TRAINING PAPER

DAILY® PROGRAM

高校数学
数 学 Ⅰ　1

(見本)

2次関数① 目次

KYOIKUSHA

TRAINING PAPER®

高校数学　数学 I

効果的な使い方

〈1セクションの構成〉

● 1セクション(§1，§2など)の学習は，次のようになっています。
これが，ほぼ1日の学習に相当します。

学習内容の説明

新しい学習内容をわかりやすく説明してあります。また，定理や公式を簡潔にまとめています。
➡よく読んで，しっかりと理解しよう

⇩

基本例題・例題

定理や公式がどのように使われるかを具体的に示してあります。基本例題は基本的な問題，例題は標準的な問題です。
➡考え方や解答のポイントをおさえよう

⇩

トレーニング

例題をふまえて，実際に問題を解く練習です。やさしい問題からむずかしい問題へ，ステップをふんで作られています。
問題番号に * がついているのは標準問題，無印は基本問題です。
(ここまでが1セクションに2～3回程度くり返されます。)

⇩

最後に，「もっと力をつけよう」がはいっていることがあります。ここでは，総合問題や，やや程度の高い問題を扱います。

解　　答

巻末に《解答》とくわしい解き方を書いた《詳解》がついています。
問題番号の右の4桁数字は，《問題》，《解答》，《詳解》で共通です。
答え合わせのとき活用してください。
➡答え合わせも学習のうち，1問1問しっかりと

〈効果的な使い方〉

❈ 授業の進度に合わせて学習していこう

学習内容は，標準的な授業進度に合わせて配列されていますから，復習用としておおいに役立ててください。また，新しい学習内容でもていねいな説明がついていますから，予習用，自学自習用として利用することもできます。

時間に余裕のない場合は，よくわからないところにしぼって，重点的に学習しましょう。

❈ 自分なりに使い方を工夫しよう

本文は表の部分のみ印刷してあります。1ページを完全にやり終えたら，はがしてしまうこともできます。裏の部分は解答を書き込んだり，補足を書き込んだりして自由に使ってください。自分なりに使い方を工夫しましょう。

❈ 定期試験の前には，弱点の部分を重点的に復習しよう

ふだんの学習でまちがえたところをチェックし，その問題を全部もう一度解きます。

§1　関数とそのグラフ(1)　関数，定義域・値域，関数のグラフ

私たちの身の回りの現象には，一方を決めると他方もそれによって定まるような，互いに関連しているものが多く見うけられます。さまざまな現象を解明するには，このような相互関係を調べることがたいせつで，その基本となるのが関数の概念なのです。ここからは，この関数について学習していきましょう。

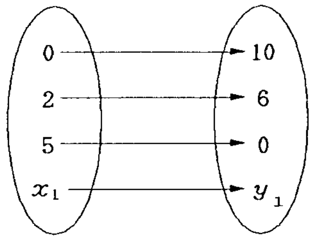
➜初めに，中学校ですでに学習した，関数とは何か，ということの復習をしましょう。

〔1〕関数とその値

◇関数とは

いま，10 m^3 の水がはいっている水槽から，毎分 2 m^3 の割合で水槽がからになるまで水をくみ出す場合について考えてみましょう。

くみ出し始めてから x 分後に水槽に残っている水の量を y m^3 とすると，x と y の間には $y=10-2x$ という関係があります。ここで



$x=0$ のとき，$y=10-2\cdot0=10$

$x=2$ のとき，$y=10-2\cdot2=6$

$x=5$ のとき，$y=10-2\cdot5=0$

というように，x の値を定めるとそれに応じて y の値がただ1つだけ定まります。

このように，2つの変数 x，y があって，変数 x の値を定めると変数 y の値がただ1つだけ定まるとき，y は x の関数であるといいます。また，このとき，変数 x を独立変数，変数 y を従属変数といいます。

一般に，y が x の関数であることを

$y=f(x)$，$y=g(x)$

などの記号で表します。そして，$y=f(x)$ で表される関数を簡単に

関数 $y=f(x)$，または 関数 $f(x)$

といいます。

➜上の例の関数を $y=f(x)$ とすると

$f(x)=10-2x$

となります。

◇関数の値

関数 $y=f(x)$ において，$x=a$ に対応する y の値を $x=a$ における関数の値といい，$f(a)$ で表します。

たとえば，関数 $y=f(x)$ が，$f(x)=10-2x$ で与えられているとき

$x=2$ におけるこの関数の値は $f(2)=10-2\cdot2=6$

$x=5$ におけるこの関数の値は $f(5)=10-2\cdot5=0$

$x=a$ におけるこの関数の値は $f(a)=10-2a$

となります。

➜関数とはどんなものか思い出しましたか。では，まず次の基本例題で関数の値を求めてみましょう。

基本例題 1 　　　　**関数の値**

関数 $y=f(x)$ が $f(x)=2x^2-3x+1$ で与えられているとき，次の値を求めなさい。

(1)　$f(3)$　　(2)　$f(0)$　　(3)　$f(-1)$　　(4)　$f(a-1)$

◆ 考え方 ◆

$f(x)=2x^2-3x+1$ の x に，それぞれ 3，0，-1，$a-1$ を代入します。

◆ 解　答 ◆

(1)　$f(3)=2\cdot3^2-3\cdot3+1=10$

(2)　$f(0)=2\cdot0^2-3\cdot0+1=1$

(3)　$f(-1)=2\cdot(-1)^2-3\cdot(-1)+1=6$

(4)
$$\begin{aligned} f(a-1)&=2\cdot(a-1)^2-3\cdot(a-1)+1 \\ &=2(a^2-2a+1)-3a+3+1 \\ &=2a^2-7a+6 \end{aligned}$$

➜x の値を $f(x)$ に代入すれば求められますね。
いろいろな関数の値を，トレーニングで求めてみましょう。

■■■トレーニング■■■

1　(0001)

次の関数について，$f(2)$，$f(3)$ の値をそれぞれ求めなさい。

(1)　$f(x)=2x-30$　　　(2)　$f(x)=3x^2-4x-5$

2　(0002)

次の関数について，$f(0)$，$f(1)$ の値をそれぞれ求めなさい。

(1)　$f(x)=ax+b$　　　(2)　$f(x)=ax^2+bx+c$

➜係数が文字の関数でも，解き方はまったく同じですよ。

3　(0003)

関数 $f(x)=2x^2-3x+1$ について，次の値を求めなさい。

(1)　$f(a)$　　　(2)　$f(a+1)$

4　(0004)

$f(x)=-2x^2+3x+1$ のとき，次の式で表される x の関数 y を求めなさい。

(1)　$y=f(-x)$　　　(2)　$y=f(x-1)$

➜では，関数の変域や，関数の値の変化の様子をわかりやすく知るには，どのようにすればよいでしょうか。

〔2〕関数のグラフ

◇関数の定義域と値域

$10\mathrm{m}^3$ の水がはいっている水槽から毎分 $2\mathrm{m}^3$ の割合で水を x 分間くみ出したとき，水槽に残っている水の量を y m^3 とすると，y は x の関数となり，次の式で表されますね。

$y=10-2x$

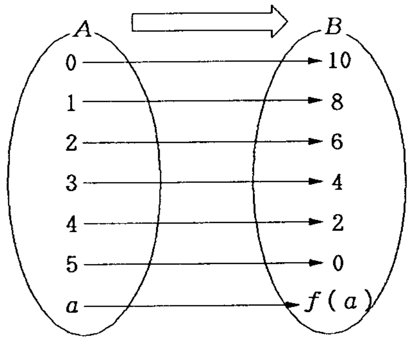
このとき，5 分後には水槽の水はなくなりますから，変数 x のとりうる値の範囲は

$0 \leqq x \leqq 5$

になります。また，変数 y の値は x の値によって変化しますが，そのとりうる値の範囲は

$0 \leqq y \leqq 10$

となります。



$A: 0 \leqq x \leqq 5$　　$B: 0 \leqq y \leqq 10$

このように，関数 $y=f(x)$ において，独立変数 x のとりうる値の範囲をこの関数の定義域といいます。また，x が定義域のすべての値をとるときに従属変数 y，すなわち $f(x)$ のとりうる値の範囲をこの関数の値域といいます。

上の例では，定義域が $0 \leqq x \leqq 5$，値域が $0 \leqq y \leqq 10$ ですが，定義域をはっきり示してこの関数を書くと，次のようになります。

$y=10-2x \quad (0 \leqq x \leqq 5)$

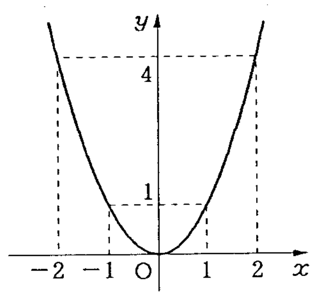
しかし，ふつう，関数 $y=f(x)$ において，$f(x)$ が x の式で与えられているとき，とくにことわらなければ，この関数と定義域は，実数全体か，あるいは $f(x)$ が意味をもつような x の値全体とします。

〈注〉 有理数と無理数を合わせた“全ての数の集まり”を，実数といいます。数学 A で学ぶことですが，ここでも使うので覚えておきましょう。

◇関数 $y=x^2$ のグラフ

関数 $y=x^2$ のグラフはどのようにしてかいたでしょうか。

そうですね。x の値を -2，-1，0,1,2 などと変化させ，それに対応する y の値 4，1，0，1，4 などを求め，それらの x，y の値の組 $(-2,\ 4)$，$(-1,\ 1)$，$(0,\ 0)$，$(1,\ 1)$，$(2,\ 4)$ などを座標とする点が集まったものとして，このグラフをかきましたね。



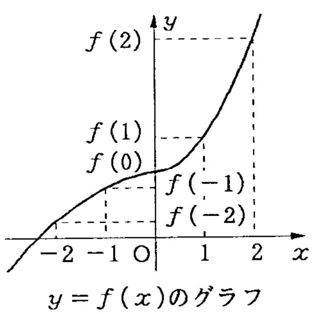
$y=x^2$ のグラフ

◇関数 $y=f(x)$ のグラフ

関数 $y=f(x)$ のグラフも，同じようにしてかくことができます。

すなわち，x，y の値の組 $(x,\ f(x))$ を座標とする点の集まりが $y=f(x)$ のグラフになります。

このように，関数 $y=f(x)$ の定義域内のおのおのの x の値，およびそれに対応する関数の値 y の組 $(x,\ y)$ を座標とする点の集まりを関数 $y=f(x)$ のグラフといいます。



$y=f(x)$のグラフ

➜中学校でも学習したように，$y=f(x)$ を満たす点をいくつかとって，その点をつないでいけば，関数のグラフがかけますね。

基本例題 2 　　関数のグラフ

次の関数のグラフをかきなさい。

(1) $y=2x$ 　　　　(2) $y=\dfrac{1}{x}$

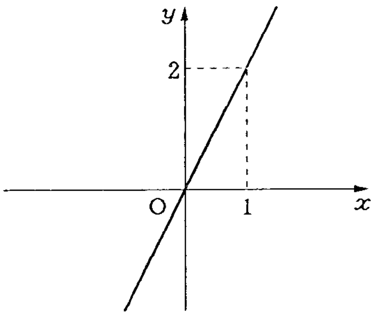
◆ 考え方 ◆

定義域が数個の要素からなる場合であれば，その要素すべてに対する関数の値をそれぞれ求めて，座標平面上に対応する x，y の組 $(x,\ y)$ を座標とする点をとっていけば，その関数のグラフはかけます。

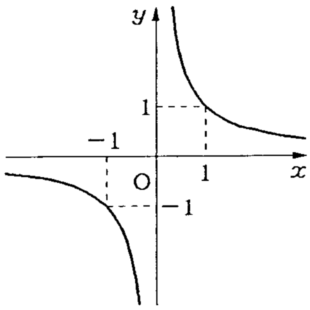
しかし，定義域が無数の要素からなるときは，定義域のすべての要素について，具体的に関数の値を求めることはできません。このようなときには，与えられた関数の意味や，x の値を変化させたときに y の値がどのように変化していくかを考えて，グラフをかいていきます。

◆ 解　答 ◆

(1)



(2)



➜(2)の関数の定義域は 0 以外の実数，値域も 0 以外の実数なので，x 座標や y 座標が 0 になる点はグラフ上にありません。

➜(2)の曲線は，双曲線とよばれています。
それでは，直線や双曲線などの関数のグラフをかく練習をもう少ししましょう。

■■■トレーニング■■■

5 (0005)

関数 $y=f(x)$ が 6 以下の自然数を定義域とし，x の正の約数の個数を $f(x)$ とするとき，$y=f(x)$のグラフをかきなさい。

6 (0006)

次の関数のグラフをかきなさい。

(1) $y=-x+2$ 　　　(2) $y=-\dfrac{1}{x}$ 　　　(3) $y=3$

➜ここでの学習は，これで終わりです。

まとめておこう！

1.　変数xの値を定めると，変数yの値がただ1つだけ定まるとき，yはxの関数であるといい，$y=f(x)$ などと表します。

2.　関数　$y=f(x)$ において，xのとりうる値の範囲を定義域，yのとりうる値の範囲を値域といいます。

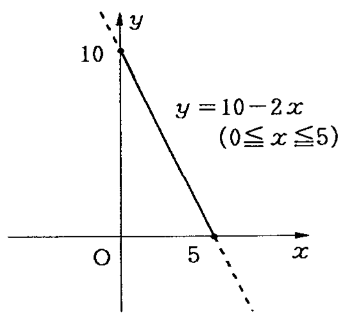
§2 関数とそのグラフ(2) 関数 $y=|x|$, $y=[x]$ のグラフなど

2つの変数 x, y があって，変数 x の値を定めると，変数 y の値がただ1つだけ定まるとき，y は x の関数であるというのでしたね。ここでは，1次関数を中心に，いろいろな関数のグラフをかいたり，関数を決定する問題について学習しましょう。

➔まず，関数 $y=f(x)$ において，定義域に制限がある場合について学習しましょう。

〔1〕定義域に制限のついた関数

◇関数 $y=f(x)$ $(a \leqq x \leqq b)$ のグラフ



定義域が $0 \leqq x \leqq 5$, である関数 $y=10-2x$ は，単に

$$y=10-2x \quad (0 \leqq x \leqq 5)$$

と書きましたね。このとき，x は0から5までの値しかとらないので，y の値は10から減っていき，0までとなります。

よって，この関数のグラフは右の図の実線部分になりますね。

このように，関数 $y=f(x)$ $(a \leqq x \leqq b)$ のグラフは，関数 $y=f(x)$ のグラフの $a \leqq x \leqq b$ に対応する部分になります。

なお，右の図で，2点 $(0, 10)$ と $(5, 0)$ は•となっていますが，今後は，グラフの端点は，•の場合はふくみ，∘の場合はふくまないものとします。

◇関数 $y=f(x)$ $(a \leqq x \leqq b)$ の値域

一般に，関数の値域は，関数のグラフから求めることができます。

関数 $y=10-2x$ $(0 \leqq x \leqq 5)$ のグラフは右上の図ですが，y は0から10までの値をとっていますから，この関数の値域は

$$0 \leqq y \leqq 10$$

とわかりますね。

ただし，グラフから関数の値域を求めるときには，端点をふくむのかふくまないのかに注意しましょう。

➔グラフをよく見れば，関数の値域がわかるのですね。ですから，グラフをかくときは，端点をふくむかふくまないかまで正確にかきましょう。

➔それでは，定義域に制限のある関数のグラフとその値域について，次の基本例題で考えてみましょう。
まず，定義域の範囲でグラフをかくこと。そして，そのグラフから値域を求めましょう。

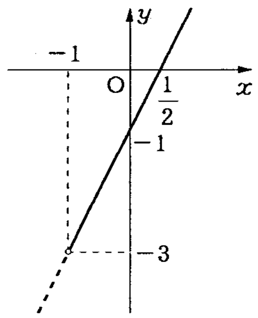
基本例題1 定義域に制限のついた関数のグラフ

次の関数のグラフをかきなさい。また，その関数の値域を求めなさい。

(1)　$y=2x-1$　($x>-1$)　　　　　　　(2)　$y=\dfrac{4}{x}$　($-1\leqq x\leqq 2$,　$x\neq 0$)

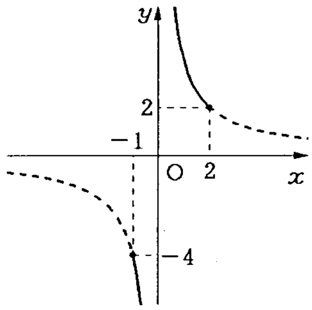
◆解　答◆

(1)　この関数のグラフは，右の図の実線部分になる。
この関数の値域は，グラフより
$y>-3$



➜定義域が $x>-1$ なので，点 $(-1,\ -3)$ はふくみません。

(2)　この関数のグラフは，右の図の実線部分になる。
この関数の値域は，グラフより
$y\leqq -4$，$2\leqq y$



➜関数のグラフや値域を求める練習をしましょう。

■■■トレーニング■■■

1　(0007)
次の関数のグラフをかき，その値域を求めなさい。

(1)　$y=\dfrac{1}{2}x-2$ ($x\leqq 4$)

(2)　$y=-1$ ($-2\leqq x<3$)

(3)　$y=\dfrac{1}{x}$ ($x\geqq 2$)

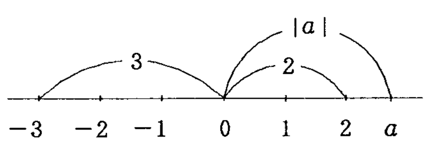
➜関数のグラフを見ると，その関数がどのような値をとっていくかがひとめでわかりますね。それでは，もうすこし複雑な式で表される関数のグラフについて考えてみましょう。

