $F_2\cdots9.80$ N, $\dfrac{F_2}{F_1}\cdots291$

解説

(1) 物体の質量を m, 地球の半径を R, 自転周期を T とすると, 遠心力 F_1 は,

$$F_1=mR\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2$$

$m=1.00$〔kg〕, $R=6.38\times10^6$〔m〕, $T=24$〔時間〕$=8.64\times10^4$〔s〕を代入して,

$$F_1=\frac{1.00\times6.38\times10^6\times(2\times3.14)^2}{(8.64\times10^4)^2}=3.370\cdots\times10^{-2}\fallingdotseq3.37\times10^{-2}\text{〔N〕}$$

(2) 地球の質量を M, 万有引力定数を G とすると, 万有引力 F_2 は,

$$F_2=G\frac{Mm}{R^2}$$

$M=5.98\times10^{24}$〔kg〕, $R=6.38\times10^6$〔m〕, $m=1.00$〔kg〕,
$G=6.67\times10^{-11}$〔N·m²/kg²〕を代入して,

$$F_2=6.67\times10^{-11}\times\frac{5.98\times10^{24}\times1.00}{(6.38\times10^6)^2}=9.799\cdots\fallingdotseq9.80\text{〔N〕}$$

$$\frac{F_2}{F_1}=\frac{9.799}{3.370\times10^{-2}}=290.7\fallingdotseq291$$

3 (6383) M10

(1) 9.80 N　(2) 17.0 倍

解説

(1) 地球の質量を M, 半径を R, 物体の質量を m, 万有引力定数を G とすると, 万有引力 F は,

$$F=G\frac{Mm}{R^2}$$

これにあたえられた数値を代入すると,

$$F=6.67\times10^{-11}\times\frac{5.98\times10^{24}\times1.00}{(6.38\times10^6)^2}=9.799\cdots\fallingdotseq9.80\text{〔N〕}$$

(2) 地球の自転が速くなり, 物体にはたらく遠心力が大きくなって万有引力と同じになったとき, つりあって, 見かけの重さがなくなる。現在の自転角速度を ω とすると, 遠心力 f は,

$$f=mR\omega^2$$

遠心力が(1)で求めた F とつりあうときの自転角速度を ω' とすると,

$$mR\omega'^2=9.799\text{〔N〕}\qquad\therefore\quad\omega'=\sqrt{\frac{9.799}{mR}}$$

$m=1.00$〔kg〕, $R=6.38\times10^6$〔m〕を代入して,

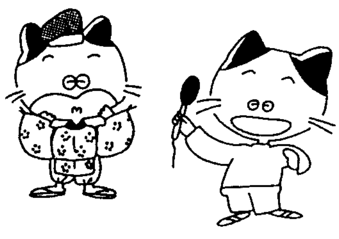
$$\omega'=1.239\cdots\times10^{-3}\fallingdotseq1.24\times10^{-3}\text{〔rad/s〕}$$

ところで, 現在は, 24 時間で自転を 1 回するから, 周期を T〔s〕とすると,

$$\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\times3.14}{24\times60\times60}=7.268\cdots\times10^{-5}\text{〔rad/s〕}$$

$$\frac{\omega'}{\omega}=\frac{1.239\times10^{-3}}{7.268\times10^{-5}}=17.04\cdots=17.0$$

よって，見かけの重さがなくなる自転速度は，現在の 17.0 倍。



≪詳解≫

類題トレーニング(6390)

1 (6391) M10

(1) $G\dfrac{Mm}{x^2}$　(2) mg'　(3) $G\dfrac{M}{x^2}$

[解説]

(3) $mg'=G\dfrac{Mm}{x^2}$　$\therefore$　$g'=G\dfrac{M}{x^2}$

2 (6392) M10

(1) $G\dfrac{M}{R^2}$　(2) $\dfrac{R^2}{(R+h)^2}g$　(3) $4.0\,\mathrm{m/s^2}$

[解説]

(1) 地表にある質量 m の物体にはたらく重力が，物体と地球との間にはたらく万有引力であるから，

$$mg=G\frac{Mm}{R^2} \quad \therefore \quad g=G\frac{M}{R^2} \quad \cdots\cdots\text{①}$$

(2) 地表より h の上空にある質量 m' の物体にはたらく重力が，この物体と地球との間にはたらく万有引力であるから，

$$m'g'=G\frac{Mm'}{(R+h)^2} \quad \therefore \quad g'=G\frac{M}{(R+h)^2} \quad \cdots\cdots\text{②}$$

①より，$GM=gR^2$ であるから，これを②に代入すると，

$$g'=\frac{R^2}{(R+h)^2}g$$

(3) (2)の式に，$R=6.4\times10^6$〔m〕，$g=9.8$〔m/s²〕，$h=3.6\times10^6$〔m〕を代入すると，

$$g'=\frac{(6.4\times10^6)^2}{(6.4\times10^6+3.6\times10^6)^2}\times9.8=4.01\cdots\fallingdotseq4.0\,\text{〔m/s}^2\text{〕}$$

3 (6393) M10

(1) $\dfrac{R^2}{(R+h)^2}g$　(2) $6.3\,\mathrm{m/s^2}$　(3) $2.7\times10^{-3}\,\mathrm{m/s^2}$

[解説]

(1) 地球の質量を M，万有引力定数を G とする。

地表にある質量 m の物体にはたらく重力が，物体と地球との間にはたらく万有引力であるから，

$$mg=G\frac{Mm}{R^2} \quad \therefore \quad GM=gR^2 \quad \cdots\cdots\text{①}$$

また，地表より h の上空にある質量 m' の物体について，同様に考えると，

$$m'g'=G\frac{Mm'}{(R+h)^2} \quad \therefore \quad g'=G\frac{M}{(R+h)^2} \quad \cdots\cdots\text{②}$$

①を②に代入すると，

$$g'=\frac{R^2}{(R+h)^2}g$$

(2) (1)の式に，$R=6.4\times10^6$〔m〕，$g=9.8$〔m/s²〕，$h=1.6\times10^6$〔m〕を代入すると，

$$g'=\frac{(6.4\times10^6)^2}{(6.4\times10^6+1.6\times10^6)^2}\times9.8=6.272\fallingdotseq6.3\,\text{〔m/s}^2\text{〕}$$

(3) $g'=\dfrac{(6.4\times10^6)^2}{(6.4\times10^6+3.8\times10^8)^2}\times9.8=2.68\cdots\times10^{-3}\fallingdotseq2.7\times10^{-3}$〔m/s²〕

4 (6394) M10

(1) 1.2倍　(2) 7.9×10^6 m　(3) 2.0 m/s^2

解説

(1) 地球の質量を M，万有引力定数を G，地表での重力加速度の大きさを g，高度 h での重力加速度の大きさを g' とする。

地表にある質量 m の物体にはたらく重力が，物体と地球との間にはたらく万有引力であるから，

$$mg=G\frac{Mm}{R^2}\quad \therefore\quad g=G\frac{M}{R^2}\quad \cdots\cdots\text{①}$$

高度 h にある質量 m' の物体についても同様に考えて，

$$m'g'=G\frac{Mm'}{(R+h)^2}\quad \therefore\quad g'=G\frac{M}{(R+h)^2}\quad \cdots\cdots\text{②}$$

①，②より，

$$\frac{g'}{g}=\frac{G\dfrac{M}{(R+h)^2}}{G\dfrac{M}{R^2}}=\frac{R^2}{(R+h)^2}$$

ここで，問題文より，$\dfrac{g'}{g}=\dfrac{1}{5}$ であるから，

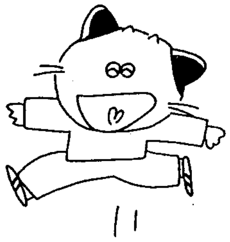
$$\frac{1}{5}=\frac{R^2}{(R+h)^2}$$

$\therefore\quad R+h=\sqrt{5}\,R\qquad h=(\sqrt{5}-1)R=1.23\cdots\times R\fallingdotseq1.2R$

よって，h は R の1.2倍になる。

(2) $h=1.23R=1.23\times6.4\times10^6=7.872\times10^6\fallingdotseq7.9\times10^6$ 〔m〕

(3) 高度 h での g' は，g の $\dfrac{1}{5}$ だから，　$9.8\times\dfrac{1}{5}=1.96\fallingdotseq2.0$ 〔m/s^2〕



≪詳解≫

類題トレーニング(6400)

1 (6401) M10

(1) $G\dfrac{Mm}{(R+h)^2}$　(2) $m\dfrac{v^2}{R+h}$　(3) $\sqrt{\dfrac{GM}{R+h}}$　(4) $R\sqrt{\dfrac{g}{R+h}}$

(5) $2\pi\sqrt{\dfrac{(R+h)^3}{GM}}$　(6) $\dfrac{2\pi}{R}\sqrt{\dfrac{(R+h)^3}{g}}$

解 説

(3) (1), (2)より,

$$G\frac{Mm}{(R+h)^2}=m\frac{v^2}{R+h}\qquad \therefore\quad v=\sqrt{\frac{GM}{R+h}}\qquad \cdots\cdots\cdots①$$

(4) 地表にある質量 m' の物体にはたらく重力が, この物体と地球との間にはたらく万有引力であるから,

$$m'g=G\frac{Mm'}{R^2}\qquad \therefore\quad GM=gR^2\qquad \cdots\cdots\cdots②$$

②を①に代入すると,

$$v=\sqrt{\frac{R^2g}{R+h}}=R\sqrt{\frac{g}{R+h}}$$

(5) ①より,

$$T=\frac{2\pi(R+h)}{v}=\frac{2\pi(R+h)}{\sqrt{\dfrac{GM}{R+h}}}=2\pi\sqrt{\frac{(R+h)^3}{GM}}$$

(6) (5)の結果に①を代入すると,

$$T=2\pi\sqrt{\frac{(R+h)^3}{gR^2}}=\frac{2\pi}{R}\sqrt{\frac{(R+h)^3}{g}}$$

2 (6402) M10

(1) 7.9×10^3 m/s　(2) 5.1×10^3 s　(3) 6.3×10^3 m/s

解 説

(1) 地球の質量を M, 人工衛星の質量を m, 人工衛星の速さを v, 万有引力定数を G とすると, 人工衛星にはたらく万有引力が円運動の向心力となることから,

$$G\frac{Mm}{R^2}=m\frac{v^2}{R}\qquad \therefore\quad v=\sqrt{\frac{GM}{R}}\qquad \cdots\cdots\cdots①$$

一方, 人工衛星にはたらく重力が, 人工衛星と地球との間にはたらく万有引力であるから,

$$mg=G\frac{Mm}{R^2}\qquad \therefore\quad GM=gR^2\qquad \cdots\cdots\cdots②$$

②を①に代入すると,

$$v=\sqrt{\frac{gR^2}{R}}=\sqrt{gR}$$

これにあたえられた数値を代入すると,

$$v=\sqrt{9.8\times6.4\times10^6}=7.91\cdots\times10^3\fallingdotseq7.9\times10^3\ \text{〔m/s〕}$$

(2) 周期 T は,

$$T=\frac{2\pi R}{v}=\frac{2\times3.14\times6.4\times10^6}{7.91\times10^3}=5.08\cdots\times10^3\fallingdotseq5.1\times10^3\ \text{〔s〕}$$

(3) 高度 h にある質量 m' の人工衛星の速さを v' とすると, 人工衛星にはたらく万有引力が円運動の向心力となることから,

$$G\frac{Mm'}{(R+h)^2}=m'\frac{v'^2}{R+h} \qquad \therefore \quad v'=\sqrt{\frac{GM}{R+h}} \qquad \cdots\cdots\cdots③$$

②を③に代入すると，

$$v'=\sqrt{\frac{gR^2}{R+h}}=R\sqrt{\frac{g}{R+h}}$$

これにあたえられた数値を代入すると，

$$v'=6.4\times10^6\sqrt{\frac{9.8}{6.4\times10^6+3.6\times10^6}}$$

$$=6.33\cdots\times10^3\fallingdotseq6.3\times10^3\ \text{〔m/s〕}$$

3 (6403)　M10

(1) 8.7 m/s^2　(2) 7.7×10^3 m/s　(3) 5.6×10^3 s

解説

(1) 地球の質量を M，人工衛星の質量を m，地球の半径を R，人工衛星の高度を地表から h，高度 h での重力加速度の大きさを g'，万有引力定数を G とする。人工衛星にはたらく重力が，人工衛星と地球との間にはたらく万有引力であるから，

$$mg'=G\frac{Mm}{(R+h)^2} \qquad \therefore \quad g'=\frac{GM}{(R+h)^2} \qquad \cdots\cdots\cdots①$$

一方，地表にある質量 m' の物体にはたらく重力が，この物体と地球との間にはたらく万有引力であるから，地表での重力加速度の大きさを g とすると，

$$m'g=G\frac{Mm}{R^2} \qquad \therefore \quad GM=gR^2 \qquad \cdots\cdots\cdots②$$

②を①に代入すると，

$$g'=\frac{R^2}{(R+h)^2}g$$

これに $R=6.4\times10^6$〔m〕，$h=4.0\times10^5$〔m〕，$g=9.8$〔m/s^2〕を代入すると，

$$g'=\frac{(6.4\times10^6)^2}{(6.4\times10^6+4.0\times10^5)^2}\times9.8=8.68\cdots\fallingdotseq8.7\ \text{〔m/s}^2\text{〕}$$

(2) この高さでの重力が向心力になるから，求める速さを v とおくと，

$$m\frac{v^2}{R+h}=mg' \qquad \therefore \quad v=\sqrt{(R+h)g'}$$

これに $R=6.4\times10^6$〔m〕，$h=4.0\times10^5$〔m〕，$g'=8.68$〔m/s^2〕を代入すると，

$$v=\sqrt{(6.4\times10^6+4.0\times10^5)\times8.68}=7.68\cdots\times10^3\fallingdotseq7.7\times10^3\ \text{〔m/s〕}$$

