TRAINING PAPER 〔特許出願中〕

DAILY® PROGRAM

大学受験デイリープログラム100日

高校3年　数学〔理系〕　《見本》

1

DAILY PROGRAM®

大学受験デイリープログラム　数学
—理系コース—

効果的な使い方

♧数学の受験対策を100日間＋補充演習編で完成

- 「大学受験デイリープログラム—理系100日」は，数学の受験範囲が理系の人を対象に，受験に備えて十分な実力をつけることができるように編集された受験用トレーニングペーパーです。
- このトレーニングペーパーは，例題とその類題練習を徹底的におこなうことを，とくに意図してつくられています。
- 第1巻から第5巻までは，各巻20日間，これに補充演習編が1巻あります。

  第1巻から第5巻までの100日間で，数学Ⅰから微分・積分までのすべての内容が学習できるようにプログラムしてあります。

  学習内容は，左ページの学習予定表を参照してください。

  この理系用デイリープログラムで扱っている科目は以下の5科目です。

数学Ⅰ	代数・幾何	基礎解析	確率・統計	微分・積分

- 補充演習編は，より実戦に近いかたちで学習するためのもので，入試問題をとりあげて練習します。

♧1日の学習を効果的に進めるために

- **通常学習日**

  通常学習日では，例題とその類題の練習を徹底しておこないます。

  1日にとりあげる例題は5題です。1つの例題で5題の類題練習をします。5題のうち，最初の問題は，例題と同じ問題です。例題をもう一度自分で解いて，解法を完全に理解してしまいます。1日のトレーニングの問題数は全部で約25題です。

例　題

受験に備えて，必ずできるようにしておきたい問題を選んであります。ていねいな解答，考え方，注意，問題を解くうえでのポイントが示してあります。例題の解き方をここで把握します。

トレーニング

例題の解法をトレーニングによって身につけます。

最初の問題は例題と同じ問題です。この問題で，例題の解法を再確認します。つづいて，類題練習で，解法に習熟します。トレーニングで，解法を完全に覚えてしまいます。

解　答

解答は別冊になっています。1日ごとに通し番号です。

例題と同じトレーニングの解答は，例題の解答を参照してください。

● 演習問題日

演習問題日

章の最後の日には，演習問題日があります。
ここでは，その章のまとめの問題練習をします。
問題を10題出題してありますから，その章で学習してきた内容をもう一度確認し，やや進んだ問題にもあたって，実力をのばします。

● 補充演習編

補充演習編

補充演習編では，最近の入試問題を解いて，実力を養成することをねらいます。
ここで，実際の入試問題を解いて，入試対策を万全にしましょう。
入試形式の模擬テストもあります。

♧使い方のくふう

この受験用トレーニングペーパーは，例題とその類題練習を主体にして構成されています。第１巻から第５巻までで，とりあげている例題数は約400題，これらの例題にそれぞれ５題ずつ類題がありますから，類題の練習問題は合わせて，2000題程度になります。

全体の問題数がかなり多くなっていますので，とくに，くふうして使うようにしてください。

① 例題を完全に理解することを，まず第一に考えます。
例題だけでも，約400題あります。これらを完全にできるようになるだけでも，相当な力がつきます。
トレーニングの最初に，例題と同じ問題をのせてありますから，自分でもう一度解いて解法を確認します。

② 類題の問題は，問題を見て，完全にできると思えたら，全部をしないで，次の例題に進んでかまいません。残した類題は，ひととおり終えたあとに学習すると，良い復習になります。

③ 自分の学習時間に合わせて，計画的に進めましょう。わからないところは，重点的に練習し，時間をかけてかまいませんが，途中でやめてしまうことのないように，時間の配分と，問題量をくふうして，全部終えることができるように進めるとよいでしょう。

この他に，このトレーニングペーパーでは，いろいろな使い方のくふうができますから，効果的に使うようにしましょう。自分のトレーニングペーパーですから，自分に合った学習方法で，学習を進めることです。

◎ この大学受験デイリープログラムでは，入試に目標をしぼって，完全な実力が養成できるように，トレーニングしていきます。

このトレーニングペーパーをやりこなすことによって，あなたは自信をもって受験にのぞめます。十分に活用しながら，最後までやりとおしてください。

数と式

第1巻では，数学Ⅰに関する内容のうち，数と式，方程式・不等式，関数，平面図形と式について学習します。数式の扱いや，数学的な考え方で重要なことがらがたくさんあります。ここでは，基礎をおさえながら，入試に目標をおいて学習を進めていくことにします。
まず，はじめに，数と式をとりあげます。整式の除法，無理数の計算など，確実にできるようにしましょう。例題の解法をよく理解し，トレーニングで問題の解法を練習します。

第 1 日	数 と 式　　　　学習日　　月　　日
	整式の整理

第1日　整式の整理

きょうから，デイリープログラム100日間を始めます。基本的な例題から応用的な例題まで，1日に5例題ずつ扱っていきます。また，それぞれの例題には，例題の内容が十分身につくようにトレーニングがついています。この100日間で，理系受験のための学習を進めていきましょう。

その第1日として，乗法公式や因数分解を練習します。

例題 1　　　　乗法公式

乗法公式を使って，次の式を展開しなさい。

(1)　$(x+2y-3z)(x-2y+3z)$

(2)　$(2x^2+x-1)^2$

(3)　$(x+y+5)(2x+2y-5)$

(4)　$(x+a)(x-a)(x^2-ax+a^2)(x^2+ax+a^2)$

考え方　(1)　$2y-3z=Y$ と考えると，$(x+Y)(x-Y)$ です。

(2)　$(a+b+c)^2$ の公式にそのままあてはめます。

(3)　$x+y=A$ と考えると　$(A-5)(2A-5)$ です。

(4)　順序を変えて $\{(x+a)(x^2-ax+a^2)\}\{(x-a)(x^2+ax+a^2)\}$ と組み合わせるとそれぞれに乗法公式が使えます。

解　答　(1)　与式$=\{x+(2y-3z)\}\{x-(2y-3z)\}$　　←公式 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$ の形

$=x^2-(2y-3z)^2$

$=x^2-(4y^2-12yz+9z^2)$

$=\boldsymbol{x^2-4y^2+12yz-9z^2}$

(2)　与式$=4x^4+x^2+1+4x^3-2x-4x^2$　　←公式 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})^2$ にあてはめる。

$=\boldsymbol{4x^4+4x^3-3x^2-2x+1}$

(3)　与式$=(x+y+5)\{2(x+y)-5\}$　　←公式 $(\boldsymbol{ax}+\boldsymbol{b})(\boldsymbol{cx}+\boldsymbol{d})$ の形

$=2(x+y)^2+5(x+y)-25$

$=2(x^2+2xy+y^2)+5x+5y-25$

$=\boldsymbol{2x^2+4xy+2y^2+5x+5y-25}$

(4)　与式$=\{(x+a)(x^2-ax+a^2)\}\{(x-a)(x^2+ax+a^2)\}$　　←順序をくふうする。

$=(x^3+a^3)(x^3-a^3)$

$=\boldsymbol{x^6-a^6}$　　←$(\boldsymbol{x}^3)^2-(\boldsymbol{a}^3)^2$

POINT ◆ **乗法公式**

$$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$$
$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$
$$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$$
$$(ax+b)(cx+d)=acx^2+(bc+ad)x+bd$$
$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$$
$$(x\pm a)^3=x^3\pm 3ax^2+3a^2x\pm a^3$$
$$(x\pm a)(x^2\mp ax+a^2)=x^3\pm a^3$$
$$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=a^3+b^3+c^3-3abc$$

例題は，このように**考え方**，**解答**，POINT を中心にして解説していきます。それでは，トレーニングです。1問めは，例題と同じ問題をのせてあります。

トレーニング

1 乗法公式を使って，次の式を展開しなさい。

(1) $(x+2y-3z)(x-2y+3z)$

(2) $(2x^2+x-1)^2$

(3) $(x+y+5)(2x+2y-5)$

(4) $(x+a)(x-a)(x^2-ax+a^2)(x^2+ax+a^2)$

2 乗法公式を使って，次の式を展開しなさい。

(1) $(x+y-1)(x+y+4)$

(2) $(p^2-q+1)(p^2+q-1)$

(3) $(x^2-x+2)^2$

(4) $(a-b+3)(3a-3b+2)$

3 乗法公式を使って，次の式を展開しなさい。

(1) $(a-1)(a+2)(a-3)(a+4)$

(2) $(ab+1)^2(a^2b^2-ab+1)^2$

(3) $(x+2)^3(x^2-2x+4)^3$

(4) $(a+1)(a-1)(a^2+1)$

4 乗法公式を使って，次の式を展開しなさい。

(1) $(a^2+3a-6)(a^2-3a-6)$

(2) $(x+1)^2(x-1)^2(x^4+x^2+1)^2$

(3) $(a^2+ab+b^2)^2(a^2-ab+b^2)^2$

(4) $(p+1)(p^3-1)(p^2-p+1)$

つぎは，対称式の使い方についての例題です。

例題 2　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　**対称式**

$S=x^3(y+z)+y^3(z+x)+z^3(x+y)$

$A=x+y+z$，$B=yz+zx+xy$，$C=xyz$

であるとき，S を A，B，C で表しなさい。　（関西大）

考え方　S は x，y，z についての対称式，A，B，C は x，y，z についての基本対称式です。ここでは展開してから組み合わせをくふうして，次の式などを利用して変形します。

$$x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)$$

解　答

$$\begin{aligned}
S&=x^3y+zx^3+y^3z+xy^3+z^3x+yz^3\\
&=(x^3y+xy^3)+(y^3z+yz^3)+(z^3x+zx^3)\\
&=xy(x^2+y^2)+yz(y^2+z^2)+zx(z^2+x^2)\\
&=xy(x^2+y^2+z^2-z^2)+yz(x^2+y^2+z^2-x^2)\\
&\quad+zx(x^2+y^2+z^2-y^2)\\
&=(xy+yz+zx)(x^2+y^2+z^2)-xyz^2-x^2yz-xy^2z\\
&=(xy+yz+zx)\{(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)\}-xyz(x+y+z)\\
&=B(A^2-2B)-CA\\
&=\boldsymbol{A^2B-2B^2-CA}
\end{aligned}$$

←共通な 2 文字の項の組

←$x^2+y^2+z^2$ をつくるくふうをする。

POINT

◆　x，y，z についての式で，x と y，y と z，z と x のどの 2 つを入れ換えても式が変わらないものを**対称式**といいます。
　x，y，z についての対称式の中でもとくに，$\boldsymbol{x+y+z}$，$\boldsymbol{xy+yz+zx}$，$\boldsymbol{xyz}$ を**基本対称式**といいます。

◆　対称式は基本対称式だけの式で表すことができます。

対称式の利用は，いろいろなところで出てきます。トレーニングでしっかり身につけましょう。やはり，1 問めは例題と同じ問題です。

トレーニング

5　$S=x^3(y+z)+y^3(z+x)+z^3(x+y)$

$A=x+y+z$，$B=yz+zx+xy$，$C=xyz$

であるとき，S を A，B，C で表しなさい。　（関西大）

6 $S=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$

$A=a+b+c$，$B=ab+bc+ca$，$C=abc$

であるとき，S を A，B，C で表しなさい。

7 $S=(x+y)(y+z)(z+x)+xyz$

$A=x+y+z$，$B=xy+yz+zx$，$C=xyz$

であるとき，S を A，B，C で表しなさい。

8 $S=a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)$

$A=a+b+c$，$B=ab+bc+ca$，$C=abc$

であるとき，S を A，B，C で表しなさい。

9 $S=\dfrac{x^4+y^4+z^4}{x^3+y^3+z^3}$

$A=x+y+z$，$B=xy+yz+zx$，$C=xyz$

であるとき，S を A，B，C で表しなさい。

例題，トレーニングというくり返しにも慣れてきましたか。つぎは，因数分解の基本的な例題です。

例題 3 　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　**因数分解(1)**

次の式を因数分解しなさい。

(1) $x^2(b+y)+y^2(a+x)+xy(a+b)+ab(x+y)$

(2) $x^2-6y^2-xy+3x+y+2$

考え方 　次数の最も低い文字に着目し，整理してから因数分解します。

(1) a や b については1次，x や y については2次ですから，a か b に着目します。

(2) x，y のどちらについても2次ですが，x^2 の係数は1，y^2 の係数は-6ですから，係数の簡単な x に着目します。

解　答 　(1) 与式

$=(y^2+xy+bx+by)a+bx^2+x^2y+xy^2+bxy$ 　　**←a に着目**

$=\{b(x+y)+y(x+y)\}a$

$\quad +bx(x+y)+xy(x+y)$ 　　**←a の係数，定数項で b に着目**

$=(x+y)(b+y)a+x(x+y)(b+y)$ 　　**←a の係数，定数項を因数分解**

$=\boldsymbol{(x+y)(b+y)(a+x)}$ 　　**←共通因数のくくり出し**

(2) 与式

$=x^2+(-y+3)x+(-6y^2+y+2)$ 　　**←x に着目**

$=x^2-(y-3)x-(2y+1)(3y-2)$ 　　**←定数項を因数分解**

$=\{x+(2y+1)\}\{x-(3y-2)\}$ 　　**←和が$-(y-3)$，積が$-(2y+1)(3y-2)$**

$=\boldsymbol{(x+2y+1)(x-3y+2)}$

注　意 　因数分解では，因数を書く順序には，とくにきまりはありません。

POINT 　◆ 2つ以上の文字を含む多項式の因数分解では，次のようにして，1つの文字に着目する方法が有効であることが多いです。

次数が違うとき　……**次数の最も低い文字に着目**

次数が等しいとき……**係数の簡単な文字に着目**

さあ，トレーニングです。

トレーニング

10 次の式を因数分解しなさい。

(1) $x^2(b+y)+y^2(a+x)+xy(a+b)+ab(x+y)$

(2) $x^2-6y^2-xy+3x+y+2$

11 次の式を因数分解しなさい。

(1) a^2-ac-b^2+bc

(2) ax^3-x^2-ax+1

12 次の式を因数分解しなさい。

(1) $(a^2+b^2-c^2)^2-4a^2b^2$

(2) $x^4-2x^2y^2+y^4-x^2+y^2$

13 次の式を因数分解しなさい。

(1) $2a(x+bx-2ab)-x^2$

(2) $a^2-b^2+bc+ca+3a+b+c+2$

14 次の式を因数分解しなさい。

(1) $x^2(y+z)+y^2(z+x)+z^2(x+y)+2xyz$

(2) $6x^2-y^2-xy+20x+5y+6$

つぎも因数分解の例題です。くふうのしかたを身につけましょう。

例題 4 因数分解(2)

次の式を因数分解しなさい。

(1) $(s+t)(s+t-1)-6$　　(2) $x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)$

考え方 (1) $s+t=X$ とおくと，$X(X-1)-6=X^2-X-6$ となり，公式が使えます。

(2) x，y，z についての交代式ですから，必ず $(x-y)(y-z)(z-x)$ を因数にもちます。そして，3次式ですから，$k(x-y)(y-z)(z-x)$ とおいて，定数 k の値を決めます。