〔2〕場合分けされる関数のグラフ

◇実数の絶対値

数直線上の点と数の対応のさせ方からわかるように，2 を表す点は，原点から 2 の距離にあり，−3 を表す点は，原点から 3 の距離にありますね。

このように，数直線上で，原点から実数 a を表す点までの距離を a の絶対値といい，$|\ a\ |$ と表



します。そして，｜a｜は絶対値 a と読みます。

たとえば，2 の絶対値｜2｜=2，−3 の絶対値｜−3｜=3 です。

◇絶対値の性質

絶対値の意味から，次のようなことがいえます。

(1) $a \geqq 0$ のとき　$|a| = a$　➜ $|2| = 2$

　　$a < 0$ のとき　$|a| = -a$　➜ $|-3| = -(-3) = 3$

(2) どんな実数 a についても　$|a| \geqq 0$　➜原点からの距離だから 0 または正

(3) $|a| = 0$ となるのは　$a = 0$　➜原点からの距離が 0 なのは原点です。

◇関数 $y = |x|$ のグラフ

絶対値記号のついた式で表される関数のグラフは，どのようになるでしょう。

絶対値記号は，その中が式の場合にも，数の場合と同様に，符号によって場合分けしてはずすことができます。

$$|P| = \begin{cases} P & (P \geqq 0) \\ -P & (P < 0) \end{cases}$$

となりますね。

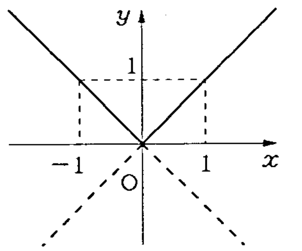
たとえば，関数 $y = |x|$ について考えてみましょう。

$x \geqq 0$ のとき　$y = x$

$x < 0$ のとき　$y = -x$

となりますから，この関数のグラフは，$x \geqq 0$ のとき，関数 $y = x$ のグラフと同じグラフになり，$x < 0$ のとき，関数 $y = -x$ のグラフと同じグラフになります。

よって，関数 $y = |x|$ のグラフは，右の図の実線部分になります。また，この関数の定義域は実数全体，値域は，グラフより，$y \geqq 0$ です。



◇関数 $y = [x]$ のグラフ

記号［　］も，初めて見る記号ですね。この記号は，ガウスの記号といって，次のように約束されています。

$[x]$ は，x を越えない最大の整数を表します。

また，$[x]$ は“ガウス x” と読みます。

たとえば，$[1.5] = 1$，$[-2.3] = -3$，$[3] = 3$ となります。

x が整数のとき
　$[x] = x$
x が整数でないとき
　$[x]$ は x よりも小さい整数のうちで最大のものになります。

関数 $y = [x]$ のグラフは，次のように場合分けすればかくことができます。

…………

$-3 \leqq x < -2$ のとき　$y = -3$

$-2 \leqq x < -1$ のとき　$y = -2$

$-1 \leqq x < 0$ のとき　$y = -1$

$0 \leqq x < 1$ のとき　$y = 0$

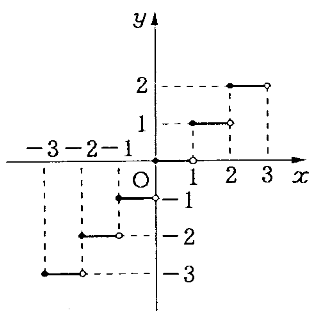
$1 \leqq x < 2$ のとき　$y = 1$

$2 \leqq x < 3$ のとき　$y = 2$

…………

$n \leqq x < n+1$ のとき　$y = n$（n は整数）

…………



よって，関数 $y = [x]$ のグラフは上の図のようになります。また，この関数の定義域は実数全体，値域は整数全体です。

→ $|x|$ や $[x]$ の定義をしっかり理解して，これらの式で表される関数のグラフをかけるようになりましょう。

例題 1　　　場合分けされる関数のグラフ

次の関数のグラフをかきなさい。また，その関数の値域を求めなさい。

(1)　$y=2|x-1|$　　　　(2)　$y=2[x]-1$

◆解　答◆

(1)　$x \geqq 1$ のとき　　→ $x-1 \geqq 0$ となるとき

$y=2(x-1)$

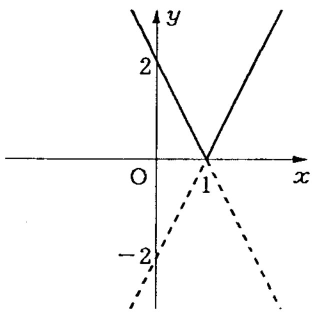
$=2x-2$

$x<1$ のとき　　→ $x-1<0$ となるとき

$y=-2(x-1)$

$=-2x+2$

よって，この関数のグラフは右の図の実線部分になる。



この関数の値域は，グラフより

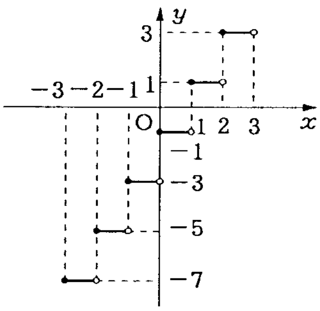
$y \geqq 0$

(2)

…………

$-3 \leqq x<-2$ のとき	$y=-7$
$-2 \leqq x<-1$ のとき	$y=-5$
$-1 \leqq x<0$ のとき	$y=-3$
$0 \leqq x<1$ のとき	$y=-1$
$1 \leqq x<2$ のとき	$y=1$
$2 \leqq x<3$ のとき	$y=3$

…………



よって，この関数のグラフは右の図のようになる。

この関数の値域は，グラフより

奇数全体

→絶対値記号やガウスの記号をふくむ関数のグラフのかき方はわかりましたね。

■■■トレーニング■■■

2　(0008)

次の関数のグラフをかきなさい。

(1)　$y=-|x|$　　　　(2)　$y=2|x|-1$

3　(0009)

次の関数のグラフをかきなさい。

(1)　$y=|2x|-4$　　　　(2)　$y=-|x-2|$

4　(0010)

次の関数のグラフをかき，その値域を求めなさい。

$y=2|x-2|-2 \quad (-1 \leqq x \leqq 3)$

5　(0011)

次の関数のグラフをかきなさい。

(1)　$y=[x]$　$(-2\leqq x\leqq 3)$

(2)　$y=-[x+1]$　$(-4<x<1)$

➜では，ここでの学習のまとめとして，次の例題に挑戦してみましょう。

例題 2　　　　**関数の決定**

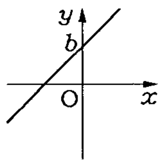
関数 $y=ax+b$ $(0\leqq x\leqq 3)$ の値域が $-4\leqq y\leqq 2$，となるように，定数 a，b の値を定めなさい。

◆ 考え方 ◆

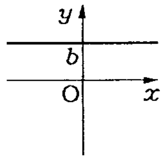
関数 $y=ax+b$ のグラフは，a，b の値によらず直線になりますが，

$$\begin{cases} a>0 \text{ のとき　右上がり} \\ a=0 \text{ のとき　} x \text{ 軸に平行} \\ a<0 \text{ のとき　右下がり} \end{cases}$$

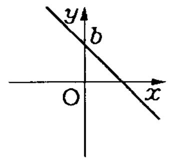
の直線になります。



$a>0$のとき



$a=0$のとき



$a<0$のとき

したがって，この3通りの場合に分けて a，b の値を求めます。

◆ 解　答 ◆

関数 $y=ax+b$ $(0\leqq x\leqq 3)$ のグラフを考えて

(i)　$a>0$ のとき

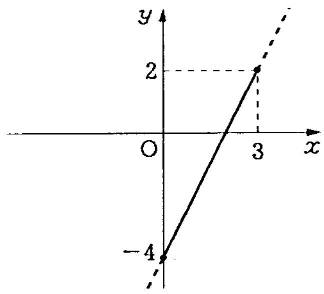
この関数のグラフは，右の図の実線部分になる。

グラフが2点 $(0,\ -4)$，$(3,\ 2)$ を通ることから

$$-4=a\cdot 0+b$$
$$2=a\cdot 3+b$$

この2式を連立させて解くと

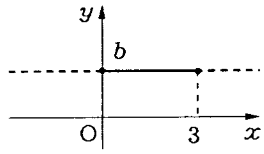
$$a=2,\quad b=-4$$



(ii)　$a=0$ のとき

この関数のグラフは右の図の実線部分になり，値域は $y=b$ になる。

よって，値域が $-4\leqq y\leqq 2$ となるような a，b は存在しない。



(iii)　$a<0$ のとき

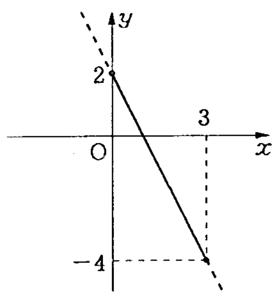
この関数のグラフは，右の図の実線部分になる。

グラフが2点 $(0,\ 2)$，$(3,\ -4)$ を通ることから

$$2=a\cdot 0+b$$
$$-4=a\cdot 3+b$$

この2式を連立させて解くと

$$a=-2,\quad b=2$$



以上のことから，求める a，b の値は

$$\begin{cases} a=2 \\ b=-4 \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} a=-2 \\ b=2 \end{cases}$$

➜このように，係数の値によって，グラフの形が変わる場合があります。正しく場合分けができるようにしておきましょう。

➜では，定義域と値域から関数を決定する問題をトレーニングしましょう。

■■■トレーニング■■■

6 ＊ (0012)

関数 $y=ax+b$ $(-2\leqq x\leqq 4)$ の値域が $-3\leqq y\leqq 0$ となるように，定数 a，b の値を定めなさい。

7 ＊ (0013)

関数 $y=\dfrac{a}{x}$ $(x\geqq 1)$ の値域が $-2\leqq y<0$ となるように，定数 a の値を定めなさい。

8 ＊ (0014)

関数 $y=|x|-a$ $(-1\leqq x\leqq 2)$ の値域が $-1\leqq y\leqq 1$ であるとき，定数 a の値を求めなさい。

➜ここでは，定義域が制限された関数や場合分けが必要な関数のグラフなどを中心に学習しました。
答え合わせをして，終わりにしましょう。

§3 2次関数のグラフ(1) $y=a(x-p)^2+q$ のグラフ

中学のときに，$y=ax^2$ で表される関数を学習しましたね。このように，x の2次式で表される関数のことを x の2次関数といって，高校で学ぶ関数の中で，もっとも重要でよく出てくるものです。ここでは，2次関数とはどのような関数なのか，そして2次関数のグラフはどのようになるのかを学習します。

→まず，中学校で学んだ $y=ax^2$ のグラフについて復習することから始めましょう。

〔1〕2次関数 $y=ax^2+q$ のグラフ

◇2次関数 $y=ax^2$ のグラフ

関数 $y=f(x)$ で，$f(x)$ が x の2次式であるとき，すなわち

$$y=ax^2+bx+c \quad (a \neq 0)$$

の形で表されるとき，この関数を x の2次関数といいます。

$y=3x^2$

$y=-2x^2+1$

$y=2x^2+3x+4$

などは，皆 x の2次関数ですね。

2次関数のグラフはどのようになるのでしょうか。

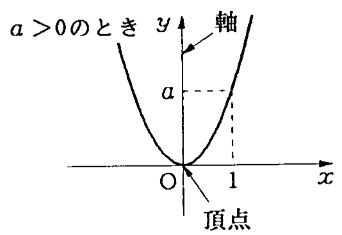
たとえば，2次関数 $y=ax^2$ のグラフは，右の図のように

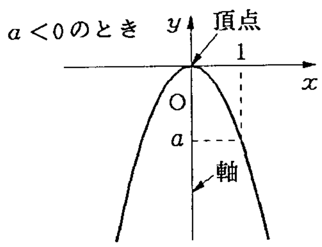
$a>0$ のとき　下に凸，$a<0$ のとき　上に凸

で，y 軸に関して対称な曲線になりますね。

このような曲線を放物線，対称軸を放物線の軸，放物線と軸の交点を放物線の頂点といいます。

ですから，2次関数 $y=ax^2$ のグラフは，軸が y 軸で頂点が原点の放物線です。



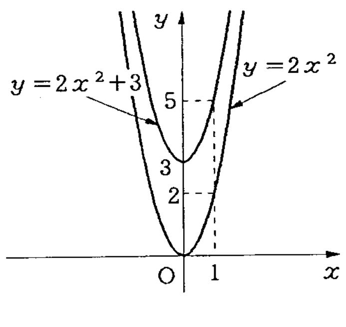


◇2次関数 $y=ax^2+q$ のグラフ

2次関数 $y=ax^2+q$ のグラフは，$y=ax^2$ のグラフと比べてどのようになるのでしょうか。

たとえば，$y=2x^2$ と $y=2x^2+3$ とで，x の値に対応する y の値を表にして比べてみましょう。

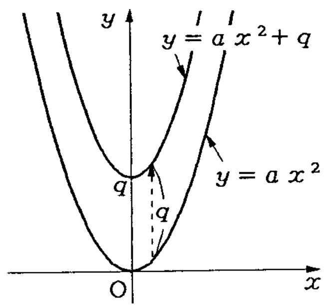
x	……	-3	-2	-1	0	1	2	3	……
$2x^2$	……	18	8	2	0	2	8	18	……
$2x^2+3$	……	21	11	5	3	5	11	21	……



この表からわかるように，x の同じ値に対応する y の値は，$2x^2+3$ のほうが $2x^2$ より常に3だけ大きい値となりますね。

したがって，2次関数 $y=2x^2+3$ のグラフは，$y=2x^2$ のグラフを y 軸方向に3だけ平行移動したものになっています。

このように，2次関数 $y=ax^2+q$ のグラフは
　　$y=ax^2$ のグラフを y 軸方向に q だけ平行移動
した放物線で
　　軸は y 軸，頂点は点 $(0,\ q)$
となります。



→ 2次関数 $y=ax^2+q$ のグラフをかくには，軸が y 軸，頂点が点 $(0,q)$ で，$a>0$ のとき下に凸，$a<0$ のとき上に凸の放物線をかけばよいのですね。

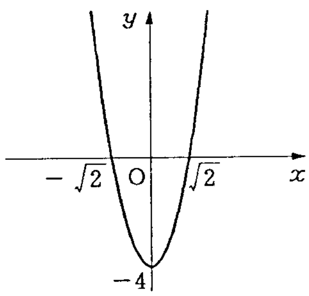
基本例題1　　2次関数 $y=ax^2+q$ のグラフ

関数 $y=2x^2-4$ のグラフをかきなさい。

◆解　答◆

関数 $y=2x^2-4$ のグラフは，関数 $y=2x^2$ のグラフを y 軸方向に -4 だけ平行移動したもので，
　　軸が y 軸，頂点が点 $(0,\ -4)$
の放物線になる。
　よって，この関数のグラフは右の図のようになる。

→ この関数のグラフと x 軸との交点の x 座標は，$y=2x^2-4$ に $y=0$ を代入して求めます。
　　$2x^2-4=0$ より　　$x=\pm\sqrt{2}$



→ $y=ax^2$ のグラフを y 軸方向に q 平行移動させると $y=ax^2+q$ のグラフになるのですね。では，トレーニングに移りましょう。

■■■トレーニング■■■

1　(0015)

次の関数のグラフをかきなさい。

(1)　$y=x^2+2$　　　(2)　$y=x^2-1$

2　(0016)

次の関数のグラフをかきなさい。

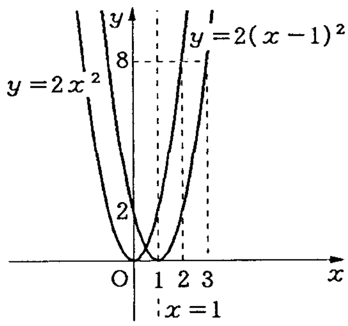
(1)　$y=3x^2-2$　　　(2)　$y=-x^2+3$　　　(3)　$y=-\frac{1}{2}x^2-2$

→ 2次関数 $y=ax^2+q$ のグラフは，$y=ax^2$ のグラフを y 軸方向に平行移動した放物線となりますね。それでは，$y=ax^2$ のグラフを x 軸方向に平行移動したグラフはどんな関数でしょう。

〔2〕2次関数 $y=a(x-p)^2$ のグラフ

◇ 2次関数 $y=2(x-1)^2$ のグラフ

2次関数 $y=2(x-1)^2$ のグラフと $y=2x^2$ のグラフを比べるために，x の値に対応する y の値を表にして比べてみましょう。



x	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	…
$2x^2$	…	18	8	2	0	2	8	18	32	…
$2(x-1)^2$	…	32	18	8	2	0	2	8	18	…

この表からもわかるように，$2(x-1)^2$ の値は，x の値が1つずつ小さいときの $2x^2$ の値と同じになっています。たとえば，$x=3$ のときの $2(x-1)^2$ の値8と，$x=2$ のときの $2x^2$ の値8が等しくなっています。

したがって，2次関数 $y=2(x-1)^2$ のグラフは，$y=2x^2$ のグラフを x 軸方向に1だけ平行移動したものになっています。また，この放物線の軸は直線 $x=1$，頂点は点 $(1,\ 0)$ ですね。

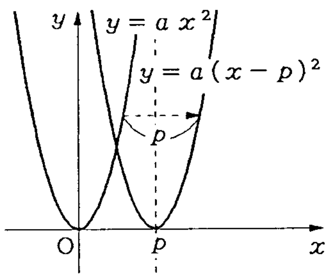
◇ 2次関数 $y=a(x-p)^2$ のグラフ

2次関数 $y=a(x-p)^2$ のグラフは，$y=2(x-1)^2$ のグラフと同様に考えて

$y=ax^2$ のグラフを x 軸方向に p だけ平行移動した放物線で

軸は直線 $x=p$，頂点は点 $(p,\ 0)$

となります。



→ $y=a(x-p)^2$ のグラフをかいてみましょう。

基本例題 2　　2次関数 $y=a(x-p)^2$ のグラフ

関数 $y=-(x+2)^2$ のグラフをかきなさい。

◆解　答◆

関数 $y=-(x+2)^2$ のグラフは，関数 $y=-x^2$ のグラフを x 軸方向に -2 だけ平行移動したもので

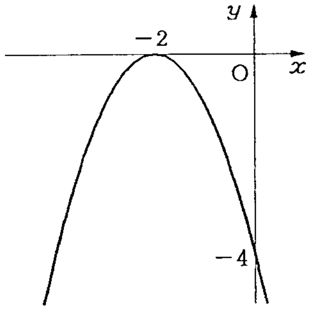
軸が直線 $x=-2$，頂点が点 $(-2,\ 0)$

の放物線となる

よって，この関数のグラフは右の図のようになる。

→この関数のグラフと y 軸との交点の y 座標は，$y=-(x+2)^2$ に $x=0$ を代入して求めます。

$y=-(0+2)^2=-4$



→ 2 次関数 $y=a(x-p)^2$ のグラフは，軸が直線 $x=p$，頂点が点 $(p,\ 0)$ で，$y=ax^2$ のグラフを x 軸方向に p だけ平行移動した放物線ですね。式の形，p の符号に注意しましょう。

■■■トレーニング■■■

3　(0017)