(3) 周期 T は，　$T=\dfrac{2\pi(R+h)}{v}$

これに $R=6.4\times10^6$〔m〕，$h=4.0\times10^5$〔m〕，$v=7.7\times10^3$〔m/s〕を代入すると，

$$T=\frac{2\times3.14\times(6.4\times10^6+4.0\times10^5)}{7.68\times10^3}$$

$$=5.56\cdots\times10^3\fallingdotseq5.6\times10^3\ \text{〔s〕}$$

4 (6404)　M10

(1) 3.6×10^7 m　(2) 0.22 m/s^2

解説

(1) 地球の質量を M，人工衛星の質量を m，地球の半径を R，人工衛星の高度を地表から h，万有引力定数を G とする。この人工衛星の周期を T とすると，人工衛星にはたらく万有引力が円運動の向心力となるから，

$$G\frac{Mm}{(R+h)^2}=m(R+h)\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2$$

$$\therefore \quad (R+h)^3=\frac{GMT^2}{4\pi^2} \qquad \cdots\cdots\cdots①$$

一方，地表にある質量 m' の物体にはたらく重力が，この物体と地球との間にはた

らく万有引力であるから，地表での重力加速度の大きさを g とすると，

$$m' g = G\frac{Mm'}{R^2} \qquad \therefore \quad GM = gR^2 \qquad \cdots\cdots\cdots②$$

②を①に代入すると，

$$(R+h)^3 = \frac{gR^2T^2}{4\pi^2}$$

$$\therefore \quad R+h = \sqrt[3]{\frac{gR^2T^2}{4\pi^2}}$$

$$\therefore \quad h = \sqrt[3]{\frac{gR^2T^2}{4\pi^2}} - R$$

これにあたえられた数値を代入すると，

$$h = \sqrt[3]{\frac{9.8\times(6.4\times10^6)^2\times(24\times60\times60)^2}{4\times3.14^2}} - 6.4\times10^6$$

$$= \sqrt[3]{75.9\cdots\times10^{21}} - 6.4\times10^6 \fallingdotseq \sqrt[3]{76\times(10^7)^3} - 6.4\times10^6$$

$$= \sqrt[3]{76}\times10^7 - 6.4\times10^6 = 4.24\times10^7 - 6.4\times10^6$$

$$= 3.60\times10^7 = 3.6\times10^7 \text{〔m〕}$$

(2) 高度 h での重力加速度の大きさを g' とすると，人工衛星にはたらく重力が，人工衛星と地球との間にはたらく万有引力であるから，

$$mg' = G\frac{Mm}{(R+h)^2} \qquad \therefore \quad g' = G\frac{M}{(R+h)^2} \qquad \cdots\cdots\cdots③$$

ここで②を③に代入すると，

$$g' = \frac{R^2}{(R+h)^2}g$$

これにあたえられた数値と(1)の結果を代入すると，

$$g' = \frac{(6.4\times10^6)^2}{(6.4\times10^6+3.6\times10^7)^2}\times9.8 = 0.223\cdots \fallingdotseq 0.22 \text{〔m/s}^2\text{〕}$$

≪詳解≫

§ 11 円運動・単振動・万有引力と力学的エネルギーの保存

M11

1 (0041) □ ➲類題 6410 鉛直面内の円運動と力学的エネルギー保存の法則

(1) $2\sqrt{gr}$ 〔m/s〕 (2) $\sqrt{5gr}$ 〔m/s〕 (3) 1.1 倍

解説

(1) 重力による位置エネルギーの基準を円運動の最下点にとる。最下点を通過するときの速さを v_1 とすれば，最高点は最下点から $2r$ の高さになり，棒があるから，最高点で速さが 0 であっても小球は落下しない。したがって，力学的エネルギー保存の法則より，

$$\frac{1}{2}mv_1^2=2mgr \qquad v_1^2=4gr$$

$$\therefore\ v_1=2\sqrt{gr}\ \text{〔m/s〕}$$

(2) 糸がたるまないためには，最高点で重力に逆らうだけの遠心力をもたなければならない。このとき，最高点で最低の速さを v' とすれば，遠心力と重力とのつりあいより，

$$m\frac{v'^2}{r}=mg \qquad \therefore\ v'^2=gr \qquad \cdots\cdots\cdots①$$

このとき，最下点での速さを v_2 とすると，力学的エネルギー保存の法則より，

$$\frac{1}{2}mv_2^2=2mgr+\frac{1}{2}mv'^2 \qquad \cdots\cdots\cdots②$$

①を②に代入すると，

$$\frac{1}{2}mv_2^2=2mgr+\frac{1}{2}mgr$$

$$v_2^2=5gr \qquad \therefore\ v_2=\sqrt{5gr}\ \text{〔m/s〕}$$

(3) (1)，(2)の結果より，

$$\frac{v_2}{v_1}=\frac{\sqrt{5gr}}{2\sqrt{gr}}=\frac{\sqrt{5}}{2}=\frac{2.23\cdots}{2}=1.11\cdots\fallingdotseq1.1\ \text{〔倍〕}$$

2 (0042) □ ➲類題 6420 単振動のエネルギー

(1) 1.3×10^3 J (2) 1.6 J

解説

(1) ばね定数を k，振幅を A，角振動数を ω，振動数を f，物体の質量を m とすると，単振動のエネルギー E は，次のように表される。

$$E=\frac{1}{2}kA^2=\frac{1}{2}m\omega^2A^2=\frac{1}{2}m(2\pi f)^2A^2=2\pi^2mf^2A^2$$

この式にあたえられた数値を代入すると，

$$E=2\times3.14^2\times1.0\times20^2\times0.40^2$$
$$=1.26\cdots\times10^3\fallingdotseq1.3\times10^3\ \text{〔J〕}$$

(2) 周期を T とすると，$T=\dfrac{2\pi}{\omega}$ である。よって，$\omega=\dfrac{2\pi}{T}$ を(1)の式に代入すると，

$$E=\frac{1}{2}m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2A^2=\frac{2\pi^2mA^2}{T^2}$$

これにあたえられた数値を代入すると，

$$E=\frac{2\times3.14^2\times2.0\times0.10^2}{0.50^2}=1.57\cdots\fallingdotseq1.6\,\text{〔J〕}$$

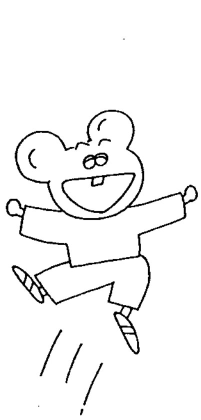
3 (0043) ☐ ➡類題 6430 万有引力と力学的エネルギー

(1) 無限遠方（無限に遠い点） (2) -1.13×10^9 J

解説

(2) 地球の質量を M，地球の半径を R，地表から高さ h のところにある物体の質量を m，万有引力定数を G とすると，この物体のもつ万有引力による位置エネルギー U は，

$$\begin{aligned}U&=-G\frac{Mm}{R+h}\\&=-6.67\times10^{-11}\times\frac{5.97\times10^{24}\times1.20\times10^{2}}{6.38\times10^{6}+3.60\times10^{7}}\\&=-1.127\cdots\times10^{9}\fallingdotseq-1.13\times10^{9}\,\text{〔J〕}\end{aligned}$$



≪詳解≫

類題トレーニング(6410)

1 (6411) M11

(1) しない (2) 0 (3) 小球にはたらく遠心力と重力がつりあうこと（小球にはたらく向心力と重力が等しいこと） (4) 保存される。

2 (6412) M11

(1) $\frac{1}{2}mv^2=2mgr$ (2) 4.4 m/s

解説

(2) $v=2\sqrt{gr}=2\sqrt{9.8\times0.50}=4.42\cdots\fallingdotseq4.4$ [m/s]

3 (6413) M11

(1) $\frac{1}{2}mv^2=2mgr+\frac{1}{2}mv'^2$ (2) $v'=\sqrt{gr}$ (3) $\sqrt{5gr}$

解説

(2) 小球にはたらく遠心力と重力のつりあいより，

$$m\frac{v'^2}{r}=mg \quad \therefore \quad v'=\sqrt{gr}$$

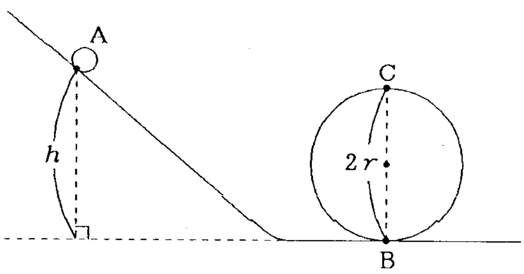
(3) (1)の式に $v'=\sqrt{gr}$ を代入して，

$$\frac{1}{2}mv^2=2mgr+\frac{1}{2}mgr=\frac{5}{2}mgr \quad \therefore \quad v=\sqrt{5gr}$$

4 (6414) M11

2.5 m

解説



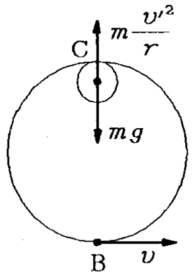
右図のように出発点を A，円運動の最下点を B，最高点を C とし，最下点から A までの高さを h，円運動の半径を r，物体の質量を m，重力加速度の大きさを g とする。

物体が A から B にすべりおりてきたときの B での速さを v とすると，力学的エネルギー保存の法則より，B 点を重力による位置エネルギーの基準として，

$$\frac{1}{2}mv^2=mgh$$

$$\therefore \quad h=\frac{v^2}{2g} \quad \cdots\cdots\cdots①$$

一方，最高点で物体が落ちないためには，重力に打ちかつだけの遠心力をもたなければならない。このときの最高点での速さを v' とすると，重力と遠心力とのつりあいより，



$$m\frac{v'^2}{r}=mg$$

$$\therefore\quad v'^2=gr \qquad \cdots\cdots\cdots②$$

また，B 点と C 点で力学的エネルギーが保存されることから，

$$\frac{1}{2}mv^2=2mgr+\frac{1}{2}mv'^2 \qquad \cdots\cdots\cdots③$$

②を③に代入すると，

$$v^2=5gr \qquad \cdots\cdots\cdots④$$

④を①に代入すると，

$$h=\frac{5gr}{2g}=\frac{5}{2}r$$

これにあたえられた数値を代入すると，

$$h=\frac{5}{2}\times1.0=2.5\,\text{〔m〕}$$

別解

A 点と C 点での力学的エネルギーが等しいとして求めてもよい。

$$mgh=\frac{1}{2}mv'^2+2mgr$$

ここで，②を代入すると，

$$mgh=\frac{1}{2}mgr+2mgr$$

$$\therefore\quad h=\frac{5}{2}r=\frac{5}{2}\times1.0=2.5\,\text{〔m〕}$$

5 (6415) M11

(1) 遠心力…$2mg$，抗力…$3mg$

(2) $\sqrt{gr}$ 以上　(3) $\frac{5}{2}$ 倍以上

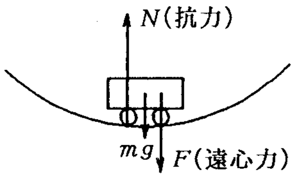
解説

(1) 力学的エネルギー保存の法則から，最下点 A での速度 v_A を求める。出発点での車両の運動エネルギーは 0，最下点 A での重力による位置エネルギーは 0 である。

$$0+mgR=\frac{1}{2}mv_A{}^2+0 \qquad \therefore\quad v_A=\sqrt{2gR}$$

半径 R，速度 v_A のときの遠心力を F とすると，

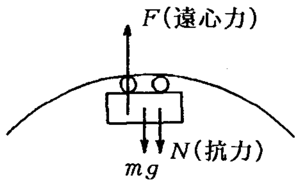
$$F=m\frac{v_A{}^2}{R}=\frac{m(\sqrt{2gR})^2}{R}=2mg$$



最下点 A での鉛直方向の力のつりあいの式から抗力 N を求める。また，最下点 A での遠心力 F の向きは，鉛直下向きである。よって，

$$N=mg+F=mg+2mg=3mg$$

(2)　最高点Bで車両がレールから離れないためには，抗力 N が0以上でなければならない。最高点Bでの遠心力 F の向きは鉛直上向きであるから，力のつりあいの式は，



$$mg+N=F$$

一方，最高点Bでの車両の速さを v_B とすると，遠心力 F は，$F=m\dfrac{v_B{}^2}{r}$ である。かつ，抗力 $N\geqq 0$ が条件であるから，

$$N=m\frac{v_B{}^2}{r}-mg\geqq 0 \qquad \therefore\ v_B\geqq\sqrt{gr}$$

(3)　最高点Bの力学的エネルギーは，出発点での力学的エネルギーに等しいことから，

$$mgR=mg(2r)+\frac{1}{2}mv_B{}^2$$

$v_B\geqq\sqrt{gr}$ より，

$$mgR\geqq mg(2r)+\frac{1}{2}m(\sqrt{gr})^2 \qquad \therefore\ R\geqq\frac{5}{2}r$$

≪詳解≫

類題トレーニング(6420)

1 (6421) M11

(1) 関係しない　(2) 4倍　(3) $\frac{1}{4}$倍

解説

(2) このときの単振動のエネルギーを E' とすると，

$$\frac{E'}{E}=\frac{2\pi^2 m(2f)^2A^2}{2\pi^2 mf^2A^2}=4\text{〔倍〕}$$

(3) このときの単振動のエネルギーを E'' とすると，

$$\frac{E''}{E}=\frac{2\pi^2 mf^2\left(\frac{A}{2}\right)^2}{2\pi^2 mf^2A^2}=\frac{1}{4}\text{〔倍〕}$$

2 (6422) M11

(1) 1.1×10^3 J　(2) 1.8×10^4 J

解説

(1) 物体の質量を m，振動数を f，振幅を A とすると，単振動のエネルギー E は，

$$E=2\pi^2 mf^2A^2=2\times3.14^2\times1.0\times25^2\times0.30^2$$
$$=1.10\cdots\times10^3=1.1\times10^3\text{〔J〕}$$

(2) $E=2\times3.14^2\times1.0\times100^2\times0.30^2=1.78\cdots\times10^4\fallingdotseq1.8\times10^4$〔J〕