解　答 (1) 与式 $=(s+t)\{(s+t)-1\}-6$

$=(s+t)^2-(s+t)-6$　　← $\boldsymbol{x^2+(a+b)x+ab}$ **の形**

$=\boldsymbol{(s+t-3)(s+t+2)}$

(2) x，y，z についての3次の交代式であるから，k を定数として，次のようにおける。

$$x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)=k(x-y)(y-z)(z-x)$$

両辺の x^2y の係数を比較すると

$1=-k$　　← **右辺の** $\boldsymbol{x^2y}$ **の項は** $\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$，$\boldsymbol{-x}$ **の積**

よって　$k=-1$

したがって　　与式 $=\boldsymbol{-(x-y)(y-z)(z-x)}$

注　意 (2)で，$x=y$ を代入すると，式の値が0になりますから，因数定理から $x-y$ を因数にもつことが確かめられます。因数 $y-z$，$z-x$ についても同様です。

また，1つの文字に着目して整理する方法でも因数分解できます。

別　解 (2) 与式

$=(y-z)x^2-(y^2-z^2)x+y^2z-yz^2$　　← $\boldsymbol{x}$ **に着目**

$=(y-z)x^2-(y+z)(y-z)x+yz(y-z)$

$=(y-z)\{x^2-(y+z)x+yz\}$

$=(y-z)(x-y)(x-z)$

$=-(x-y)(y-z)(z-x)$　　← $\boldsymbol{x\to y\to z}$ **の順**

POINT

◆ x，y，z についての式で，x と y，y と z，z と x のどの2つを入れ換えても式の符号だけ変わるものを**交代式**といいます。

◆ x，y，z についての**交代式は**，必ず

3次のとき　$\boldsymbol{k(x-y)(y-z)(z-x)}$

4次のとき　$\boldsymbol{k(x+y+z)(x-y)(y-z)(z-x)}$

の形に因数分解されます。ただし，k は定数です。

さあ，トレーニングです。

トレーニング

15 次の式を因数分解しなさい。

(1) $(s+t)(s+t-1)-6$

(2) $x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)$

16 次の式を因数分解しなさい。

(1) $(x^2+2x-6)(x^2+2x-5)-6$

(2) x^6-y^6

17 次の式を因数分解しなさい。

(1) x^4-6x^2+8

(2) x^4-6x^2+25

18 次の式を因数分解しなさい。

(1) $a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)$

(2) $a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$

19 次の式を因数分解しなさい。

(1) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-24$

(2) $(x^2-1)(y^2-1)-4xy$

できましたね。では，最後の例題です。ここでは，約数に関する問題をとりあげます。

例題 5 　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　**数の性質**

次の問いに答えなさい。

(1) 2けたの整数のうち，約数がちょうど10個あるものをすべて求めなさい。

(2) また，そのような整数のそれぞれについて，10個の約数の和を求めなさい。

（中央大一商）

考え方 　$2^4\cdot 3^5$ の約数の個数は $(4+1)(5+1)$ です。このように求める整数を素因数に分解した形を仮定して，その約数の個数が10になるように，素数の累乗の指数を決めていきます。また，2けたかどうかは，$2^7>100$，$3^5>100$を目安に調べます。

解　答 　(1) 2けたの整数を N として，N を素因数に分解すると

$$N=\mathrm{P}_1{}^{d_1}\mathrm{P}_2{}^{d_2}\mathrm{P}_3{}^{d_3}\cdots\cdots\mathrm{P}_n{}^{d_n}$$

となるとする。

ただし，P_1，P_2，P_3，……，P_n は互いに異なる素数，　　←素因数

$d_1\geqq d_2\geqq d_3\geqq\cdots\cdots\geqq d_n$ とする。　　←素因数の累乗の指数

このとき，N の約数の個数は　$(d_1+1)(d_2+1)(d_3+1)\cdots\cdots(d_n+1)$

これが10になるのは，$10=5\times 2$ であることから

(i) $d_1+1=10$，$d_2+1=d_3+1=\cdots\cdots=d_n+1=1$ のとき

$N_1=\mathrm{P}_1{}^9$　　←$10=10\times 1$ の場合

$2^9>100$ であるから，N が2けたの素数になる P_1 はない。

(ii) $d_1+1=5$，$d_2+1=2$，$d_3+1=\cdots\cdots=d_n+1=1$ のとき

$N=\mathrm{P}_1{}^4\mathrm{P}_2$　　←$10=5\times 2$ の場合

$\mathrm{P}_1=2$ のとき　$N=16\mathrm{P}_2$　　よって　$\mathrm{P}_2=3$，5

$\mathrm{P}_1\geqq 3$ のとき　$N\geqq 81\mathrm{P}_2$ で，これを満たす素数 P_2 はない。

したがって，求める2けたの整数は

$2^4\cdot 3=\mathbf{48}$，$2^4\cdot 5=\mathbf{80}$

(2) **48 の約数の和は**

$(2^0+2^1+2^2+2^3+2^4)(3^0+3^1)=31\cdot 4=\mathbf{124}$　　←$2^4\cdot 3^1$ の約数の和

80 の約数の和は

$(2^0+2^1+2^2+2^3+2^4)(5^0+5^1)=31\cdot 6=\mathbf{186}$　　←$2^4\cdot 5^1$ の約数の和

注　意 　ここでは正の約数だけを考えています。

POINT 　◆ 自然数 N を素因数に分解したものを

$$N=\mathrm{P}_1{}^{d_1}\mathrm{P}_2{}^{d_2}\mathrm{P}_3{}^{d_3}\cdots\cdots\cdots\mathrm{P}_n{}^{d_n}$$

とするとき，N の

約数の個数は　$(d_1+1)(d_2+1)(d_3+1)\cdots\cdots\cdots(d_n+1)$

約数の和は　$(\mathrm{P}_1{}^0+\mathrm{P}_1{}^1+\mathrm{P}_1{}^2+\cdots\cdots+\mathrm{P}_1{}^{d_1})(\mathrm{P}_2{}^0+\mathrm{P}_2{}^1+\mathrm{P}_2{}^2+\cdots\cdots+\mathrm{P}_2{}^{d_2})$
$\cdots\cdots(\mathrm{P}_n{}^0+\mathrm{P}_n{}^1+\mathrm{P}_n{}^2+\cdots\cdots+\mathrm{P}_n{}^{d_n})$

トレーニング

20 次の問いに答えなさい。

(1) 2けたの整数のうち，約数がちょうど10個あるものをすべて求めなさい。

(2) また，そのような整数のそれぞれについて，10個の約数の和を求めなさい。

（中央大一商）

21 $x^2-y^2=60$ を満たす整数 x，y の組をすべて求めなさい。ただし，$x>y$ で $x>0$，$y>0$ とします。

22 $xy+2x+y-4=0$ を満たす正の整数 x，y の組をすべて求めなさい。

23 次の問いに答えなさい。

(1) 2けたの整数のうち，約数がちょうど9個あるものをすべて求めなさい。

(2) また，そのような整数のそれぞれについて，9個の約数の和を求めなさい。

24 6けたの自然数 M があります。M の下の2けたの数と上の4けたの数を置き換えてできる6けたの自然数を N としたとき，$N=3M$ が成り立つような自然数 M をすべて求めなさい。

きょうの学習はこれで終わりです。第2日も，例題，トレーニングのくり返しでどんどん進めていきますよ。
第2日は，剰余の定理・因数定理など整式の除法の学習です。

第 2 日	数と式　　学習日　月　日
	整式の除法

きょうは，整式の除法について学習していきます。入試にもよく利用される剰余の定理・因数定理の理解が中心です。

では，実際に割り算をしてみる例題から始めましょう。

例題 6　　　　**整式の除法**

x^3-2x^2+mx+n が x^2+3 で割り切れるように，定数 m，n の値を定めなさい。また，このとき，この式を因数分解しなさい。

考え方　実際に x^3-2x^2+mx+n を x^2+3 で割って，商と余りを m，n で表します。割り切れるとは，x の値にかかわらず余りが 0 になることです。

また，x^2+3 で割り切れる整式は，x^2+3 とその商との積で表されます。

解　答　x^3-2x^2+mx+n を x^2+3 を割ると

$$
\begin{array}{r|l}
 & x-2 \quad \leftarrow\text{商} \\
x^2+3 & x^3-2x^2+mx+n \quad \leftarrow x^3\text{ と }x^2\text{ を比べて，}x \\
 & x^3 \quad +3x \\
 & -2x^2+(m-3)x+n \quad \leftarrow -2x^2\text{ と }x^2\text{ を比べて，}-2 \\
 & -2x^2 \quad -6 \\
 & (m-3)x+n+6 \quad \leftarrow\text{余り}
\end{array}
$$

商は $x-2$，余りは $(m-3)x+n+6$

割り切れるから，すべての x に対して

$(m-3)x+n+6=0$　　**←余り＝0**

よって　$m-3=0$　かつ　$n+6=0$　**←x の係数＝0，定数項＝0**

したがって　$\boldsymbol{m=3,\ n=-6}$

また，**因数分解すると**

$x^3-2x^2+3x-6=\boldsymbol{(x^2+3)(x-2)}$　**←割る式×商で表される。**

POINT
- ◆ $ax+b$ が，すべての x に対して 0 ならば　$a=0$ かつ $b=0$ です。
- ◆ 整式 A が整式 B で割り切れて，その商が Q のとき　$A=BQ$

割り切れるという意味が理解できましたか。では，トレーニングです。1 問めでもう一度例題を確認しましょう。

トレーニング

1 x^3-2x^2+mx+n が x^2+3 で割り切れるように，定数 m，n の値を定めなさい。また，このとき，この式を因数分解しなさい。

2 x^3-ax^2+bx+2 が x^2+2 で割り切れるように，定数 a，b の値を定めなさい。また，このとき，この式を因数分解しなさい。

3 $px^3-x^2+23x+q$ が x^2-x+12 で割り切れるように，定数 p，q の値を定めなさい。また，このとき，この式を因数分解しなさい。

4 x^4+x^3-x-1 が x^2+a で割り切れるように，定数 a の値を定めなさい。また，このとき，この式を因数分解しなさい。

5 $2x^3-mx^2-6x+5$ が x^2+nx-5 で割り切れるとき，定数 m，n の値を求めなさい。また，この式を因数分解しなさい。

つぎは，わられる数＝わる数×商＋余り の関係を考える例題です。

例題 7 　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　**整式の除法**

x^3+3x^2-x+9 をある整式 P で割ったときの商は $x+3$，余りは $2x+18$ でした。この整式 P を求めなさい。

考え方　わられる式＝わる式×商＋余りですから，$x^3+3x^2-x+9=P\times(x+3)+2x+18$，これを変形して P を求めます。

解　答　$x^3+3x^2-x+9=P\times(x+3)+2x+18$　　**←わられる式＝わる式×商＋余り**

よって　$P\times(x+3)=x^3+3x^2-x+9-(2x+18)$　　**←移項する。**

$=x^3+3x^2-3x-9$

したがって　$P=(x^3+3x^2-3x-9)\div(x+3)$　　**←$x+3$ で割る。**

$=\boldsymbol{x^2-3}$

これは 2 次式だから題意に適する。

POINT　◆　x についての整式 A を，x についての整式 B で割ったときの商を Q，余りを R とすると，次の関係が成り立ちます。

$$\boldsymbol{A=BQ+R}\qquad \text{ただし}\quad R\text{ の次数}<B\text{ の次数}$$

この例題では，わる式の次数と余りの次数の関係をつかむことがポイントとなります。では，トレーニングです。

トレーニング

6　x^3+3x^2-x+9 をある整式 P で割ったときの商は $x+3$，余りは $2x+18$ でした。この整式 P を求めなさい。

7　整式 $P(x)$ を $x+2$ で割ったときの商は $Q(x)$，余りは 5 です。さらに，$Q(x)$ を x^2+3x+3 で割ったときの商は $x-2$，余りは -1 です。$P(x)$ を求めなさい。

8 $x^4-2x^3+4x^2+4$ を x^2+1 で割ったら，商が $Q(x)$ で余りが $2x+1$ でした。この商 $Q(x)$ を求めなさい。

9 整式 $f(x)$ を整式 $g(x)$ で割ったときの商は $2x-1$，余りは $4x+2$ です。$f(x)$ を $2x-1$ で割ったときの余りを求めなさい。

10 整式 $f(x)$ を $2x-3$ で割った商が $g(x)$，余りが -4 です。また，$g(x)$ を $x+5$ で割った余りも -4 です。$f(x)$ を $(2x-3)(x+5)$ で割ったときの余りを求めなさい。

$A=BQ+R$ の関係は十分つかめましたね。この関係は，あとの剰余の定理・因数定理の基礎となります。

つぎは，完全平方式を扱います。恒等式の考え方の練習です。

例題 8 ―― **完全平方式**

$x^4+4x^3-2x^2+ax+b$ が x についての完全平方式になるように，定数 a，b の値を定めなさい。 (明治大)

考え方 $x^4+4x^3-2x^2+ax+b=(x^2+px+q)^2$ とおいて，右辺を展開して整理してから，両辺の x^3，x^2，x，定数の項の係数をそれぞれ比較して，p，q，a，b の値を決めます。

解　答 $x^4+4x^3-2x^2+ax+b=(x^2+px+q)^2$ とおく。 **←平方して 4 次式になるのは 2 次式**

右辺を展開して整理すると

$x^4+4x^3-2x^2+ax+b=x^4+2px^3+(p^2+2q)x^2+2pqx+q^2$

両辺の同次の項の係数を比較して

$4=2p$，$-2=p^2+2q$，$a=2pq$，$b=q^2$ **←x^3，x^2，x の係数，定数項**

よって　$p=2$，$q=-3$，$\boldsymbol{a=-12}$，$\boldsymbol{b=9}$

POINT
- ◆ 整式 P が整式 F の平方の形に表されるとき，つまり $P=F^2$ のとき，P は**完全平方式**であるといいます。
- ◆ 等式 $P=Q$ が**恒等式**である。 $\Longleftrightarrow$ P と Q の次数が等しく，整理したときの**同じ次数の項の係数が等しい**。

では，トレーニングです。

トレーニング

11 $x^4+4x^3-2x^2+ax+b$ が x についての完全平方式になるように，定数 a，b の値を定めなさい。 (明治大)

12 x^4+mx^2+nx+9 が x についての完全平方式になるように，定数 m，n の値を定めなさい。

13 $4a^6+4a^5+a^4-8a^3-4a^2+4$ は a について完全平方式です。このとき，この完全平方式を因数分解しなさい。

14 $x^4+x^3+10x-8$ を x についての係数が整数の2次式の積で表しなさい。

15 $x^2+2xy-8y^2+2x+14y-3$ を x，y についての1次式の積で表しなさい。

つぎは，いよいよ剰余の定理・因数定理です。入試での出題頻度の高い内容です。少し，応用的な例題です。

例題 9 ― **剰余の定理・因数定理**

x の整式 $x^n(n\geqq 1)$ を x^2+x+1 で割ったときの余りを求めなさい。（東京医科歯科大）

考え方　2次式 x^2+x+1 で割るのですから，余りを $ax+b$ とおいて，a，b の値を決めます。また，$x^2+x+1=0$ の解は，複素数 ω ですが，剰余の定理は複素数でも使えます。ω には，$\omega^2+\omega+1=0$ のほかに，$\omega^3=1$ という性質もあります。