次の関数のグラフをかきなさい。

(1)　$y=(x-2)^2$　　(2)　$y=-2(x+2)^2$　　(3)　$y=\frac{3}{2}(x+1)^2$

→平行移動の向きをまちがえずにグラフをかくことができましたか。
次に，2 次関数 $y=a(x-p)^2+q$ のグラフを考えてみましょう。

〔3〕2 次関数 $y=a(x-p)^2+q$ のグラフ

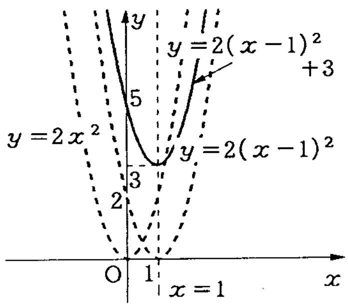
◇ 2 次関数 $y=2(x-1)^2+3$ のグラフ

2 次関数 $y=2(x-1)^2+3$ のグラフと $y=2x^2$ や $y=2(x-1)^2$ のグラフを比べるために，x の値に対応する y の値を表にして比べてみましょう。

x	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	…
$2x^2$	…	18	8	2	0	2	8	18	…
$2(x-1)^2$	…	32	18	8	2	0	2	8	…
$2(x-1)^2+3$	…	35	21	11	5	3	5	11	…

この表からわかるように，関数 $y=2(x-1)^2+3$ のグラフは，関数 $y=2(x-1)^2$ のグラフを y 軸方向に 3 だけ平行移動したものになっています。

いいかえれば，関数 $y=2(x-1)^2+3$ のグラフは，関数 $y=2x^2$ のグラフを x 軸方向に 1 だけ平行移動し（関数 $y=2(x-1)^2$ のグラフ），さらに y 軸方向に 3 だけ平行移動したものとなります。



◇ 2 次関数 $y=a(x-p)^2+q$ のグラフ

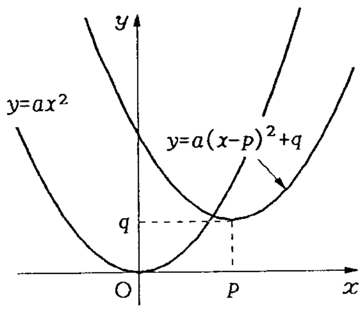
2 次関数 $y=a(x-p)^2+q$ のグラフは，
$y=2(x-1)^2+3$ のグラフと同様に考えて
$y=ax^2$ のグラフを

$$\left\{\begin{array}{l} x \text{ 軸方向に } p \\ y \text{ 軸方向に } q \end{array}\right\}\text{平行移動}$$

した放物線で

軸は直線 $x=p$，頂点は点 $(p,\ q)$

となります。



→ 2 次関数 $y=a(x-p)^2+q$ のグラフは，$y=ax^2$ のグラフと同じ形の放物線

になります。グラフをかくときには，必ず軸や頂点を求めるように心がけましょう。

基本例題 3 2 次関数 $y=a(x-p)^2+q$ のグラフ

関数 $y=(x+1)^2-4$ のグラフをかきなさい。

◆解 答◆

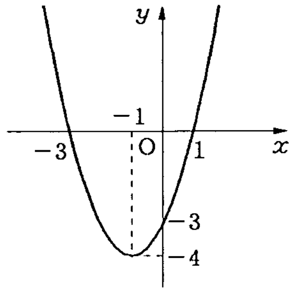
関数 $y=(x+1)^2-4$ のグラフは，関数 $y=x^2$ のグラフを x 軸方向に -1，y 軸方向に -4 だけ平行移動したもので

軸が直線 $x=-1$

頂点が点 $(-1,\ -4)$

の放物線となる。

よって，この関数のグラフは右の図のようになる。



➜この関数のグラフと y 軸との交点の y 座標，および x 軸との交点の x 座標は，$y=(x+1)^2-4$ にそれぞれ $x=0$，$y=0$ を代入して求めます。

$y=(0+1)^2-4=-3$

$0=(x+1)^2-4$ より　$x=-3,\ 1$

〈注意〉 関数のグラフをかくときは，x 軸や y 軸との交点を特にめんどうな数値にならないかぎり示しておきます。

➜それでは，関数 $y=a(x-p)^2+q$ のグラフをかく練習をしましょう。

■■■トレーニング■■■

4 (0018)

次の関数のグラフをかきなさい。

(1) $y=(x+2)^2+1$　　(2) $y=2(x+1)^2+3$

(3) $y=-(x-1)^2+3$　　(4) $y=\frac{1}{2}(x-3)^2+\frac{1}{2}$

➜ $y=ax^2$ のグラフをかかなくても $y=a(x-p)^2+q$ のグラフをかけるようにしておきましょう。

➜ 2 次関数 $y=a(x-p)^2+q$ のグラフは，a の符号と p，q の値によって概形が決まります。時間があったら，次のトレーニングでさらに理解を深めましょう。

もっと力をつけよう

■■■トレーニング■■■

5 * (0019)

2 次関数 $y=3x^2$ のグラフを，頂点が次の点になるように平行移動してできるグラフの表す関数を求めなさい。

(1) $(0,\ -1)$　　(2) $(-2,\ 0)$

(3) $(2,\ -1)$　　(4) $(-2,\ 1)$

➜ 2次関数 $y=a(x-p)^2+q$ のグラフはかけるようになりましたね。今回はこれで終わりです。

§4　2次関数のグラフ(2)　$y=ax^2+bx+c$, $y=a(x-\alpha)(x-\beta)$ のグラフ

前回は，2次関数が $y=a(x-p)^2+q$ の形の式で表されるとき，そのグラフが $y=ax^2$ のグラフを平行移動してかけるということを学習しましたね。ここでは，x のいろいろな形の2次式で表された2次関数のグラフのかき方について学習します。

➔2次関数 $y=f(x)$ の $f(x)$ は x の2次式ですが，ふつう $f(x)=ax^2+bx+c$ の形で表されることが多いのです。$y=ax^2+bx+c$ のグラフはどのように考えればよいのでしょうか。

〔1〕2次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフ

◇2次関数 $y=2x^2-4x+5$ のグラフ

2次関数 $y=2x^2-4x+5$ は，右辺を変形すると

$$
\begin{aligned}
2x^2-4x+5&=2(x^2-2x)+5\\
&=2(x^2-2x+1^2-1^2)+5\\
&=2(x-1)^2-2+5\\
&=2(x-1)^2+3
\end{aligned}
$$

となりますから，2次関数 $y=2(x-1)^2+3$ と同じ関数です。このように式を変形すれば，2次関数 $y=2x^2-4x+5$ のグラフをかくことができますね。

◇2次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフ

2次関数 $y=f(x)$ は，一般に $y=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$ と表すことができます。

この関数のグラフをかくには，$y=2x^2-4x+5$ を $y=2(x-1)^2+3$ と変形したのと同じ手順で，$y=a(x-p)^2+q$ の形に変形すればよいのです。

$a\neq 0$ より

$$
\begin{aligned}
&ax^2+bx+c\\
&=a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c\\
&=a\left\{x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right\}+c\\
&=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+c\\
&=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}
\end{aligned}
$$

➔x^2，x の項を x^2 の係数 a でくくります。

➔完全平方式 $(x-p)^2$ をつくります。

以上から，$y=ax^2+bx+c$ のグラフは，$y=ax^2$ のグラフを

x 軸方向に $-\dfrac{b}{2a}$，y 軸方向に $-\dfrac{b^2-4ac}{4a}$

だけ平行移動した放物線となります。

➔では，ここで，ax^2+bx+c の形の2次式を $a(x-p)^2+q$ の形に変形する練習をしておきましょう。

■■■トレーニング■■■

1 (0020)

次の2次式を $a(x-p)^2+q$ の形に変形しなさい。

(1) $-4x^2+8x-5$　　(2) $\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{2}x$

→式の変形はすぐにできましたか。では，もう一度2次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフについてまとめておきましょう。

2次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフ

2次関数 $y=ax^2+bx+c$ は $y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$ と変形できるので，そのグラフは，$y=ax^2$ のグラフを

x 軸方向に $-\frac{b}{2a}$，y 軸方向に $-\frac{b^2-4ac}{4a}$

平行移動したもので

軸は直線 $x=-\frac{b}{2a}$，頂点は点 $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$

の放物線です。

$a>0$のとき下に凸，$a<0$のとき上に凸の放物線になりますね。

→2次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフは，その式を $y=a(x-p)^2+q$ の形に変形して，軸と頂点を求めれば，かくことができますね。

基本例題1　2次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフ

関数 $y=2x^2+6x+7$ のグラフをかきなさい。

◆解　答◆

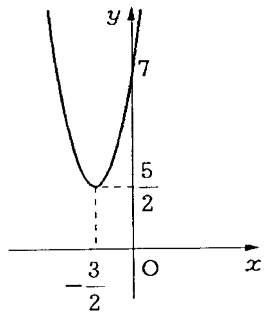
$$\begin{aligned} y&=2x^2+6x+7\\ &=2(x^2+3x)+7\\ &=2\left\{x^2+3x+\left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2\right\}+7\\ &=2\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{2}+7\\ &=2\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{5}{2} \end{aligned}$$

よって，この関数のグラフは，関数 $y=2x^2$ のグラフを x 軸方向に $-\frac{3}{2}$，y 軸方向に $\frac{5}{2}$ だけ平行移動したもので

軸が直線 $x=-\frac{3}{2}$，頂点が点 $\left(-\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$

の放物線となる。

したがって，この関数のグラフは右の図のようになる。



〈注意〉　2次関数 $y=ax^2+bx+c$ と y 軸との交点の y 座標は，$x=0$ を代入して $y=a\cdot0^2+b\cdot0+c=c$ ですから，交点は点 $(0,\ c)$ となります。

➜それでは，トレーニングに移りましょう。

■■■トレーニング■■■

2　(0021)

次の関数のグラフをかきなさい。

(1)　$y=x^2+4x$　　　(2)　$y=-3x^2+6x+\frac{3}{2}$

3　(0022)

次の関数のグラフをかきなさい。

(1)　$y=2x^2-4x+3$　　　(2)　$y=x-x^2$　　　(3)　$y=-\frac{1}{2}x^2-x+\frac{5}{2}$

---------•ちょっとひとこと•---------

∘　単に関数 $y=ax^2+bx+c$ といったら，$a=0$ の場合，すなわち1次関数や定数関数になる場合もあります。

2次関数 $y=ax^2+bx+c$ といったら，$a\neq0$ でなければなりません。

したがって

関数 $y=ax^2+bx+c$　$(a\neq0)$

2次関数 $y=ax^2+bx+c$

この2つの関数は，まったく同じ関数を表しています。

➜けっきょく，2次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフは，$y=a(x-p)^2+q$ と変形できることにより，頂点が点 $(p,\ q)$ になるように $y=ax^2$ のグラフを平行移動したものになるのですね。

例題1　　2次関数のグラフの平行移動

関数 $y=x^2-2x+1$ のグラフは，関数 $y=x^2+6x+3$ のグラフをどのように平行移動したものですか。

◆解　答◆

$y=x^2-2x+1$

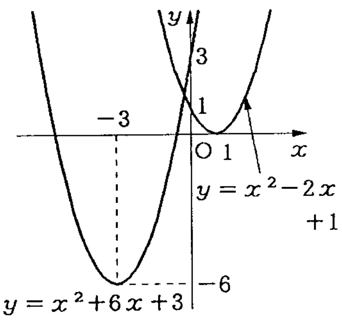
$=(x-1)^2$

$y=x^2+6x+3$

$=(x+3)^2-9+3$

$=(x+3)^2-6$

➜2つの関数を $y=a(x-p)^2+q$ の形に変形します。



よって，この2つの関数のグラフは右の図のようになる。

したがって，関数 $y=x^2-2x+1$ のグラフは，関数 $y=x^2+6x+3$ のグラフを

x 軸方向に4，y 軸方向に6

平行移動したものである。

→ 2 つのグラフの頂点の座標を比べると

$1-(-3)=4,\ 0-(-6)=6$

■■■トレーニング■■■

4 * (0023)

次の関数のグラフは，関数 $y=-2x^2$ のグラフをどのように平行移動したものですか。

(1) $y=-2x^2-8x-5$　　　　(2) $y=-2x^2+4x$

5 * (0024)

次の関数①のグラフは，関数②のグラフをどのように平行移動したものですか。

$y=x^2-2x-3$ ………①　　$y=x^2+4x-3$ ………②

6 * (0025)

次の関数①のグラフは，関数②のグラフをどのように平行移動したものですか。

$y=-x^2+2x+5$ ………①　　$y=-x^2+4x+2$ ………②

→ 2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフは，もうどんな場合でもかけますね。

→次に，$y=a(x-\alpha)(x-\beta)$ の形の 2 次関数について調べてみましょう。

〔2〕2次関数 $y=a(x-\alpha)(x-\beta)$ のグラフ

◇ 2 次関数 $y=a(x-\alpha)(x-\beta)$ のグラフ

関数 $y=2(x-1)(x-3)$ や $y=-x(x-4)$ などのように，1 次式の積の形で表された 2 次関数 $y=a(x-\alpha)(x-\beta)$ のグラフをかくにはどのようにすればよいのでしょうか。

2 次関数 $y=a(x-p)^2+q$ のグラフが直線 $x=p$ を軸，点 $(p,\ q)$ を頂点とする放物線になることはすでに学びましたから，式をこの形に変形すればよいですね。

$$\begin{aligned} y&=a(x-\alpha)(x-\beta)\\ &=a\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\}\\ &=a\left\{\left(x-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2-\frac{(\alpha+\beta)^2}{4}+\alpha\beta\right\}\\ &=a\left\{\left(x-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2-\frac{(\alpha-\beta)^2}{4}\right\}\\ &=a\left(x-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2-\frac{a(\alpha-\beta)^2}{4}\end{aligned}$$

よって，2 次関数 $y=a(x-\alpha)(x-\beta)$ のグラフは

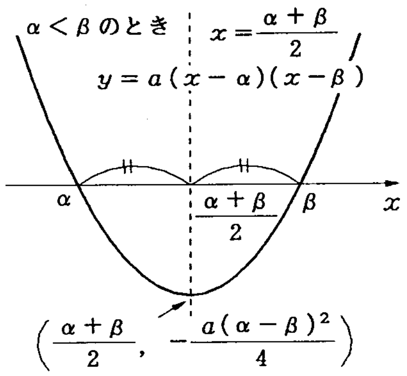
軸が $x=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$，頂点が点 $\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2},\ -\dfrac{a(\alpha-\beta)^2}{4}\right)$

の放物線になります。

→ただ，いつもこのように変形するのは，計算がめんどうになりそうです。
そこで，次のように x 軸との交点を利用します。もっと簡単にグラフをかくことができます。

◇ 2次関数 $y=a(x-\alpha)(x-\beta)$ のグラフと x 軸との交点

2次関数 $y=a(x-\alpha)(x-\beta)$ のグラフは，$\alpha<\beta$ のとき，右の図のようになりますね。



ここで，この放物線と x 軸との交点の x 座標は，2次方程式 $a(x-\alpha)(x-\beta)=0$ を解くと，α，β になりますから，この放物線は2点 $(\alpha,\ 0)$，$(\beta,\ 0)$ を通ります。

一般に，放物線はその軸に関して対称な曲線ですから，2点 $(\alpha,\ 0)$，$(\beta,\ 0)$ は，放物線の軸に関して対称ですね。

よって，この放物線の軸は，2点 $(\alpha,\ 0)$，$(\beta,\ 0)$ の中点 $\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2},\ 0\right)$ を通り，y 軸に平行な直線，すなわち直線 $x=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ になります。

この軸と放物線の交点が，放物線の頂点になるわけです。

> 2次関数 $y=a(x-\alpha)(x-\beta)$ のグラフは，関数 $y=ax^2$ のグラフを平行移動してできる放物線で，x 軸と
>
> 2点 $(\alpha,\ 0)$，$(\beta,\ 0)$
>
> で交わる。
>
> 軸は，この2点の中点を通り y 軸に平行な直線である。すなわち
>
> 軸は，直線 $x=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$

→次の例題で，2次関数 $y=a(x-\alpha)(x-\beta)$ のグラフについてしっかり理解しておきましょう。

例題 2 　2次関数 $y=a(x-\alpha)(x-\beta)$

関数 $y=(x+2)(x-4)$ のグラフをかきなさい。

◆ 考え方 ◆

$y=(x+2)(x-4)=x^2-2x-8=(x-1)^2-9$ と式を変形してグラフをかいてもかまいませんが，グラフと x 軸との交点から軸と頂点を求めて，グラフをかきます。

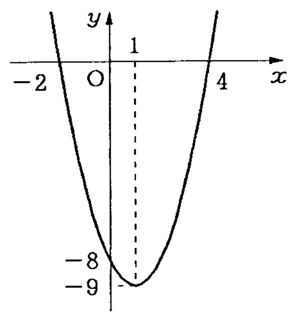
◆ 解　答 ◆

$x=-2,\ 4$ のとき $y=0$ になるから，この関数のグラフは x 軸と2点 $(-2,\ 0)$，$(4,\ 0)$ で交わる。

軸は，2点 $(-2,\ 0)$，$(4,\ 0)$ の中点を通り y 軸に平行な直線だから，直線 $x=1$ である。

$x=1$ のとき，$y=(1+2)(1-4)=-9$ だから，頂点は点 $(1,\ -9)$ である。

よって，この関数のグラフは右の図のようになる。



➜それでは，2次関数 $y=a(x-\alpha)(x-\beta)$ のグラフをかくトレーニングをしましょう。

■■■トレーニング■■■

7 ＊ (0026)

次の関数のグラフをかきなさい。

(1) $y=\frac{1}{2}(x+1)(x+7)$

(2) $y=-(x+3)(x-1)$

(3) $y=-2x(x-1)$

(4) $y=(x+2)(x-2)$

8 ＊ (0027)

2点 (1, 0), (3, 0) を通る放物線 $y=ax^2+bx+c$ の頂点をP，y 軸と交わる点をQとします。このとき，2点P，Qの座標を a で表しなさい。

9 ＊ (0028)

次の関数のグラフをかきなさい。

(1) $y=x(x-2)+2$

(2) $y=-\frac{1}{2}(x+3)(x-1)-1$

➜いろいろな形の2次関数のグラフがかけるようになりましたね。
これで終わりです。

まとめておこう！

1. 2次関数の式が $y=ax^2+bx+c$ の形で与えられたときは，$y=a(x-p)^2+q$ の形に変形して，そのグラフをかきます。

2. 2次関数の式が $y=a(x-\alpha)(x-\beta)$ の形で与えられたときは，グラフと x 軸との交点から軸や頂点を求めてグラフをかきます。

§5　2次関数のグラフ(3)　制限つきの2次関数や絶対値記号をふくむ関数のグラフ

1次関数のところでも学習したように，関数の定義域に制限がつく場合があります。また，新しく学習する絶対値記号などをふくむ関数のグラフは，場合分けをして，定義域を分けて考えなければなりません。このように，関数を考えるときには，常に定義域に気をつけなければなりません。ここでは，このことを2次関数について学習していきましょう。