3 (6423) M11

4.0 m/s

解説

おもりを1.0 m変位させてからはなしたのだから，この単振動の振幅を A とすると，$A=1.0$〔m〕である。ばね定数を k，おもりの質量を m，振動の中心を通るときの速さを v_0 とすると，力学的エネルギーの保存の法則より，

$$\frac{1}{2}kA^2=\frac{1}{2}mv_0^2$$

$$\therefore\quad v_0=A\sqrt{\frac{k}{m}}$$

これにあたえられた数値を代入すると，

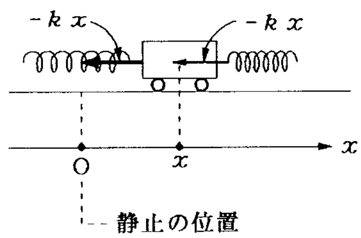
$$v_0=1.0\times\sqrt{\frac{16}{1.0}}=4.0\text{〔m/s〕}$$

4 (6424) M11

$A\sqrt{\dfrac{2k}{m}}$〔m/s〕

解説

物体の静止の位置をO点とし，変位 x〔m〕の場所で考える。右向きを正として，右図のように表しておくと，左のばねが物体におよぼす力 F_1 は，ばねがのびているので，$F_1=-kx$ となる。また，右のばねが物体におよぼす力 F_2 は，ばねが縮んでいるので，$F_2=-kx$ となる。



したがって，物体にはたらく力の合力 F は，

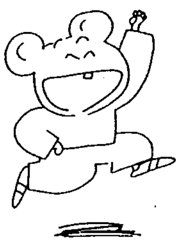
$$F=-kx-kx=-2kx$$

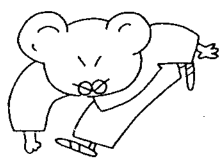
$2k=K$ とおくと，$F=-Kx$ となる。ゆえに，物体は単振動をする。

よって，この連結されたばねは，ばね定数 $K=2k$ の１本のばねとみなすことができる。物体を A〔m〕だけ右にずらしたのだから，このときの振幅は A〔m〕となる。したがって，振動の中心（O 点）を通るときの速さを v_0〔m/s〕とすると，力学的エネルギー保存の法則より，

$$\frac{1}{2}KA^2=\frac{1}{2}mv_0{}^2$$

$$\therefore\quad v_0=A\sqrt{\frac{K}{m}}=A\sqrt{\frac{2k}{m}}\ \text{〔m/s〕}$$





≪詳解≫

類題トレーニング(6430)

1 (6431) M11

(1) 無限遠方(無限に遠い点)　(2) $U=-G\dfrac{Mm}{r}$〔J〕

(3) $U=-G\dfrac{Mm}{R+h}$〔J〕

2 (6432) M11

-6.3×10^{7} J

解説

地球の質量を M，地球の中心から r 離れたところにある物体の質量を m，万有引力定数を G とすると，この物体のもつ万有引力による位置エネルギー U は，

$$U=-G\frac{Mm}{r}=-6.7\times10^{-11}\times\frac{6.0\times10^{24}\times1.0}{6.4\times10^{6}}$$
$$=-6.28\cdots\times10^{7}\fallingdotseq-6.3\times10^{7}\text{〔J〕}$$

3 (6433) M11

(1) $U_0=-G\dfrac{Mm}{R}$　(2) $U=-G\dfrac{Mm}{R+h}$　(3) $g=\dfrac{GM}{R^2}$　(4) mgh

解説

(3) $G\dfrac{Mm}{R^2}=mg$　$\therefore$　$g=\dfrac{GM}{R^2}$

(4) $U-U_0=-G\dfrac{Mm}{R+h}-\left(-G\dfrac{Mm}{R}\right)=GMm\dfrac{h}{R(R+h)}$

$$=\frac{GMm}{R^2}\times\frac{h}{1+\dfrac{h}{R}}\fallingdotseq\frac{GMm}{R^2}\cdot h$$

➡ $R\gg h$ であるから，$\dfrac{h}{R}\fallingdotseq0$ としてよい。

これに(3)の結果を代入して，　$U-U_0=mgh$

4 (6434) M11

(1) $E=\dfrac{1}{2}mv_0{}^2-G\dfrac{Mm}{R}$　(2) $E'=\dfrac{1}{2}mv^2-G\dfrac{Mm}{r}$

(3) $\dfrac{1}{2}mv_0{}^2-G\dfrac{Mm}{R}=\dfrac{1}{2}mv^2-G\dfrac{Mm}{r}$　(4) 11.2 km/s

解説

(1) 人工衛星が地上でもつ運動エネルギーを E_k とすると，

$$E_k=\frac{1}{2}mv_0{}^2$$

人工衛星が地上でもつ万有引力による位置エネルギーを U とすると，

$$U=-G\frac{Mm}{R}$$

よって，求める力学的エネルギー E は，

$$E=E_k+U=\frac{1}{2}mv_0{}^2-G\frac{Mm}{R}$$

(2) 人工衛星がもつ速度が v だから，そのときの運動エネルギーを E_k' とすると，

$$E_k' = \frac{1}{2}mv^2$$

地球の中心から r の距離のところでもつ万有引力による位置エネルギーを U' とすると，

$$U' = -G\frac{Mm}{r}$$

よって，このときの力学的エネルギー E' は，

$$E' = E_k' + U' = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{r}$$

(3) $E = E'$ より， $\frac{1}{2}mv_0{}^2 - G\frac{Mm}{R} = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{r}$

(4) $r \to \infty$ のとき，$-G\frac{Mm}{r} \to 0$ だから，(3)の式は $\frac{1}{2}mv_0{}^2 - G\frac{Mm}{R} = \frac{1}{2}mv^2$ となる。

$\frac{1}{2}mv^2 \geqq 0$ であるから， $\frac{1}{2}mv_0{}^2 - G\frac{Mm}{R} \geqq 0$ $\therefore$ $v_0 \geqq \sqrt{\frac{2GM}{R}}$

ところで，$mg = G\frac{Mm}{R^2}$ より，$GM = gR^2$ であることを使うと，v_0 の最小値は，

$$v_0 = \sqrt{2gR} = \sqrt{2\times 9.80\times 6.38\times 10^6} = 1.118\cdots\times 10^4 \text{〔m/s〕} \fallingdotseq 11.2 \text{〔km/s〕}$$

5 (6435) M11

できる。

解 説

地表にある質量 m〔kg〕のロケットのもつ万有引力による位置エネルギー U〔J〕は，基準を無限遠にとり，地球の質量を M〔kg〕，地球の半径を R〔m〕，万有引力定数を G〔N·m²/kg²〕とすると，

$$U = -G\frac{Mm}{R}$$

ロケットの初速度を v_0〔m/s〕とすると，地表でロケットのもつ運動エネルギー E_k〔J〕は，

$$E_k = \frac{1}{2}mv_0{}^2$$

無限遠方では，ロケットのもつ運動エネルギーは 0，位置エネルギーも 0 なので，力学的エネルギー保存の法則より，$U + E_k = 0$ となるから，

$$-G\frac{Mm}{R} + \frac{1}{2}mv_0{}^2 = 0 \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

また，地表において重力と万有引力は等しいので，

$$mg = G\frac{Mm}{R^2} \quad \therefore \quad GM = gR^2 \quad \cdots\cdots\cdots ②$$

②を①に代入すると，

$$-\frac{gR^2m}{R} + \frac{1}{2}mv_0{}^2 = 0 \quad \therefore \quad v_0 = \sqrt{2gR}$$

これにあたえられた数値を代入すると，

$$v_0 = \sqrt{2\times 9.8\times 6.4\times 10^6} = 1.12\times 10^4 \text{〔m/s〕}$$

よって，ロケットが無限遠方に行くのに必要な最小の初速度（第２宇宙速度）は，1.12×10^4 m/s である。1.2×10^4 m/s はこれより大きいから，無限遠方に達することができる。

物理II　　1巻

定期試験対策

定期試験対策用の問題です。
問題は次の４段階に分かれています。
　チェック……教科書の基本的なことがらをチェックする問題。
　基本問題……教科書の中にあるような基本的な問題。２回分ある。
　標準問題……教科書の章末問題レベルまでの問題。
　実力問題……入試問題の中からやさしい問題を選んである。
　　➡チェック・基本問題・標準問題は必ずやるようにしてください。また問題ごとに「関連§番号」をつけてありますから，答えの解説をみてもわからない場合は，関連する本文にもどってください。

第１章　円運動・単振動・万有引力

定 期 試 験

M01～M11

第1回－チェック－

年 組 名前

1 (0101)

次の問いに答えなさい。

(1) 周期 T [s] で半径 r [m] の円周上を等速円運動する物体は，T [s] 間にどれだけ移動するか。

[ ]

(2) 一定の半径で等速円運動している物体の周期が2倍になると，速さは何倍になるか。

[ ]

(3) 等速円運動する物体の回転数が3倍になると，速さは何倍になるか。

[ ]

(4) 等速円運動する物体の周期が2倍になると，回転数は何倍になるか。

[ ]

(5) 等速円運動で周期が3倍になると角速度は何倍になるか。

[ ]

(6) 等速円運動で角速度 ω と回転数 n の関係を表す式を書きなさい。

[ ]

(7) 等速円運動で，角速度 ω を，速さ v と半径 r を使って表す式を書きなさい。

[ ]

関連§番号 ⇨ M01(6010, 6020, 6030)

2 (0102)

次の問いに答えなさい。

(1) 等速円運動する物体の加速度の大きさは，時間とともに変化するか，それとも一定か。

[ ]

(2) 第速円運動の加速度の向きはいつもどの向きを向いているか。

[ ]

(3) 半径 r [m] の円周上を角速度 ω [rad/s] で運動している物体の加速度の大きさ a [m/s^2] は，どのような式で表されるか。

[ ]

(4) 半径 r [m] の円周上を速さ v [m/s] で運動している物体の加速度の大きさ a [m/s^2] は，どのような式で表されるか。

[ ]

(5) 等速円運動する物体にはたらく力を何というか。

[ ]

(6) 等速円運動する物体にはたらく向心力の大きさは，時間とともに変化するか，一定か。

[ ]

(7) 等速円運動する物体にはたらく向心力の向きは，どちらを向いているか。

[ ]

(8) 物体の質量を m [kg]，円運動の半径を r [m]，角速度を ω [rad/s] とするとき，向心力の大きさ F [N] は，どのような式で表されるか。

[ ]

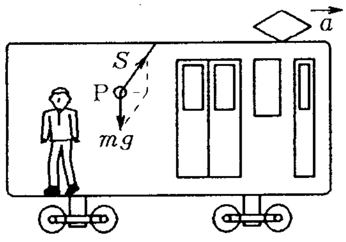
(9) 物体の質量を m [kg]，円運動の半径を r [m]，速さを v [m/s] とするとき，向心力の大きさ F [N] は，どのような式で表されるか。

[ ]

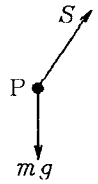
関連§番号 ⇨ M01(6040)，M02(6060)

3 (0103)

加速度 a で等加速度直線運動する電車の天井から，質量 m のおもり P をつり下げると，電車の中にいる人から見て，P は鉛直方向から傾いた状態で静止しているように見える。このとき，次の問いに答えなさい。



(1) 電車の中にいる人から見て，おもり P が静止して見えるためには，糸の張力 S，重力 mg の2力のほかに，もう1つの力，すなわち，慣性力 F が必要である。右の下の図に，その力 F を作図しなさい。



(2) P にはたらく慣性力 F を，進行方向を正として，P の質量 m と電車の加速度 a で表しなさい。

〔　　　　　　　〕

(3) P にはたらく慣性力の向きは，加速度の向きと同じ向きか，反対向きか。

〔　　　　　　　〕

関連§番号 ⇨ M03 (6100)

4 (0104)

次の問いに答えなさい。

(1) 等速円運動をしている物体とともに運動している観測者には，外向きに力がはたらいているように見える。この力を何というか。

〔　　　　　　　〕

(2) 質量 m〔kg〕，半径 r〔m〕，角速度 ω〔rad/s〕で等速円運動する物体にはたらく遠心力の大きさ F〔N〕は，どのような式で表されるか。

〔　　　　　　　〕

(3) (2)の遠心力を求める式は，速さ v〔m/s〕を使って表すと，どのようになるか。

〔　　　　　　　〕

関連§番号 ⇨ M03(6120)

5 (0105)

次の問いに答えなさい。

(1) 単振動の式 $x = A\sin\omega t$ で，x，A，ω はそれぞれ何を表しているか。

x〔　　　　　　〕 A〔　　　　　　〕 ω〔　　　　　　〕

(2) $v = A\omega\cos\omega t$ で表される式は単振動の何を表しているか。

〔　　　　　　　〕

(3) 振幅 0.10 m，角振動数 π〔rad/s〕の単振動の速度 v〔m/s〕を求める式を書きなさい。

〔　　　　　　　〕

(4) $a = -A\omega^2\sin\omega t$ という式は単振動の何を表しているか。

〔　　　　　　　〕

(5) 角振動数 ω〔rad/s〕で単振動している物体の変位が x〔m〕のときの加速度 a〔m/s^2〕はどのような式で表されるか。

〔　　　　　　　〕

関連§番号 ⇨ M04

6 (0106)

次の問いに答えなさい。

(1) 単振動する物体の質量を m，角振動数を ω，変位を x とするとき，$F = -m\omega^2 x$ で表される F は何を意味しているか。

〔　　　　　　　〕

(2) k を定数，変位を x として，$F = -kx$ であたえられる力 F が物体にはたらくとき，

物体はどんな運動をするか。

〔　　　　　　　〕

(3) 復元力はどこを向いているか。

〔　　　　　　　〕

(4) 単振動する質量 m の物体にはたらく力が $F=-kx$ のとき，周期 T は，どのような式で表すことができるか。

〔　　　　　　　〕

(5) 単振動する物体の質量が2倍になると周期は何倍になるか。

〔　　　　　　　〕

関連§番号 ⇨ M05(6190, 6200)

7 (0107)

次の問いに答えなさい。

(1) 2物体間にはたらく万有引力の大きさは，どんな量に関係するか。

〔　　　　　　　〕

(2) 質量がそれぞれ m_1，m_2 の2球を，中心間の距離が r となるように保ったとき，2球間に作用する万有引力の大きさ F を表す式を書きなさい。ただし，万有引力定数を G とする。