解　答　x^n を x^2+x+1 で割ったときの商を $Q(x)$，余りを $ax+b$(a，b は実数)とおくと

$$x^n=(x^2+x+1)Q(x)+ax+b \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

$x^2+x+1=0$ の解 ω を①の両辺に代入すると

$$\omega^n=(\omega^2+\omega+1)Q(\omega)+a\omega+b=a\omega+b \quad \cdots\cdots\cdots ②$$

ここで，ω^n を ω の1次式で表すために，k を正の整数として，$3k$，$3k-1$，$3k-2$ の場合に分けて考える。　**←$\omega^3=1$ を利用するため**

(i)　$n=3k$ のとき　②は

$\omega^{3k}=(\omega^3)^k=1$ より　$1=a\omega+b$

a，b は実数であるから　$a=0$，$b=1$　**←ω の係数，定数項を比べる。**

(ii)　$n=3k-1$ のとき，②は

$\omega^{3k-1}=\omega^{3(k-1)+2}=\omega^2=-\omega-1$ より　$-\omega-1=a\omega+b$

よって　$a=-1$，$b=-1$

(iii)　$n=3k-2$ のとき，②は

$\omega^{3k-2}=\omega^{3(k-1)+1}=\omega$ より　$\omega=a\omega+b$

よって　$a=1$，$b=0$

したがって，**k を正の整数として**

$n=3k$ のとき　1，$n=3k-1$ のとき　$-x-1$，　$n=3k-2$ のとき　x

POINT
- $x^3=1$ の複素数解 ω には，次の性質があります。
  $\omega^3=1$，$\omega^2+\omega+1=0$
  一方を平方したものは，それと共役なもう一方の複素数に等しい。
- a，b，c，d を実数，**α を虚数**とするとき
  $a+b\alpha=c+d\alpha \Longleftrightarrow a=c$，$b=d$

剰余の定理，因数定理のほかに，ω についての性質も使っています。指数の計算を間違えないようにすることです。

トレーニング

16　x の整式 $x^n(n\geqq 1)$ を x^2+x+1 で割ったときの余りを求めなさい。（東京医科歯科大）

17 $x^{62}+x^{52}+1$ は x^2+x+1 で割り切れることを示しなさい。

18 正の奇数 n が 3 の倍数でないとします。
このとき，$(x+1)^n-x^n-1$ は x^2+x+1 で割り切れることを示しなさい。　(東京農大)

19 $(x+1)^8$ を x^3-1 で割った余りを求めなさい。　(法政大)

20 x の多項式 $f(x)$ があり，任意の実数 a に対して，$f(x)-f(a)$ が常に x^3-a^3 で割り切れるとします。このとき，ある多項式 $g(x)$ によって，$f(x)=g(x^3)$ と表されることを示しなさい。　(大阪大)

次の例題は，整式の除法の関係式を使う応用問題です

例題 10 ―――― **整式の除法のしくみ**

$f(x)$ を x の整式とします。$\{f(x)\}^2$ が x^2+1 で割り切れるとき，$f(x)$ も x^2+1 で割り切れることを示しなさい。 （津田塾大）

考え方 $f(x)$ を x^2+1 で割ったときの余りを $ax+b$ とおきます。そして，$\{f(x)\}^2$ が x^2+1 で割り切れることから，$a=b=0$ を導きます。

解　答 $f(x)$ を x^2+1 で割ったときの商を $Q(x)$，余りを $ax+b$ とおくと

$$f(x)=(x^2+1)Q(x)+ax+b \quad \cdots\cdots\cdots①$$

よって

$$\{f(x)\}^2$$
$$=(x^2+1)^2\{Q(x)\}^2+2(x^2+1)(ax+b)Q(x)+(ax+b)^2$$
$$=(x^2+1)[(x^2+1)\{Q(x)\}^2+2(ax+b)Q(x)+a^2]$$
$$+2abx+b^2-a^2$$

←x^2+1 をくくり出す形に変形。

$\{f(x)\}^2$ が x^2+1 で割り切れるから，x の値にかかわらず

$$2abx+b^2-a^2=0$$

よって　$2ab=0$　かつ　$b^2-a^2=0$

よって　$a=b=0$　　このとき，①から　$f(x)=(x^2+1)Q(x)$ となるので

$f(x)$ は x^2+1 で割り切れる。　　**←余り　$ax+b=0$**

注　意 $(ax+b)^2=(x^2+1)a^2+2abx+b^2-a^2$

POINT
- ◆ 割り切れることを示すには，割ったときの余りが 0 であることをいいます。
- ◆ 除法のしくみ

$$A(x)=B(x)Q(x)+R(x)$$

で，余り $R(x)$ の次数は必ず**割る式 $B(x)$ より次数が低くなります。**

整式の除法の関係に基礎をおいていることには変わりはありません。では，トレーニングです。

トレーニング

21 $f(x)$ を x の整式とします。$\{f(x)\}^2$ が x^2+1 で割り切れるとき，$f(x)$ も x^2+1 で割り切れることを示しなさい。 （津田塾大）

22 整式 $f(x)$ を $(x-1)^2$ で割ったときの余りが $x+2$ であり，また $f(x)$ を $(x-2)^2$ で割ったときの余りが $3x+4$ であるといいます。

このとき，$f(x)$ を $(x-1)(x-2)$ で割ったときの余りを求めなさい。

23 2つの整式 $P(x)=(x-1)(x^{4n}-1)$，$Q(x)=(x^4-1)(x^n-1)$ について，次の問いに答えなさい。

(1) n が正の奇数のとき，$P(x)$ は $Q(x)$ で割り切れることを示しなさい。

(2) n が正の偶数のとき，$P(x)$ は $Q(x)$ で割り切れないことを示しなさい。 (津田塾大)

24 整式 $x^n+y^n+z^n-k(yz+zx+xy)$ が因数 $x+y+z$ をもつように自然数 n と実数 $k(\neq 0)$ を求めなさい。 (同志社大)

25 m，n がともに自然数で，$m \geqq n$ のとき，次の各問いに答えなさい。

(1) 整式 x^m-1 が整式 x^n-1 で割り切れるための必要十分条件を求めなさい。

(2) 整式 x^m+1 が整式 x^n+1 で割り切れるための必要十分条件を求めなさい。

(3) $2^{100}-1$ は3で割り切れますか。

(4) $2^{50}+1$ の約数で 2^n+1 の形に書けるものを求めると，$2^{50}+1$ のほかにどんなものがありますか。

きょうは，整式の除法に関する問題を練習してきました。第3日は分数式について学習します。

第3日	数と式　　　学習日　　月　　日
	分数式

第3日　分数式

きょうは，分数式について学習します。基本的な計算から，通分のくふうをするもの，繁分数式などを扱います。

まずは，基本的な分数式の計算から始めましょう。

例題 11　　　分数式の計算(1)

次の分数式を計算しなさい。

(1) $\dfrac{x^2+1}{x-1}+\dfrac{x^2-2}{x-2}-2x-3$　　(2) $\dfrac{x+2}{x+1}-\dfrac{x+3}{x+2}+\dfrac{x+4}{x+3}-\dfrac{x+5}{x+4}$

考え方　$(x^2+1)\div(x-1)$ の商は $x+1$，余りは 2 であるから，$\dfrac{x^2+1}{x-1}=x+1+\dfrac{2}{x-1}$ のように，分子の次数が分母の次数以上である各分数式を，整式と分子の次数が分母の次数より低い分数式との和の形に直します。そして，整式どうし，分数式どうしで計算すると楽にできます。

解答　(1) 与式$=\left(x+1+\dfrac{2}{x-1}\right)+\left(x+2+\dfrac{2}{x-2}\right)-2x-3$　←分子の次数を下げる。

$=(x+1+x+2-2x-3)+\left(\dfrac{2}{x-1}+\dfrac{2}{x-2}\right)$　←整式と分数式に分ける。

$=\dfrac{2(x-2+x-1)}{(x-1)(x-2)}$

$=\boldsymbol{\dfrac{2(2x-3)}{(x-1)(x-2)}}$

(2) 与式$=\dfrac{x+2}{x+1}-\dfrac{x+3}{x+2}+\dfrac{x+4}{x+3}-\dfrac{x+5}{x+4}$

$=\left(1+\dfrac{1}{x+1}\right)-\left(1+\dfrac{1}{x+2}\right)+\left(1+\dfrac{1}{x+3}\right)-\left(1+\dfrac{1}{x+4}\right)$

$=(1-1+1-1)+\left(\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{1}{x+3}-\dfrac{1}{x+4}\right)$

$=\dfrac{x+2-x-1}{(x+1)(x+2)}+\dfrac{x+4-x-3}{(x+3)(x+4)}$　←分子が等しくなる組に分ける。

$=\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}+\dfrac{1}{(x+3)(x+4)}$

$=\dfrac{x^2+7x+12+x^2+3x+2}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}$

$=\boldsymbol{\dfrac{2(x^2+5x+7)}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}}$

注 意　分子の次数を低くしておくと，通分したあとの計算が楽になります。

POINT　◆ 整式 A を整式 B で割ったときの商を Q，余りを R とすると

$$\frac{A}{B}=Q+\frac{R}{B}\quad(Q\text{ は整式，}R\text{ の次数}<B\text{ の次数})$$

このことを利用して，分子の次数が分母の次数以上のときは，整式と分子の次数が分母の次数より低い分数式の和に直します。

計算のくふうのしかたはわかりましたね。では，トレーニングで練習しましょう。

トレーニング

1 次の分数式を計算しなさい。

(1) $\dfrac{x^2+1}{x-1}+\dfrac{x^2-2}{x-2}-2x-3$

(2) $\dfrac{x+2}{x+1}-\dfrac{x+3}{x+2}+\dfrac{x+4}{x+3}-\dfrac{x+5}{x+4}$

2 次の分数式を計算しなさい。

(1) $\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{x+1}{x}-\dfrac{x+2}{x+1}+\dfrac{x+3}{x+2}$

(2) $\dfrac{6x-2}{2x-1}-\dfrac{2x+1}{2x}-\dfrac{10x+6}{2x+1}+\dfrac{6x+7}{2x+2}$

3 次の分数式を計算しなさい。

(1) $\dfrac{3a^2-3a+1}{a-1}-\dfrac{5a^2-10a+1}{a-2}-\dfrac{a^2-3a+1}{a-3}+\dfrac{3a^2-12a+1}{a-4}$

(2) $\dfrac{x^2+x-1}{x-1}+\dfrac{x^2+4x+4}{x+1}-2x-5$

4 次の分数式を計算しなさい。

(1) $\dfrac{x^2-x-1}{x^2-x-2}+\dfrac{x^2+1}{x^2-1}-\dfrac{2x^2-6x+6}{x^2-3x+2}$

(2) $\dfrac{x^3-2x+2}{x^2-1}-\dfrac{x^3+2}{x^2-x+1}+\dfrac{x^3+4}{x^3+1}$

つぎは，部分分数にわけて計算する方法を学習します。

例題 12 　　　　**分数式の計算(2)**

次の分数式を計算しなさい。

(1) $\dfrac{b}{a(a+b)}+\dfrac{c}{(a+b)(a+b+c)}+\dfrac{d}{(a+b+c)(a+b+c+d)}+\dfrac{1}{a+b+c+d}$

(2) $\dfrac{1}{x(x+2)}+\dfrac{1}{(x+2)(x+4)}+\dfrac{1}{(x+4)(x+6)}+\dfrac{1}{(x+6)(x+8)}$

考え方 　$\dfrac{b}{a(a+b)}=\dfrac{(a+b)-a}{a(a+b)}$ のように，各分数式の分子は，分母の 2 つの因数の差になっています。そこで，これを $\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{a+b}$ のように，分母の因数を分母とする 2 つの分数式の差で表してから計算すると楽にできます。

解　答 (1) 与式

$$=\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{a+b}\right)+\left(\frac{1}{a+b}-\frac{1}{a+b+c}\right)+\left(\frac{1}{a+b+c}-\frac{1}{a+b+c+d}\right)$$

$$+\frac{1}{a+b+c+d}$$ 　**←2 つの分数式の差で表す。**

$$=\boldsymbol{\frac{1}{a}}$$

(2) 与式

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+4}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x+6}\right)$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+6}-\frac{1}{x+8}\right)$$ 　**←$\boldsymbol{\frac{1}{2}}$ でくくると分子が 1 になる。**

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+8}\right)$$

$$=\frac{x+8-x}{2x(x+8)}=\boldsymbol{\frac{4}{x(x+8)}}$$

POINT ◆ $\dfrac{B-A}{AB}$ の形の分数式，すなわち分母が 2 つの因数をもち，分子がその因数の差に等しい分数式は，分母の因数 A，B をそれぞれ分母とする 2 つの分数式 $\dfrac{1}{A}$，$\dfrac{1}{B}$ の差で表すことができます（**部分分数に分解する**といいます）。

$$\boldsymbol{\frac{B-A}{AB}}=\frac{B}{AB}-\frac{A}{AB}=\boldsymbol{\frac{1}{A}-\frac{1}{B}}$$ 　例 $\dfrac{b}{a(a+b)}=\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{a+b}$

分母の因数の差をとってみることがポイントですね。では，さっそくトレーニングです。

トレーニング

5 次の分数式を計算しなさい。

(1) $\dfrac{b}{a(a+b)}+\dfrac{c}{(a+b)(a+b+c)}+\dfrac{d}{(a+b+c)(a+b+c+d)}+\dfrac{1}{a+b+c+d}$

(2) $\dfrac{1}{x(x+2)}+\dfrac{1}{(x+2)(x+4)}+\dfrac{1}{(x+4)(x+6)}+\dfrac{1}{(x+6)(x+8)}$

6 次の分数式を計算しなさい。

(1) $\dfrac{1}{(a+1)(a+2)}+\dfrac{1}{(a+2)(a+3)}+\dfrac{1}{(a+3)(a+4)}$

(2) $\dfrac{b}{a(a+b)}+\dfrac{c}{(a+b)(a+b+c)}+\dfrac{1}{a+b+c}$

7 次の分数式を計算しなさい。

(1) $\dfrac{1}{(x+1)(x-1)}+\dfrac{1}{(x-1)(x-3)}+\dfrac{1}{(x-3)(x-5)}$

(2) $\dfrac{1}{2b(b-a)}+\dfrac{1}{2a(a-b)}+\dfrac{1}{2a(3a+b)}$

8 次の分数式を計算しなさい。

(1) $\dfrac{2}{x^2-4x+3}+\dfrac{2}{x^2-1}+\dfrac{2}{x^2+4x+3}$

(2) $\dfrac{2}{x^2+4x+3}+\dfrac{x-2}{2x^2+7x+3}+\dfrac{2}{4x^2+8x+3}$

9 次の分数式を計算しなさい。

(1) $\dfrac{2}{(a-3)(a-1)}+\dfrac{2}{(a-2)a}+\dfrac{2}{(a-1)(a+1)}+\dfrac{2}{a(a+2)}$

(2) $\dfrac{1}{25a^2-20a+3}+\dfrac{1}{25a^2-10a}+\dfrac{1}{25a^2-1}+\dfrac{1}{25a^2+10a}$