→ 2次関数にも，定義域に制限がつく場合があります。このような関数のグラフについて学習しましょう。

基本例題1　定義域に制限のついた2次関数のグラフ

次の関数のグラフをかきなさい。また，その関数の値域を求めなさい。

(1)　$y=2(x+1)^2-3$　$(0\leqq x\leqq 1)$　　(2)　$y=-x^2+2x+1$　$(-2<x<2)$

◆ 考え方 ◆

定義域が $a\leqq x\leqq b$ である2次関数 $y=f(x)$ は，$y=f(x)$　$(a\leqq x\leqq b)$ と表されます。

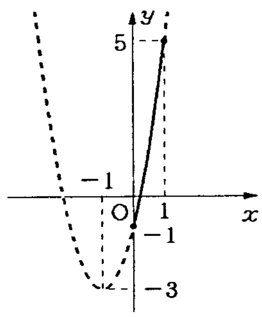
よって，この関数のグラフは，関数 $y=f(x)$ のグラフの $a\leqq x\leqq b$ に対応する部分になります。

値域は，グラフから，y のとりうる値の範囲として求めます。

◆ 解　答 ◆

(1)　関数 $y=2(x+1)^2-3$　$(0\leqq x\leqq 1)$ のグラフは，関数 $y=2(x+1)^2-3$ のグラフの $0\leqq x\leqq 1$ に対応する部分である。

よって，この関数のグラフは右の図の実線部分になる。



この関数の値域は，グラフより

$-1\leqq y\leqq 5$

(2)　$y=-x^2+2x+1$

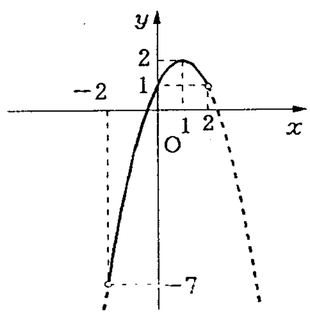
$=-(x^2-2x)+1$

$=-(x-1)^2+1+1$

$=-(x-1)^2+2$

より，関数 $y=-x^2+2x+1$　$(-2<x<2)$ のグラフは，関数 $y=-(x-1)^2+2$ のグラフの $-2<x<2$ に対応する部分である。

よって，この関数のグラフは右の図の実線部分になる。



この関数の値域は，グラフより

$-7<y\leqq 2$

→ 1次関数などで定義域に制限がついた場合と同じようにしてグラフがかけるのですね。では，トレーニングしましょう。

■■■トレーニング■■■

1 (0029)

次の関数のグラフをかき，その値域を求めなさい。

(1) $y=-(x-2)^2$ $(-1\leqq x\leqq 2)$

(2) $y=x^2+2x-2$ $(-3\leqq x\leqq -2)$

2 (0030)

次の関数のグラフをかき，その値域を求めなさい。

(1) $y=\dfrac{1}{2}(x-2)^2-2$ $(0\leqq x\leqq 3)$

(2) $y=-x^2+4x+2$ $(1\leqq x\leqq 3)$

3 (0031)

次の関数のグラフをかき，その値域を求めなさい。

(1) $y=-2(x+1)^2+2$ $(-2\leqq x<1)$

(2) $y=x^2-2x-3$ $(0<x\leqq 4)$

4 (0032)

次の関数のグラフをかき，その値域を求めなさい。

(1) $y=\dfrac{1}{2}(x+1)^2+2$ $(x\leqq 1)$

(2) $y=-x^2-3x-\dfrac{5}{4}$ $(x\geqq -2)$

→では，絶対値記号をふくむ関数のグラフについて考えてみましょう。

〔1〕絶対値記号をふくむ関数のグラフ

◇絶対値記号をふくむ関数

関数 $y=x^2+|x-1|$ や $y=2x^2-|x|-1$ のように，関数を表す式の一部分（または全部）に絶対値記号をふくんでいる関数は，場合分けをすることによって絶対値記号をはずすことができます。

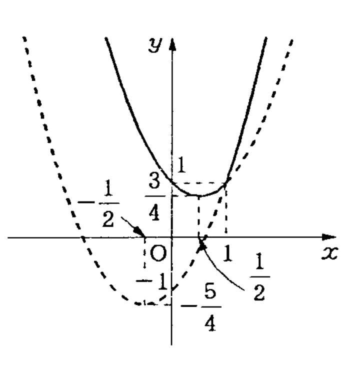
たとえば，関数 $y=x^2+|x-1|$ は

$x-1\geqq 0$，すなわち $x\geqq 1$ のとき

$$y=x^2+(x-1)$$
$$=x^2+x-1$$

$x-1<0$，すなわち $x<1$ のとき

$$y=x^2-(x-1)$$
$$=x^2-x+1$$



となります。よって，この関数のグラフは，$x\geqq 1$ の範囲で $y=x^2+x-1$ のグラフを，$x<1$ の範囲で $y=x^2-x+1$ のグラフをかけばよいのです。

◇関数 $y=f(x)+|g(x)|$ のグラフ

一般に，絶対値記号をふくむ関数は

$$y=f(x)+|g(x)|$$

と表されます。

関数 $y=f(x)+|g(x)|$ のグラフは

$g(x)\geqq 0$ となる x の範囲で

$y=f(x)+g(x)$ のグラフ

$g(x)<0$ となる x の範囲で

$y=f(x)-g(x)$ のグラフ

をかけばよいのです。

> $g(x)\geqq 0$ のとき
> $|g(x)|=g(x)$
> $g(x)<0$ のとき
> $|g(x)|=-g(x)$
> ですね。

➜次の例題で，絶対値記号をふくむ関数のグラフについて具体的に考えてみましょう。

例題 1 絶対値記号をふくむ関数のグラフ

関数 $y=x^2-2|x+1|+1$ のグラフをかきなさい。

◆ 考え方 ◆

$x+1\geqq 0$，$x+1<0$ で場合分けします。

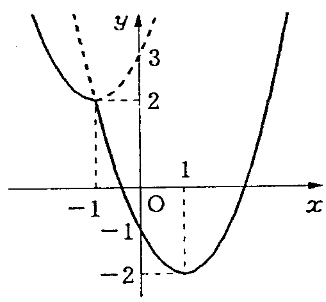
◆ 解　答 ◆

$x\geqq -1$ のとき

$$\begin{aligned} y&=x^2-2(x+1)+1\\ &=x^2-2x-1\\ &=(x-1)^2-1-1\\ &=(x-1)^2-2 \end{aligned}$$

$x<-1$ のとき

$$\begin{aligned} y&=x^2+2(x+1)+1\\ &=x^2+2x+3\\ &=(x+1)^2-1+3\\ &=(x+1)^2+2 \end{aligned}$$



よって，この関数のグラフは右の図の実線部分になる。

➜絶対値記号をふくむ関数のグラフをかくときには，絶対値記号をはずすときにつく条件，すなわち x の値の範囲に注意しましょう。

■■■トレーニング■■■

5 * (0033)

次の関数のグラフをかきなさい。

(1)　$y=x^2+6|x|$　　(2)　$y=x^2-4|x|+3$

6 * (0034)

次の関数のグラフをかきなさい。

(1)　$y=-x^2+4|x-1|+2$　　(2)　$y=-x^2+|2x+3|$

➜計算ミスをしないようにしましょう。ここでの学習はこれで終わりです。

§6　2次関数の最大値・最小値(1)　増加・減少，最大値・最小値

　これまで，いろいろな2次関数のグラフについて学習してきました。ここからは，グラフをもとにして2次関数の最大値や最小値を求める学習をします。2次関数の値が最大・最小になるのはどのようなときなのでしょうか。また，その値はどのようにして求めるのでしょうか。

➜まず，関数の増加・減少について考えてみましょう。

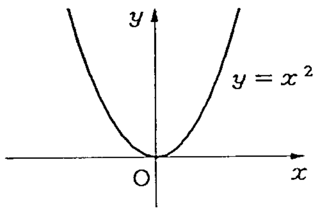
〔1〕2次関数の増加・減少

◇関数の増加・減少

　関数 $y=x^2$ について，その値の増加・減少を考えてみましょう。

　$x>0$ の範囲で $y=x^2$ のグラフは右上がりとなり，x の値が増加すると y の値も増加しますね。

　また，$x<0$ の範囲で $y=x^2$ のグラフは右下がりとなり，x の値が増加すると y の値は減少します。



　このように，関数 $y=f(x)$ において，x のある範囲内の値 x_1，x_2 について

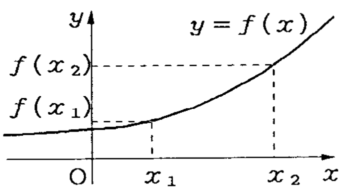
$$x_1<x_2 \quad ならば \quad f(x_1)<f(x_2)$$

がつねに成り立つとき，関数 $y=f(x)$ は x のこの範囲で増加し，そのグラフは右上がりとなります。

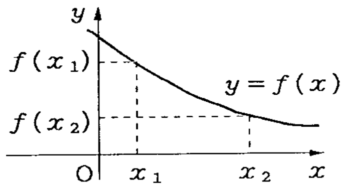
　また，x のある範囲内の値 x_1，x_2 について

$$x_1<x_2 \quad ならば \quad f(x_1)>f(x_2)$$

がつねに成り立つとき，関数 $y=f(x)$ は x のこの範囲で減少し，そのグラフは右下がりとなります。



x が増加すると y も増加



x が増加すると y は減少

関数 $y=f(x)$ の増減は，$x_1<x_2$ のときの $f(x_1)$ と $f(x_2)$ の値を比べればわかるのですね。

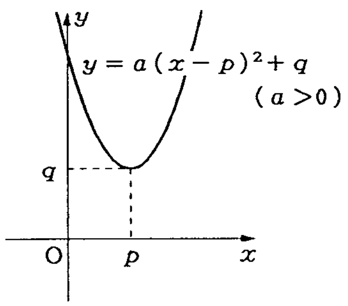
◇２次関数 $y=a(x-p)^2+q$ の増加・減少

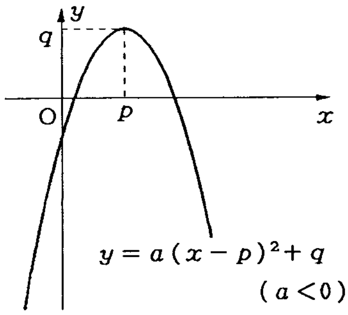
２次関数 $y=a(x-p)^2+q$ のグラフは，点 $(p,\ q)$ を頂点とし，$a>0$ のとき下に凸，$a<0$ のとき上に凸の放物線となります。よって，

$a>0$ のとき
　$x<p$ の範囲で減少
　$x>p$ の範囲で増加

$a<0$ のとき
　$x<p$ の範囲で増加
　$x>p$ の範囲で減少

します。





→次の例題で，２次関数の増加・減少を実際に調べてみましょう。

例題１　　２次関数の増加・減少

関数 $y=x^2-2x+3$ は，$x>1$ の範囲で増加し，$x<1$ の範囲で減少することを示しなさい。

◆ 考え方 ◆

$f(x)=x^2-2x+3$ として，$x>1$ の範囲で

$x_1<x_2$ のとき　　$f(x_1)<f(x_2)$

が成り立てば，増加することが示せます。そのため，$f(x_2)-f(x_1)>0$ を示します。

同様に，$x<1$ の範囲で $x_1<x_2$ のとき $f(x_2)-f(x_1)<0$ が成り立てば，$f(x_1)>f(x_2)$ が成り立ち，減少することが示せます。

◆ 解　答 ◆

$f(x)=x^2-2x+3$ とする。

$$
\begin{aligned}
f(x_2)-f(x_1)&=(x_2{}^2-2x_2+3)-(x_1{}^2-2x_1+3)\\
&=(x_2{}^2-x_1{}^2)-2(x_2-x_1)\\
&=(x_2-x_1)(x_2+x_1)-2(x_2-x_1)\\
&=(x_2-x_1)(x_1+x_2-2) \qquad \cdots\cdots\text{①}
\end{aligned}
$$

$1<x_1<x_2$ のとき

→$x_1>1$，$x_2>1$，$x_1<x_2$，すなわち $1<x_1<x_2$ とおきます。

$x_2-x_1>0$，$x_1+x_2-2>0$　　………②

①，②より　　$f(x_2)-f(x_1)>0$

よって　　$f(x_1)<f(x_2)$

したがって，関数 $y=x^2-2x+3$ は $x>1$ の範囲で増加する。

$x_1<x_2<1$ のとき

→$x_1<1$，$x_2<1$，$x_1<x_2$，すなわち $x_1<x_2<1$ とおきます。

$x_2-x_1>0$，$x_1+x_2-2<0$　　………③

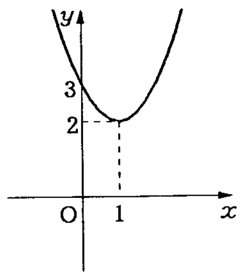
①，③より　　$f(x_2)-f(x_1)<0$

よって　　$f(x_1)>f(x_2)$

したがって，関数 $y=x^2-2x+3$ は $x<1$ の範囲で減少する。

--------• ちょっとひとこと •--------

- 関数 $y=x^2-2x+3$ のグラフは右の図のようになります。
- グラフからもわかるように，$x>1$ の範囲では，この関数は増加しています。また，この範囲では，グラフは右上がりになっています。
- $x<1$ の範囲では，この関数は減少しています。また，この範囲では，グラフは右下がりになっています。



→関数の増加・減少について，トレーニングしましょう。

■■■トレーニング■■■

1 * (0035)
関数 $y=2x^2+12x+5$ は $x>-3$ の範囲で増加し，$x<-3$ の範囲で減少することを示しなさい。

→関数の増加・減少を考えることによって，その関数のとる最大値や最小値を求めることができます。

〔2〕2次関数の最大値・最小値

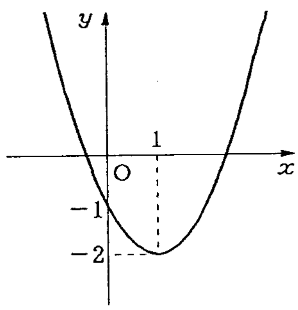
◇関数のグラフと最大値・最小値

たとえば，関数 $y=(x-1)^2-2$ は，グラフが右の図のような点 $(1,\ -2)$ を頂点とする放物線になりますから

$x<1$ の範囲で関数の値は減少
$x>1$ の範囲で関数の値は増加

しますね。

よって，グラフからわかるように，この関数の値は，$x=1$ のときもっとも小さくなり，$y=-2$ となります。



このように関数 $y=f(x)$ において

y のもっとも大きい値を最大値
y のもっとも小さい値を最小値

といいます。

関数 $y=(x-1)^2-2$ は，$x=1$ のとき最小値 -2 をとりますが，y はいくらでも大きい値をとることができますから，もっとも大きい値はありません。すなわち，最大値なしとなります。

→ y がいくらでも小さい値をとることができる場合，最小値はありません。

このように2次関数 $y=a(x-p)^2+q$ は

$a>0$ のとき，$x=p$ において最小値 q をとり，最大値はない
$a<0$ のとき，$x=p$ において最大値 q をとり，最小値はない

ということがいえます。

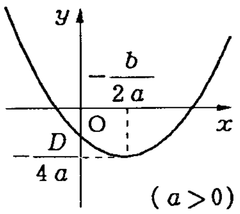
◇ 2次関数 $y=ax^2+bx+c$ の最大値・最小値

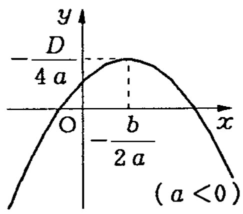
2次関数 $y=ax^2+bx+c$ は

$$y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{D}{4a}$$

$$(D=b^2-4ac)$$

と変形できますから，この関数の最大値・最小値は次のようにまとめることができます。





2次関数 $y=ax^2+bx+c$ は，$D=b^2-4ac$ とすると $a>0$ のとき　最大値はなし，最小値は $-\frac{D}{4a}$ $\left(x=-\frac{b}{2a}\text{ のとき}\right)$ $a<0$ のとき　最大値は $-\frac{D}{4a}$ $\left(x=-\frac{b}{2a}\text{ のとき}\right)$，最小値はなし

➜ 2次関数のグラフは，x^2 の係数の符号によって下に凸か上に凸の放物線になります。頂点を考えることによって，最大値や最小値，そのときの x の値がわかりますね。

基本例題1　　2次関数の最大値・最小値

関数 $y=x^2+2x+3$ の最大値または最小値を求めなさい。

◆ 考え方 ◆

2次関数が $y=a(x-p)^2+q$ の形で表されているとき

$a>0$ ならば，$x=p$ のとき最小値 q，最大値なし

$a<0$ ならば，$x=p$ のとき最大値 q，最小値なし

◆ 解　答 ◆

$y=x^2+2x+3$

$=(x+1)^2-1+3$　　➜ $y=a(x-p)^2+q$ の形に変形します。

$=(x+1)^2+2$

2次の項の係数が正であるから，この関数は

$x=-1$ のとき　最小値2，最大値はない

➜ 2次の項の係数が正のとき，グラフは下に凸になります。

〈注意〉　関数の最大値や最小値を示すとき，その最大値・最小値をとるときの x の値も必ず示すようにしましょう。

➜それでは，最大値・最小値を求めるトレーニングをしましょう。

■■■トレーニング■■■

2　(0036)

次の関数の最大値または最小値を求めなさい。

(1)　$y=(x-2)^2+1$　　　(2)　$y=-2(x+2)^2+2$

3 (0037)

次の関数の最大値または最小値を求めなさい。

(1) $y=2x^2+4x+2$　　(2) $y=-x^2+3x$

4 (0038)

次の関数の最大値または最小値を求めなさい。

(1) $y=2x^2+4x-6$　　(2) $y=-x^2-5x$

(3) $y=2x^2+6x-3$　　(4) $y=-2x^2+3x-1$

--------• ちょっとひとこと •--------

◦ 2次関数 $y=a(x-p)^2+q$ において，x がどんな実数値をとっても常に $(x-p)^2 \geqq 0$ です。このことからも，次のことがわかります。