〔　　　　　　　〕

(3) 地上にある質量 m の物体にはたらく重力はいくらか。重力加速度の大きさを g として示しなさい。

〔　　　　　　　〕

(4) 地球の質量を M，地球の半径を R，万有引力定数を G として，地上の質量 m の物体にはたらく万有引力を求めなさい。ただし，地球の質量が地球の中心に集中していると考えてよい。

〔　　　　　　　〕

(5) (3)，(4)より，M を求めなさい。

〔　　　　　　　〕

関連§番号 ⇨ M09

8 (0108)

鉛直面内での円運動と力学的エネルギー保存の法則について，次の問いに答えなさい。ただし，摩擦や空気抵抗は考えなくてよい。

(1) 鉛直面内で最下点を速度 v_0 で通過して円運動する物体は，その後等速円運動をするか。

〔　　　　　　　〕

(2) 棒につけられた小球を鉛直面内で円運動させるとき，最高点を通過するために必要な最高点での最小の速度はいくらと考えてよいか。

〔　　　　　　　〕

(3) 糸につけられた小球を鉛直面内で円運動させるとき，最高点を通過するためには，最高点で小球にはたらく重力がどのような条件にしたがうときか。

〔　　　　　　　〕

(4) 鉛直面内で円運動する物体について，力学的エネルギーは保存されるか。

〔　　　　　　　〕

関連§番号 ⇨ M11(6410)

memo

定 期 試 験

M01～M11

第２回－基本問題－

年　組　名前

1 (0201)

等速円運動の周期，回転数と速さについて，次の問いに答えなさい。

(1) 半径 0.20 m の円周上を 10 s 間に 25 回転している物体がある。この物体の速さと周期はいくらか。

速さ〔　　　　　　〕 周期〔　　　　　　〕

(2) 半径 10 m の円周上を 10 s 間に 1 回転している物体がある。この物体の速さと回転数はいくらか。

速さ〔　　　　　　〕 回転数〔　　　　　　〕

関連§番号 ⇨ M01(6010, 6020)

2 (0202)

等速円運動している物体の向心力について，次の問いに答えなさい。

(1) 質量 3.0 kg の物体が，半径 2.0 m の円周上を角速度 0.24 rad/s で運動しているときの向心力の大きさはいくらか。

〔　　　　　　〕

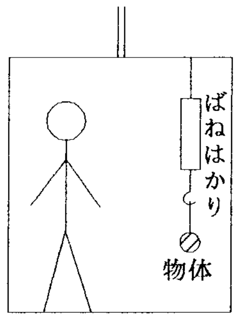
(2) 質量 m の物体が，半径 r の円周上を回転数 n で運動しているときの向心力の大きさはいくらか。

〔　　　　　　〕

関連§番号 ⇨ M02(6060, 6070)

3 (0203)

エレベーター内にとりつけたばねはかりに，質量 0.30 kg の物体をつり下げた。ばねはかりのめもりが次のような値を指しているとき，エレベーターの加速度の向きと大きさを求めなさい。ただし，重力加速度の大きさを $g=9.8$〔m/s^2〕とする。



(1) ばねはかりのめもりが 0.40 kg を指しているとき，

向き〔　　　　　　〕

大きさ〔　　　　　　〕

(2) ばねはかりのめもりが 0.25 kg を指しているとき，

向き〔　　　　　　〕

大きさ〔　　　　　　〕

関連§番号 ⇨ M03 (6110)

4 (0204)

半径 0.60 m で，1.0 s 間に $\frac{\pi}{4}$〔rad〕の割合で等速円運動をする物体がある。この物体の正射影の動きについて，次の問いに答えなさい。ただし，$t=0$ のとき $x=0$ とし，π はそのままで答えなさい。

(1) 角振動数はいくらか。

〔　　　　　　〕

(2) 振幅はいくらか。

〔　　　　　　〕

(3) t〔s〕後の変位を x〔m〕としたとき，この物体の正射影の動きを単振動の式で表しなさい。

〔　　　　　　〕

(4) $t=2.0$〔s〕における変位はいくらか。

〔　　　　　　　〕

(5) $t=2.0$〔s〕における速度の大きさはいくらか。

〔　　　　　　　〕

(6) $t=2.0$〔s〕における加速度の大きさはいくらか。

〔　　　　　　　〕

関連§番号 ⇨ M04

5 (0205)

単振動をしているある物体の時刻 t〔s〕における変位 x〔m〕が，$x=0.50\sin 2\pi t$ で表されるとき，次の問いに答えなさい。ただし，π はそのままで答えなさい。

(1) 角振動数は何 rad/s か。また，振幅は何 m か。

角振動数〔　　　　　　　〕 振幅〔　　　　　　　〕

(2) 周期は何 s か。

〔　　　　　　　〕

(3) $t=2.0$〔s〕における変位は何 m か。

〔　　　　　　　〕

(4) 時刻 t〔s〕における速度の大きさ v〔m/s〕を表す式をつくりなさい。

〔　　　　　　　〕

(5) $t=1.0$〔s〕における速度の大きさは何 m/s か。

〔　　　　　　　〕

(6) 変位 x〔m〕における加速度の大きさ a〔m/s^2〕を表す式をつくりなさい。

〔　　　　　　　〕

(7) 変位が +0.50 m における加速度の大きさは何 m/s^2 か。

〔　　　　　　　〕

関連§番号 ⇨ M04

6 (0206)

質量 100 g のおもりをつるすと 9.8 cm のびるばねを垂直につるし，下端に質量 400 g のおもりをつけて振動させた。次の問いに答えなさい。ただし，重力加速度の大きさを $g=9.8$〔m/s^2〕とする。

(1) ばね定数は何 N/m か。

〔　　　　　　　〕

(2) このときの周期は何 s か。

〔　　　　　　　〕

(3) この振動の振幅が 20 cm であった。おもりが最下点にきたとき，おもりに作用している力の合力は何 N か。ただし，鉛直上方を変位の正の向きとする。

〔　　　　　　　〕

関連§番号 ⇨ M05(6210, 6220)

7 (0207)

地球の半径を R，質量を M，万有引力定数を G として，次の問いに答えなさい。

(1) 地表の重力加速度の大きさ g を R，M，G で表しなさい。ただし，自転の影響は考えないものとする。

〔　　　　　　　〕

(2) 地表からの高さ h の上空における重力加速度の大きさ g' を R，M，G，h で表しなさい。

〔　　　　　　　〕

(3) g' を g，R，h で表しなさい。

〔　　　　　　　〕

関連§番号 ⇨ M10(6390)

定　期　試　験

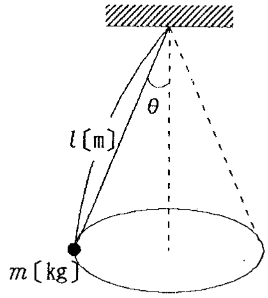
M01～M11

第３回－基本問題－

年　組　名前

1 (0301)

ひもの長さ l〔m〕，おもりの質量 m〔kg〕の円すい振り子について，次の問いに答えなさい。ただし，重力加速度の大きさを g〔m/s^2〕とする。



(1) 図の θ と，m，g を用いて，遠心力の大きさ F〔N〕を表しなさい。

〔　　　　　　　　　　〕

(2) この円すい振り子の周期 T〔s〕を求めなさい。

〔　　　　　　　　　　〕

関連§番号 ⇨ M03(6130)

2 (0302)

単振動について，次の問いに答えなさい。

(1) ある物体が単振動をし，その物体の時刻 t〔s〕における変位 x〔m〕が $x=0.50\sin 2\pi t$ で表されるとき，この単振動の振幅と周期を求めなさい。

振幅〔　　　　　　　　〕 周期〔　　　　　　　　〕

(2) 振幅 0.10 m，角振動数 π〔rad/s〕で単振動している物体の 2.0 s 後の速度を求めなさい。ただし，このとき，$t=0$ のとき $x=0$ であるとする。また，角振動数 π〔rad/s〕の単振動の，変位 0.050 m における加速度を求めなさい。

速度〔　　　　　　　　〕 加速度〔　　　　　　　　〕

(3) 質量 0.80 kg の物体にはたらく力 F〔N〕が，$F=-5.0x$ で表される単振動がある。この単振動の周期と振動数を求めなさい。

周期〔　　　　　　　　〕 振動数〔　　　　　　　　〕

関連§番号 ⇨ M04，M05(6190，6200)

3 (0303)

質量 100 g のおもりをつるすと，9.8 cm のびるばねがある。これを垂直につるし，下端におもりをつけて振動させたとき，次の問いに答えなさい。ただし，重力加速度の大きさを $g=9.8$〔m/s^2〕とする。

(1) ばね定数はいくらか。

〔　　　　　　　　〕

(2) 質量 64 g のおもりをつるすと，周期はいくらになるか。

〔　　　　　　　　〕

(3) おもりが振動の中心から上方 5.0 cm の地点にきたとき，おもりにはたらいている合力の大きさと向きを求めなさい。

大きさ〔　　　　　　　　〕

向き　〔　　　　　　　　〕

関連§番号 ⇨ M05(6210，6220)

4 (0304)

単振り子について，次の問いに答えなさい。

(1) 長さが 2.0 m の単振り子の周期を求めなさい。ただし，重力加速度の大きさを $g=9.8$〔m/s^2〕とする。

〔　　　　　　　　〕

(2) 重力加速度の大きさが $\frac{1}{4}$ になると単振り子の周期は何倍になるか。

〔　　　　　　　〕

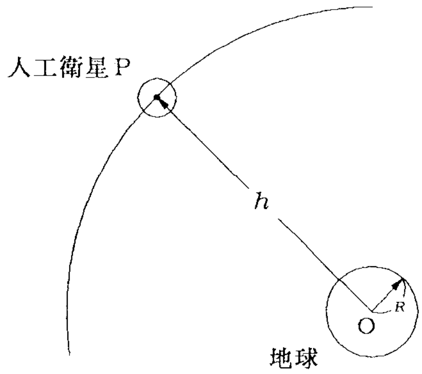
(3) 長さが0.500 m の単振り子を振らせて，周期を正確に測定したら，1.42 s であった。このことから重力加速度の大きさを有効数字3桁で求めなさい。

〔　　　　　　　〕

関連§番号 ⇨ M07(6280)

5 (0305)

地球の重心Oから h〔m〕離れたところを，質量 m〔kg〕の人工衛星Pがとんでいる。地球の質量を M〔kg〕，万有引力定数を G〔$N \cdot m^2/kg^2$〕として，次の問いに答えなさい。



(1) 人工衛星と地球の間の万有引力 f はいくらか。

〔　　　　　　　〕

(2) 人工衛星の速さ v はいくらか。

〔　　　　　　　〕

(3) 人工衛量の周期 T はいくらか。

〔　　　　　　　〕

関連§番号 ⇨ M10(6400)

6 (0306)

円運動と力学的エネルギーの関係について，次の問いに答えなさい。ただし，重力加速度の大きさを $g=9.8$〔m/s^2〕とする。

(1) 半径1.0 m の棒の先に小球をつけて回転させたとき，最高点を通過するためには最下点において最低何 m/s の初速度をあたえればよいか。

〔　　　　　　　〕

(2) 半径1.0 m の糸の先に小球をつけて回転させたとき，糸がたるむことなく回転するためには，最下点において最低何 m/s の初速度をあたえればよいか。

〔　　　　　　　〕

関連§番号 ⇨ M11(6410)

定　期　試　験

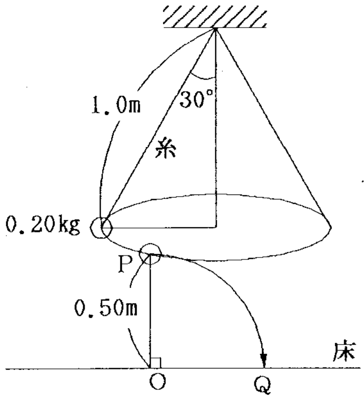
M01～M11

第４回－標準問題－

年　組　名前

1 (0401)

図のように，糸の長さ 1.0 m，おもりの質量 0.20 kg の円すい振り子がある。次の問いに答えなさい。ただし，重力加速度の大きさを $g=9.8$ 〔m/s^2〕とする。



(1) 周期はいくらか。

〔　　　　　〕

(2) おもりにはたらく向心力はいくらか。

〔　　　　　〕

(3) おもりの回転する速さはいくらか。

〔　　　　　〕

(4) P 点でおもりが糸から離れ，Q 点に落下した。P 点の真下の O 点から Q 点までの距離はいくらか。ただし，PO＝0.50〔m〕とする。

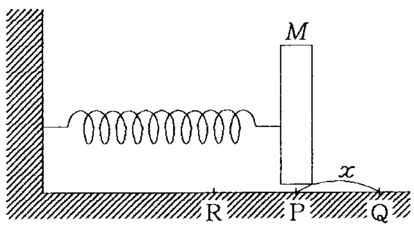
〔　　　　　〕

関連§番号 ⇨ M03(6130)

2 (0402)

質量が無視できる軽いつるまきばねがある。このばねに質量 m〔kg〕のおもりをつり下げると，ばねは自然の長さより x_0〔m〕だけのびてつりあった。

このばねを図のように，一端を固定し他端に質量 M〔kg〕のおもりをつけてなめらかな水平面上に置く。ばねが自然の長さになっているときのおもりの位置を P とする。ばねを自然の長さより x〔m〕だけのばし，おもりを Q 点のところではなした。



重力加速度の大きさを g〔m/s^2〕として，次の問いに答えなさい。

(1) ばね定数を求めなさい。

〔　　　　　〕

(2) Q ではなしたあと，おもりが最初に P に達するまでの時間を求めなさい。

〔　　　　　〕

(3) おもりの加速度の大きさの最大値を求めなさい。

〔　　　　　〕

(4) Q ではなしてからおもりが再び Q にもどってくるまでに，ばねがおもりに加える力のする仕事がマイナスになる区間を，図の P，Q，R を用いて表しなさい。

〔　　　　　〕

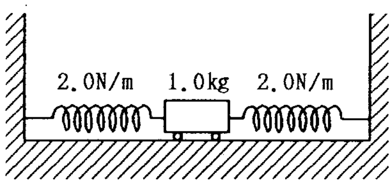
(5) おもりの速度の大きさの最大値を求めなさい。

〔　　　　　〕

関連§番号 ⇨ M05(6220)