次の例題の(1)では，１度に通分しないで，順序を変えたり，組をつくったりして計算する方法を扱います。

例題 13　　　　分数式の計算(3)

次の分数式を計算しなさい。

(1) $\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{2}{x^2+1}-\dfrac{4}{x^4+1}$

(2) $\dfrac{a}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c}{(c-a)(c-b)}$

考え方　(1)は，１度に通分しないで，まず $\dfrac{1}{x-1}$ と $\dfrac{1}{x+1}$ を通分して計算し，その結果と $\dfrac{2}{x^2+1}$，さらにその結果と $\dfrac{4}{x^4+1}$ という順に通分して計算します。

(2)は通分して，分子を整理し因数分解して約分できるときは約分します。

解　答　(1) 与式

$$=\frac{x+1-x+1}{(x-1)(x+1)}-\frac{2}{x^2+1}-\frac{4}{x^4+1}$$ **←前の２式を通分して計算**

$$=\frac{2}{x^2-1}-\frac{2}{x^2+1}-\frac{4}{x^4+1}$$

$$=\frac{2(x^2+1-x^2+1)}{(x^2-1)(x^2+1)}-\frac{4}{x^4+1}$$ **←前の２式を通分して計算**

$$=\frac{4}{x^4-1}-\frac{4}{x^4+1}$$

$$=\frac{4(x^4+1-x^4+1)}{(x^4-1)(x^4+1)}$$

$$=\boldsymbol{\frac{8}{x^8-1}}$$

(2) 与式

$$=\frac{-a(b-c)-b(c-a)-c(a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$ **←1度に通分して計算**

$$=\frac{-ab+ca-bc+ab-ca+bc}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$

$$=\boldsymbol{0}$$

POINT　◆ いくつかの分数式の和や差を計算するときは，１度に通分しないで，次のように**順序を変えたり，組をつくったりして通分する**と楽にできる場合があります。

① 分母の積が乗法公式にあてはまる。

② それぞれの組を通分して計算すると分子が等しくなる。

分数式の計算では，いろいろなくふうが必要です。次のトレーニングでしっかり練習しましょう。

トレーニング

10 次の分数式を計算しなさい。

(1) $\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{2}{x^2+1}-\dfrac{4}{x^4+1}$

(2) $\dfrac{a}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c}{(c-a)(c-b)}$

11 次の分数式を計算しなさい。

(1) $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+3}-\dfrac{1}{x+5}+\dfrac{1}{x+8}$

(2) $\dfrac{1}{x}-\dfrac{3}{x+2}-\dfrac{5}{x+4}+\dfrac{7}{x+6}$

12 次の分数式を計算しなさい。

(1) $\dfrac{a^2}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^2}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c^2}{(c-a)(c-b)}$

(2) $\dfrac{b+c}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{c+a}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{a+b}{(c-a)(c-b)}$

13 次の分数式を計算しなさい。

(1) $\dfrac{b^2-(c-a)^2}{a^2-(b+c)^2}+\dfrac{c^2-(a-b)^2}{b^2-(c+a)^2}+\dfrac{a^2-(b-c)^2}{c^2-(a+b)^2}$

(2) $\dfrac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}$

14 次の分数式を計算しなさい。

(1) $\dfrac{1}{2-x}+\dfrac{1}{2+x}+\dfrac{4}{4+x^2}-\dfrac{32}{16+x^4}$

(2) $\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{1-x}{1+x+x^2}+\dfrac{1}{1+x}-\dfrac{1+x}{1-x+x^2}$

これまでの学習で分数式の計算にも，だいぶ慣れたことと思います。
つぎは，条件式が比例式で与えられているときの，分数式の値を求める例題です。

例題 14 　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　**分数式の値**

$\dfrac{c}{a+b}=\dfrac{a}{b+c}=\dfrac{b}{c+a}$ であるとき，この式の値を求めなさい。

考え方　$\dfrac{c}{a+b}=\dfrac{a}{b+c}=\dfrac{b}{c+a}=k$ とおいて，k を求めます。

解　答　$\dfrac{c}{a+b}=\dfrac{a}{b+c}=\dfrac{b}{c+a}=k$ とおくと　　←**条件式＝$\boldsymbol{k}$ とおく。**

$c=k(a+b)$ 　　………①

$a=k(b+c)$ 　　………②

$b=k(c+a)$ 　　………③

①＋②＋③から

$a+b+c=2k(a+b+c)$

$\boldsymbol{a+b+c \neq 0}$ **のとき**　　$k=\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$ 　　←**両辺を $\boldsymbol{a+b+c}$ で割る。**

$\boldsymbol{a+b+c=0}$ **のとき**　　$k=\dfrac{c}{a+b}=\dfrac{c}{-c}=\mathbf{-1}$ 　　←**もとの式にもどる。**

POINT　◆ **条件式が比例式**で与えられたときは，**＝$\boldsymbol{k}$** とおきます。そして
① k 以外の文字を消去
② 文字式の対称性の性質を利用
のどちらかの方法で k の値を求めます。

---

k とおくことがポイントですね。では，トレーニングです。最初に，例題と同じ問題で考え方を確認しておきましょう。

トレーニング

15 $\dfrac{c}{a+b}=\dfrac{a}{b+c}=\dfrac{b}{c+a}$ であるとき，この式の値を求めなさい。

16 $\dfrac{a+b}{3}=\dfrac{b+c}{4}=\dfrac{c+a}{5}$ のとき，$\dfrac{a^2-b^2+c^2}{a^2+b^2+c^2}$ の値を求めなさい。

17 $xyz=1$ のとき，$\dfrac{1}{xy+x+1}+\dfrac{1}{yz+y+1}+\dfrac{1}{zx+z+1}$ の値を求めなさい。

18 $a+b+c=0$ のとき，$a\left(\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)+b\left(\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{a}\right)+c\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)$ の値を求めなさい。

19 $\dfrac{d}{a+b+c}=\dfrac{a}{b+c+d}=\dfrac{b}{c+d+a}=\dfrac{c}{d+a+b}$ であるとき，この式の値を求めなさい。

いよいよ，きょう最後の例題です。最後は，繁分数式の計算です。

例題 15 　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　**繁分数式**

次の繁分数式を簡単にしなさい。

(1) $\dfrac{x+1}{x+1+\dfrac{1}{x-1+\dfrac{1}{x+1}}}$ 　　　(2) $\dfrac{\dfrac{1}{b}-\dfrac{a-b}{ab+b^2}}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{a-b}{a^2+ab}}$

考え方 　分母・分子に 0 でない同じ整式をかけて整理していきます。

解　答 　(1) 与式$=\dfrac{x+1}{x+1+\dfrac{x+1}{\left(x-1+\dfrac{1}{x+1}\right)\times(x+1)}}$ 　← $\dfrac{1}{x-1+\dfrac{1}{x+1}}$ を簡単にする。

$$=\frac{x+1}{x+1+\dfrac{x+1}{(x-1)(x+1)+1}}=\frac{x+1}{x+1+\dfrac{x+1}{x^2}}$$

$$=\frac{(x+1)\times x^2}{\left(x+1+\dfrac{x+1}{x^2}\right)\times x^2}=\frac{(x+1)x^2}{(x+1)x^2+x+1}$$

$$=\frac{(x+1)x^2}{(x+1)(x^2+1)}=\boldsymbol{\frac{x^2}{x^2+1}}$$

(2) 与式$=\dfrac{\left\{\dfrac{1}{b}-\dfrac{a-b}{b(a+b)}\right\}\times ab(a+b)}{\left\{\dfrac{1}{a}+\dfrac{a-b}{a(a+b)}\right\}\times ab(a+b)}$ 　**←分母・分子に $ab(a+b)$ をかける。**

$$=\frac{a(a+b)-a(a-b)}{b(a+b)+b(a-b)}$$

$$=\frac{2ab}{2ab}=\boldsymbol{1}$$

POINT 　◆ 繁分数式では，分母・分子に 0 でない**同じ整式をかけても**，分母・分子を 0 でない**同じ整式で割ってももとの繁分数式と等しくなります。**

順に，ていねいに計算していけばよいですね。では，トレーニングしましょう。

トレーニング

20 次の繁分数式を簡単にしなさい。

(1) $$\frac{x+1}{x+1+\dfrac{1}{x-1+\dfrac{1}{x+1}}}$$

(2) $$\frac{\dfrac{1}{b}-\dfrac{a-b}{ab+b^2}}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{a-b}{a^2+ab}}$$

21 次の繁分数式を簡単にしなさい。

(1) $$\frac{\dfrac{1+x}{1-x}-\dfrac{1-x}{1+x}}{\dfrac{1+x}{1-x}+\dfrac{1-x}{1+x}}$$

(2) $$\frac{\dfrac{b+a}{1+ab}-a}{\dfrac{a(b+a)}{1+ab}-1}$$

22 次の繁分数式を簡単にしなさい。

(1) $$\frac{1-x}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-x}}}$$

(2) $$\frac{x-1}{x-1+\dfrac{1}{x+1+\dfrac{1}{x-1}}}$$

23 次の繁分数式を簡単にしなさい。

(1) $$\frac{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x-y}}{\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{x-y}}$$

(2) $$\frac{\dfrac{1}{b}-\dfrac{a+b}{ab-b^2}}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{a+b}{a^2-ab}}$$

24 次の繁分数式を簡単にしなさい。

$$\frac{x-\dfrac{5}{2x-3}}{x+7-\dfrac{15}{2-\dfrac{1}{x-1}}}-\frac{\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{x-1}}{x+3-\dfrac{12}{x-1}}$$

きょうは，分数式についていろいろな計算をしました。分数式の計算は，もうだいじょうぶですね。きょうの学習はこれで終わります。第4日は，無理数についての学習です。

第 **4** 日	数 と 式　　　　学習日　　月　　日 **平方根，無理数**

きょうは，無理数に関するいろいろな問題を扱っていきます。とくに，二重根号についての問題が中心になります。

まず最初は，簡単な分母の有理化から始めましょう。

例題 16　　**無理式を含む式の計算**

$x=\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$，$y=\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$ のとき，次の式の値を求めなさい。

(1)　x^2-y^2　　　　(2)　x^3+y^3

考え方　(1)は $(x+y)(x-y)$ としてから計算します。(2)は x，y についての対称式ですから，x，y についての基本対称式 $x+y$，xy だけで表せます。だから，まず，x，y の分母を有理化して，$x+y$，$x-y$，xy を計算します。

解　答

$$x+y=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=\frac{(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2+(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2}{5-3}=8$$

$$x-y=\frac{(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2-(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2}{5-3}=2\sqrt{15}$$

$$xy=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=1$$

(1)　与式 $=(x+y)(x-y)$　　　　**←$x+y$，$x-y$ で表す。**

$=8\cdot2\sqrt{15}=\mathbf{16\sqrt{15}}$

(2)　与式 $=(x+y)^3-3xy(x+y)$　　**←$x+y$，xy で表す。**

$=8^3-3\cdot1\cdot8=\mathbf{488}$

POINT　◆　分母に根号を含んだ式を，分母に根号を含まない形に変形することを，分母を**有理化する**といいます。

$$\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}=\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b}$$

$$\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}=\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}$$

◆　式の値を求めるとき，式を変形して簡単な形にしてから代入すると楽です。

また，式の特徴，たとえば，x，y についての対称式は基本対称式 $x+y$，xy だけで表され，x，y についての交代式は $x-y$ と基本対称式で表された式の積で表されることなどを利用すると楽です。

考え方をつかんだら，トレーニングで練習です。まずは，例題をもう一度解いてみましょう。

トレーニング

1 $x=\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$, $y=\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$ のとき，次の式の値を求めなさい。

(1) x^2-y^2　　　(2) x^3+y^3

2 次の式を簡単にしなさい。

(1) $\dfrac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\dfrac{1-\sqrt{2}-\sqrt{3}}{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

(2) $\left(\dfrac{1}{\sqrt{10}+\sqrt{2}}+\sqrt{3}\right)\left(\dfrac{1}{\sqrt{10}-\sqrt{2}}-\sqrt{3}\right)$

3 $x=3\sqrt{2}+2\sqrt{3}$, $y=3\sqrt{2}-2\sqrt{3}$ のとき，次の式の値を求めなさい。

(1) x^2-y^2+x-y　　　(2) $(x^2+1)(y^2+1)$

4 $x=\dfrac{3}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$, $y=\dfrac{3}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ のとき，次の式の値を求めなさい。

(1) x^3-y^3　　　(2) $\dfrac{x-y}{y^2}-\dfrac{x-y}{x^2}$

5 $x=\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{6}}$, $y=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{\sqrt{2}-\sqrt{6}}$ のとき，次の式の値を求めなさい。

(1) $\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y^2}+\dfrac{1}{y}$　　　(2) $\dfrac{y}{x-1}-\dfrac{x}{y-1}$

次の例題では，絶対値の意味について考えます。いろいろな場面で利用されますので，確実に身につけましょう。

例題 17 　　　　**根号の性質**

$x=a-\dfrac{1}{a}$ のとき，$\sqrt{x^2+4}-x$ を a で表しなさい。ただし，$a\neq 0$ とします。

考え方　$x=a-\dfrac{1}{a}$ を $\sqrt{x^2+4}$ に代入して計算すると $\sqrt{\left(a+\dfrac{1}{a}\right)^2}$ になります。

$a+\dfrac{1}{a}>0$ と $a+\dfrac{1}{a}<0$ に場合分けして計算します。

解　答　$\sqrt{x^2+4}=\sqrt{\left(a-\dfrac{1}{a}\right)^2+4}=\sqrt{a^2+2+\dfrac{1}{a^2}}=\sqrt{\left(a+\dfrac{1}{a}\right)^2}=\left|a+\dfrac{1}{a}\right|$ 　　$\leftarrow \sqrt{A^2}=|A|$

（i）$\boldsymbol{a>0}$ **のとき** 　　$\leftarrow \boldsymbol{a+\dfrac{1}{a}>0}$ **のとき**

$\left|a+\dfrac{1}{a}\right|=a+\dfrac{1}{a}$ 　　$\leftarrow \boldsymbol{A>0}$ **のとき** $\boldsymbol{|A|=A}$

よって　与式$=a+\dfrac{1}{a}-\left(a-\dfrac{1}{a}\right)=\boldsymbol{\dfrac{2}{a}}$

（ii）$\boldsymbol{a<0}$ **のとき** 　　$\leftarrow \boldsymbol{a+\dfrac{1}{a}<0}$ **のとき**

$\left|a+\dfrac{1}{a}\right|=-\left(a+\dfrac{1}{a}\right)$ 　　$\leftarrow \boldsymbol{A<0}$ **のとき** $\boldsymbol{|A|=-A}$

よって　与式$=-\left(a+\dfrac{1}{a}\right)-\left(a-\dfrac{1}{a}\right)=\boldsymbol{-2a}$

POINT
- $a>0$，$b>0$ のとき
  $\boldsymbol{\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}}$，$\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}=\sqrt{\dfrac{b}{a}}}$
- $\boldsymbol{\sqrt{A^2}=|A|}$
- $A\geqq 0$ のとき　$|A|=A$
  $A<0$ のとき　$|A|=-A$