$a>0$ のとき

$a(x-p)^2 \geqq 0$ より　　$a(x-p)^2+q \geqq q$

よって，$x-p=0$，すなわち $x=p$ のとき，y は最小値 q をとる。

$a<0$ のとき

$a(x-p)^2 \leqq 0$ より　　$a(x-p)^2+q \leqq q$

よって，$x-p=0$，すなわち $x=p$ のとき，y は最大値 q をとる。

→文字をふくんだ2次関数でも，最大値・最小値の求め方は同じです。ちょっと難しい問題に挑戦してみましょう。

もっと力をつけよう

■■■トレーニング■■■

5 * (0039)

x についての2次関数 $y=x^2-3mx+2m$ について，次の問いに答えなさい。

(1) y の最小値 y_1 を m の式で表しなさい。

(2) m がすべての実数をとって変わるとき，m のどんな値に対して y_1 は最大となりますか。

→今回の学習は，これで終わりです。

まとめておこう！

2次関数 $y=a(x-p)^2+q$ の増加・減少と最大値・最小値

1．$a>0$ のとき

$x<p$ の範囲で減少，$x>p$ の範囲で増加

最小値 q ($x=p$ のとき)，最大値はなし

2．$a<0$ のとき

$x<p$ の範囲で増加，$x>p$ の範囲で減少

最大値 q ($x=p$ のとき)，最小値はなし

§7　2次関数の最大値・最小値(2)　定義域に制限がある場合

2次関数の最大値・最小値は，$y=a(x-p)^2+q$ の形に変形することにより求められましたね。また，関数の最大値・最小値は，そのグラフと密接な関係があるのです。前回は，定義域が実数全体である2次関数の最大値・最小値を式を変形して求めましたが，ここでは，定義域に制限のある2次関数の最大値・最小値を，グラフをかくことによって求めてみましょう。

➜定義域が制限された2次関数の最大値・最小値について考えてみましょう。

〔1〕$y=f(x)$（$\alpha \leqq x \leqq \beta$）の最大値・最小値

◇関数の値域と最大値・最小値

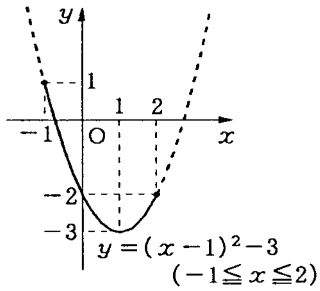
関数 $y=(x-1)^2-3$（$-1\leqq x\leqq 2$）の最大値・最小値について考えてみましょう。

この関数のグラフは右の図の実線部分になり，グラフより，値域は $-3\leqq y\leqq 1$ ですね。最大値・最小値は，y のとりうる最大の値，最小の値ですから，この関数は

最大値1（$x=-1$ のとき），最小値 -3（$x=1$ のとき）

をとるわけです。

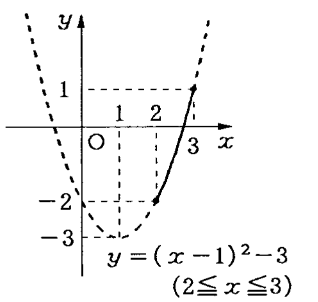
このように，関数のグラフをかけば，その値域から関数の最大値・最小値を求めることができます。



◇2次関数 $y=a(x-p)^2+q$（$\alpha\leqq x\leqq\beta$）の最大値・最小値

関数 $y=(x-1)^2-3$ の定義域が $-1\leqq x\leqq 2$，のときのグラフは右上の図の実線部分で，定義域が $2\leqq x\leqq 3$，のときのグラフは右の図の実線部分ですね。

右上のグラフでは，軸が定義域内にあり，頂点の y 座標が関数の最小値，端の点（−1，1）の y 座標が最大値になっています。また，右のグラフでは，軸は定義域内にはなく，両端の点(3，1)，(2，−2)の y 座標が，それぞれ最大値，最小値になっています。



このように，定義域が $\alpha\leqq x\leqq\beta$ である2次関数の最大値・最小値は，次のような手順でグラフの両端の点および頂点の y 座標を比べていけば求められます。

① グラフをかく。
② $x=\alpha$，$x=\beta$ に対応する y の値を比べる。
③ 定義域内に放物線の軸があるときには，頂点の y 座標を②の値と比べる。
④ その結果，y のもっとも大きい値が最大値，もっとも小さい値が最小値になる。

➜最大値・最小値は，グラフの両端の点と頂点の y 座標のうちのどれかなのですね。

➜では，さっそく，次の基本例題をやってみましょう。

基本例題 1　2次関数 $y=f(x)$ $(\alpha \leqq x \leqq \beta)$ の最大値・最小値

関数 $y=-x^2+4x+2$ $(-1\leqq x\leqq 3)$ の最大値と最小値を求めなさい。

◆解　答◆

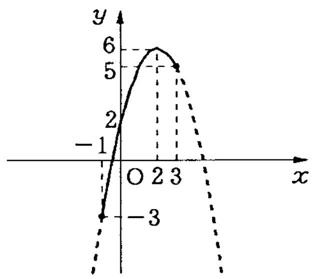
$y=-x^2+4x+2$

➜ $y=a(x-p)^2+q$ の形に変形。

$=-(x^2-4x)+2$

$=-(x-2)^2+4+2$

$=-(x-2)^2+6$



よって，関数 $y=-x^2+4x+2$ $(-1\leqq x\leqq 3)$ のグラフは右の図の実線部分になる。

グラフより，この関数は

$x=2$ のとき　最大値 6

$x=-1$ のとき　最小値 -3

➜両端の点 $(-1,\ -3)$，$(3,\ 5)$，頂点 $(2,\ 6)$ の y 座標を比べて，6 が最大値，-3 が最小値。

➜それでは，定義域に制限のある 2 次関数の最大値・最小値を求めるトレーニングをしましょう。

■■■トレーニング■■■

1　(0040)

次の関数の最大値と最小値を求めなさい。

(1)　$y=\frac{1}{2}x^2+x+1$ $(0\leqq x\leqq 2)$

(2)　$y=-(x-3)(x-1)$ $(-1\leqq x\leqq 3)$

2　(0041)

次の関数の最大値と最小値を求めなさい。

(1)　$y=-x^2+6x+1$ $(0\leqq x\leqq 5)$　　(2)　$y=2x-x^2$ $(2\leqq x\leqq 3)$

(3)　$y=(x+2)(4-x)$ $(-1\leqq x\leqq 4)$

➜関数の定義域は $\alpha\leqq x\leqq\beta$ の形で制限されるとは限りません。$\alpha<x<\beta$ の形で制限された 2 次関数の最大値・最小値を考えてみましょう。

〔2〕$y=f(x)$（$\alpha<x<\beta$）の最大値・最小値

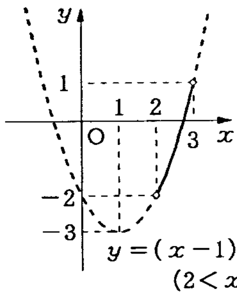
◇定義域に軸がふくまれない場合の最大値・最小値

関数 $y=(x-1)^2-3$ $(2<x<3)$ の最大値・最小値について考えてみましょう。

この関数の定義域 $2<x<3$ には，その両端の値 $x=2$，3 はふくまれていません。

よって，x は3にいくらでも近い値をとりますが $x=3$ にはならないため，y も1にいくらでも近い値をとりますが $y=1$ にはなりません。同様に，$x=2$ にはならないため，$y=-2$ にはなりません。

したがって，最大値も最小値もないのです。

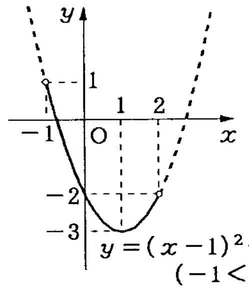


$y=(x-1)^2-3$
$(2<x<3)$

◇定義域に軸がふくまれる場合の最大値・最小値

関数 $y=(x-1)^2-3$ $(-1<x<2)$ の最大値・最小値を考えてみましょう。

この関数のグラフは，定義域にその軸 $x=1$ をふくみますから，$x=1$ のとき最小値 -3 をとります。そして，y は1にいくらでも近い値をとりますが $y=1$ にはなりませんから，最大値はありません。



$y=(x-1)^2-3$
$(-1<x<2)$

◇2次関数 $y=f(x)$（$\alpha<x<\beta$）の最大値・最小値

このように，定義域が $\alpha<x<\beta$，の2次関数の最大値・最小値は，定義域が $\alpha\leqq x\leqq\beta$，の場合と同じように，グラフの両端の点と頂点の y 座標を考えれば求められます。

ただし，グラフの両端の点がふくまれないことに注意しましょう。

y のもっとも大きい値やもっとも小さい値がただ1つ定まるとき，それを最大値，最小値といい，そうでないときは，最大値・最小値はないのです。

> y がいくらでも大きい値をとるときも最大値はありませんが，$y=(x-1)^2-3$ $(-1<x<2)$ のように，y がある値に近づいてもその値にならなければ，やはり最大値はないのですね。

よって，2次関数 $y=f(x)$（$\alpha<x<\beta$）は，グラフの軸が定義域内にないときには，最大値も最小値もとらないのです。

➜定義域が $\alpha\leqq x\leqq\beta$ の場合と，$\alpha<x<\beta$ の場合のちがいはわかりましたね。

➜ 2次関数 $y=f(x)$（$\alpha<x<\beta$）は，グラフの軸が定義域内にあるかないかによって，最大値・最小値をとったりとらなかったりします。このことに注意して，例題に進みましょう。

基本例題2　2次関数 $y=f(x)$（$\alpha<x<\beta$）の最大値・最小値

関数 $y=-x^2-x+2$ $(-2<x<2)$ の最大値・最小値を求めなさい。

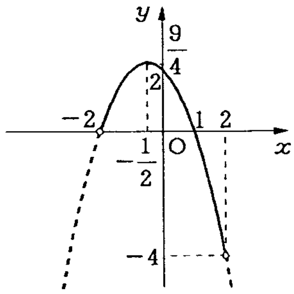
◆解　答◆

$y=-x^2-x+2$

$=-(x^2+x)+2$

$=-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}+2$

$=-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{4}$



よって，関数 $y=-x^2-x+2$ $(-2<x<2)$ のグラフは右の図の実線部分になる。

グラフより，この関数は

$x=-\frac{1}{2}$ のとき　最大値 $\frac{9}{4}$

➜軸が定義域内にあるので，頂点の y 座標が最大値になります。

最小値はない

➜ y は -4 に近づきますが $y=-4$ にならないので，最小値はありません。

➜それでは，トレーニングにはいりましょう。

■■■トレーニング■■■

3　(0042)

次の関数の最大値・最小値を求めなさい。

(1)　$y=-x^2+2x+3$ $(-1<x<4)$

(2)　$y=\frac{1}{4}(x+3)(x-1)$ $(-4<x<-1)$

4　(0043)

次の関数の最大値・最小値を求めなさい。

(1)　$y=-2x^2+6x+\frac{1}{2}$　$(0<x<4)$　　(2)　$y=-x^2-6x-9$　$(-3<x<-1)$

➜定義域が $\alpha\leqq x\leqq\beta$ や $\alpha<x<\beta$ 以外の形で制限された場合も，グラフから最大値・最小値を求められます。もうすこしトレーニングを続けましょう。

5　(0044)

次の関数の最大値・最小値を求めなさい。

(1)　$y=-x^2-2x+8$ $(-3<x\leqq-1)$

(2)　$y=(x-3)(x+1)$ $(0<x\leqq4)$

(3)　$y=2x^2+4x-3$ $(-2\leqq x<1)$

6　(0045)

次の関数の最大値・最小値を求めなさい。

(1)　$y=\frac{1}{2}x^2+x+\frac{5}{2}$ $(x\leqq1)$

(2)　$y=-(x-1)(x+2)$ $\left(x\geqq\frac{1}{2}\right)$

7　(0046)

次の関数の最大値・最小値を求めなさい。

(1)　$y=-\frac{1}{2}x^2+2x-1$　$(x<3)$

(2)　$y=x(x+4)$　$(x>-1)$

➜では，最後にもう1題，文字をふくんだ2次関数の最大値・最小値を求める問題をやってみましょう。

もっと力をつけよう

■■■トレーニング■■■

8 *（0047）

関数 $y=x^2-2ax$　$(-1\leqq x\leqq 1)$ について，定数 a のとる値の範囲を次のそれぞれの場合に分けて，この関数の最大値・最小値を求めなさい。

(1)　$0<a\leqq 1$　　　(2)　$a>1$

➜定義域が制限された2次関数の最大値・最小値は，すべて，グラフをかけば求められますね。ここでの学習は，これで終わりです。

> まとめておこう！
>
> 2次関数 $y=a(x-p)^2+q$ $(\alpha\leqq x\leqq\beta)$ の最大値・最小値の求め方
>
> 1.　まず，グラフをかく。
> 2.　$x=\alpha$，$x=\beta$ に対応する y の値を比べる。
> 3.　定義域内に軸 $x=p$ があるとき，頂点の y 座標 q と，2.の値とを比べる。
> 4.　その結果，y のもっとも大きい値が最大値，もっとも小さい値が最小値になる。

§８　２次関数の最大値・最小値(3)　２変数をふくむ２次式の最大値・最小値など

これまで学習してきた２次関数の最大値・最小値の求め方は，きちんと覚えていますね。ここではこれを応用して，２変数をふくむ２次式の最大値・最小値や，いろいろな文章題での最大値・最小値を求める学習をします。

➜まず，２つの変数をふくむ２次式の最大値・最小値を求めてみましょう。

例題１　２変数をふくむ２次式の最大値・最小値

$x+2y=2$ のとき，x^2-y^2 の最大値・最小値を求めなさい。ただし，$x\geqq 0$，$y\geqq 0$ とします。

◆考え方◆

変数を１つ減らして，２次関数の最大値・最小値を求める問題に直すことを考えます。

与えられた条件式を変形して，２変数をふくむ２次式に代入すると，変数が１つの２次式になります。

この２次式の最大値・最小値を求めればよいわけです。

また，$x\geqq 0$，$y\geqq 0$ の条件から変数の変域を求め，その範囲内でグラフをかいて最大値・最小値を求めます。

◆解　答◆

$P=x^2-y^2$ とおく。

$x+2y=2$ より　$x=-2y+2$　………①

$P=x^2-y^2$ に①を代入すると　➜x を消去して，変数を y だけにします。

$$\begin{aligned}P&=(-2y+2)^2-y^2\\&=3y^2-8y+4\\&=3\left(y^2-\frac{8}{3}y\right)+4\\&=3\left(y-\frac{4}{3}\right)^2-\frac{16}{3}+4\\&=3\left(y-\frac{4}{3}\right)^2-\frac{4}{3}\quad\text{………②}\end{aligned}$$

$x\geqq 0$ だから，①より　➜条件 $x\geqq 0$，$y\geqq 0$ から y の変域を求めます。

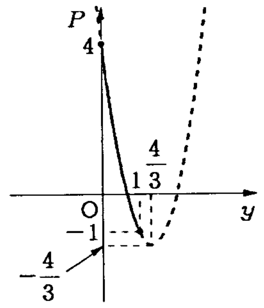
$$x=-2y+2\geqq 0$$

よって　$y\leqq 1$

また，$y\geqq 0$ だから，y の変域は

$0 \leqq y \leqq 1$

この変域における②のグラフは，右の図の実線部分になる。



グラフより，P は

$y=0$ のとき　最大値 4

$y=1$ のとき　最小値 -1

すなわち，x^2-y^2 は

$x=2,\ y=0$ のとき　最大値 4

$x=0,\ y=1$ のとき　最小値 -1

➜変数を２つふくむ式は，変数を１つにすることがポイントですよ。
それでは，トレーニングに進みましょう。

■■■トレーニング■■■

1 ＊ (0048)
$x+y=4$ を満たす実数 x，y について，xy の最大値を求めなさい。

2 ＊ (0049)
$2x+y=1$，$x \geqq 0$，$y \geqq 0$ のとき，x^2+y^2 の最大値・最小値を求めなさい。

3 ＊ (0050)
実数 x，y が $2x^2+y^2=6x$ を満たすとき，x^2-y^2-4x の最大値・最小値を求めなさい。

➜次は，最大・最小に関する文章題について考えてみましょう。

〔1〕２次関数の最大・最小の応用

◇最大・最小を考える文章題の解き方

文章題を解くには，まず，文章で与えられた関係を変数 x，y などを使って，正しく式に表します。

次に，文章中の表現から変数の変域を調べましょう。

たとえば，2 点間の距離を x とおいたとき，距離は負にはなりませんから，x の変域は $x \geqq 0$ となります。

そして，変域内でグラフをかき，最大値・最小値やそのときの変数の値を求めます。

◇$f(x)$ の最大・最小と $\{f(x)\}^2$ の最大・最小

たとえば，$y=\sqrt{x^2-3x+1}$ の最大値・最小値を求める場合を考えてみましょう。

この関数は常に $y \geqq 0$ ですね。このようなときは，

$a \geqq 0$，$b \geqq 0$ のとき，$a \geqq b \Longleftrightarrow a^2 \geqq b^2$

が成り立つことを利用して，y のかわりに $y^2=x^2-3x+1$ の最大・最小を調べます。

つまり，定義域内で常に $y \geqq 0$ ならば

y が最大値をとるとき y^2 も最大値をとり，y が最小値をとるとき y^2 も最小値をとる

y^2 が最大値をとるとき y も最大値をとり，y^2 が最小値をとるとき y も最小値をとる

ことを利用するのです。

〈注意〉　$y=\sqrt{x^2-3x+1}$ のような，$\sqrt{\quad}$ の混った関数を無理関数といい，詳しくは「数

学Ⅲ」で勉強します。

→ $y \geqq 0$ ならば，y^2 の最大・最小を調べることによって，y の最大値・最小値やそのときの x の値もわかるのですね。では，基本例題に進みましょう。

基本例題１　　　　**２次関数の最大・最小の応用**

Ａ，Ｂ２人の人が，Ａは地点Ｏの北 200 m の地点から南に向かって，Ｂは地点Ｏの東 160 m の地点から西に向かって同時に歩き始めました。

２人とも同じ速さで歩くものとすれば，２人の距離がもっとも近くなるのは，２人が出発後何 m ずつ歩いたときですか。

◆ 考え方 ◆

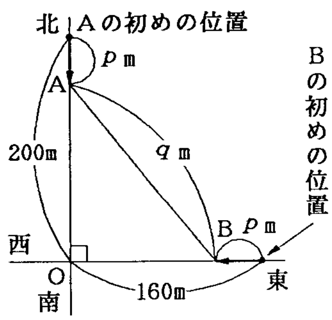
２人が p m ずつ歩いたときの２人の距離を q m とします。そして，q を p の式で表すことを考えます。