3 (0403)

なめらかな水平面上に置かれた質量1.0kgの物体の両側に強さ，長さともに等しいばねをとりつけた。ばねはいずれも自然の長さになっている。この物体を静止の位置から右へ0.10mだけずらして手をはなした。ばね定数を2.0N/mとして，次の問いに答えなさい。ただし，ばねの質量は無視し，ばねはフックの法則にしたがうものとする。



(1) 物体を静止の位置から右へ0.10mずらすのに必要な力の大きさは何Nか。また，その向きはどちらか。

大きさ〔　　　　　〕 向き〔　　　　　〕

(2) この物体が単振動を続けるとき，その振動数は何Hzか。

〔　　　　　〕

関連§番号 ⇨ M06(6250)

4 (0404)

質量M〔kg〕の天体の重心からr〔m〕離れたところを，質量m〔kg〕の小天体が周期T〔s〕で公転している。万有引力定数をG〔$N \cdot m^2/kg^2$〕として，次の問いに答えなさい。

(1) 2つの天体間の万有引力を求めなさい。

〔　　　　　〕

(2) 小天体に作用する向心力をm，r，Tで表しなさい。

〔　　　　　〕

(3) 2つの天体間に，ケプラーの第3法則が成り立っていることを証明しなさい。

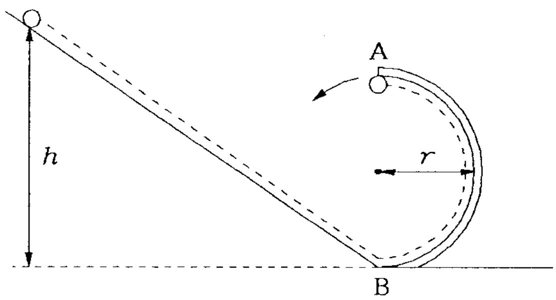
(　　　　　)

関連§番号 ⇨ M09

5 (0405)

図のように，斜面の先に半径rの半円筒を置き，小球を斜面上から静かにすべり落とす。小球が半円筒の最上部A点を通過するためには，斜面上のどの高さからすべり落とせばよいか。半円筒の下端B点を基準として，そこからの高さを求めなさい。ただし，斜面および半円筒はなめらかなものとする。

〔　　　　　〕



関連§番号 ⇨ M11(6410)

6 (0406)

地上から打ち上げた人工衛星が無限遠方へ行ってしまうための最小の初速度を第2宇宙速度という。地球の半径を6.38×10^6m，重力加速度の大きさを$g=9.80$〔m/s^2〕として第2宇宙速度を求めなさい。

〔　　　　　〕

関連§番号 ⇨ M11(6430)

定 期 試 験

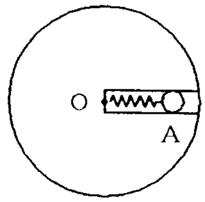
M01～M11

第5回ー実力問題ー

年　組　名前

1 (0501)

水平に置かれた円板上に半径に沿った溝があり，その中に質量 m のおもり A をつけた軽いばねが水平に置かれている。図は円板を上から見たようすを示している。ばね定数は k，自然の長さは l_0 であり，ばねの一端は円板の中心 O に固定されている。おもりおよびばねと溝の間には摩擦はなく，おもりの大きさは無視できるものとする。この円板を水平面内で O を中心として一定の角速度で回転したら，ばねの長さが l_1 になった。そのとき，次の各量はいくらか。　(愛知医大)



(1) ばねにはたらく力の大きさ。

(2) おもり A の加速度の大きさ。

(3) おもり A の速さ。

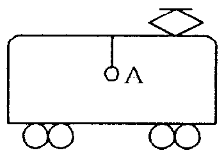
(4) 円板の角速度。

関連§番号 ⇨ M02 (6090)

2 (0502)

次の文章の空欄(1)～(5)を適当な式または文字でうめよ。　(神戸大)

右図のように電車の中に長さ l の糸で天井からつるされた質量 m の小球 A がある。電車がある時刻に大きさ a の一定の加速度で左向きに走り出したとき，A の運動を電車に乗っている人が観察した。重力加速度の大きさを g とする。



A にはたらく力は，糸の張力と重力と $\boxed{(1)}$ である。重力と $\boxed{(1)}$ の合力は，$\boxed{(2)}$ の大きさをもち，鉛直下向きと $\tan\theta = \boxed{(3)}$ を満たす角 θ をなす向きである。また，この合力は糸が鉛直下向きと θ の角をなすときの糸の張力とつりあう。したがって，A はつりあいの位置を中心として周期 $\boxed{(4)}$ の単振動を始める。また，これを止めてつりあいの位置に静止させておくと，電車は加速をやめて等速度運動となったときに A は周期 $\boxed{(5)}$ の単振動を始める。

関連§番号 ⇨ M03 (6100)，M07 (6300)

3 (0503)

人工衛星が赤道面内のある高さで円軌道を描いて回っている。いま，地球を半径 R の球とし，地上での重力加速度の大きさを g とする。　(福井工大)

㋐ 人工衛星が地球の半径の 1.25 倍の軌道を回っている。$R=6.4\times10^3$ [km]，$g=9.8$ [m/s^2] として，次の問いに答えよ。

(1) この高さで，人工衛星にはたらいている重力加速度の大きさは何 m/s^2 か。

(2) このとき，人工衛星の速さは何 km/s か。

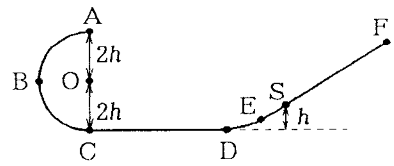
(3) 人工衛星が地球を回る周期は何分か。

㋑ 人工衛星が軌道を変えて一定の所に止まって見える静止衛星になった。人工衛星の軌道半径を R の a 倍 ($a>1$) とし，a の値を g，R，そして，地球自転の角速度 ω を使って表せ。

関連§番号 ⇨ M10 (6400)

4 (0504)

図はなめらかに接続された半円筒面，水平な床，斜面を鉛直に切った断面図で，ＡＢＣはＯを中心として半径$2h$の半円をなす半円筒の切口である。面はすべてなめらかなものとし，質点の運動は鉛直面内で行われるものとする。次の問いに，数値またはあたえられた文字で答えよ。ただし，重力加速度の大きさを g とする。



（大阪電通大）

斜面ＥＦ上で高さが h の点Ｓより質点を静かにはなすとき，

(1) 水平な床上の点Ｃにおける質点の速さはいくらか。

(2) 質点は半円上のある点Ｐまで達する。角ＰＯＣはいくらか。

次に，斜面に沿って質点に初速度をあたえて，点Ｓより落下させる場合を考える。

(3) 質点が半円上の高さ$2h$の点Ｂに到達するために必要な最小の初速度はいくらか。

(4) 質点がかろうじて半円を離れることなく点Ａに到達したとする。このとき点Ａにおける質点の速さはいくらか。

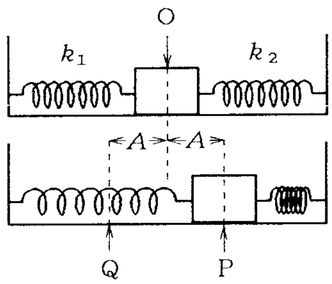
(5) かろうじて点Ａに達した質点は，その後，水平な床上の点Ｑに落下した。距離ＣＱはいくらか。

ヒント (4) 質点が点Ａに到達した瞬間，半円から受ける抗力は0としてよい。

関連§番号 ⇨ M11 (6410)

5 (0505)

水平でなめらかな面上に質量 m の物体を置き，その両端にばね定数 k_1，k_2 のつるまきばねをつけて，それぞれのばねの他端を壁に固定する。右の図のように，物体をつりあいの位置点Ｏから A だけずらして点Ｐからはなす。次の問いに答えよ。（長岡技術科学大改題）



(1) 物体の周期はいくらか。

(2) 物体の速さが最大となる位置はどこか。また，その最大の速さはいくらか。

(3) 振動の左端点Ｑにおける加速度はどの向きにどれだけの大きさか。

関連§番号 ⇨ M06 (6250)，M11 (6420)

memo

定期試験詳解

M01～M11
第1回ーチェックー
【100点満点】

1 (0101) 各2点，計14点

(1) $2\pi r$〔m〕 (2) $\frac{1}{2}$倍 (3) 3倍 (4) $\frac{1}{2}$倍

(5) $\frac{1}{3}$倍 (6) $\omega=2\pi n$ (7) $\omega=\frac{v}{r}$

解説

(1) 1周に要する時間を，等速円運動の周期という。したがって，T〔s〕間で円周上を1周するから，移動する長さは円周，すなわち$2\pi r$〔m〕に等しくなる。

(2) 半径r〔m〕の円周上を，周期T〔s〕で等速円運動する物体の速さv〔m/s〕は，次の式で表される。

$$v=\frac{2\pi r}{T} \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

よって，半径rが一定のとき，周期Tが2倍になると，速さvは$\frac{1}{2}$倍になる。

(3) 半径r〔m〕の円周上を回転数n〔Hz〕で運動する物体の速さv〔m/s〕は，次の式で表される。

$$v=2\pi r n$$

この式より，速さは回転数に比例するので，回転数が3倍になると，速さも3倍になる。

(4) 等速円運動の周期T〔s〕と回転数n〔Hz〕には，次の関係がある。

$$n=\frac{1}{T} \quad \cdots\cdots\cdots ②$$

この式より，回転数は周期に反比例するので，周期が2倍になると，回転数は$\frac{1}{2}$倍になる。

(5) 周期がT〔s〕のときの角速度ω〔rad/s〕は，次の式で表される。

$$\omega=\frac{2\pi}{T} \quad \cdots\cdots\cdots ③$$

この式より，角速度は周期に反比例するので，周期が3倍になると，角速度は$\frac{1}{3}$倍になる。

(6) ②を③に代入すると， $\omega=2\pi n$

(7) ③を①に代入すると，

$$v=r\omega \qquad \therefore \quad \omega=\frac{v}{r}$$

関連§番号 ⇨ M01(6010, 6020, 6030)

2 (0102) 各2点，計18点

(1) 一定 (2) 回転の中心に向かう向き (3) $a=r\omega^2$ (4) $a=\frac{v^2}{r}$

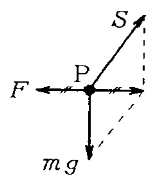
(5) 向心力 (6) 一定 (7) 回転の中心に向かう向き

(8) $F=mr\omega^2$ (9) $F=m\frac{v^2}{r}$

関連§番号 ⇨ M01(6040)，M02(6060)

3 (0103) 各4点，計12点

(1) 右図　(2) $F=-ma$　(3) 反対向き



解説

(1) まず，重力 mg と張力 S の合力を求め，その合力とつりあう力を作図すればよい。

関連§番号 ⇨ M03 (6100)

4 (0104) 各4点，計12点

(1) 遠心力　(2) $F=mr\omega^2$　(3) $F=m\dfrac{v^2}{r}$

関連§番号 ⇨ M03(6120)

5 (0105) 各2点，計14点

(1) x …変位，A …振幅，ω …角振動数　(2) 速度

(3) $v=0.10\pi\cos\pi t$ 〔m/s〕　(4) 加速度　(5) $a=-\omega^2x$ 〔m/s²〕

関連§番号 ⇨ M04

6 (0106) 各2点，計10点

(1) 復元力（単振動を生じさせる力）　(2) 単振動

(3) つねに振動の中心を向いている。

(4) $T=2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$　(5) $\sqrt{2}$ 倍

解説

(5) 質量が2倍になったときの周期を T' とすると，

$$\frac{T'}{T}=\frac{2\pi\sqrt{\dfrac{2m}{k}}}{2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}}=\sqrt{2}\text{〔倍〕}$$

関連§番号 ⇨ M05(6190, 6200)

7 (0107) 各2点，計10点

(1) 2物体間の距離と2物体の質量　(2) $F=G\dfrac{m_1m_2}{r^2}$

(3) mg　(4) $G\dfrac{Mm}{R^2}$　(5) $\dfrac{R^2g}{G}$

解説

(5) 重力が物体と地球との間にはたらく万有引力であるから，(3)，(4)より，次の式が成り立つ。

$$mg=G\frac{Mm}{R^2}\qquad\therefore\ M=\frac{R^2g}{G}$$

関連§番号 ⇨ M09

8 (0108) (1)(2)各2点，(3)4点，(4)2点，計10点

(1) しない　(2) 0　(3) 小球にはたらく遠心力と重力がつりあうこと（小球にはたらく向心力と重力が等しいこと）　(4) 保存される。

関連§番号 ⇨ M11(6410)

定　期　試　験　詳　解

M01～M11

第２回－基本問題－

【100 点満点】

1　(0201)　各３点，計 12 点

(1)　速さ…3.1 m/s，周期…0.40 s

(2)　速さ…6.3 m/s，回転数…0.10 Hz

解説

(1)　周期 T は，１回転に要する時間だから，

$$T=\frac{10}{25}=0.40\ \text{[s]}$$

よって，速さ v は，半径を r として，

$$v=\frac{2\pi r}{T}=\frac{2\times3.14\times0.20}{0.40}=3.14\fallingdotseq3.1\ \text{[m/s]}$$

(2)　周期が 10 s ということだから，

$$v=\frac{2\pi r}{T}=\frac{2\times3.14\times10}{10}=6.28\fallingdotseq6.3\ \text{[m/s]}$$

回転数 n は周期の逆数だから，

$$n=\frac{1}{T}=\frac{1}{10}=0.10\ \text{[Hz]}$$

関連§番号 ⇨ M01(6010，6020)

2　(0202)　各６点，計 12 点

(1)　0.35 N　　(2)　$4\pi^2 m r n^2$

解説

(1)　物体の質量を m，円運動の半径を r，角速度を ω とすると，向心力の大きさ F は，次の式で表される。よって，

$$F=mr\omega^2=3.0\times2.0\times0.24^2$$
$$=0.345\cdots\fallingdotseq0.35\ \text{[N]}$$