根号内は正または 0 ということ，絶対値は場合分けしてはずすことが理解できましたね。では，トレーニングです。

トレーニング

6 $x=a-\dfrac{1}{a}$ のとき，$\sqrt{x^2+4}-x$ を a で表しなさい。ただし，$a \neq 0$ とします。

7 $x+y=3$，$xy=2$，$x<y$ のとき，$\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$ の値を求めなさい。

8 $x=a^2+1$ のとき，$x-\sqrt{x^2+2x+1}$ を a で表しなさい。

9 $x=\dfrac{4a}{a^2+1}$ のとき，$\sqrt{2-x}-\sqrt{2+x}$ を a で表しなさい。ただし，$a>0$ とします。

10 次の数を大きい方から順に並べなさい。

$\sqrt{2}$，$\sqrt[3]{3}$，$\dfrac{\sqrt{5}}{2}$，$\sqrt[5]{6}$

つぎは，二重根号のはずし方についての基本的な例題です。

例題 18 　　　　　　　　　　　　　　　　**二重根号(1)**

次の式を簡単にしなさい。

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{7-4\sqrt{3}}}$ 　　　　(2) $\dfrac{\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}}}{\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}}}$

考え方　二重根号をはずしてから，分母を有理化して整理します。

(1)の $\sqrt{7-4\sqrt{3}}$ では，$4\sqrt{3}$ を $2\sqrt{2^2\cdot 3}$ と変形し，(2)の $\sqrt{3\pm\sqrt{5}}$ では，$\sqrt{\dfrac{6\pm 2\sqrt{5}}{2}}$ と変形して，中の $\sqrt{}$ の前の数を 2 にしてから，あてはまる数をさがします。

解　答　(1) 与式 $=\dfrac{1}{\sqrt{7-2\sqrt{12}}}$ 　　**←中の $\sqrt{}$ の前の数を 2 にする。**

$=\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$ 　　**←和が 7，積が 12 になる 2 正数は 4 と 3**

$=\dfrac{2+\sqrt{3}}{4-3}=\boldsymbol{2+\sqrt{3}}$

(2) 与式 $=\dfrac{\sqrt{6+2\sqrt{5}}-\sqrt{6-2\sqrt{5}}}{\sqrt{6+2\sqrt{5}}+\sqrt{6-2\sqrt{5}}}$ 　　**←分母・分子に $\sqrt{2}$ をかける。**

$=\dfrac{\sqrt{5}+1-\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+1+\sqrt{5}-1}$ 　　**←和が 6，積が 5 になる 2 正数は 5 と 1**

$=\dfrac{2}{2\sqrt{5}}=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{5}}{5}}$

POINT

◆　根号の中に二重に根号をもつ $\sqrt{p+\sqrt{q}}$ の形の式を，二重の根号をもたない $\sqrt{s}+\sqrt{t}$ の形に変形することを**二重根号をはずす**といいます。

◆　二重根号のはずし方

$\sqrt{(a+b)+2\sqrt{ab}}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$	ただし　$a>0$，$b>0$
$\sqrt{(a+b)-2\sqrt{ab}}=\sqrt{a}-\sqrt{b}$	ただし　$a>b>0$

2 をだすことがポイントですよ。では，トレーニングで練習しましょう。

トレーニング

11 次の式を簡単にしなさい。

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{7-4\sqrt{3}}}$

(2) $\dfrac{\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}}}{\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}}}$

12 次の式を簡単にしなさい。

(1) $\sqrt{11-2\sqrt{30}}$

(2) $\sqrt{9+2\sqrt{14}}$

(3) $\sqrt{12+2\sqrt{27}}$

(4) $\sqrt{16-2\sqrt{15}}$

13 次の式を簡単にしなさい。

(1) $\sqrt{11-4\sqrt{6}}$

(2) $\sqrt{9+\sqrt{32}}$

(3) $\sqrt{5-\sqrt{21}}$

(4) $\sqrt{7+3\sqrt{5}}$

14 次の式を簡単にしなさい。

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{11-4\sqrt{6}}}-\dfrac{1}{\sqrt{6-3\sqrt{3}}}$

(2) $\dfrac{1}{1+\sqrt{5+2\sqrt{6}}}+\dfrac{1}{1+\sqrt{5-2\sqrt{6}}}$

15 次の式を簡単にしなさい。

(1) $\sqrt{\sqrt{8}-\sqrt{3}+\sqrt{12+6\sqrt{3}}}$

(2) $\sqrt{8+\sqrt{5}+\sqrt{9-2\sqrt{20}}}$

二重根号のはずし方は，もうだいじょうぶですね。次の例題では，これを利用して，もうすこし複雑な計算をします。

例題 19 　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　**二重根号(2)**

$x=12(5+2\sqrt{6})$ のとき，$\dfrac{\sqrt{\sqrt{x}+1}-\sqrt{\sqrt{x}-1}}{\sqrt{\sqrt{x}+1}+\sqrt{\sqrt{x}-1}}$ の値を求めなさい。

考え方　まず，$\sqrt{x}=\sqrt{12(5+2\sqrt{6})}$ の二重根号をはずします。つぎに，その結果を利用して，$\sqrt{\sqrt{x}+1}$，$\sqrt{\sqrt{x}-1}$ の二重根号をはずしてから，与式に代入して計算します。

解　答

$$\sqrt{x}=\sqrt{12(5+2\sqrt{6})}=\sqrt{12}\cdot\sqrt{5+2\sqrt{6}}$$
$$=2\sqrt{3}(\sqrt{3}+\sqrt{2})=6+2\sqrt{6}$$

←$\sqrt{x}$ の二重根号をはずす。

よって

$$\sqrt{\sqrt{x}+1}=\sqrt{6+2\sqrt{6}+1}=\sqrt{7+2\sqrt{6}}=\sqrt{6}+1$$

←$\sqrt{\sqrt{x}+1}$ の二重根号をはずす。

$$\sqrt{\sqrt{x}-1}=\sqrt{6+2\sqrt{6}-1}=\sqrt{5+2\sqrt{6}}=\sqrt{3}+\sqrt{2}$$

←$\sqrt{\sqrt{x}-1}$ の二重根号をはずす。

したがって

$$与式=\frac{(\sqrt{6}+1)-(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{6}+1)+(\sqrt{3}+\sqrt{2})}=\frac{\{(\sqrt{6}+1)-(\sqrt{3}+\sqrt{2})\}^2}{(\sqrt{6}+1)^2-(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}$$
$$=\frac{7+2\sqrt{6}+5+2\sqrt{6}-2(\sqrt{6}+1)(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{7+2\sqrt{6}-5-2\sqrt{6}}$$
$$=6+2\sqrt{6}-3\sqrt{2}-2\sqrt{3}-\sqrt{3}-\sqrt{2}$$
$$=\mathbf{6+2\sqrt{6}-3\sqrt{3}-4\sqrt{2}}$$

POINT　◆ 複雑な式の値を求めるときは，
何度も出てくる同じ式，ひとつのまとまりになっている式
で**部分に分け**，それぞれの部分を順序よく計算します。

では，トレーニングしましょう。

トレーニング

16 $x=12(5+2\sqrt{6})$ のとき，$\dfrac{\sqrt{\sqrt{x}+1}-\sqrt{\sqrt{x}-1}}{\sqrt{\sqrt{x}+1}+\sqrt{\sqrt{x}-1}}$ の値を求めなさい。

17 $x=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$ のとき，$\dfrac{1}{1+\sqrt{2+x}}+\dfrac{1}{1-\sqrt{2-x}}$ の値を求めなさい。

18 $x=19+4\sqrt{15}$ のとき，$\dfrac{\sqrt{6+\sqrt{x}}}{\sqrt{2+\sqrt{x}}}$ の値を求めなさい。

19 $x=4(5^2+2^2\sqrt{6})$ のとき，$\dfrac{\sqrt{12+\sqrt{x}}+\sqrt{12-\sqrt{x}}}{\sqrt{12-\sqrt{x}}-\sqrt{12+\sqrt{x}}}$ の値を求めなさい。

20 $x=\sqrt{\dfrac{4-\sqrt{7}}{4}}$ のとき，$\dfrac{\sqrt{2-x^2}}{x}+\dfrac{x}{\sqrt{2-x^2}}$ の値を求めなさい。

無理数の計算にも，すっかり慣れましたね。きょう最後の例題は，無理数の整数部分を考える問題です。

例題 20 ―― **無理数の整数部分**

$\sqrt{17+\sqrt{288}}$ を正の整数と1より小さい正の数 x との和とするとき，次の式の値を求めなさい。

$$P=\sqrt{\frac{x+2+\sqrt{4x+x^2}}{x+2-\sqrt{4x+x^2}}}$$

考え方 まず x の正確な値を求めます。$\sqrt{17+\sqrt{288}}$ の二重根号をはずして，どの整数とどの整数の間の数か調べます。x は $\sqrt{17+\sqrt{288}}$ から整数部分をひいて得ることができます。

解　答 $\sqrt{17+\sqrt{288}}=\sqrt{17+2\sqrt{72}}=3+\sqrt{8}=3+2\sqrt{2}$

$5<3+2\sqrt{2}<6$ より　$x=3+2\sqrt{2}-5=2\sqrt{2}-2$　**←x の値を求める。**

よって　$\sqrt{4x+x^2}=\sqrt{4(2\sqrt{2}-2)+(2\sqrt{2}-2)^2}=2$

$x+2=2\sqrt{2}$

したがって

$$P=\sqrt{\frac{2\sqrt{2}+2}{2\sqrt{2}-2}}=\sqrt{(\sqrt{2}+1)^2}=\boldsymbol{\sqrt{2}+1}$$

POINT ◆ 無理数 $\sqrt{P}$ の整数部分を a，小数部分を b とすると

$\boldsymbol{\sqrt{P}=a+b}$，$a^2<P<(a+1)^2$

では，トレーニングです。整数部分と小数部分をしっかり見きわめることが重要です。

トレーニング

21 $\sqrt{17+\sqrt{288}}$ を正の整数と1より小さい正の数 x との和とするとき，次の式の値を求めなさい。

$$P=\sqrt{\frac{x+2+\sqrt{4x+x^2}}{x+2-\sqrt{4x+x^2}}}$$

22 $\dfrac{81}{2(\sqrt{10}-1)^2}$ を正の整数と1より小さい正の数 x との和とするとき，次の式の値を求めなさい。

$$P=\frac{1+\sqrt{1-x}}{1-\sqrt{1-x}}$$

23 $\sqrt{72-32\sqrt{2}}$ を正の整数と1より小さい正の数 x との和とするとき，次の式の値を求めなさい。

$$\sqrt{\frac{\sqrt{x}}{29x-5x^2}}$$

24 $\sqrt{30-\sqrt{500}}$ を正の整数 a と1より小さい正の数 b との和とするとき，次の式の値を求めなさい。

$$\sqrt{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+2}$$

25 $2\sqrt{2(11-4\sqrt{6})}$ を正の整数 a と1より小さい正の数 b との和とするとき，次の式の値を求めなさい。

$$\frac{5(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{\sqrt{b^2-3ab+a^2-6}}$$

きょうの学習はこれで終わりです。無理数の計算について十分練習できましたね。第5日は，数と式の復習です。

第5日	数と式　　学習日　月　日 **演習問題**

きょうは，第1日～第4日で学習してきた数と式についての演習問題をします。全部で10題です。実力だめしのつもりで取り組みましょう。

1 $x+y+z=a$，$yz+zx+xy=b$，$xyz=c$ のとき，次の式を a，b，c で表しなさい。

(1) $x^2+y^2+z^2$　　(2) $x^3+y^3+z^3$

(3) $(y+z)(z+x)(x+y)$

2 次の式を因数分解しなさい。

(1) $x^3+y^3-3xy+1$　　(2) a^4-27a^2+1

(3) x^4+4y^4

3 次の式を簡単にしなさい。

(1) $\dfrac{2x^2-2x+1}{x-1}-\dfrac{2x^2+4x-1}{x+2}$

(2) $\dfrac{a^3}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^3}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c^3}{(c-a)(c-b)}$

4 x^3+8x^2+5x-m が x^2+3x-n で割り切れるように定数 m, n の値を定めなさい。

5 最大公約数が $x+3$，最小公倍数が x^3+4x^2+x-6 である 2 つの整式を求めなさい。

6 $x=\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$，$y=\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$ のとき，$x^3+x^2y+xy^2+y^3$ の値を求めなさい。

7 $a>0$ で，$x=\dfrac{a^2+1}{a}$ のとき，$\dfrac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}}$ を計算しなさい。 （早稲田大）

8 a，b，$a-b$ がどれも 3 で割り切れないとき，a^3+b^3 は 9 で割り切れることを証明しなさい。ただし，a，b は整数とします。 （お茶の水女大）

9 Z は整数全体の集合とします。

$A=\{5x+7y \mid x\in Z,\ y\in Z\}$

$B=\{2n \mid n\in Z\}$

とするとき，$B\subseteqq A$ であることを証明しなさい。

10 x，y は整数で，$2x+y$ が3の倍数であるとき，$8x^2-10xy-7y^2$ は9の倍数であることを証明しなさい。

これで，演習問題は終わりです。解けなかった問題は，解答や例題を見て，解けるようにしておきましょう。

方程式・不等式

数学Ｉの２章目として，方程式・不等式をとりあげます。
方程式・不等式の中では，なんといっても２次方程式が基本です。２次方程式の解の判別，解と係数の関係など，完全に理解しておかなくてはなりません。
方程式・不等式の内容は，問題の解法の中でしばしば出てきますから，ここで，完全にしておきましょう。不等式の解法や，不等式の証明も，典型的な解法をおさえておくことです。

第 6 日	方程式・不等式	学習日　　月　　日
	2次方程式	

きょうから，方程式・不等式の学習をはじめます。

方程式と不等式は，これからの学習の基礎になる大切なところですから，完全にできるようにしておきましょう。

まず，はじめは，1次方程式の解法からです。

例題 21 ―――― **1次方程式の解法**

次の x についての方程式を解きなさい。

$(a+2)(a-5)x=a+11-12(x+1)$

考え方　まず x について整理して，$Ax=B$ の形にしてみます。つぎに，a の値によって場合分けして考えます。

解　答　与えられた式を整理して

$\{(a+2)(a-5)+12\}x=a+11-12$　　**←x について整理する。**

$(a^2-3a+2)x=a-1$

$(a-1)(a-2)x=a-1$　　**←$Ax=B$ の形，a の場合分けを考える。**

(i)　$a \neq 1$，$a \neq 2$ のとき

$$x=\frac{a-1}{(a-1)(a-2)}=\frac{1}{a-2}$$

(ii)　$a=1$ のとき

$0 \cdot x=0$　より　x はすべての数（不定）　　**←x はどんな数でもあてはまる。**

(iii)　$a=2$ のとき

$0 \cdot x=1$　より　解はない（不能）　　**←x はどんな数でもあてはまらない。**

(i)，(ii)，(iii)より

$a \neq 1$，$a \neq 2$ のとき　$x=\dfrac{1}{a-2}$，$a=1$ のとき　すべての数，

$a=2$ のとき　解なし

POINT　◆ **1次方程式 $ax=b$ の解法**

①　$a \neq 0$ のとき　$x=\dfrac{b}{a}$

②　$a=0$，$b=0$ のとき　$0 \cdot x=0$　より　x はすべての数（不定）

③　$a=0$，$b \neq 0$ のとき　$0 \cdot x=b$　より　解なし（不能）

1次方程式の解法は簡単，といいかげんにしてはいけません。しっかりとした正しい解答を書いてください。では，トレーニングです。

トレーニング

1 次の x についての方程式を解きなさい。

$$(a+2)(a-5)x=a+11-12(x+1)$$

2 次の x についての方程式を解きなさい。

$$(n+2)\{(n+2)x-1\}=-(n-3)(n+2)x$$

3 次の方程式を解きなさい。

$$5|x+4|-|x|=3x+1$$

4 次の x についての方程式を解きなさい。

$$p^2(x-q)=q^2(x+p)$$

5 次の x についての方程式を解きなさい。

$$k^2(x-1)+|k+6|=4x$$

つぎは，２次方程式の解の公式を利用して解く問題です。

例題 22 　　　　　　　　　　　　　　　　　　**解の公式**

次の２次方程式を解きなさい。

$(\sqrt{2}-1)x^2+(\sqrt{2}+1)x+2=0$

考え方　どんな２次方程式でも解の公式にあてはめれば解けます。そのとき，もとの２次方程式で，x^2 の係数が簡単な形のほうが，あとの計算が楽になりますから，この場合は，まず両辺に $\sqrt{2}+1$ をかけて整理します。