右の図で，△ＡＯＢは ∠Ｏ＝90° の直角三角形ですから，三平方の定理より

$$AB^2 = OA^2 + OB^2$$

が成り立ちます。

ここで，p，q の変域が $p \geqq 0$，$q \geqq 0$ であることに注意して，q が最小になるときの p の値を求めればよいわけです。



◆ 解　答 ◆

Ａ，Ｂが p m ずつ歩いたときの位置をそれぞれＡ，Ｂ，ＡＢ間の距離を q m とする。

ＯＡ，ＯＢ，ＡＢを p，q の式で表すと

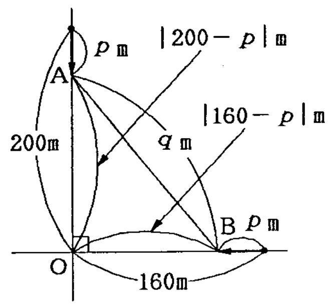
$OA = |200 - p|$　………①

$OB = |160 - p|$　………②

$AB = q$　………③

ここで，△ＡＯＢは右の図のように直角三角形になるから，三平方の定理より

$$AB^2 = OA^2 + OB^2$$



これに，①，②，③を代入して

$$\begin{aligned} q^2 &= |200-p|^2 + |160-p|^2 \\ &= (200-p)^2 + (160-p)^2 \\ &= 2p^2 - 720p + 65600 \\ &= 2(p^2 - 360p) + 65600 \\ &= 2(p-180)^2 - 64800 + 65600 \\ &= 2(p-180)^2 + 800 \quad \cdots\cdots\text{④} \end{aligned}$$

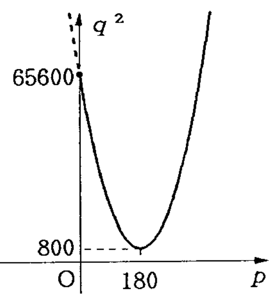
題意より $p \geqq 0$ だから，この範囲で④のグラフをかくと，右の図の実線部分になる。

グラフより，$p=180$ のとき q^2 は最小になる。

→ p，q は距離だから，負にはなりません。

ここで，$q \geqq 0$ だから，q^2 が最小になるとき，すなわち $p=180$ のとき，q も最小になる。

よって，２人の距離がもっとも近くなるのは，２人が 180 m ずつ歩いたときである。



➔それでは，トレーニングで文章題をいくつか解いてみましょう。

■■■トレーニング■■■

4 ＊ (0051)

原価が 80 円の商品を，1 個につき 100 円で売れば 1 日に 1000 個の売り上げがあり，これを 1 個につき 1 円値上げをすると 6 個の割合で売り上げが減少し，1 円の値下げをすると 6 個の割合で売り上げが増加するものとします。

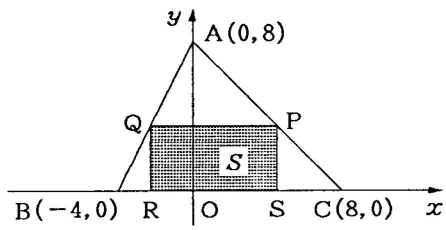
このとき，1 日の売り上げを最大にするためには売価をいくらにすればよいですか。また，そのときの売り上げはいくらですか。

5 ＊ (0052)

直角をはさむ 2 辺の長さの和が 20 cm である直角三角形の斜辺の長さの最小値を求めなさい。

6 ＊ (0053)

図のような△ＡＢＣ の辺 ＡＣ 上に点 Ｐ があります。長方形 ＰＱＲＳ の面積 S の最大値およびそのときの点 Ｐ の座標を求めなさい。



➔時間があれば，最大・最小に関するもうすこしむずかしい問題にチャレンジしましょう。

もっと力をつけよう

■■■トレーニング■■■

7 ＊ (0054)

$x^2+y^2=5$ のとき，$k=2x-y$ の最大値・最小値を，次の手順にしたがって求めなさい。ただし，x，y は実数とします。

(1) 2 つの式から y を消去しなさい。

(2) x が実数であることから，k の最大値・最小値を求めなさい。

➔ここでは，2 次関数の最大値・最小値のまとめとして，いろいろな場合の最大値・最小値について学習しました。

§9　連立方程式　3元1次連立方程式

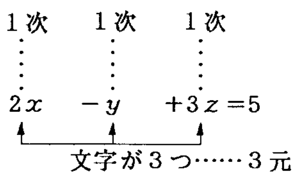
中学校で，2元1次連立方程式について学習しましたね。2元1次連立方程式は，2つの文字についての1次方程式を2つ組にして考えたものでした。ここでは，文字の数をさらに1つふやして，3つの文字についての1次方程式の組を考えます。

➜さっそく始めます。2元1次連立方程式について思い出しながら，学習を進めましょう。

〔1〕3元1次連立方程式とその解

◇3元1次連立方程式

たとえば，$2x-y+3z=5$ のように3つの文字についての1次方程式を3元1次方程式といいます。



また，$\begin{cases} 2x-y-3z=5 \\ 3x+2y-3z=-2 \\ x+3y+z=9 \end{cases}$ のように，2つ以上の3元1次方程式を組にして考えたものを3元1次連立方程式といいます。

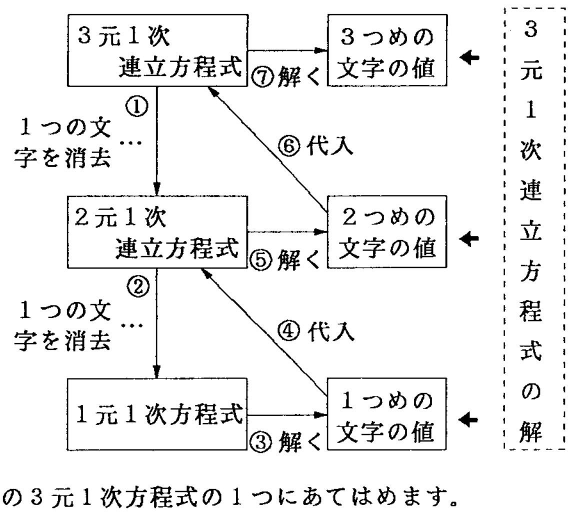
そして，3元1次連立方程式を満たす文字の値の組を，その解といい，3元1次連立方程式の解を求めることを，3元1次連立方程式を解くといいます。

➜3元1次連立方程式を満たす値の組というのは，その3元1次方程式のどれをも満たす値の組のことです。

◇3元1次連立方程式の解き方

2元1次連立方程式は，加減法や代入法で，1つの文字を消去して，残りの1つの文字についての方程式を導いて解きましたね。

3元1次連立方程式でも，同じように，文字の数をへらす方向で，次のように解きます。



① 3元1次連立方程式から，1つの文字を消去し，2元1次連立方程式をつくります。
② ①でつくった2元1次連立方程式から，1つの文字を消去し，1元1次方程式をつくります。
③ ②の1元1次方程式を解きます。
④ ③で求めた文字の値を，②の2元1次方程式の1つにあてはめます。
⑤ ④の方程式を解きます。
⑥ ③，⑤で求めた2つの文字の値を，①の3元1次方程式の1つにあてはめます。
⑦ ⑥の方程式を解きます。

上の③，⑤，⑦で求めた値の組が，3元1次連立方程式の解です。

〈注意〉 3元1次連立方程式では，ちがう3つの方程式の組を考えたものでないと，その解は1組にきまりません。

➔では，いよいよ3元1次連立方程式への挑戦です。

基本例題1 3元1次連立方程式(1)

連立方程式 $\begin{cases} 3x+2y+z=-1 & \cdots\cdots\cdots ① \\ -2x+3y+3z=-16 & \cdots\cdots\cdots ② \\ 4x-5y-2z=25 & \cdots\cdots\cdots ③ \end{cases}$ を解きなさい。

◆ 考え方 ◆

次の手順で解きます。

(1) たとえば，$\begin{cases} 3x+2y+z=-1 \\ -2x+3y+3z=-16 \end{cases}$，$\begin{cases} 3x+2y+z=-1 \\ 4x-5y-2z=25 \end{cases}$ という組を考え，それぞれで同じ1つの文字を消去して，残りの2つの文字についての連立方程式をつくります。

(2) (1)で求めた連立方程式を解きます。

(3) (2)で求めた連立方程式の解を①～③のどれかに代入して，残りの文字の値を求めます。

◆ 解 答 ◆

①×3－②から　$11x+3y=13$ ………④

➔①と②の組から z を消去します。そのために z の係数をそろえてひきます。

①×2＋③から　$10x-y=23$ ………⑤

➔①と③の組から z を消去します。

④，⑤の連立方程式を解いて　➔x，y の値を求めます。

$x=2$，$y=-3$ ………⑥

⑥を①に代入すると　$3\cdot 2+2\cdot(-3)+z=-1$　➔z の値を求めます。

よって　$z=-1$

したがって　$x=2$，$y=-3$，$z=-1$

〈注意〉 これから，3元1次連立方程式の解を，上のように $x=$○，$y=$△，$z=$□ の形で示すことにします。

➔この基本例題1の解答では z を消去しましたが，どの文字を消去してもかまいません。計算しやすい文字を1つ消去して，2元1次連立方程式をつくればよいのです。では，トレーニングしましょう。

■■■トレーニング■■■

1 (0055)

次の連立方程式を解きなさい。

(1) $\begin{cases} -x+4y-3z=11 & \cdots\cdots\cdots ① \\ 3x+z=-5 & \cdots\cdots\cdots ② \\ 2y=7z-1 & \cdots\cdots\cdots ③ \end{cases}$

(2) $\begin{cases} 6x+y-4z=2 & \cdots\cdots\cdots ① \\ 7x-3z=3 & \cdots\cdots\cdots ② \\ 7y+2z=-2 & \cdots\cdots\cdots ③ \end{cases}$

➔どの文字を消去するのが楽か，式を見て，消去の計画をたてましょう。

2 (0056)

次の連立方程式を解きなさい。

(1) $\begin{cases} x-4y+5z=10 & \cdots\cdots\cdots ① \\ 2x-3y-2z=-2 & \cdots\cdots\cdots ② \\ 3x+5y-z=-20 & \cdots\cdots\cdots ③ \end{cases}$

(2) $\begin{cases} 3x+2y-4z=-23 & \cdots\cdots\cdots ① \\ 4x-3y+5z=38 & \cdots\cdots\cdots ② \\ 5x+4y-3z=-22 & \cdots\cdots\cdots ③ \end{cases}$

➜ 3元1次連立方程式の解き方はわかりましたね。では，つぎに，特別な形をした3元1次連立方程式を，すこしくふうして，簡単に解いてみましょう。

基本例題 2 ―― 3元1次連立方程式(2)

連立方程式 $\begin{cases} x+y=1 & \cdots\cdots\cdots ① \\ y+z=-1 & \cdots\cdots\cdots ② \\ x+z=4 & \cdots\cdots\cdots ③ \end{cases}$ を解きなさい。

◆ 考え方 ◆

各式は2元1次方程式ですが，3つ組にして考えると3元1次連立方程式です。

だから，これまでと同じように文字の数を減らす方針で解くこともできます。しかし，①～③の式でどの2つの文字の係数も等しいことを利用すると，次のように解くことができます。

(1) ①+②+③を計算して，$x+y+z$ の値を求めます。

(2) (1)で求めた $x+y+z$ の値から，①，②，③をそれぞれひくと順に z，x，y の値が求められます。

◆ 解 答 ◆

①+②+③から　$2(x+y+z)=4$

よって　$x+y+z=2$ ………④　➜ $x+y+z$ の値を求めます。

④−①から　$z=1$　➜ x と y が同時に消去できます。

④−②から　$x=3$　➜ y と z が同時に消去できます。

④−③から　$y=-2$　➜ x と z が同時に消去できます。

したがって　$x=3$，$y=-2$，$z=1$

➜式の形の特徴をうまく利用すると，こんなに計算が楽にできるのですね。では，トレーニングしましょう。

■■■トレーニング■■■

3 (0057)

次の連立方程式を解きなさい。

(1) $\begin{cases} x+y=6 & \cdots\cdots\cdots ① \\ y+z=-1 & \cdots\cdots\cdots ② \\ x+z=-3 & \cdots\cdots\cdots ③ \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x+y-5z=15 & \cdots\cdots\cdots ① \\ x-5y+z=3 & \cdots\cdots\cdots ② \\ -5x+y+z=-9 & \cdots\cdots\cdots ③ \end{cases}$

➜できましたね。では，つぎに $A=B=C=D$ という形の3元1次連立方程式を解いてみましょう。

基本例題 3 ―― 3元1次連立方程式(3)

次の連立方程式を解きなさい。

$$3x+2y+z=2x+3y-4z=2x+y=-4$$

◆ 考え方 ◆

$A=B=C=D$ という形の連立方程式は，A，B，C，D の中から2つずつ選んで等号で結んだ方程式 $A=B$，$A=C$，$A=D$，$B=C$，$B=D$，$C=D$ の中から，等号＝の個数，すなわち3個を組にした連立方程式で，A，B，C，D を全部ふくんだものと同じです。

➜ $A=B$，$A=C$，$B=C$ という組は，D をふくんでいませんから，$A=B=C=D$ と同じものではありません。

◆ 解　答 ◆

与えられた連立方程式を書き直すと

$$\begin{cases} 3x+2y+z=-4 & \cdots\cdots\text{①} \\ 2x+3y-4z=-4 & \cdots\cdots\text{②} \\ 2x+y=-4 & \cdots\cdots\text{③} \end{cases}$$

➜ $A=B=C=D$ で，$\begin{cases} A=D \\ B=D \\ C=D \end{cases}$

①×4＋②から　$14x+11y=-20$　$\cdots\cdots$④　➜ z を消去します。

③，④の連立方程式を解いて　➜ x，y の値を求めます。

$x=-3$，$y=2$　$\cdots\cdots$⑤

⑤を①に代入して　➜ z の値を求めます。

$$3\cdot(-3)+2\cdot2+z=-4$$

よって　$z=1$

したがって　$x=-3$，$y=2$，$z=1$

➜ 3個の方程式の組をつくるとき，組み合わせ方は自由ですが，計算が簡単にすむように組み合わせるのがうまい方法です。上では，定数の -4 を3回使って式を簡単にしています。

■■■トレーニング■■■

4　(0058)

次の連立方程式を解きなさい。

(1)　$-3x+2y-z=2x-5y=-x+z=4$

(2)　$4x-y+z=4x+3y-z=2x-4y+2z=-1$

5　(0059)

次の連立方程式を解きなさい。

(1)　$x+y+z=2x+y-z-1=-x+y+7=3x+2z-9$

(2)　$3x+y+2z+7=2x+3y-z+3=-x+2y-3z-2=2x+3z+4$

➜ がんばりましたね。すこし計算がめんどうですが，考え方は2元1次連立方程式の場合と同じですね。では，計算まちがいをしていないかどうか，きちんと答え合わせをして終わりにしましょう。

まとめておこう！

1. ３つの文字についての１次方程式，すなわち３元１次方程式を組にして考えたものを，３元１次連立方程式といいます。
2. ３元１次連立方程式の解を求めることを，３元１次連立方程式を解くといいます。
3. ３元１次連立方程式を解くには，１つの文字を消去して２元１次連立方程式を導いて解きます。
4. $A=B=C=D$という形の連立方程式は$A=B$，$A=C$，$A=D$などの３つの方程式に書き直して解きます。

§10　2次関数の決定(1)　グラフが3点を通る2次関数の決定など

これまで，2次関数についてそのグラフや最大値・最小値を学習してきました。それでは，逆に，グラフや最大値・最小値から2次関数を求めるには，どのようにすればよいのでしょうか。ここからは，グラフなどから2次関数を決定する学習をします。このまえ学習した，連立方程式の解法が役に立ちますよ。

➜まず，グラフ上の3点がわかっているとき，その2次関数を求めるにはどうすればよいか考えてみましょう。

〔1〕グラフ上の3点からの2次関数の決定

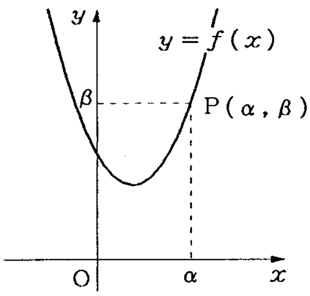
◇関数 $y=f(x)$ のグラフが点 $(\alpha,\ \beta)$ を通るとき

関数 $y=f(x)$ のグラフが，右の図のように点 $\mathrm{P}(\alpha,\ \beta)$ を通るとします。このとき，点Pはこのグラフ上の点ですから

$x=\alpha$ のとき　$y=\beta$

すなわち　$f(\alpha)=\beta$

が成り立ちます。



たとえば，そのグラフが2点 $(0,\ -1)$，$(2,\ 3)$ を通る直線である1次関数 $y=ax+b$ の場合

$x=0$ のとき $y=-1$ だから　$-1=a\cdot 0+b$

$x=2$ のとき $y=3$ だから　$3=a\cdot 2+b$

より，$a=2$，$b=-1$ となります。

したがって，この1次関数は $y=2x-1$ であることがわかります。

◇2次関数のグラフが3点を通るとき

関数 $y=f(x)$ において，y が x についての2次式 ax^2+bx+c で表されるものが2次関数ですから，与えられた条件から2次関数を決定するには，この2次式の係数を求めればよいわけですね。

よって，グラフが通る3点の座標がわかっている2次関数を求めるには，1次関数の場合と同じように，求める2次関数を $y=ax^2+bx+c$ とおいて，この式の x，y に3点の x 座標，y 座標を代入し a，b，c を求めます。

たとえば，2次関数が3点 $(-1,\ 0)$，$(0,\ -3)$，$(1,\ -4)$ を通るならば

$x=-1$ のとき $y=0$ から　$0=a\cdot(-1)^2+b\cdot(-1)+c$

$x=0$ のとき $y=-3$ から　$-3=a\cdot 0^2+b\cdot 0+c$

$x=1$ のとき $y=-4$ から　$-4=a\cdot 1^2+b\cdot 1+c$

この3つの式を連立させて解けば $a=1$，$b=-2$，$c=-3$ となり，この2次関数が $y=x^2-2x-3$ であることがわかります。

このように，3点を通る2次関数は，$y=ax^2+bx+c$ とおいて3元1次連立方程式を解いて求められます。

➜では，さっそく次の基本例題で，グラフが与えられた３点を通るときの２次関数を求めてみましょう。

基本例題１　グラフ上の３点から２次関数を決定する

グラフが３点 $(1,\ -6)$，$(-2,\ 9)$，$(0,\ -5)$ を通る２次関数を求めなさい。

◆ 考え方 ◆

求める２次関数を $y=ax^2+bx+c$ とおいて，$y=ax^2+bx+c$ の x，y に，それぞれ $(1,\ -6)$，$(-2,\ 9)$，$(0,\ -5)$ を代入します。