(2)　角速度 ω を回転数 n を用いて表すと，

$$\omega=2\pi n$$

よって，向心力の大きさ F は，

$$F=mr\omega^2=mr(2\pi n)^2=4\pi^2 mrn^2$$

関連§番号 ⇨ M02(6060，6070)

3　(0203)　各３点，計 12 点

(1)　向き…上向き，大きさ…3.3 m/s²　　(2)　向き…下向き，大きさ…1.6 m/s²

解説

(1)　エレベーターの加速度を a，上向きを正の方向とする。ばねはかりが物体を上向きに引く力を S とすると，物体にはたらく重力 mg と慣性力 ma の間には，次の式が成り立つ。

$$S=mg+ma$$

はかりのめもりが 0.40 kg のとき，$S=0.40g$ であるから，

$$0.40g=0.30g+0.30a$$

$$\therefore\quad a=\frac{0.10g}{0.30}=\frac{0.10\times9.8}{0.30}=3.26\cdots\fallingdotseq3.3\ \text{[m/s}^2\text{]}$$

よって，加速度は上向きに 3.3 m/s² である。

(2)　はかりのめもりが 0.25 kg のとき，$S=0.25g$ であるから，

$$0.25g=0.30g+0.30a$$

$$\therefore\quad a=-\frac{0.05\,g}{0.30}=-\frac{0.05\times 9.8}{0.30}=-1.63\cdots\fallingdotseq -1.6\ \text{[m/s}^2\text{]}$$

よって，加速度は下向きに 1.6 m/s² である。

関連§番号 ⇨ M03 (6110)

4 (0204)　各 3 点，計 18 点

(1) $\frac{\pi}{4}$ [rad/s]　(2) 0.60 m　(3) $x=0.60\sin\frac{\pi}{4}t$ [m]

(4) 0.60 m　(5) 0 m/s

(6) $-0.038\pi^2$ [m/s²]　(➡ $-\frac{3}{80}\pi^2$ [m/s²] でも正解)

解説

(1) 角振動数 ω は，等速円運動の角速度に等しく，それは単位時間に回転する角度であるから，　$\omega=\frac{\pi}{4}$ [rad/s]

(2) 振幅 A は，等速円運動の半径に等しいので，　$A=0.60$ [m]

(3) $x=A\sin\omega t$ に(1)，(2)の結果を代入すると，

$$x=0.60\sin\frac{\pi}{4}t\ \text{[m]}$$

(4) (3)の式に $t=2.0$ [s] を代入すると，

$$x=0.60\sin\left(\frac{\pi}{4}\times 2.0\right)=0.60\sin\frac{\pi}{2}=0.60\ \text{[m]}$$

(5) 速度の大きさを v [m/s] とすると，$v=A\omega\cos\omega t$ であるから，

$$v=0.60\times\frac{\pi}{4}\times\cos\left(\frac{\pi}{4}\times 2.0\right)=0\ \text{[m/s]}$$

(6) 加速度の大きさを a [m/s²] とすると，$a=-\omega^2x$ であるから，(4)の結果より，

$$a=-\left(\frac{\pi}{4}\right)^2\times 0.60=-0.0375\pi^2\fallingdotseq -0.038\pi^2\ \text{[m/s}^2\text{]}$$

関連§番号 ⇨ M04

5 (0205)　各 2 点，計 16 点

(1) 角振動数… 2π [rad/s]，振幅… 0.50 m

(2) 1.0 s　(3) 0 m　(4) $v=\pi\cos 2\pi t$ [m/s]

(5) π [m/s]　(6) $a=-4\pi^2x$ [m/s²]　(7) $-2.0\pi^2$ [m/s²]

解説

(1) $x=A\sin\omega t$ で，A が振幅，ω が角振動数を表す。この式と，あたえられた式を比較すると，

$A=0.50$ [m]

$\omega=2\pi$ [rad/s]

(2) 周期を T [s] とすると，$T=\frac{2\pi}{\omega}$ より，

$$T=\frac{2\pi}{2\pi}=1.0\ \text{[s]}$$

(3) あたえられた式に $t=2.0$ [s] を代入すると，

$x=0.50\times\sin(2\pi\times 2.0)=0.50\sin 4\pi=0$ [m]

(4) $v=A\omega\cos\omega t$ であるから，

$v=0.50\times 2\pi\times\cos 2\pi t=\pi\cos 2\pi t$ [m/s]

(5) (4)の結果に $t=1.0$ [s] を代入すると，

$v=\pi\times\cos(2\pi\times 1.0)=\pi\times\cos 2\pi=\pi$ [m/s]

(6) $a=-\omega^2x$ に(1)の結果を代入すると，

$a=-(2\pi)^2x=-4\pi^2x$ [m/s²]

(7) (6)の結果に $x=0.50$〔m〕を代入すると，

$$a=-4\pi^2\times0.50=-2.0\pi^2\ \text{〔m/s}^2\text{〕}$$

関連§番号 ⇨ M04

6 (0206) 各5点，計15点

(1) 10 N/m (2) 1.3 s (3) 2.0 N

解説

(1) つりあったときのばねののびを l〔m〕，おもりの質量を m〔kg〕，ばね定数を k〔N/m〕とすると，次の式が成り立つ。

$$kl=mg \quad \therefore \quad k=\frac{mg}{l}$$

これにあたえられた数値を代入すると，

$$k=\frac{100\times10^{-3}\times9.8}{9.8\times10^{-2}}=10\ \text{〔N/m〕}$$

(2) 周期 T は，次の式で表される。

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

ここで，$m=400\times10^{-3}$〔kg〕，$k=10$〔N/m〕であるから，

$$T=2\pi\sqrt{\frac{400\times10^{-3}}{10}}=2\pi\times2\times10^{-1}$$

$$=4\times3.14\times10^{-1}=1.25\cdots\fallingdotseq1.3\ \text{〔s〕}$$

(3) ばねの変位をつりあいの位置から x〔m〕とすると，合力 F〔N〕は，次の式で表される。

$$F=-kx$$

ここで，振幅が20 cmであったのだから，おもりが最下点にきたとき，つりあいの位置からの変位は，鉛直上方を正にしたとき，$x=-0.20$〔m〕である。よって，

$$F=-10\times(-0.20)=2.0\ \text{〔N〕}$$

関連§番号 ⇨ M05(6210，6220)

7 (0207) 各5点，計15点

(1) $G\dfrac{M}{R^2}$ (2) $G\dfrac{M}{(R+h)^2}$ (3) $\dfrac{R^2}{(R+h)^2}g$

解説

(1) 地表にある質量 m の物体にはたらく重力が，この物体と地球との間にはたらく万有引力であるから，次の式が成り立つ。

$$mg=G\frac{Mm}{R^2} \quad \therefore \quad g=G\frac{M}{R^2} \quad \cdots\cdots\cdots①$$

(2) 地表から高さ h の上空にある質量 m' の物体にはたらく重力が，この物体と地球との間にはたらく万有引力であるから，次の式が成り立つ。

$$m'g'=G\frac{Mm'}{(R+h)^2} \quad \therefore \quad g'=G\frac{M}{(R+h)^2} \quad \cdots\cdots\cdots②$$

(3) ①より，$GM=gR^2$ ………③

③を②に代入すると，

$$g'=\frac{gR^2}{(R+h)^2}=\frac{R^2}{(R+h)^2}g$$

関連§番号 ⇨ M10(6390)

定　期　試　験　詳　解

M01～M11
第３回－基本問題－
【100点満点】

1 (0301)　各6点，計12点

(1)　$F = mg\tan\theta$〔N〕　(2)　$T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l\cos\theta}{g}}$〔s〕

解説

(1)　おもりといっしょに回転する非慣性系から見たとき，右図のように，おもりには遠心力 F と，糸の張力 S，重力 mg がはたらき，この3力はつりあう。よって，

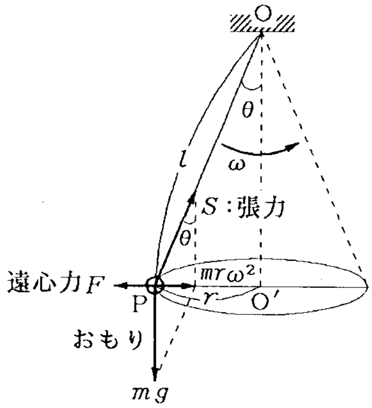
$$F = S\sin\theta \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

$$mg = S\cos\theta \quad \cdots\cdots\cdots ②$$

この2式より S を消去すると，①÷②より，

$$\frac{F}{mg} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$\therefore\ F = mg\tan\theta\ \text{〔N〕}$$



(2)　円すい振り子の円運動の半径を r，角速度を ω とすると，

$$F = mr\omega^2$$

と表すことができる。よって，

$$mr\omega^2 = mg\tan\theta \quad \cdots\cdots\cdots ③$$

一方，(1)の図より，次の関係がある。

$$\tan\theta = \frac{r}{l\cos\theta} \quad \cdots\cdots\cdots ④$$

④を③に代入すると，

$$mr\omega^2 = mg\cdot\frac{r}{l\cos\theta}$$

$$\omega^2 = \frac{g}{l\cos\theta} \qquad \therefore\ \omega = \sqrt{\frac{g}{l\cos\theta}}$$

ここで，$T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ であるから，

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\dfrac{g}{l\cos\theta}}} = 2\pi\sqrt{\frac{l\cos\theta}{g}}\ \text{〔s〕}$$

関連§番号 ⇨ M03(6130)

2 (0302)　各3点，計18点

(1)　振幅… 0.50 m，周期… 1.0 s
(2)　速度… 0.31 m/s，加速度… −0.49 m/s^2
(3)　周期… 2.5 s，振動数… 0.40 Hz

解説

(1)　$x = A\sin\omega t$ で，A が振幅，ω が角振動数を表す。この式とあたえられた式を比較すると，

$$A = 0.50\ \text{〔m〕}$$

$$\omega = 2\pi\ \text{〔rad/s〕}$$

ここで，周期を T とすると，

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{2\pi}=1.0\ \text{〔s〕}$$

(2) 時刻 t〔s〕のときの変位を x〔m〕とすると，この単振動の変位は，次の式で表される。

$$x=0.10\sin\pi t\ \text{〔m〕}$$

このとき，時刻 t〔s〕における速度を v〔m/s〕とすると，$v=A\omega\cos\omega t$ であるから，$A=0.10$〔m〕，$\omega=\pi$〔rad/s〕より，

$$v=0.10\times\pi\times\cos\pi t=0.10\pi\cos\pi t$$

これに $t=2.0$〔s〕を代入すると，

$$v=0.10\times\pi\times\cos 2\pi=0.10\times\pi$$
$$=0.10\times3.14=0.314\fallingdotseq0.31\ \text{〔m/s〕}$$

一方，加速度を a〔m/s^2〕とすると，$a=-\omega^2x$ であるから，これに $\omega=\pi$〔rad/s〕，$x=0.050$〔m〕を代入すると，

$$a=-\pi^2\times0.050=-3.14^2\times0.050$$
$$=-0.492\cdots\fallingdotseq-0.49\ \text{〔m/s}^2\text{〕}$$

(3) $F=-m\omega^2x$ の式と $F=-5.0x$ の式を比較すると，

$$m\omega^2=5.0$$

ここで，$m=0.80$〔kg〕を代入すると，

$$\omega^2=\frac{5.0}{0.80}=6.25\qquad\therefore\quad\omega=2.5\ \text{〔rad/s〕}$$

ここで周期を T〔s〕とすると，

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\times3.14}{2.5}=2.51\cdots\fallingdotseq2.5\ \text{〔s〕}$$

振動数を f〔Hz〕とすると，

$$f=\frac{1}{T}=\frac{1}{2.51}=0.398\cdots\fallingdotseq0.40\ \text{〔Hz〕}$$

➡ $F=-kx$ より，$k=5.0$〔N/m〕，$m=0.80$〔kg〕を，

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

に代入して求めてもよい。

$$T=2\pi\sqrt{\frac{0.80}{5.0}}=2\times3.14\times0.40$$
$$=2.51\cdots\fallingdotseq2.5\ \text{〔s〕}$$

関連§番号 ⇨ M04，M05(6190，6200)

3 (0303) 各5点，計20点

(1) 10 N/m　(2) 0.50 s

(3) 大きさ…0.50 N，向き…下向き

解説

(1) つりあったときのばねののびを l〔m〕，おもりの質量を m〔kg〕，ばね定数を k〔N/m〕とすると，次の式が成り立つ。

$$kl=mg\qquad\therefore\quad k=\frac{mg}{l}$$

これにあたえられた数値を代入すると，

$$k=\frac{100\times10^{-3}\times9.8}{9.8\times10^{-2}}=10\ \text{〔N/m〕}$$

(2) 周期 T〔s〕は，次の式で表される。

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

ここで，$m=64\times10^{-3}$〔kg〕，(1)より $k=10$〔N/m〕であるから，

$$T=2\times3.14\times\sqrt{\frac{64\times10^{-3}}{10}}=2\times3.14\times8\times10^{-2}$$
$$=0.502\cdots≒0.50\ [s]$$

(3) おもりが，つりあいの位置から x〔m〕下がった地点で，おもりに作用している力の合力 F〔N〕は，鉛直下向きを正として，次の式で表される。ただし，k はばね定数である。

$$F=-kx$$

ここで，振動の中心から上方5.0 cmの地点であるから，$x=-0.050$〔m〕であり，(1)より，$k=10$〔N/m〕であることから，

$$F=-10\times(-0.050)=0.50\ [N]$$

ここで，$F>0$ となるので，合力の向きは下向きである。

関連§番号 ⇨ M05(6210, 6220)