解　答　両辺に $\sqrt{2}+1$ をかけると

$$(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)x^2+(\sqrt{2}+1)^2x+2(\sqrt{2}+1)=0$$
←x^2 の係数を有理化

$$x^2+(3+2\sqrt{2})x+2(\sqrt{2}+1)=0$$

解の公式より

$$x=\frac{-(3+2\sqrt{2})\pm\sqrt{(3+2\sqrt{2})^2-4\cdot2(\sqrt{2}+1)}}{2}$$

$$=\frac{-3-2\sqrt{2}\pm\sqrt{9+2\sqrt{8}}}{2}$$

$$=\frac{-3-2\sqrt{2}\pm(2\sqrt{2}+1)}{2}$$
←二重根号をはずす

したがって　　$\boldsymbol{x=-1,\ -2-2\sqrt{2}}$
←±をそれぞれ計算

注　意　$x^2+(3+2\sqrt{2})x+2(\sqrt{2}+1)=(x+1)(x+2+2\sqrt{2})$ と因数分解して解いてもかまいません。

POINT

◆　２次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の**解の公式**は

$$\boxed{x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$$

◆　２次方程式の解の公式にあてはめるときは，さきに係数を整理すると計算が楽です。

トレーニングで何回も練習しましょう。計算は，はやく間違えずに。

トレーニング

6　次の２次方程式を解きなさい。

$(\sqrt{2}-1)x^2+(\sqrt{2}+1)x+2=0$

7 次の 2 次方程式を解きなさい。

$$(-\sqrt{5}-1)x^2+2\sqrt{5}x-\sqrt{5}+1=0$$

8 次の問いに答えなさい。

(1) $4\sqrt{2}x^2+6\sqrt{2}x+2$ を係数が無理数の範囲で因数分解しなさい。

(2) x^2+x+4 を係数が複素数の範囲で因数分解しなさい。

9 x についての 2 次方程式 $k^2x^2+2k^2x-(2k+1)=0$ を解きなさい。ただし，k は実数の定数とします。

10 x についての 2 次方程式

$$(-a+b+c)x^2+(a-b+c)x+a+b-c=0$$

が，$-a+b+c \neq 0$，$a+b+c=0$ をみたすとき，次の問いに答えなさい。

(1) 解の公式により，この方程式を解き，解を a と b で表しなさい。

(2) $a=-\sqrt{3}-1$，$b=1$，$c=\sqrt{3}$ のとき，この方程式を解きなさい。

つぎは，解と係数の関係を利用する問題です。解と係数の関係の意味をしっかりつかみましょう。

例題 23 ―― **2次方程式の解と係数の関係**

2次方程式 $2x^2+4x-3=0$ の2つの解を α，β とするとき，次の式の値を求めなさい。

(1) $(\alpha-\beta)^2$　　(2) $\alpha^3+\beta^3$

(3) $(\alpha^2-1)(\beta^2-1)$　　(4) $\dfrac{\beta}{\alpha-1}+\dfrac{\alpha}{\beta-1}$

考え方　与えられた式は，α，β についての対称式ですから，$\alpha+\beta$，$\alpha\beta$ だけの式で表すことができます。また，2次方程式の解と係数の関係から $\alpha+\beta$，$\alpha\beta$ の値が求められますから，それを代入して計算します。

解　答　解と係数の関係より　$\alpha+\beta=-\dfrac{4}{2}=-2$，$\alpha\beta=-\dfrac{3}{2}$

(1) 与式 $=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$　　**←$\alpha+\beta$ と $\alpha\beta$ で表す。**

$=(-2)^2-4\cdot\left(-\dfrac{3}{2}\right)=\mathbf{10}$　　**←値を代入して計算**

(2) 与式 $=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$　　**←$\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3-(3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2)$**

$=(-2)^3-3\cdot\left(-\dfrac{3}{2}\right)\cdot(-2)=\mathbf{-17}$

(3) 与式 $=\alpha^2\beta^2-\alpha^2-\beta^2+1$

$=(\alpha\beta)^2-(\alpha+\beta)^2+2\alpha\beta+1$

$=\left(-\dfrac{3}{2}\right)^2-(-2)^2+2\cdot\left(-\dfrac{3}{2}\right)+1=\mathbf{-\dfrac{15}{4}}$

(4) 与式 $=\dfrac{\beta^2-\beta+\alpha^2-\alpha}{\alpha\beta-\alpha-\beta+1}$　　**←$\dfrac{\beta(\beta-1)+\alpha(\alpha-1)}{(\alpha-1)(\beta-1)}$**

$=\dfrac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta-(\alpha+\beta)}{\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1}$

$=\dfrac{(-2)^2-2\cdot\left(-\dfrac{3}{2}\right)-(-2)}{\left(-\dfrac{3}{2}\right)-(-2)+1}=\mathbf{6}$

POINT

◆ 2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解を α，β とすると

$$\boxed{\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\quad \alpha\beta=\frac{c}{a}}$$

◆ 2次方程式の解 α，β の**対称式は，$\alpha+\beta$，$\alpha\beta$ で表すことができる**から，もとの2次方程式の係数で表すことができます。

では，トレーニングです。

トレーニング

11 2次方程式 $2x^2+4x-3=0$ の2つの解を α，β とするとき，次の式の値を求めなさい。

(1) $(\alpha-\beta)^2$　　(2) $\alpha^3+\beta^3$

(3) $(\alpha^2-1)(\beta^2-1)$　　(4) $\dfrac{\beta}{\alpha-1}+\dfrac{\alpha}{\beta-1}$

12 2次方程式 $3x^2+4x+6=0$ の2つの解を α，β とするとき，次の式の値を求めなさい。

(1) $\alpha^4+\beta^4$　　(2) $(\alpha-3\beta)(3\alpha-\beta)$

(3) $(\alpha^2+\alpha+1)(\beta^2+\beta+1)$　　(4) $\dfrac{\beta^2}{\alpha}+\dfrac{\alpha^2}{\beta}$

13 2次方程式 $2x^2+x-6=0$ の2つの解を α，β，$\alpha>\beta$ とするとき，次の式の値を求めなさい。

(1) $\alpha-\beta$　　(2) $\alpha^2-\beta^2$

14 x の2次方程式 $x^2+2kx+k+3=0$ の解を α，β とするとき，α，β の間の関係式を求めなさい。

15 p，q は整数で，2次方程式 $x^2+nx+p=0$ の解を α，β とし，$x^2+nx+q=0$ の解を γ，δ とするとき

$$P=(\gamma-\alpha)(\delta-\beta)(\gamma-\beta)(\delta-\alpha)$$

は，整数の平方となることを証明しなさい。

つぎは，解と係数の関係を利用して，2次方程式をつくる問題です。

例題 24 　　**2次方程式の作成**

x に関する2次方程式　$x^2+ax+b=0$　があります。この方程式の一方の解の逆数と他方の解との和は2通り考えられますが，それらを2つの解とする2次方程式を作ると，もとと同値な2次方程式になります。a，b の値を求めなさい。

考え方　2つの解を α，β とすると，一方の解の逆数と他方の解との和は，$\alpha+\dfrac{1}{\beta}$ および $\beta+\dfrac{1}{\alpha}$ となります。これらを2解とする2次方程式を作り，もとの方程式と係数の比較をします。解と係数の関係を利用します。

解　答

$$x^2+ax+b=0 \quad \cdots\cdots\cdots①$$

の2解を α，β とすると

$$\alpha+\beta=-a, \quad \alpha\beta=b \quad \cdots\cdots\cdots②$$

←解と係数の関係より。

ここで②より

$$\left(\alpha+\frac{1}{\beta}\right)+\left(\beta+\frac{1}{\alpha}\right)=\alpha+\beta+\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=-a+\frac{-a}{b}$$

$$\left(\alpha+\frac{1}{\beta}\right)\left(\beta+\frac{1}{\alpha}\right)=\alpha\beta+2+\frac{1}{\alpha\beta}=b+2+\frac{1}{b}$$

したがって，$\alpha+\dfrac{1}{\beta}$，$\beta+\dfrac{1}{\alpha}$　を2解とする2次方程式は

$$x^2-\left(-a+\frac{-a}{b}\right)x+b+2+\frac{1}{b}=0$$

よって　$x^2+\left(a+\dfrac{a}{b}\right)x+b+2+\dfrac{1}{b}=0 \quad \cdots\cdots\cdots③$

③と①が一致することから，x^2 の係数が1に注意して

←同値 $\Longleftrightarrow$ 係数の比が一定。

$$a+\frac{a}{b}=a \quad \cdots\cdots\cdots④, \quad b+2+\frac{1}{b}=b \quad \cdots\cdots\cdots⑤$$

④より　$\dfrac{a}{b}=0$　すなわち　$a=0$

⑤より　$2+\dfrac{1}{b}=0$　すなわち　$b=-\dfrac{1}{2}$

ゆえに　$\boldsymbol{a=0,\ b=-\dfrac{1}{2}}$

POINT

- **2数 α，β を2解とする2次方程式は　$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$**　と書けます。
- **2つの2次方程式　$ax^2+bx+c=0$ と $a'x^2+b'x+c'=0$ が同値であるとは**

$a=a'$，$b=b'$，$c=c'$　ではなく　$\dfrac{a'}{a}=\dfrac{b'}{b}=\dfrac{c'}{c}$ **(係数の比が一定)**

となることに注意しましょう。

解がわかれば，逆に，その解をもつ2次方程式がつくれますね。では，問題練習です。

トレーニング

16 x に関する2次方程式　$x^2+ax+b=0$　があります。この方程式の一方の解の逆数と他方の解との和は2通り考えられますが，それらを2つの解とする2次方程式を作ると，もとと同値な2次方程式になります。a，b の値を求めなさい。

17 $2x^2+3x+5=0$ の2つの解を α，β とするとき，$\dfrac{1-\alpha}{1+\beta}$，$\dfrac{1-\beta}{1+\alpha}$ を2つの解とする2次方程式を求めなさい。ただし，x^2 の係数は1とします。

18 $x^2-x-2=0$ の2つの解を α，β とするとき，$\dfrac{\beta^2}{\alpha-1}$，$\dfrac{\alpha^2}{\beta-1}$ を2つの解とする x の2次方程式を求めなさい。ただし，x^2 の係数は1とします。

19 $2x^2+6x+1=0$ の2つの解を α，β とするとき，$1+\dfrac{\beta^2}{\alpha^2}$，$1+\dfrac{\alpha^2}{\beta^2}$ を2つの解とする2次方程式を求めなさい。ただし，x^2 の係数は1とします。

20 $x^2-x+1=0$ の2つの解を α，β とするとき，次の問いに答えなさい。

(1) $\dfrac{\beta}{\alpha}$，$\dfrac{\alpha}{\beta}$ を2つの解とする2次方程式を求めなさい。ただし，x^2 の係数は1とします。

(2) (1)の方程式は α^2，β^2 を解にもつことを示しなさい。

次の問題は，２次方程式の解の範囲を問う問題です。よくあるタイプの問題です。

例題 25 　　**２次方程式の解と数の大小**

$x^2-2(a-4)x+2a=0$ が２より大きい相異なる実数解をもつための a の条件を求めなさい。

考え方　２より大きい相異なる２つの実数解をもつ条件は，２つの解を α，β とすると，

$D>0$，$(\alpha-2)+(\beta-2)>0$，$(\alpha-2)(\beta-2)>0$

となります。

解　答　与えられた方程式が相異なる２つの実数解をもつことから，判別式 $D>0$

よって　$\dfrac{D}{4}=(a-4)^2-2a=a^2-10a+16=(a-2)(a-8)>0$

ゆえに　$a<2$，$8<a$　………①

また，２つの解を α，β とすると，ともに２より大きいことから

$(\alpha-2)+(\beta-2)>0$　かつ　$(\alpha-2)(\beta-2)>0$

ゆえに　$\alpha+\beta-4>0$　………②

および　$\alpha\beta-2(\alpha+\beta)+4>0$　………③

ここで，解と係数の関係より

$\alpha+\beta=2(a-4)$，　$\alpha\beta=2a$　………④

④を②に代入して　　**←α，β の条件を a の条件におきかえる。**

$2(a-4)-4>0$　よって　$a>6$　………⑤

④を③に代入して

$2a-4(a-4)+4>0$

よって　$-2a+20>0$　より　$a<10$　………⑥

したがって，①，⑤，⑥より，求める a の条件は

$\boldsymbol{8<a<10}$

POINT　◆ $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq0)$ の実数解 α，β について

① **α，β がともに k より大となる条件は**

$D\geqq0$，　$(\alpha-k)+(\beta-k)>0$，　$(\alpha-k)(\beta-k)>0$

② **α，β がともに k より小となる条件は**

$D\geqq0$，　$(\alpha-k)+(\beta-k)<0$，　$(\alpha-k)(\beta-k)>0$

③ **$\alpha<k<\beta$ となる条件は**

$(\alpha-k)(\beta-k)<0$

これらの条件と，解と係数の関係を利用して解いていきます。

２つの解がともにある数よりも大きくなる，小さくなる，ある範囲にある，という条件はすぐに書けなくてはいけません。トレーニングで練習しましょう。

トレーニング

21 $x^2-2(a-4)x+2a=0$ が2より大きい相異なる実数解をもつための a の条件を求めなさい。

22 2次方程式 $(p-1)x^2+(p-1)x-p-1=0$ の2つの解が，ともに2より小さくなるような p の値を求めなさい。

23 x の方程式 $2kx^2+(3k-1)x+k=0$ の実数解がともに -3 より大きくなるための k の値の範囲を求めなさい。ただし $k<0$ とします。