◆ 解　答 ◆

求める２次関数を $y=ax^2+bx+c$ とおく。

グラフが３点 $(1,\ -6)$，$(-2,\ 9)$，$(0,\ -5)$ を通ることから

$-6=a+b+c$ ………①

$9=4a-2b+c$ ………②

$-5=c$ ………③

③から　$c=-5$　➜①，②，③を連立させて，a，b，c を求めます。

これを①，②に代入して

$-6=a+b-5$ ………①′

$9=4a-2b-5$ ………②′

①′ と②′ を連立させて解くと　$a=2$，$b=-3$

よって，求める２次関数は　$y=2x^2-3x-5$

〈注意〉　２次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフと y 軸との交点は点 $(0,\ c)$ ですね。このことから，グラフと y 軸との交点がわかっているときには c の値がすぐにわかります。

上の基本例題１では，グラフが点 $(0,\ -5)$ を通ります。この点が y 軸との交点ですから，$c=-5$。よって，求める２次関数を $y=ax^2+bx-5$ とおいて a，b を求めてもよいですね。

➜トレーニングです。グラフが３点を通ることから２次関数を求める練習をしましょう。

■■■トレーニング■■■

1　(0060)

グラフが次の３点を通る２次関数を求めなさい。

(1)　$(-1,\ 6)$，$(2,\ 0)$，$(1,\ 6)$

(2)　$(1,\ 3)$，$(0,\ 0)$，$(-4,\ 8)$

2　(0061)

グラフが次の条件を満たす２次関数を求めなさい。

(1)　２点 $(2,\ 1)$，$(1,\ 0)$ を通り，y 軸と点 $(0,\ 3)$ で交わる。

(2)　x 軸と２点 $(-2,\ 0)$，$(3,\ 0)$ で交わり，y 軸と点 $(0,\ 12)$ で交わる。

--------• ちょっとひとこと •--------

◦　２次関数は，一般に $y=ax^2+bx+c$ の形だけでなく，$y=a(x-p)^2+q$ の形で表すこともできます。

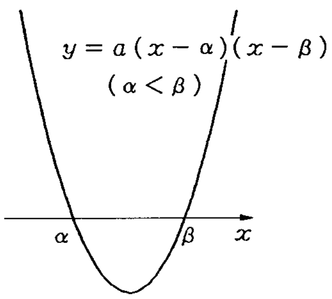
グラフが3点を通るときには，2次関数を $y=ax^2+bx+c$ とおいて3元1次連立方程式を導いて2次関数を求めますが，求める2次関数を $y=a(x-p)^2+q$ とおいても，3元連立方程式を導き出すことができます。ところが，この連立方程式は3元2次連立方程式なので，この方法でも2次関数を求めることはできますが，$y=ax^2+bx+c$ とおいたほうがはるかに簡単に求められます。

➔グラフ上の3点のうち，とくに x 軸との2交点がわかっている2次関数は，求める2次関数を $y=ax^2+bx+c$ とおいても求められますが，次のように考えることもできます。

〔2〕 x 軸との交点からの2次関数の決定

◇2次関数のグラフと x 軸との交点

2次関数が $y=a(x-\alpha)(x-\beta)$ の形で表されるとき，そのグラフは，右の図のように x 軸と2点 $(\alpha,\ 0)$，$(\beta,\ 0)$ で交わりますね。



たとえば，関数 $y=2x^2-8x+6$ は

$$
\begin{aligned}
y&=2x^2-8x+6\\
&=2(x^2-4x+3)\\
&=2(x-1)(x-3)
\end{aligned}
$$

と変形されますから，$x=1$，3のとき $y=0$ となり，そのグラフは x 軸と2点 $(1,\ 0)$，$(3,\ 0)$ で交わります。

◇2次関数のグラフが x 軸と2点で交わるとき

一般に，グラフが x 軸と2点 $(\alpha,\ 0)$，$(\beta,\ 0)$ で交わる2次関数は

$$y=a(x-\alpha)(x-\beta)$$

の形で表されます。

よって，グラフが x 軸と2点 $(\alpha,\ 0)$，$(\beta,\ 0)$ で交わる2次関数を求めるには，求める2次関数を $y=a(x-\alpha)(x-\beta)$ とおいて，他の点を通るなどの条件から a についての方程式を導き，その方程式を解いて a を求めればよいのです。

> グラフが x 軸と2点 $(\alpha,\ 0)$，$(\beta,\ 0)$ で交わる2次関数は $y=a(x-\alpha)(x-\beta)$ の形で表せますよ。

➔関数のグラフをかくときに，x 軸や y 軸との交点をグラフ上の特別な点として，その座標を求めてきました。逆に，軸との交点の座標から簡単に2次関数を決定することができるのですね。

例題1　グラフと x 軸との交点から2次関数を決定する

グラフが x 軸と2点 $(-3,\ 0)$，$(1,\ 0)$ で交わり，y 軸と点 $(0,\ -6)$ で交わる2次関数を求めなさい。

◆考え方◆

求める2次関数を $y=a(x-\alpha)(x-\beta)$ とおいて，$y=a(x-\alpha)(x-\beta)$ の α，

β に-3，1を代入します。

◆解　答◆

グラフが x 軸と2点$(-3,\ 0)$，$(1,\ 0)$で交わることから，求める2次関数は

$$y=a(x+3)(x-1)$$

とおける。

グラフが点$(0,\ -6)$を通ることから

$$-6=a(0+3)(0-1)$$

➜ a についての方程式を導いて a を求めます。

$$a=2$$

よって，求める2次関数は　$y=2(x+3)(x-1)$

すなわち　$y=2x^2+4x-6$

◆別　解◆

グラフが y 軸と点$(0,\ -6)$で交わることから，求める2次関数は

$$y=ax^2+bx-6$$

とおける。

グラフが2点$(-3,\ 0)$，$(1,\ 0)$を通ることから

$$0=9a-3b-6$$
$$0=a+b-6$$

この2式を連立させて解くと　$a=2$，$b=4$

よって，求める2次関数は　$y=2x^2+4x-6$

➜グラフと x 軸との2交点から2次関数を求めるトレーニングをしましょう。

■■■トレーニング■■■

3＊ (0062)

グラフが次の条件を満たす2次関数を求めなさい。

(1) x 軸と2点$(2,\ 0)$，$(4,\ 0)$で交わり，y 軸と点$(0,\ 8)$で交わる。

(2) x 軸と2点$(-1,\ 0)$，$(2,\ 0)$で交わり，点$(1,\ 4)$を通る。

4＊ (0063)

グラフが次の3点を通る2次関数を求めなさい。

(1) $(-2,\ 0)$，$(3,\ 0)$，$(-1,\ 12)$　　(2) $(0,\ 0)$，$(2,\ -4)$，$(4,\ 0)$

➜グラフが満たす条件から2次関数 $y=ax^2+bx+c$ を求めるには，グラフの条件から a，b，c を求めるのですね。次は，a が与えられた2次関数について考えてみましょう。

〔3〕グラフの平行移動からの２次関数の決定

◇ $y=ax^2+bx+c$ のグラフと $y=ax^2+b'x+c'$ のグラフ

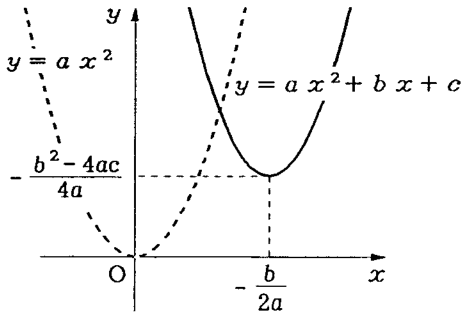
２次関数 $y=ax^2+bx+c$ は

$$y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$$

と変形されますから，そのグラフは，頂点が

$$\text{点}\left(-\frac{b}{2a},\ -\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$$

になるように，$y=ax^2$ のグラフを平行移動した放物線になりますね。



同様にして，$y=ax^2+b'x+c'$ のグラフも $y=ax^2$ のグラフを平行移動した放物線になりますから，$y=ax^2+bx+c$ と $y=ax^2+b'x+c'$ のグラフはたがいに他のグラフを平行移動した放物線になっています。

このように，２つの２次関数の x^2 の係数が等しいとき，それぞれのグラフはもう一方のグラフを平行移動した放物線になっています。

◇ $y=a(x-\alpha)(x-\beta)$ のグラフと $y=ax^2$ のグラフ

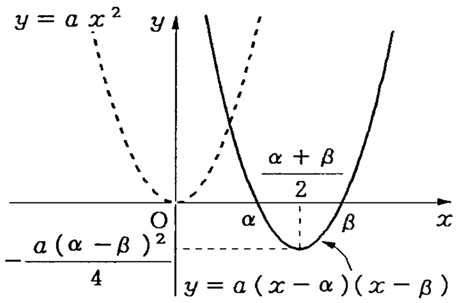
２次関数 $y=a(x-\alpha)(x-\beta)$ は

$$y=a\left(x-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2-\frac{a(\alpha-\beta)^2}{4}$$

と変形されますから，そのグラフは，頂点が

$$\text{点}\left(\frac{\alpha+\beta}{2},\ -\frac{a(\alpha-\beta)^2}{4}\right)$$

になるように，$y=ax^2$ のグラフを平行移動した放物線ですね。



また，$y=a(x-\alpha)(x-\beta)$

$\qquad=ax^2-a(\alpha+\beta)x+a\alpha\beta$

ですから，x^2 の係数は a で，$y=ax^2$ の x^2 の係数と等しくなっています。

◇グラフの平行移動と２次関数の決定

２次関数は，一般に

$y=ax^2+bx+c$

$y=a(x-p)^2+q$

の形で表され，またグラフが x 軸と２点で交わるときには

$y=a(x-\alpha)(x-\beta)$

の形で表されます。これらの式の右辺を展開すれば，x^2 の係数はいずれも a になりますから，これらの２次関数のグラフは，いずれも $y=ax^2$ のグラフを平行移動した放物線です。

> 関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフを平行移動した放物線が関数 $y=a'x^2+b'x+c'$ のグラフであるとき $a=a'$ となります。

以上のことから，ある２次関数のグラフを平行移動したグラフの表す２次関数は，もとの２次関数と x^2 の係数が等しいといえます。

➜ ２次関数のグラフを平行移動したとき，x^2 の係数は変化しないのですね。例題に移りましょう。

例題2　グラフの平行移動から2次関数を決定する

グラフが2点(0, 6), (1, 4)を通り，関数 $y=2x^2$ のグラフを平行移動したものである2次関数を求めなさい。

◆ 考え方 ◆

求める2次関数を $y=ax^2+bx+c$ とおくと，そのグラフが $y=2x^2$ のグラフを平行移動したものですから

$a=2$

となります。すなわち，求める2次関数は

$y=2x^2+bx+c$

とおけます。

◆ 解　答 ◆

グラフが関数 $y=2x^2$ のグラフを平行移動したものであることから，求める2次関数は

$y=2x^2+bx+c$

とおける。

グラフが y 軸と点(0, 6)で交わることから

→2点(0, 6), (1, 4)を通ることから，b，c を求めます。

$c=6$

グラフが点(1, 4)を通ることから

$4=2+b+6$

$b=-4$

よって，求める2次関数は　$y=2x^2-4x+6$

→2次関数を $y=ax^2+bx+c$ とおいたとき，y 軸との交点から c がきまるだけでなく，どのような2次関数のグラフを平行移動したかで a もきまるのですね。

■■■トレーニング■■■

5 * (0064)

グラフが次の2点を通り，関数 $y=-x^2+2x+3$ のグラフを平行移動したものである2次関数を求めなさい。

(1) (1, 2), (3, 4)　　(2) (1, 0), (−3, 0)

6 * (0065)

グラフが次の2点を通り，関数 $y=2x^2+x-3$ のグラフを平行移動したものである2次関数を求めなさい。

(1) (0, 1), (1, 1)　　(2) (−1, −3), (2, 12)

→求める2次関数をどのような式におくかは，与えられた条件によってちがいますね。ここでは，グラフ上の点の座標から2次関数を決定する学習をしました。

§11　2次関数の決定(2)　頂点についての条件から2次関数を決定する

2次関数 $y=a(x-p)^2+q$ のグラフは，点 $(p,\ q)$ を頂点とする放物線になりますね。前回は，グラフ上の点の座標から2次関数を求めることを学習しましたが，ここでは，グラフの頂点から2次関数を求める学習をします。

→まず，グラフの頂点の座標をもとにして2次関数を求めてみましょう。

〔1〕グラフの頂点からの2次関数の決定

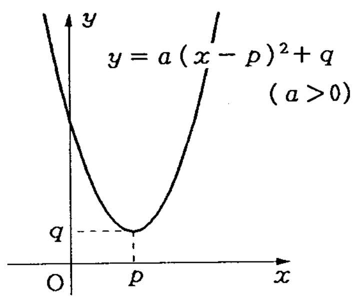
◇2次関数のグラフの頂点の座標

2次関数 $y=ax^2+bx+c$ や $y=a(x-\alpha)(x-\beta)$ のグラフは，その式を $y=a(x-p)^2+q$ の形に変形することにより，点 $(p,\ q)$ を頂点とする放物線となることがわかりますね。

たとえば，関数 $y=2x^2-8x+6$ は

$$\begin{aligned} y&=2(x^2-4x)+6\\ &=2(x-2)^2-8+6\\ &=2(x-2)^2-2 \end{aligned}$$

と変形されますから，そのグラフは点 $(2,\ -2)$ を頂点とする放物線になります。



◇2次関数のグラフの頂点が点 $(p,\ q)$ であるとき

一般に，グラフの頂点の x 座標が p，y 座標が q，すなわち頂点が点 $(p,\ q)$ である2次関数は

$$y=a(x-p)^2+q$$

の形で表されます。

よって，グラフの頂点の x 座標と y 座標，あるいはその一方がわかっている2次関数は，$y=a(x-p)^2+q$ とおいて求めることができます。

> 頂点が点 $(1,\ 2)$ ならば
> $y=a(x-1)^2+2$
> 頂点の x 座標が1ならば
> $y=a(x-1)^2+q$
> と表されます。

→では，さっそく，次の基本例題をやってみましょう。

基本例題1　頂点とグラフ上の点から2次関数を決定する

グラフが点 $(0,\ -9)$ を通り，その頂点が点 $(2,\ 3)$ である2次関数を求めなさい。

◆考え方◆

求める2次関数を $y=a(x-p)^2+q$ とすると，頂点が点 $(2,\ 3)$ ですから，$p=2$，$q=3$ です。すなわち，求める2次関数は $y=a(x-2)^2+3$ とおけます。

◆解　答◆

グラフの頂点が点 $(2,\ 3)$ であることから，求める2次関数は

$$y=a(x-2)^2+3$$

とおける。

グラフが点 $(0,\ -9)$ を通ることから

$$-9=a(0-2)^2+3$$

$$a=-3$$

よって，求める2次関数は　$y=-3(x-2)^2+3$

すなわち　$y=-3x^2+12x-9$

➜では，トレーニングです。

■■■トレーニング■■■

1　(0066)

グラフが次の条件を満たす2次関数を求めなさい。

(1)　頂点が $(3,\ -1)$ で，点 $(0,\ -10)$ を通る。

(2)　頂点が $(2,\ 0)$ で，点 $(1,\ 2)$ を通る。

2　(0067)

グラフが次の条件を満たす2次関数を求めなさい。

(1)　直線 $x=-4$ を軸とし，2点 $(-8,\ -7)$，$(-10,\ -27)$ を通る。

(2)　頂点が直線 $x=-3$ 上にあり，x 軸と点 $(2,\ 0)$，y 軸と点 $(0,\ -8)$ で交わる。

(3)　2点 $(0,\ 1)$，$(-1,\ 7)$ を通り，頂点の x 座標が1である。

3　(0068)

グラフが放物線 $y=-x^2+4x+1$ を平行移動したもので，頂点が $(3,\ 0)$ の2次関数を求めなさい。

➜グラフの頂点がある直線上の点であることがわかっている場合には，どのようにして2次関数を求めればよいのでしょうか。

例題1　頂点が直線上にあることから2次関数を決定する

グラフが2点 $(0,\ 7)$，$(1,\ 4)$ を通り，頂点が直線 $y=2x-1$ 上にある2次関数を求めなさい。

◆考え方◆

求める2次関数を $y=a(x-p)^2+q$ とおくと，この関数のグラフの頂点は点 $(p,\ q)$ になります。

この点が直線 $y=2x-1$ 上にあることから

$$q=2p-1$$

が成り立ちます。

また，グラフが2点 $(0,\ 7)$，$(1,\ 4)$ を通ることから，方程式が2つたてられます。

以上の3式を連立方程式として a，p，q を求めれば，2次関数が求められます。

◆解　答◆

求める2次関数を $y=a(x-p)^2+q$ とおく。

グラフの頂点 $(p,\ q)$ が直線 $y=2x-1$ 上にあることから

$$q=2p-1 \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

グラフが2点 (0, 7), (1, 4) を通ることから

$7=a(0-p)^2+q$ ………②

$4=a(1-p)^2+q$ ………③

➜①, ②, ③を連立させて, a, p, q を求めます。

①, ②から　$ap^2+2p=8$ ………②′

①, ③から　$ap^2-2ap+a+2p=5$ ………③′

②′−③′から　$2ap-a=3$

$2ap=a+3$

$a\neq 0$ より　$p=\dfrac{a+3}{2a}$ ………④

➜$y=a(x-p)^2+q$ は2次関数なので, a は0ではありません。

④を②′に代入して　$a\left(\dfrac{a+3}{2a}\right)^2+2\cdot\dfrac{a+3}{2a}=8$

両辺に $4a$ をかけて整理すると

$a^2-22a+21=0$

$(a-1)(a-21)=0$

$a=1,\ 21$

$a=1$ のとき, ④, ①から　$p=2,\ q=3$

$a=21$ のとき, ④, ①から　$p=\dfrac{4}{7},\ q=\dfrac{1}{7}$

よって, 求める2次関数は　$y=(x-2)^2+3,\ y=21\left(x-\dfrac{4}{7}\right)^2+\dfrac{1}{7}$

すなわち　$y=x^2-4x+7,\ y=21x^2-24x+7$

➜それでは, トレーニングに進みましょう

■■■トレーニング■■■

4 * (0069)

グラフが2点 (0, 8), (−1, −1) を通り, 頂点が直線 $y=4x+4$ 上にある2次関数を求めなさい。

5 * (0070)

グラフが2点 (1, 1), (4, 4) を通り, 頂点が x 軸上にある2次関数を求めなさい。

➜グラフの頂点に関する条件が与えられているときには, $y=a(x-p)^2+q$ の形で表してみて, a, p, q を求めることを考えればよいですね。さらに, いろいろな問題を解いてみましょう。