4 (0304) 各6点，計18点

(1) 2.8 s　(2) 2倍　(3) 9.78 m/s^2

解 説

(1) 振り子の長さを l〔m〕とすると，周期 T〔s〕は，次の式で表される。

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\quad\cdots\cdots\cdots①$$

これにあたえられた数値を代入すると，

$$T=2\times3.14\times\sqrt{\frac{2.0}{9.8}}=2.83\cdots≒2.8\ [s]$$

(2) ①の式より，T は $\frac{1}{\sqrt{g}}$ に比例することがわかる。よって，g が $\frac{1}{4}$ になると，

T は，$\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}}}=2$〔倍〕になる。

(3) ①の式を変形すると，

$$T^2=(2\pi)^2\cdot\frac{l}{g}\qquad\therefore\ g=\frac{4\pi^2 l}{T^2}$$

これにあたえられた数値を代入すると，

$$g=\frac{4\times3.14^2\times0.500}{1.42^2}=9.779\cdots≒9.78\ [m/s^2]$$

関連§番号 ⇨ M07(6280)

5 (0305) 各6点，計18点

(1) $G=\frac{Mm}{h^2}$〔N〕　(2) $\sqrt{\frac{GM}{h}}$〔m/s〕

(3) $2\pi\sqrt{\frac{h^3}{GM}}$〔s〕$\left(\text{または，}2\pi h\sqrt{\frac{h}{GM}}\text{〔s〕}\right)$

解 説

(1) 万有引力の法則より，　$f=G\frac{Mm}{h^2}$〔N〕

➲問題の図のように，地球の中心（重心）O から人工衛星 P までの距離が h〔m〕であり，$R+h$〔m〕でないことに注意すること。

(2) 人工衛星にはたらく万有引力が円運動の向心力となるから，次の式が成り立つ。

$$G\frac{Mm}{h^2}=m\frac{v^2}{h}\qquad\therefore\ v=\sqrt{\frac{GM}{h}}\ [m/s]$$

(3) 周期 T は，　$T=\frac{2\pi h}{v}$

これに(2)の結果を代入すると，

$$T=\frac{2\pi h}{\sqrt{\dfrac{GM}{h}}}=2\pi\sqrt{\frac{h^3}{GM}}\ \text{[s]}$$

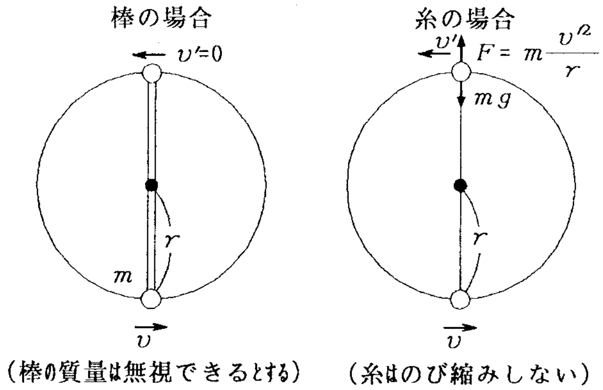
関連§番号 ⇨ M10(6400)

6　(0306)　各7点，計14点

(1)　6.3 m/s　　(2)　7.0 m/s

[解　説]

(1)　最下点を通過するときの速さを v〔m/s〕，最高点を通過するときの速さを v'〔m/s〕とする。棒の場合は，糸のようにたるむことがないから，最高点での速さ v' が0でも小球は落下しないので，$v'=0$ としてよい。すなわち，最高点で小球が運動エネルギーをもたなくてもよいことになる。



よって，小球の質量を m〔kg〕，円運動の半径を r〔m〕とすると，最下点の位置を重力による位置エネルギーの基準として，力学的エネルギー保存の法則より，

$$\frac{1}{2}mv^2=0+mg(2r)$$

$$v^2=4gr \qquad \therefore\quad v=2\sqrt{gr}$$

これにあたえられた数値を代入すると，

$$v=2\times\sqrt{9.8\times1.0}=6.26\cdots\fallingdotseq6.3\ \text{[m/s]}$$

(2)　糸の場合は，棒とはちがいたるむので，糸がたるむことなく回転するには，最高点で遠心力をもたなくてはならない。そのためには，$v'>0$ となる必要がある。すなわち，最高点で，小球が運動エネルギーをもっていることになる。

(1)と同様にして，力学的エネルギー保存の法則より，

$$\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}mv'^2+mg(2r) \qquad \cdots\cdots\cdots①$$

糸がたるまないために必要な最高点での速度 v'〔m/s〕は，最高点で小球にはたらく遠心力と重力のつりあいより，

$$m\frac{v'^2}{r}=mg \qquad \therefore\quad v'^2=gr \qquad \cdots\cdots\cdots②$$

②を①に代入すると，

$$\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m\cdot gr+2mgr$$

$$v^2=gr+4gr=5gr$$

$$\therefore\quad v=\sqrt{5gr}$$

これにあたえられた数値を代入すると，

$$v=\sqrt{5\times9.8\times1.0}=7.0\ \text{[m/s]}$$

関連§番号 ⇨ M11(6410)

定 期 試 験 詳 解

M01～M11
第４回－標準問題－
【100点満点】

1 (0401) 各５点，計20点

(1) 1.9 s (2) 1.1 N (3) 1.7 m/s (4) 0.54 m

解説

(1) 糸の長さを l〔m〕，鉛直方向と糸のなす角を θ とすると，円すい振り子の周期 T〔s〕は，次の式で表される。

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l\cos\theta}{g}}$$

これにあたえられた数値を代入すると，

$$T=2\times3.14\times\sqrt{\frac{1.0\times\cos30^\circ}{9.8}}$$

$$=2\times3.14\times\sqrt{\frac{1.0\times\sqrt{3}}{9.8\times2}}\fallingdotseq2\times3.14\times\sqrt{\frac{1.0\times1.73}{9.8\times2}}$$

$$=1.86\cdots\fallingdotseq1.9\,[\mathrm{s}]$$

(2) 右図のように糸の張力を S，向心力を F とすると，次の関係が成り立つ。

$S\sin\theta=F$ ………①

$S\cos\theta=mg$ ………②

①÷②より， $\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{F}{mg}$

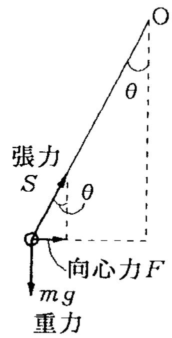
$\therefore\ F=mg\tan\theta$

これにあたえられた数値を代入すると，

$$F=0.20\times9.8\times\tan30^\circ$$

$$=0.20\times9.8\times\frac{1}{\sqrt{3}}=0.20\times9.8\times\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\fallingdotseq0.20\times9.8\times\frac{1.73}{3}=1.13\cdots\fallingdotseq1.1\,[\mathrm{N}]$$



(3) 円すい振り子の円運動の半径を r〔m〕，おもりの回転する速さを v〔m/s〕，おもりの質量を m〔kg〕とすると，おもりにはたらく向心力 F〔N〕は，次の式で表される。

$$F=m\frac{v^2}{r}\qquad\therefore\ v=\sqrt{\frac{Fr}{m}}$$

ここで，$r=l\sin30^\circ=1.0\times\dfrac{1}{2}=0.50$〔m〕，$m=0.20$〔kg〕，(2)の結果より，$F=1.13$〔N〕であるから，

$$v=\sqrt{\frac{1.13\times0.50}{0.20}}=1.68\cdots\fallingdotseq1.7\,[\mathrm{m/s}]$$

(4) おもりは，P 点から水平方向に初速度 $v=1.68$〔m/s〕でとび出し，放物運動をして Q 点に到達することになる。このとき，P 点から鉛直方向には自由落下するから，$y=\dfrac{1}{2}gt^2$ より，

$$t=\sqrt{\frac{2y}{g}}=\sqrt{\frac{2\times0.50}{9.8}}=0.319\cdots\fallingdotseq0.32\,[\mathrm{s}]$$

OQ の距離を x〔m〕とすると，水平方向には初速度 v と同じ大きさで等速直線運動をすることから，

$$x=vt=1.68\times0.319=0.535\cdots\fallingdotseq0.54\,[\mathrm{m}]$$

関連§番号 ⇨ M03(6130)

2 (0402) 各4点，計20点

(1) $\dfrac{mg}{x_0}$〔N/m〕　(2) $\dfrac{\pi}{2}\sqrt{\dfrac{Mx_0}{mg}}$〔s〕

(3) $\dfrac{mgx}{Mx_0}$〔m/s^2〕　(4) P→Rのときと，P→Qのとき

(5) $x\sqrt{\dfrac{mg}{Mx_0}}$〔m/s〕

解説

(1) ばね定数を k〔N/m〕とする。このばねは m〔kg〕のおもりを下げると x_0〔m〕のびることから，次の式が成り立つ。

$$mg = kx_0 \qquad \therefore\ k=\frac{mg}{x_0}\text{〔N/m〕}$$

(2) ばね定数 k〔N/m〕のばねに質量 M〔kg〕のおもりをつけてなめらかな水平面上で単振動させたとき，周期 T〔s〕は，次の式で表される。

$$T=2\pi\sqrt{\frac{M}{k}}$$

これに(1)の結果を代入すると，

$$T=2\pi\sqrt{\frac{M}{\frac{mg}{x_0}}}=2\pi\sqrt{\frac{Mx_0}{mg}}\text{〔s〕}$$

一方，PQ間は $\dfrac{T}{4}$〔s〕であるので，これを t〔s〕とおくと，

$$t=\frac{T}{4}=\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{Mx_0}{mg}}\text{〔s〕}$$

(3) この単振動の振幅を A，角振動数を ω とすると，加速度 a は，次の式で表される。

$$a=-A\omega^2\sin\omega t$$

この式より，$-1\leqq\sin\omega t\leqq 1$ であるから，a の最大値は $A\omega^2$ となる。

ここで，

$$\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{2\pi\sqrt{\frac{Mx_0}{mg}}}=\sqrt{\frac{mg}{Mx_0}} \qquad \cdots\cdots\cdots①$$

一方，ばねを自然の長さより x〔m〕だけのばしてはなし，振動させたことから，この単振動の振幅は x〔m〕である。よって，

$$A=x\text{〔m〕} \qquad \cdots\cdots\cdots②$$

以上のことから，加速度の最大値 a_{max} は，次のようになる。

$$a_{max}=A\omega^2=x\times\left(\sqrt{\frac{mg}{Mx_0}}\right)^2=\frac{mgx}{Mx_0}\text{〔m/s}^2\text{〕}$$

(4) 仕事がマイナスになるのは，加わる力と移動する向きが逆のときである。

加わる力の向きは，振動の中心がP点で，はなした点がQ点だから，

Q→Pのとき，　左向き　(左向きに移動)

P→Rのとき，　右向き　(左向きに移動)

R→Pのとき，　右向き　(右向きに移動)

P→Qのとき，　左向き　(右向きに移動)

よって，P→Rのときと，P→Qのときである。

(5) この単振動の速度を v とすると，v は次の式で表される。

$$v=A\omega\cos\omega t$$

この式で，$-1\leqq\cos\omega t\leqq 1$ であるから，v の最大値は $A\omega$ となる。

よって，速度の大きさの最大値を v_{max} とすると，①，②より，

$$v_{max}=A\omega=x\sqrt{\frac{mg}{Mx_0}}\text{〔m/s〕}$$

別解

この単振動の状況から，振動の中心は点 P で，点 P を通るとき，速度は最大になることがわかる。よって，このときの速度を v_{max} とすると，力学的エネルギー保存の法則より，次の式が成り立つ。

$$\frac{1}{2}kA^2=\frac{1}{2}M(v_{max})^2$$

$$\therefore\quad v_{max}=A\sqrt{\frac{k}{M}}$$

これに $A=x$〔m〕と，(1)の結果を代入すると，

$$v_{max}=x\times\sqrt{\frac{mg}{x_0}\times\frac{1}{M}}=x\sqrt{\frac{mg}{Mx_0}}\ \text{〔m/s〕}$$

関連§番号 ⇨ M05(6220)

3 (0403) (1)各 6 点，(2) 8 点，計 20 点

(1) 大きさ…0.40 N，向き…右向き　(2) 0.32 Hz

解説

(1) このばねのばね定数を k〔N/m〕とし，物体を静止の位置から右へ x〔m〕だけ動かしたとする。右向きを正とすると，

左のばねが物体におよぼす力は，ばねが x〔m〕だけのびているので，

$-kx$〔N〕

右のばねが物体におよぼす力は，ばねが x〔m〕だけ縮んでいるので，

$-kx$〔N〕

したがって，物体にはたらくこれらの力の合力 F〔N〕は，

$F=-kx-kx=-2kx$　………①

この式に，$k=2.0$〔N/m〕，$x=0.10$〔m〕を代入すると，

$F=-2\times2.0\times0.10=-0.40$〔N〕

ここで，$F<0$ となることから，その向きは，左向きである。

この力に逆らって右へ 0.10 m ずらすのであるから，右向きに 0.40 N の大きさの力で引けばよい。

(2) ①の式で $K=2k$ とおくと，

$F=-Kx$

となり，この物体は単振動することがわかる。この物体の質量を m〔kg〕とすると，周期 T〔s〕は，次の式で表される。

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}=2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}}\quad\text{………②}$$

一方，単振動の振動数を f〔Hz〕とすると，次の関係がある。

$$f=\frac{1}{T}$$

これに②を代入すると，

$$f=\frac{1}{2\pi\sqrt{\dfrac{m}{2k}}}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2k}{m}}$$

これに，$k=2.0$〔N/m〕，$m=1.0$〔kg〕を代入すると，

$$f=\frac{1}{2\times3.14}\times\sqrt{\frac{2\times2.0}{1.0}}=0.318\cdots\fallingdotseq0.32\ \text{〔Hz〕}$$

関連§番号 ⇨ M06(6250)

4 (0404) (1)(2)各 6 点，(3) 8 点，計 20 点

(1) $G\dfrac{Mm}{r^2}$〔N〕　(2) $mr\left(\dfrac{2\pi}{T}\right)^2$〔N〕$\left(\text{または，}\dfrac{4\pi^2mr}{T^2}\text{〔N〕}\right)$

(3) 万有引力が向心力となるから，$F=f$ より，

$$G\frac{Mm}{r^2}=mr\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2$$

$$\therefore\quad T^2=\frac{4\pi^2}{GM}r^3$$

ここで，$\frac{4\pi^2}{GM}$ は一定である。したがって，公転周期の2乗は両天体間の距離の3乗に比例している。よって，ケプラーの第3法則が成り立っている。