24 x の方程式 $x^2+4ax+5a-1=0$ の2つの解がともに -1 と1の間にあるような，a の値の範囲を求めなさい。

25 x の方程式 $ax^2+(a-1)x+a+2=0$ の1つの解だけが -1 と1の間にあるような，a の値の範囲を求めなさい。

きょうは，方程式の解ということで，おもに，2次方程式を学習してきました。全部できましたね。このつぎは，高次方程式の学習です。

第 7 日	方程式・不等式　　学習日　月　日 **高次方程式**

きょうは，3次・4次といった高次方程式について学習します。高次方程式の解き方，3次方程式の解と係数の関係などを扱っていきます。

まずは，因数分解，因数定理を利用した高次方程式の解き方から始めましょう。

例題 26 ―― **高次方程式の解法**

次の方程式を解きなさい。

(1) $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+15=0$　　(2) $x^4-3x^3+14x-12=0$

考え方 (1)では，$(x+1)(x+7)=x^2+8x+7$，$(x+3)(x+5)=x^2+8x+15$ となることから $x^2+8x=A$ と考えると，$(A+7)(A+15)+15=0$ となり，左辺を A についての2次式として因数分解できます。(2)では，$f(x)=x^4-3x^3+14x-12$ とおいて，定数項 -12 の約数 α の中から，$f(\alpha)=0$ となるものをみつけると，$x-\alpha$ を因数にもちます。

解答 (1) $\{(x+1)(x+7)\}\{(x+3)(x+5)\}+15=0$

$\{(x^2+8x)+7\}\{(x^2+8x)+15\}+15=0$

$(x^2+8x)^2+22(x^2+8x)+120=0$　　**←x^2+8x について整理**

$(x^2+8x+12)(x^2+8x+10)=0$　　**←$A^2+22A+120=(A+12)(A+10)$**

$(x+2)(x+6)(x^2+8x+10)=0$

したがって，　$\boldsymbol{x=-2,\ -6,\ -4\pm\sqrt{6}}$　　**←$x^2+8x+10=0$ には解の公式を利用**

(2) $f(x)=x^4-3x^3+14x-12$ とおくと

$f(1)=0,\ f(-2)=0$　　**←-12 の約数 α の中で $f(\alpha)=0$ となるもの**

よって

$f(x)=(x-1)(x+2)(x^2-4x+6)$　　**←因数定理より $x-1$，$x+2$ が因数**

したがって，$f(x)=0$ の解は

$\boldsymbol{x=1,\ -2,\ 2\pm\sqrt{2}i}$

POINT

◆ 高次方程式は，因数分解して，2次以下の整式 A，B，C の積で $ABC=0$ とし，

$A=0$ または $B=0$ または $C=0$

を解きます。

◆ 因数定理を利用して高次式 $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ を因数分解するときは，次のような α の中で $f(\alpha)=0$ をみたすものをみつけると $x-\alpha$ を因数にもちます。

$$\alpha=\frac{e\text{ の約数}}{a\text{ の約数}}\quad\leftarrow\frac{\text{定数項の約数}}{\text{最高次の係数の約数}}$$

では，トレーニングです。

トレーニング

1 次の方程式を解きなさい。

(1) $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+15=0$　　(2) $x^4-3x^3+14x-12=0$

2 次の方程式を解きなさい。

(1) $(x-1)(x+2)(x-4)(x+8)+20x^2=0$

(2) $x^4+5x^2+9=0$

3 次の方程式を解きなさい。

(1) $(2x^2-3x)^2+12x=8x^2+5$

(2) $(x^2-x)^2=x^2+4x+4$

4 次の方程式を解きなさい。

(1) $x^3+3x^2-17x+6=0$

(2) $4x^4+8x^3-7x^2-11x+6=0$

5 次の方程式を解きなさい。

(1) $x^5+x^4+x^3+x^2-2x-2=0$

(2) $x^4-x^3-5x^2+15x-18=0$

こんどは，解き方のくふうをしてみましょう。高次方程式の形に注目する例題です。

例題 27 　　　　**相反方程式**

方程式 $6x^4-5x^3-38x^2-5x+6=0$ を解きなさい。

考え方　係数が，まん中の項を中心に左右対称になっていることに着目します。$x=0$ はこの方程式の解になりませんから，両辺を x^2 で割ると，$6x^2-5x-38-\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}=0$ となります。変形すると $6\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-12-5\left(x+\frac{1}{x}\right)-38=0$ という $x+\frac{1}{x}$ についての 2 次方程式になります。

解　答　$x=0$ は，この方程式の解ではない。　　**←$x=0$ のとき，左辺$=6\neq0$**

よって，両辺を x^2 $(\neq0)$ で割ると

$$6x^2-5x-38-\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}=0$$

$$6\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-5\left(x+\frac{1}{x}\right)-38=0$$

←ax^n と $\frac{a}{x^n}$ で組を作る。

$$6\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-5\left(x+\frac{1}{x}\right)-50=0$$

←$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$

$$\left\{3\left(x+\frac{1}{x}\right)-10\right\}\left\{2\left(x+\frac{1}{x}\right)+5\right\}=0$$

$$\left(3x-10+\frac{3}{x}\right)\left(2x+5+\frac{2}{x}\right)=0$$

(i)　$3x-10+\frac{3}{x}=0$ のとき　　$3x^2-10x+3=0$　　**←両辺に x をかける。**

$$(3x-1)(x-3)=0$$

よって　　$x=\frac{1}{3}$，3

(ii)　$2x+5+\frac{2}{x}=0$ のとき　　$2x^2+5x+2=0$

$$(2x+1)(x+2)=0$$

よって　　$x=-\frac{1}{2}$，-2

(i)，(ii)より　　$\boldsymbol{x=\frac{1}{3},\ 3,\ -\frac{1}{2},\ -2}$

POINT

- $6x^4-5x^3-38x^2-5x+6=0$ のように，係数がまん中の項を中心に左右対称になっている方程式を**相反方程式**といいます。
- 3 次，5 次，……など奇数次の相反方程式は，$(\boldsymbol{x+1})\times$(**偶数次の相反方程式**)の形になります。
- 4 次，6 次，……などの偶数次の相反方程式は，両辺を x^2，x^3，……などで割って $\boldsymbol{x+\frac{1}{x}}$ **についての方程式**を導いて解きます。

実際に問題を与えられたときには，相反方程式かどうかを見きわめることが重要です。では，トレーニングしていきましょう。

トレーニング

6 方程式 $6x^4-5x^3-38x^2-5x+6=0$ を解きなさい。

7 方程式 $x^4-5x^3-4x^2-5x+1=0$ を解きなさい。

8 方程式 $4x^4-16x^3+23x^2-16x+4=0$ を解きなさい。

9 方程式 $x^5-6x^4+7x^3+7x^2-6x+1=0$ を解きなさい。

10 方程式 $15x^5+41x^4-24x^3-24x^2+41x+15=0$ を解きなさい。

つぎは，３次方程式の解と係数の関係についての例題です。

例題 28 **3次方程式の解と係数の関係**

3次方程式 $x^3-3x^2-5=0$ の3つの解を α，β，γ とするとき，次の式の値を求めなさい。

(1) $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$ (2) $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3$

考え方 与えられた式は，α，β，γ についての対称式ですから，基本対称式 $\alpha+\beta+\gamma$，$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$，$\alpha\beta\gamma$ だけの式で表すことができます。また，3次方程式の解と係数の関係から，これらの基本対称式の値が求められますから，それを代入して計算します。

解　答 3次方程式の解と係数の関係より

$$\alpha+\beta+\gamma=3,\quad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=0,\quad \alpha\beta\gamma=5$$

(1) 与式 $=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$ **←基本対称式で表す。**

$=3^2-2\cdot0=\mathbf{9}$ **←値を代入して計算する。**

(2) 与式 $=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)$

$+3\alpha\beta\gamma$ **←$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma$ の因数分解の公式を利用**

$=(\alpha+\beta+\gamma)\{(\alpha+\beta+\gamma)^2-3(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\}+3\alpha\beta\gamma$

$=3\cdot(3^2-3\cdot0)+3\cdot5=\mathbf{42}$

POINT ◆ 3次方程式 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ の3つの解を α，β，γ とすると

$$\boxed{\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a},\quad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a},\quad \alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}}$$

2次方程式の場合と似ていますね。では，トレーニングです。

トレーニング

11 3次方程式 $x^3-3x^2-5=0$ の3つの解を α，β，γ とするとき，次の式の値を求めなさい。

(1) $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$ (2) $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3$

12 3次方程式 $2x^3+3x^2+x-2=0$ の3つの解を α, β, γ とするとき，次の式の値を求めなさい。

(1) $(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)$

(2) $\dfrac{\beta\gamma}{\alpha}+\dfrac{\gamma\alpha}{\beta}+\dfrac{\alpha\beta}{\gamma}$

13 $x^3+kx^2+x+1=0$ の解が 1, α, β です。このとき k の値と，解 α, β を求めなさい。

14 $x^3+2px^2-3px-6p^2=0$ の解を α, β, γ とするとき，α, β, γ の関係式を求めなさい。

15 $12x^3-6ax^2+a^2x+12=0$ の実数解が α, β, γ のとき，α, β, γ の値を求めなさい。

つぎは，3次方程式の解と係数の関係を利用する応用問題です。

例題 29 ——— **3次方程式の解と係数の関係の応用**

$x^3+ax+b=0$ の解を α，β，γ とし，$S_n=\alpha^n+\beta^n+\gamma^n$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ とするとき，次の各問いに答えなさい。

(1) n が0または正の整数のとき，$S_{n+3}+aS_{n+1}+bS_n=0$ が成り立つことを証明しなさい。

(2) $\dfrac{\alpha^5+\beta^5+\gamma^5}{5}=\dfrac{\alpha^3+\beta^3+\gamma^3}{3}\cdot\dfrac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{2}$ が成り立つことを証明しなさい。

考え方 (1) α，β，γ は解であるから，$\alpha^3+a\alpha+b=0$，$\beta^3+a\beta+b=0$，$\gamma^3+a\gamma+b=0$ が成り立つことを利用します。(2)は(1)の結果の式で，$n=2$ とおいてみます。

解　答 (1) $S_{n+3}+aS_{n+1}+bS_n$

$=(\alpha^{n+3}+\beta^{n+3}+\gamma^{n+3})+a(\alpha^{n+1}+\beta^{n+1}+\gamma^{n+1})+b(\alpha^n+\beta^n+\gamma^n)$

$=\alpha^n(\alpha^3+a\alpha+b)+\beta^n(\beta^3+a\beta+b)+\gamma^n(\gamma^3+a\gamma+b)$

ここで，α，β，γ は，$x^3+ax+b=0$ の解であるから

$\alpha^3+a\alpha+b=0$，$\beta^3+a\beta+b=0$，$\gamma^3+a\gamma+b=0$

より　$S_{n+3}+aS_{n+1}+bS_n=0$

(2) (1)の結果より

$n=2$ とすると　$S_5+aS_3+bS_2=0$　　**←$n=2$ → 証明する式に近い形になる。**

よって　$\alpha^5+\beta^5+\gamma^5=-a(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3)-b(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)$　………①

また，$n=0$ とすると　$S_3+aS_1+bS_0=0$

よって　$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=-a(\alpha+\beta+\gamma)-3b$　………②

ここで　$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$　………③

また，3次方程式の解と係数の関係より

$$\left.\begin{aligned}&\alpha+\beta+\gamma=0\\&\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=a\\&\alpha\beta\gamma=-b\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots\cdots④$$

が成立するので，④を②，③に代入して

←α，β，γ の関係を a，b の関係におきかえていく。

$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=-3b$　………⑤

$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=-2a$　………⑥

⑤，⑥を①に代入すると

$\alpha^5+\beta^5+\gamma^5=5ab$　………⑦

⑤，⑥，⑦より

$$\frac{\alpha^5+\beta^5+\gamma^5}{5}-\frac{\alpha^3+\beta^3+\gamma^3}{3}\cdot\frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{2}$$

$$=\frac{1}{5}(5ab)-\frac{1}{3}(-3b)\cdot\frac{1}{2}(-2a)=0$$

よって $\dfrac{\alpha^5+\beta^5+\gamma^5}{5}=\dfrac{\alpha^3+\beta^3+\gamma^3}{3}\cdot\dfrac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{2}$ が成立する。

POINT

◆ 3次方程式 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ の3つの解を α, β, γ とすると
$$a\alpha^3+b\alpha^2+c\alpha+d=0,\quad a\beta^3+b\beta^2+c\beta+d=0,\quad a\gamma^3+b\gamma^2+c\gamma+d=0$$

◆ 解と係数の関係より
$$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a},\quad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a},\quad \alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$$

解と係数の関係，式変形が自由にできないといけません。では，練習です。

トレーニング

16 $x^3+ax+b=0$ の解を α, β, γ とし，$S_n=\alpha^n+\beta^n+\gamma^n$ ($n=0$, 1, 2, …) とするとき，次の各問いに答えなさい。

(1) n が0または正の整数のとき，$S_{n+3}+aS_{n+1}+bS_n=0$ が成り立つことを証明しなさい。

(2) $\dfrac{\alpha^5+\beta^5+\gamma^5}{5}=\dfrac{\alpha^3+\beta^3+\gamma^3}{3}\cdot\dfrac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{2}$ が成り立つことを証明しなさい。

17 3次方程式 $x^3-9x^2+26x-a=0$ の1つの解が他の1つの解の2倍になるとき，この方程式の3つの解を求めなさい。 (東京電機大)

18 3次方程式 $2x^3+(a+b)x^2+(a-2b)x+a-2=0$ が3つの実数解 1, α, β をもつとき，次の問いに答えなさい。

(1) a と b の間の関係を求めなさい。

(2) $\alpha<0$, $\beta<0$ で，a が整数であるとき，a, b の値を求めなさい。 (武蔵大)

19 p, q を実数とする x の3次方程式 $x^3+px+q=0$ が3つの解 α, β, $(\alpha+\beta)^2$ をもつとき，次の問いに答えなさい。

(1) $\alpha+\beta$ の値を求めなさい。

(2) $\alpha+\beta\neq 0$ のとき，p と q の間の関係を求めなさい。

きょう最後の例題です。実数を係数とする高次方程式が1つの複素数 $p+qi$ を解にもつとき，それと共役な複素数 $p-qi$ も解となります。これを利用して解く問題です。

例題 30 　　　　**高次方程式の解**

$1-\sqrt{3}i$ は，実数を係数とする3次方程式 $x^3+ax^2+bx+c=0$ の解です。
この3次方程式と2次方程式 $x^2+ax+2=0$ とが1つの解だけを共有するとき，定数 a, b, c の値を求めなさい。

考え方 　$1-\sqrt{3}i$ を解とする2次方程式，3次方程式は，必ずそれと共役な複素数 $1+\sqrt{3}i$ も解とします。ですから，2次方程式と3次方程式が解を1つだけ共有するとき，その共有解は実数です。