例題2　頂点が一致することから2つの2次関数を決定する

2つの2次関数 $y=x^2-(a+3)x+5a$, $y=-x^2+2bx+b-5$ のグラフの頂点が一致するとき, a, b の値と頂点の座標を求めなさい。

◆ 考え方 ◆

2つの2次関数をともに $y=○(x-△)^2+□$ の形に直し, それぞれのグラフの頂点の座標を a, b で表します。そして, x 座標, y 座標がともに一致することから a, b の値を求めます。

◆解　答◆

$y=x^2-(a+3)x+5a$

➜１番目の式を $y=\bigcirc(x-\triangle)^2+\square$ の形に変形します。

$=\left(x-\dfrac{a+3}{2}\right)^2-\left(\dfrac{a+3}{2}\right)^2+5a$

$=\left(x-\dfrac{a+3}{2}\right)^2-\dfrac{a^2-14a+9}{4}$

より，この関数のグラフの頂点の座標は

$\left(\dfrac{a+3}{2},\ -\dfrac{a^2-14a+9}{4}\right)$ ………①

また

$y=-x^2+2bx+b-5$　➜次は，２番目。

$=-(x^2-2bx)+b-5$

$=-(x-b)^2+b^2+b-5$

より，この関数のグラフの頂点の座標は

$(b,\ b^2+b-5)$

２つの関数のグラフの頂点が一致することから

$\dfrac{a+3}{2}=b$ ………②

$-\dfrac{a^2-14a+9}{4}=b^2+b-5$ ………③

②を③に代入して整理すると

$a^2-3a+2=0$

$(a-1)(a-2)=0$

$a=1,\ 2$

$a=1$ のとき，②，①より　$b=2$，頂点の座標は $(2,\ 1)$

$a=2$ のとき，②，①より　$b=\dfrac{5}{2}$，頂点の座標は $\left(\dfrac{5}{2},\ \dfrac{15}{4}\right)$

➜トレーニングで，頂点が一致することから２つの２次関数を求めてみましょう。

■■■トレーニング■■■

6 ＊ (0071)

２つの x についての２次関数 $y=-2x^2-2ax+a$，$y=x^2-(b+1)x+5b-4$ のグラフの頂点が一致するとき，定数 a，b の値と頂点の座標を求めなさい。

7 ＊ (0072)

２つの x についての２次関数 $y=ax^2-2ax-1$，$y=bx^2-2x+b+1$ のグラフの頂点が一致するとき，定数 a，b の値と頂点の座標を求めなさい。

→ここでは，グラフの頂点がわかっているときの２次関数の決定について学習しました。

まとめておこう！

いろいろな条件から２次関数を決定するには，次のようにします。

1. グラフ上の３点がわかっているとき
   ⟶ $y=ax^2+bx+c$ とおきます。
2. グラフと x 軸との２交点がわかっているとき
   ⟶ $y=a(x-\alpha)(x-\beta)$ とおきます。
3. グラフの頂点に関する条件がわかっているとき
   ⟶ $y=a(x-p)^2+q$ とおきます。
4. グラフが，他の２次関数のグラフを平行移動したものであるとき，x^2の係数 a をもとの２次関数の x^2 の係数と等しくします。

§ 12　2次関数の決定(3)　最大値・最小値から2次関数を決定する

2次関数 $y=ax^2+bx+c$ は，$y=a(x-p)^2+q$ の形に変形することによって，グラフをかいて最大値・最小値を求めることができましたね。それでは，逆に，最大値・最小値から2次関数を求めるにはどのようにすればよいのでしょうか。ここでは，最大値・最小値がわかっているときの2次関数の決定について学習します。

➜ まず，定義域が実数全体のとき，最大値または最小値から2次関数を求めてみましょう。

〔1〕最大値・最小値からの2次関数の決定(1)

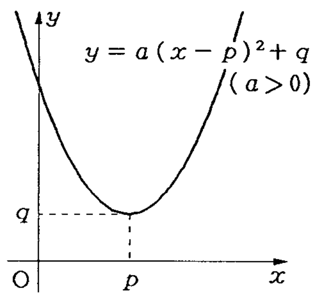
◇ 2次関数 $y=a(x-p)^2+q$ の最大値・最小値と値域

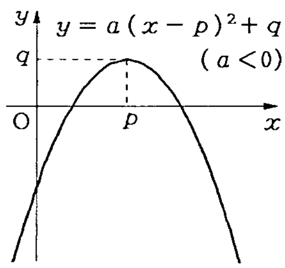
2次関数 $y=a(x-p)^2+q$ の最大値・最小値や値域は，a の符号によってちがいましたね。

すなわち

$a>0$ のとき
　$x=p$ で最小値 q
　値域は $y \geqq q$

$a<0$ のとき
　$x=p$ で最大値 q
　値域は $y \leqq q$





◇ 2次関数が最小値をもつとき

$x=p$ で最小値 q をとる2次関数のグラフは，上の左の図のようになり，頂点が点 $(p,\ q)$ で下に凸の放物線になります。また，値域が $y \geqq q$ である2次関数のグラフも，頂点の y 座標が q で下に凸の放物線になります。このような2次関数は

$$y=a(x-p)^2+q,\quad a>0$$

とおくことができます。

◇ 2次関数が最大値をもつとき

$x=p$ で最大値 q をとる2次関数や，値域が $y \leqq q$ である2次関数のグラフは，上の右の図のようになりますね。このような2次関数は

$$y=a(x-p)^2+q,\quad a<0$$

とおくことができます。

グラフが上に凸の放物線ですから，x^2 の係数 a が負になるわけです。

定義域が実数全体のときは，2次関数が
最小値をもてば　$a>0$
最大値をもてば　$a<0$
なのですね。

➜ 2次関数のグラフの頂点の y 座標がその2次関数の最大値または最小値になりま

すから，最大値・最小値がわかればグラフの頂点がわかるのですよ。

基本例題 1　　最大値・最小値から 2 次関数を決定する

x についての 2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ は $x=2$ のとき最小値 -7 をとり，そのグラフは点 $(1,\ -4)$ を通ります。

定数 a，b，c を求めなさい。

◆ 考え方 ◆

この 2 次関数を

$$y=a(x-p)^2+q$$

とすると，$x=2$ で最小値 -7 をとることから

$$p=2,\quad q=-7,\quad a>0$$

となります。

◆ 解　答 ◆

$x=2$ のとき最小値 -7 をとることから，求める 2 次関数は

$$y=a(x-2)^2-7,\quad a>0$$

とおける。

この関数のグラフが点 $(1,\ -4)$ を通ることから

$$-4=a(1-2)^2-7$$
$$a=3$$

➜ $a>0$ の条件がありますから，求めた a の値を吟味します。

この値は $a>0$ を満たすので，この 2 次関数は

$$y=3(x-2)^2-7$$
$$=3x^2-12x+5$$

$y=ax^2+bx+c$ と係数を比較して

$$a=3,\quad b=-12,\quad c=5$$

➜最大値・最小値から 2 次関数を決定するトレーニングをしましょう。

■■■トレーニング■■■

1　(0073)

x についての 2 次関数 $y=x^2+ax+b$ が $x=1$ のとき最小値 -2 をとるとき，定数 a，b の値を求めなさい。

2　(0074)

$x=2$ のとき最小値 -3 をとり，グラフが点 $(4,\ 5)$ を通る 2 次関数を求めなさい。

3　(0075)

2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフは点 $(4,\ -4)$ を通り，y は $x=2$ のとき最大値 8 をとるといいます。このとき，定数 a，b，c の値を求めなさい。

4　(0076)

x についての 2 次関数 $y=a(x+1)(x-3)$ の最小値が -5 となるとき，定数 a の値を求めなさい。

5　(0077)

x についての 2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ の値域が $y\geqq1$ で，そのグラフが 2 点 $(5,\ 5)$,

(3, 1) を通るとき，定数 a，b，c の値を求めなさい。

➜次に，定義域が制限されていて，その範囲内での最大値・最小値がわかっている2次関数を求めてみましょう。

〔2〕最大値・最小値からの2次関数の決定(2)

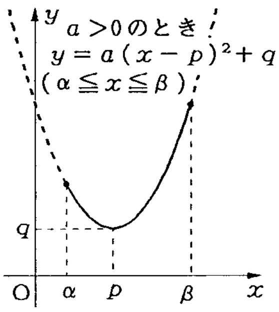
◇定義域内にグラフの軸があるとき

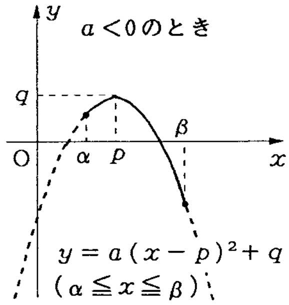
2次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフの頂点の y 座標は，定義域が実数全体の場合には，$a>0$ のとき最小値，$a<0$ のとき最大値になりますね。

同様に，定義域が制限されている場合でも，グラフの軸が定義域内にあれば，頂点の y 座標が，$a>0$ のとき最小値，$a<0$ のとき最大値になります。

したがって，グラフの軸が x の変域 $\alpha \leqq x \leqq \beta$ 内にあるときには，2次関数の最大値・最小値とグラフの頂点の座標の間に次のような関係があります。

$a>0$ のとき
　最小値が頂点の y 座標
　(最大値は，グラフの両端の y の値の大きい方)
$a<0$ のとき
　最大値が頂点の y 座標
　(最小値は，グラフの両端の y の値の小さい方)





このように，x^2 の係数 a の符号によって場合分けをして，最大値・最小値からグラフの頂点の座標 $(p,\ q)$ が求められます。

◇定義域内にグラフの軸がないとき

2次関数 $y=f(x)$ $(\alpha \leqq x \leqq \beta)$ のグラフの軸が定義域 $\alpha \leqq x \leqq \beta$ 内にないときには，この関数の値は定義域内で増加を続けるか，または減少を続けます。

よって，このときには，グラフの両端の y 座標が最大値・最小値になります。

すなわち
　　最大値は $f(\alpha)$，$f(\beta)$ の大きい方
　　最小値は $f(\alpha)$，$f(\beta)$ の小さい方
となるわけです。

➜頂点が定義域内にないので，頂点の y 座標は最大値にも最小値にもなりませんね。

➜定義域が制限されているときには，最大値・最小値から2次関数を決定するのはちょっとむずかしいかもしれませんが，グラフを思い浮かべて場合分けすればうまくいきますよ。

例題1　　最大値・最小値から2次関数を決定する(1)

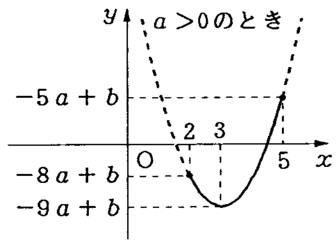
x についての2次関数 $y=ax^2-6ax+b$ $(2 \leqq x \leqq 5)$ の最大値が6，最小値が -2 であるように，定数 a，b の値を定めなさい。

◆ 考え方 ◆

$y = ax^2 - 6ax + b$

$= a(x-3)^2 - 9a + b$

より，グラフが下に凸のときと上に凸のとき，すなわち $a>0$ のときと $a<0$ のときに場合分けして考えます。



$a>0$ のとき，この関数のグラフは右の図のようになり

$x=3$ のとき，最小値 $-9a+b$

$x=5$ のとき，最大値 $-5a+b$

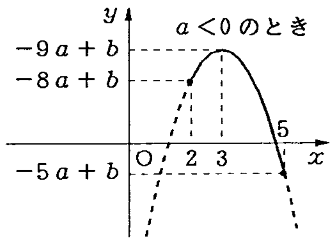
をとります。

$a<0$ のときも，同様にして，右の図から

$x=3$ のとき，最大値 $-9a+b$

$x=5$ のとき，最小値 $-5a+b$

をとります。



こうして求めた最大値，最小値がそれぞれ6，-2 であるように a，b を定めます。

◆ 解　答 ◆

$y = ax^2 - 6ax + b$

$= a(x^2 - 6x) + b$

$= a(x-3)^2 - 9a + b$

$x=2$ のとき　　$y = -8a+b$　　➜グラフの両端の y の値を求めます。

$x=5$ のとき　　$y = -5a+b$

(i)　$a>0$ のとき

この関数のグラフは，軸が直線 $x=3$，頂点が点 $(3,\ -9a+b)$ の下に凸の放物線の $2 \leqq x \leqq 5$ に対応する部分である。

したがって，この関数は

$x=5$ のとき　最大値 $-5a+b$，$x=3$ のとき　最小値 $-9a+b$

をとる。

➜軸が定義域内にあるので，頂点の y 座標が最小値になります。

ここで，条件から，最大値が6，最小値が -2 だから

$-5a+b=6$，$-9a+b=-2$

この2式を連立させて解くと　　$a=2$，$b=16$

この値は $a>0$ を満たしている。

(ii)　$a<0$ のとき

この関数のグラフは，軸が直線 $x=3$，頂点が点 $(3,\ -9a+b)$ の上に凸の放物線の $2 \leqq x \leqq 5$ に対応する部分である。

したがって，この関数は

$x=3$ のとき　最大値 $-9a+b$，$x=5$ のとき　最小値 $-5a+b$

をとる。

ここで，条件から，最大値が6，最小値が -2 だから

$-9a+b=6$，$-5a+b=-2$

この2式を連立させて解くと　　$a=-2$，$b=-12$

この値は $a<0$ を満たしている。

(i)，(ii) より　　$a=2$，$b=16$　または　$a=-2$，$b=-12$

➜ x^2 の係数の正・負で場合分けして，最大値・最小値から a，b についての連立方程式を導くのですね。

それでは，トレーニングにはいりましょう。

■■■トレーニング■■■

6 * (0078)

x についての2次関数 $y=ax^2-2ax+b$ $(-1\leqq x\leqq 2)$ の最大値が5，最小値が -3 であるとき，定数 a，b の値を求めなさい。

7 * (0079)

x についての2次関数 $y=ax^2+4ax+b$ $(-3\leqq x\leqq 1)$ の値域が $-3\leqq y\leqq 15$ であるように，定数 a，b の値を定めなさい。ただし，$a>0$ とします。

➜グラフの軸が定義域内にあるかどうかわからないときには，どのようにして2次関数を決定するのでしょうか。次の例題で考えてみましょう。

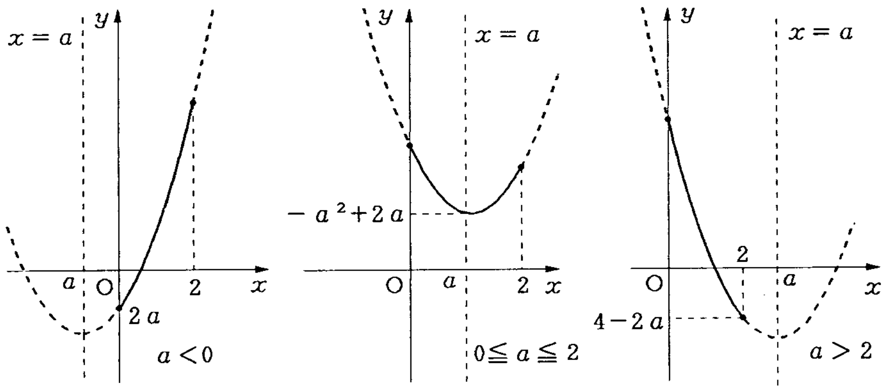
例題2　　最大値・最小値から2次関数を決定する(2)

x についての2次関数 $y=x^2-2ax+2a$ $(0\leqq x\leqq 2)$ の最小値が-8 になるように，定数 a の値を定めなさい。

◆考え方◆

下の図のように，グラフの軸が定義域 $0\leqq x\leqq 2$ 内にあるかどうかによって最小値をとるときの x の値がちがいます。

よって，軸が定義域よりも左側にある場合，定義域内にある場合，定義域よりも右側にある場合に分けます。すなわち，軸が直線 $x=a$ になるので，$a<0$ の場合，$0\leqq a\leqq 2$ の場合，$a>2$ の場合に分けます。



◆解　答◆

$$y=x^2-2ax+2a$$
$$=(x-a)^2-a^2+2a$$

より，この関数のグラフは，軸が直線 $x=a$，頂点が点 $(a,\ -a^2+2a)$ の下に凸の放物線の $0\leqq x\leqq 2$ に対応する部分である。

$x=0$ のとき　　$y=2a$

$x=2$ のとき　　$y=4-2a$

(i)　$a<0$ のとき

➜軸が定義域内にないので，グラフの両端の y の値のうち小さい方が最小値になります。

この関数は，$x=0$ のとき最小値 $2a$ をとる。

ここで，条件から，最小値が -8 だから

$$2a=-8$$

よって　$a=-4$

この値は $a<0$ を満たしている。

(ii)　$0 \leqq a \leqq 2$ のとき

→軸が定義域内にあり，グラフが下に凸の放物線なので，頂点の y 座標が最小値になります。

この関数は，$x=a$ のとき最小値 $-a^2+2a$ をとる。

最小値が -8 だから

$$-a^2+2a=-8$$

これを解いて　$a=-2,\ 4$

この値はどちらも $0 \leqq a \leqq 2$ を満たしていない。

(iii)　$a>2$ のとき

この関数は，$x=2$ のとき最小値 $4-2a$ をとる。

最小値が -8 だから

$$4-2a=-8$$

よって　$a=6$

この値は $a>2$ を満たしている。

(i)，(ii)，(iii) より　$a=-4,\ 6$

→最大値・最小値から2次関数を求めるトレーニングをしましょう。

■■■トレーニング■■■

8 ＊ (0080)

x についての2次関数 $y=x^2+2ax-a^2$ $(-2 \leqq x \leqq 2)$ の最大値が -1 になるように，定数 a の値を定めなさい。

9 ＊ (0081)

x が $0 \leqq x \leqq 3$ という範囲を動くとき，関数 $f(x)=2x^2-4ax+a+a^2$ の最小値 m が 0 となるような定数 a の値をすべて求めなさい。　(東京大)

→定義域が制限されているときには，場合分けがなかなかめんどうですね。
最後に，まだ余力があれば，次の問題に挑戦してみましょう。

もっと力をつけよう

■■■トレーニング■■■

10 ＊ (0082)

関数 $y=f(x)$ において

$$f(x)=a(x^2-4x+5)^2+2a(x^2-4x+5)+b,\quad a \neq 0$$

とします。

関数 $y=f(x)$ が最小値5をとり，$f(1)=10$ であるとき，次の問いに答えなさい。

(1)　$X=x^2-4x+5$ とおくとき，X のとりうる値の範囲を求めなさい。

(2)　(1)より，y を X の関数とみて，定数 a，b の値を求めなさい。

→今回は，最大値・最小値から2次関数を決定する学習をしました。
ここでの学習は，これで終わりです。

TRAINING PAPER

DAILY PROGRAM

高校数学／数学 I