解説

(1) 万有引力を F とすると，　$F=G\frac{Mm}{r^2}$〔N〕

(2) 円運動の角速度を ω とし，向心力を f とすると，

$$f=mr\omega^2=mr\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\text{〔N〕}$$

関連§番号 ⇨ M09

5 (0405)　10点

$\frac{5}{2}r$

解説

求める高さを h とし，小球の質量を m，A点で小球がもつ速さを v とする。最初の位置とA点の位置で，力学的エネルギーが保存されるから，B点の位置を重力による位置エネルギーの基準とすると，次の式が成り立つ。ただし，重力加速度の大きさを g とする。

$$mgh=\frac{1}{2}mv^2+mg\times 2r\quad\cdots\cdots\text{①}$$

一方，小球がA点を通過するためには，A点において物体が落ちないために，重力に打ちかつだけの遠心力をもたなくてはならない。よって，重力と遠心力とのつりあいより，

$$m\frac{v^2}{r}=mg\quad\therefore\quad v^2=gr\quad\cdots\cdots\text{②}$$

②を①に代入すると，

$$mgh=\frac{1}{2}mgr+2mgr$$

$$\therefore\quad h=\frac{5}{2}r$$

関連§番号 ⇨ M11(6410)

6 (0406)　10点

1.12×10^4 m/s

解説

地表にある質量 m〔kg〕のロケットのもつ万有引力による位置エネルギー U〔J〕は，基準を無限遠にとり，地球の質量を M〔kg〕，地球の半径を R〔m〕，万有引力定数を G〔N·m^2/kg^2〕とすると，

$$U=-G\frac{Mm}{R}$$

ロケットの初速度を v_0〔m/s〕とすると，地表でロケットのもつ運動エネルギー E_k〔J〕は，

$$E_k=\frac{1}{2}mv_0^2$$

無限遠方では，ロケットのもつ運動エネルギーは0，位置エネルギーも0なので，力

学的エネルギー保存の法則より，$U+E_k=0$ となるから，

$$-G\frac{Mm}{R}+\frac{1}{2}m{v_0}^2=0 \quad \cdots\cdots\cdots①$$

また，地表において質量 m〔kg〕の物体にはたらく重力と万有引力が等しいので，

$$mg=G\frac{Mm}{R^2} \quad \therefore \quad GM=gR^2 \quad \cdots\cdots\cdots②$$

②を①に代入すると，

$$-\frac{gR^2m}{R}+\frac{1}{2}m{v_0}^2=0$$

$${v_0}^2=2gR \quad \therefore \quad v_0=\sqrt{2gR}$$

ここで，$g=9.80$〔m/s^2〕，$R=6.38\times10^6$〔m〕であるから，これを代入すると，

$$v_0=\sqrt{2\times9.80\times6.38\times10^6}$$
$$=1.118\cdots\times10^4\fallingdotseq1.12\times10^4 \text{〔m/s〕}$$

関連§番号 ⇨ M11(6430)

定期試験詳解

M01～M11
第5回ー実力問題ー
【100点満点】

1 (0501) 各5点，計20点

(1) $k(l_1-l_0)$ (2) $\dfrac{k(l_1-l_0)}{m}$ (3) $\sqrt{\dfrac{kl_1(l_1-l_0)}{m}}$

(4) $\sqrt{\dfrac{k(l_1-l_0)}{ml_1}}$

解 説

(1) ばねにはたらく力は弾性力で，これが向心力となって等速円運動をしている。ばねののびた長さは l_1-l_0 であるから，ばねの弾性力は，$k(l_1-l_0)$ である。

(2) ばねの向心力は(1)より，$k(l_1-l_0)$ であるから，次の運動方程式が成り立つ。

$$ma=k(l_1-l_0) \qquad \therefore \quad a=\frac{k(l_1-l_0)}{m}$$

(3) 等速円運動をしている物体の加速度と速度の関係から，$a=\dfrac{v^2}{l_1}$ である。このことと(2)より，

$$a=\frac{k(l_1-l_0)}{m}=\frac{v^2}{l_1} \qquad \therefore \quad v=\sqrt{\frac{kl_1(l_1-l_0)}{m}}$$

(4) 速度と角速度の関係から，

$$v=l_1\omega \qquad \therefore \quad \omega=\frac{v}{l_1}=\sqrt{\frac{k(l_1-l_0)}{ml_1}}$$

関連§番号 ⇨ M02 (6090)

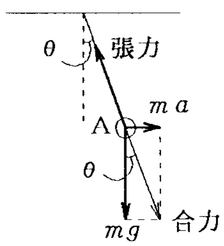
2 (0502) 各4点，計20点

(1) 慣性力 (2) $m\sqrt{g^2+a^2}$ (3) $\dfrac{a}{g}$ (4) $2\pi\sqrt{\dfrac{l}{\sqrt{g^2+a^2}}}$

(5) $2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$

解 説

(1) 電車に乗っている人が観測したときは，物体は静止したように見える。つまり，慣性力がはたらいて見える。



(2) 糸の張力と重力 mg，慣性力 ma のつりあいは，右の図のようになる。よって，重力と慣性力の合力の大きさは，

$$\sqrt{(mg)^2+(ma)^2}=m\sqrt{g^2+a^2}$$

(3) $\tan\theta=\dfrac{ma}{mg}=\dfrac{a}{g}$

(4) このときの見かけの重力加速度 g' の大きさは，$\sqrt{g^2+a^2}$ であるから，周期 T は，

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g'}}=2\pi\sqrt{\frac{l}{\sqrt{g^2+a^2}}}$$

(5) 等速度運動のときは，慣性力がはたらかないので，$T=2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$

関連§番号 ⇨ M03 (6100)，M07 (6300)

3 (0503) 各5点，計20点

㋐ (1) 6.3 m/s^2 (2) 7.1 km/s (3) 1.2×10^2 分 ㋑ $\sqrt[3]{\dfrac{g}{R\omega^2}}$

解 説

㋐ (1) 万有引力定数を G，地球の質量を M，人工衛星の質量を m，$1.25R$ の高さでの重力加速度の大きさを g' とすれば，

$$mg' = \frac{GMm}{(1.25R)^2} \qquad \therefore \quad g' = \frac{GM}{(1.25R)^2}$$

ここで，$GM = gR^2$ より，$g' = g \times \frac{1}{(1.25)^2} = \frac{9.8}{(1.25)^2} \fallingdotseq 6.3$ [m/s²]

(2) 遠心力と万有引力がつりあっているので，人工衛星の速さを v とすれば，

$$\frac{mv^2}{1.25R} = \frac{GMm}{(1.25R)^2}$$

$$\therefore \quad v = \sqrt{\frac{GM}{1.25R}} = \sqrt{\frac{Rg}{1.25}} = \sqrt{\frac{6.4\times10^6\times9.8}{1.25}}$$

$$\fallingdotseq 7.1\times10^3 \text{ [m/s]} = 7.1 \text{ [km/s]}$$

(3) 角速度 ω は，$\omega = \frac{v}{1.25R}$ で表される。よって，周期 T は，

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi(1.25R)}{v} = \frac{2\times3.14\times1.25\times6.4\times10^6}{7.1\times10^3}$$

$$\fallingdotseq 7.1\times10^3 \text{ [s]} \fallingdotseq 1.2\times10^2 \text{ [分]}$$

㋑ 人工衛星の角速度と地球の角速度は等しく ω である。人工衛星の軌道半径は aR であるから，遠心力と万有引力のつりあいより，

$$maR\omega^2 = \frac{GMm}{(aR)^2}$$

$GM = gR^2$ より，$\quad \therefore \quad a = \sqrt[3]{\frac{GM}{R^3\omega^2}} = \sqrt[3]{\frac{g}{R\omega^2}}$

関連§番号 ⇨ M10 (6400)

4 (0504) 各4点，計20点

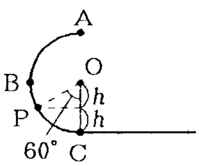
(1) $\sqrt{2gh}$ (2) 60° (3) $\sqrt{2gh}$ (4) $\sqrt{2gh}$ (5) $4h$

解 説

(1) 点Cでの速さを v_1 とすると，力学的エネルギー保存則より，

$$mgh = \frac{1}{2}mv_1^2 \qquad \therefore \quad v_1 = \sqrt{2gh}$$

(2) 質点はなめらかな面上を運動するので，摩擦力がはたらかない。したがって，力学的エネルギーが保存されるので，質点は半球面上を点Sと同じ高さの位置まで達する。よって，点Pの高さも h となる。

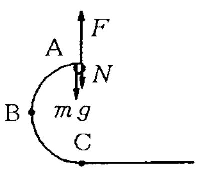


したがって， ∠POC＝60°

(3) 初速度を v_2 とすると，力学的エネルギー保存則より，

$$mg(2h) = mgh + \frac{1}{2}mv_2^2 \qquad \therefore \quad v_2 = \sqrt{2gh}$$

(4) 点Aでの速さを v_3，半円から受ける抗力を N とすると，抗力 N と重力の和が遠心力 F とつりあっているので，



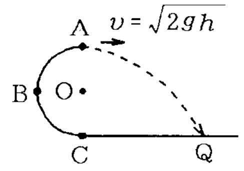
$$N + mg = F = m\frac{v_3^2}{2h}$$

$$\therefore \quad N = m\frac{v_3^2}{2h} - mg$$

かろうじて点Aに到達するのだから，その瞬間，抗力 $N=0$ としてよい。したがって，

$$N = m\frac{v_3^2}{2h} - mg = 0 \qquad \therefore \quad v_3 = \sqrt{2gh}$$

(5) 点 A は半円の頂点であるから，半円を離れたときの質点の運動は初速度 $\sqrt{2gh}$ の水平投射と考えてよい。点 Q に達するまでの時間を t とすると，鉛直方向，水平方向について，次の 2 式が成り立つ。



$$4h=\frac{1}{2}gt^2 \qquad \overline{CQ}=\sqrt{2gh}\,t$$

この 2 式より，t を消去すると，　$\overline{CQ}=4h$

関連§番号 ⇨ M11 (6410)

5 (0505)　(1) 4 点，(2)各 4 点，(3)各 4 点，計 20 点

(1)　$2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k_1+k_2}}$　　(2)　点 O　　$A\sqrt{\dfrac{k_1+k_2}{m}}$

(3)　$\dfrac{k_1+k_2}{m}A$　　右向き

解 説

(1) つりあいの位置点 O で左右のばねがそれぞれ x_1，x_2 だけのびているとする。左右のばねが物体におよぼす力はつりあっているから，

$k_1x_1=k_2x_2$　(つりあいの式)

次に，点 O から x だけ右へずれた点では，左のばねののびは，x_1+x，右のばねののびは，x_2-x である。よって，このとき物体に作用する力 F は，右を正にとると，

$$F=-k_1(x_1+x)+k_2(x_2-x)$$

つりあいの式を代入すると，

$$F=-(k_1+k_2)x$$

$k=k_1+k_2$ であるから，$T=2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$ に代入して周期を求める。

$$\therefore\ T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1+k_2}}$$

(2) 物体の速さが最大になるのは，振動の中心になる点 O である。そのときの速さを v_0 とする。また，点 P での左右のばねののびはそれぞれ x_1+A，x_2-A である。点 P と点 O で力学的エネルギーは保存則されるから，

$$\frac{1}{2}k_1(x_1+A)^2+\frac{1}{2}k_2(x_2-A)^2=\frac{1}{2}k_1x_1{}^2+\frac{1}{2}k_2x_2{}^2+\frac{1}{2}mv_0{}^2$$

これを展開して，つりあいの式 $k_1x_1=k_2x_2$ を代入すると，

$$\frac{1}{2}k_1A^2+\frac{1}{2}k_2A^2=\frac{1}{2}mv_0{}^2 \qquad \therefore\ v_0=A\sqrt{\frac{k_1+k_2}{m}}$$

(3) (1)で x ずれた点での物体の加速度を a とすれば，運動方程式は，

$$F=ma=-(k_1+k_2)x \qquad \therefore\ a=-\frac{k_1+k_2}{m}x$$

点 Q での加速度は，$x=-A$ とすればよいから，　$a=\dfrac{k_1+k_2}{m}A$

ここで，加速度は正であるから，向きは右向きである。

研 究

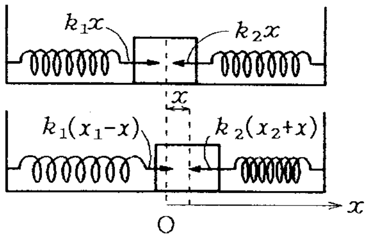
この問題の場合，つりあいの位置でばねは両方ともあらかじめのびていると仮定したが，両方とも自然長であっても，縮んでいても，変位 x で物体にはたらく力は同じである。よって，周期，運動方程式も力学的エネルギー保存則も同じ式になる。試してみよう。

① つりあいの位置でばねが両方とも自然長の場合

つりあいの位置では物体にばねの弾性力ははたらいていないので，つりあいの式はない。次に，つりあいの位置より右へ x だけずれた点での物体にはたらく力は，

$$F=-k_1x+k_2x=-(k_1+k_2)x$$

② つりあいの位置でばねが両方とも縮んでいる場合



つりあいの位置点 O での左右のばねの縮みをそれぞれ，x_1，x_2とすると，つりあいの式 $k_1x_1=k_2x_2$ が成り立つ。

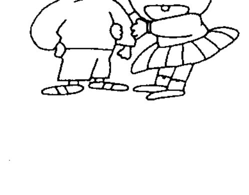
次に，右の方へ x だけずれた点での物体にはたらく力を考える。左のばねの縮みは x_1-x，右のばねの縮みは x_2+x である。

したがって，ばねにはたらく力 F は，右向きを正として，

$$F=k_1(x_1-x)-k_2(x_2+x)$$

これにつりあいの式を代入して，$F=-(k_1+k_2)x$ が成り立つ。

関連§番号 ⇨ M06 (6250)，M11 (6420)



教育社

TRAINING PAPER

DAILY PROGRAM

高校理科／物理II