解　答 　$x^3+ax^2+bx+c=0$ ………①，$x^2+ax+2=0$ ………②

①は $x=1-\sqrt{3}i$ を解にもつから，$x=1+\sqrt{3}i$ も解にもつ。　　←共役複素数も解

よって，x^3+ax^2+bx+c は $(x-1+\sqrt{3}i)(x-1-\sqrt{3}i)=x^2-2x+4$ で割り切れる。

実際に割ると　商は　$x+(a+2)$ ………③

余りは　$(b+2a)x+(c-4a-8)$

よって　$b+2a=0$，$c-4a-8=0$ ………④

また，①，②は，1つの解だけを共有するから，その共有解は実数で，③より　$x=-(a+2)$ ………⑤　　←①の虚数でない解

⑤を②に代入すると　　←共有解であるから②もみたす。

$$(a+2)^2-a(a+2)+2=0$$

よって　$\boldsymbol{a=-3}$

これを④に代入すると　$\boldsymbol{b=6}$，$\boldsymbol{c=-4}$

POINT
- 実数係数の高次方程式は，$\boldsymbol{p+qi}$ (p, q は実数，$q\neq0$) という解をもつと，それと共役な $\boldsymbol{p-qi}$ も解にもちます。
- 2次方程式と3次方程式は，解を1つだけ共有するとき，その解は**実数**です。

考え方はわかりましたね。では，トレーニングです。

トレーニング

20 $1-\sqrt{3}i$ は，実数を係数とする3次方程式 $x^3+ax^2+bx+c=0$ の解です。
この3次方程式と2次方程式 $x^2+ax+2=0$ とが1つの解だけを共有するとき，定数 a, b, c の値を求めなさい。

21 $1-i$ は，$2x^4-5x^2+10x-2=0$ の解です。残りの解を求めなさい。

22 $x^3+ax^2+x-1=0$ と $x^2+bx-1=0$ が，2つの解を共有するとき，a，b の値を求めなさい。

23 $x^3-px^2+px-p^2=0$ と $x^3-x^2-x+p=0$ $(p>0)$ が，ただ1つの解を共有するとき，p の値を求めなさい。

24 方程式 $2x^3+5px^2+2q(p^2+1)x-p-2q=0$ の解の1つが $1-\sqrt{2}$ のとき,この方程式を求めなさい。ただし，p，q は整数とします。

きょうの学習はこれで終りにします。お疲れさまでした。第8日は，不等式の解法について学習します。

第8日	方程式・不等式　　学習日　月　日 **不等式の解法**

きょうは，不等式の解法を学習します。

とりあげる内容は，絶対値を含む不等式の解法，連立不等式，高次不等式，無理不等式などです。どんどんトレーニングして，不等式の解法を身につけてしまいましょう。

では，さっそく，絶対値を含む不等式の問題からはじめましょう。

例題 31　　　**絶対値記号を含む不等式の解法**

次の不等式を解きなさい。

$|x^2-2x-6|<x+4$

考え方　$|f(x)|<a$ を解くには，$-a<f(x)<a$ を解けばよいことになります。これを利用して，$-(x+4)<x^2-2x-6<x+4$ を解きます。

解　答　与えられた不等式は

$-(x+4)<x^2-2x-6<x+4$

と同じであるから，これを解く。

(i)　$-(x+4)<x^2-2x-6$ より

$x^2-x-2>0$

$(x-2)(x+1)>0$　ゆえに　$x<-1,\ 2<x$　………①

(ii)　$x^2-2x-6<x+4$ より

$x^2-3x-10<0$

$(x-5)(x+2)<0$　ゆえに　$-2<x<5$　………②

①と②を同時にみたす x の範囲は

$\boldsymbol{-2<x<-1,\ 2<x<5}$

別　解　(i)　$x^2-2x-6\geqq 0$ のとき，すなわち　$x\leqq 1-\sqrt{7},\ 1+\sqrt{7}\leqq x$ のとき

与えられた不等式は

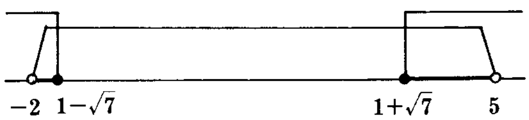
$x^2-2x-6<x+4$

$(x+2)(x-5)<0$

ゆえに　$-2<x<5$

条件より　$-2<x\leqq 1-\sqrt{7}$,

$1+\sqrt{7}\leqq x<5$　………①



(ii)　$x^2-2x-6<0$ のとき，すなわち　$1-\sqrt{7}<x<1+\sqrt{7}$ のとき

与えられた不等式は

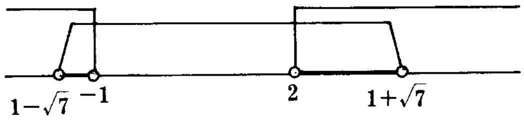
$-(x^2-2x-6)<x+4$

$(x+1)(x-2)>0$

ゆえに　$x<-1,\ 2<x$

条件より　$1-\sqrt{7}<x<-1,$

$2<x<1+\sqrt{7}$　………②



①と②の範囲を合わせて

$\boldsymbol{-2<x<-1,\ 2<x<5}$

POINT ◆ **不等式 $|f(x)|<g(x)$ の解は，$-g(x)<f(x)<g(x)$ の解と一致します。**

解き方はわかりますね。2次不等式の解法は基本です。では，練習しましょう。

トレーニング

1 次の不等式を解きなさい。

$|x^2-2x-6|<x+4$

2 不等式 $x^2-4x+1\geqq 2|x-2|$ を解きなさい。

3 不等式 $|x^2-2x-3|\leqq x+1$ を解きなさい。　（仏教大）

4 不等式 $\left|\dfrac{2x^2-3x+1}{x}\right|<1$ を解きなさい。

5 次の不等式を解きなさい。

$|2x^2-5x+2|>|x-1|-1$

次の例題は連立不等式です。それぞれ別々に解いて，共通範囲を求めます。

例題 32 ──── **連立 2 次不等式**

a を定数とするとき，次の 2 つの不等式を同時にみたす x の値の範囲を求めなさい。

$4(x^2-x)<3$，$x^2-ax+a>x$

考え方　まず，それぞれの不等式を解きます。$x^2-ax+a>x$ のように定数 a を含む不等式は a の値で場合分けして考えます。さらに，2 つの不等式の共通範囲を，a の値と他の解との関係から場合分けします。

解　答　$4(x^2-x)<3$ より　$4x^2-4x-3<0$

$(2x+1)(2x-3)<0$

よって　$-\dfrac{1}{2}<x<\dfrac{3}{2}$　………①

$x^2-ax+a>x$ より　$x^2-(a+1)x+a>0$

$(x-1)(x-a)>0$

$a>1$ のとき　$x>a$，$x<1$

$a=1$ のとき　$x\neq 1$　………②　←$(x-1)^2>0$

$a<1$ のとき　$x>1$，$x<a$

①，②の共通範囲を求めると

$\boldsymbol{a\geqq\dfrac{3}{2}}$ **のとき**　$\boldsymbol{-\dfrac{1}{2}<x<1}$　　$\boldsymbol{1\leqq a<\dfrac{3}{2}}$ **のとき**　$\boldsymbol{a<x<\dfrac{3}{2}}$，$\boldsymbol{-\dfrac{1}{2}<x<1}$

$\boldsymbol{-\dfrac{1}{2}<a<1}$ **のとき**　$\boldsymbol{-\dfrac{1}{2}<x<a}$，$\boldsymbol{1<x<\dfrac{3}{2}}$　　$\boldsymbol{a\leqq-\dfrac{1}{2}}$ **のとき**　$\boldsymbol{1<x<\dfrac{3}{2}}$

POINT

- ◆ $\alpha<\beta$ のとき
  - $(x-\alpha)(x-\beta)>0$ の解は　$x<\alpha$，$\beta<x$
  - $(x-\alpha)(x-\beta)<0$ の解は　$\alpha<x<\beta$
- ◆ 連立不等式の解は，それぞれの不等式の解の**共通部分**です。

定数 a を含む不等式は，a の値で場合分けするのですね。トレーニングで解法を理解しましょう。

トレーニング

6　a を定数とするとき，次の 2 つの不等式を同時にみたす x の値の範囲を求めなさい。

$4(x^2-x)<3$，$x^2-ax+a>x$

7 次の連立不等式を解きなさい。ただし，a は実数の定数とします。

$$\begin{cases} |x-2| \leqq 2 \\ x^2+ax+a-1 \geqq 0 \end{cases}$$

8 次の連立不等式を解きなさい。ただし，a は実数の定数とします。

$$\begin{cases} x < 2a-2 \\ x^2-(a^2+4)x+4a^2 > 0 \end{cases}$$

9 次の不等式をみたす実数 x の値の範囲を求めなさい。ただし，a は正の実数の定数とします。

$$\begin{cases} x^2-6 > x \\ x^2-a^2 > 0 \end{cases}$$

10 次の不等式をみたす実数 x の値の範囲を求めなさい。ただし，a は正の実数の定数とします。

$$x-a < x^2-a^2 \leqq x+a$$

(甲南大)

つぎは，高次不等式の問題です。高次不等式といっても特別むずかしくはありません。まず，例題を解いてみましょう。

例題 33 　　　　高次不等式

次の不等式を解きなさい。

(1)　$x(x^2-5)\geqq 2(x^2-3)$

(2)　$(x-a)(x^3+8)<0$

考え方　(1)　左辺にまとめ，$f(x)$ とおいて，因数定理など利用し，$f(x)$ を因数分解します。

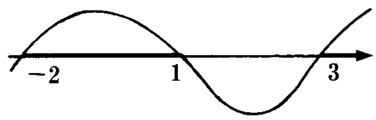
(2)　左辺を因数分解しますが，$x-a$ が含まれているので，場合分けします。

解　答　(1)　左辺に移項して整理すると

$$x^3-2x^2-5x+6\geqq 0$$

$f(x)=x^3-2x^2-5x+6$ とおくと

$$f(1)=f(-2)=f(3)=0$$ ←因数定理の利用。



よって　$(x-1)(x+2)(x-3)\geqq 0$

したがって　$\boldsymbol{-2\leqq x\leqq 1,\ 3\leqq x}$

(2)　左辺を因数分解すると

$$(x-a)(x+2)(x^2-2x+4)<0$$

ここで，$x^2-2x+4=(x-1)^2+3>0$ より

$$(x-a)(x+2)<0$$

(i)　**$a<-2$ のとき　$a<x<-2$**

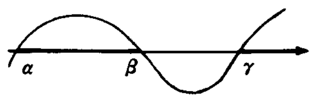
(ii)　**$a=-2$ のとき　解なし**

(iii)　**$a>-2$ のとき　$-2<x<a$**

POINT　◆ **3次不等式 $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)>0$ $(\alpha<\beta<\gamma)$ の解法**

3次関数 $y=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ のグラフを利用すると，早くて正確に解けます。

すなわち，x 軸よりグラフが上側にある x の範囲を求めて　$\alpha<x<\beta$，$\gamma<x$



因数定理によって，因数をすばやくみつけ，グラフを利用して解を求めます。では，トレーニングです。

トレーニング

11　次の不等式を解きなさい。

(1)　$x(x^2-5)\geqq 2(x^2-3)$

(2)　$(x-a)(x^3+8)<0$

12 次の不等式を解きなさい。

(1) $(x+3)(x-2)(x+5)>0$

(2) $x^3+4x^2+x-6<0$

13 次の不等式を解きなさい。

(1) $x(x-1)(x-2)(x-3)<0$

(2) $x^4+4x^3-x^2-16x-12>0$

14 $x^3-8x^2+19x-14$ なる3次式を $f(x)$ とするとき，次の問いに答えなさい。

(1) $f(x)$ を因数分解することにより，$f(x)=0$ の3つの解を求めなさい。

(2) x が $x>2$ なる整数をとるとき，$f(x)<0$ なる不等式の解を求めなさい。

15 次の不等式を解きなさい。

$$(x-2)(x+1)(x-a^2)>0$$

こんどは，2次不等式の解から逆に不等式を決定する例題に取り組みます。

例題 34 ―― **2次不等式の作成**

x についての2次不等式 $ax^2+5x+b>0$ の解が $\dfrac{1}{3}<x<\dfrac{1}{2}$ になるように，実数 a，b の値を定めなさい。

考え方 x^2 の係数が1で，その解が $\dfrac{1}{3}<x<\dfrac{1}{2}$ である x についての2次不等式は $\left(x-\dfrac{1}{3}\right)\left(x-\dfrac{1}{2}\right)<0$ です。この両辺に等しい数をかけた不等式が $ax^2+5x+b>0$ であることから，係数を比較します。ここで，不等号の向きが逆ですから，両辺にかける数は負です。

解　答 $k>0$ とすると $\dfrac{1}{3}<x<\dfrac{1}{2}$ を解とする2次不等式は

$$k\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)<0$$

$$kx^2-\frac{5}{6}kx+\frac{1}{6}k<0$$

両辺に -1 をかけると

$$-kx^2+\frac{5}{6}kx-\frac{1}{6}k>0$$

←**与えられた不等号と向きをそろえる。**

よって，$ax^2+5x+b>0$ と係数を比較すると

$$-k=a,\quad \frac{5}{6}k=5,\quad -\frac{1}{6}k=b$$

したがって　$k=6$，$\boldsymbol{a=-6}$，$\boldsymbol{b=-1}$

これは題意に適する。

POINT

◆ $a>0$ とすると，解の集合の形によって，もとの**2次不等式**は次のように表されます。

$x<\alpha$，$\beta<x$ ………$a(x-\alpha)(x-\beta)>0$

$\alpha<x<\beta$ ………$a(x-\alpha)(x-\beta)<0$

α 以外のすべての実数 ………$a(x-\alpha)^2>0$

$x=\alpha$ ………$a(x-\alpha)^2=0$

不等号の向きに注意して，トレーニングを進めていきましょう。

トレーニング

16 x についての2次不等式 $ax^2+5x+b>0$ の解が $\frac{1}{3}<x<\frac{1}{2}$ になるように，実数 a，b の値を定めなさい。

17 x についての不等式 $ax^2+bx+6<0$ の解が次のようになるとき，定数 a，b の値を定めなさい。

(1) $x<-2$，$3<x$　　(2) $1<x<2$

18 x についての不等式 $px^2-4(2p-1)x+q<0$ が $p<x<3$ を解にもつとき，定数 p，q の値を求めなさい。

19 不等式 $x^2-ax-b<0$ の解が $-6<x<-1$ のとき，不等式 $bx^2-ax-1>0$ の解を求めなさい。

20 不等式 $x^2-7x+10\leqq 0$ ……①，$x^2+px+q<0$ ……②を同時にみたす x の値はなく，①または②をみたす x の値の範囲が $2\leqq x<7$ です。このとき，定数 p，q の値を求めなさい。

不等式を解く問題の最後は，無理不等式の問題です。まず，どんなことに注意しますか。

例題 35 　　**無理不等式**

次の不等式を解きなさい。

$\sqrt{2x+1}>x$

考え方　$\sqrt{2x+1}>x$ を解くには，まず $2x+1\geqq 0$ に注意します。また，右辺が正のときと負のときとに分けます。正のときは，$(\sqrt{2x+1})^2>x^2$ と同じになります。

解　答

$\sqrt{2x+1}>x$ ………①

$2x+1\geqq 0$ より　$x\geqq -\dfrac{1}{2}$ ………②　**←(根号内)≧0**

（ i ）$x<0$ のとき，①はつねに成立しているので，②との共通範囲は

$-\dfrac{1}{2}\leqq x<0$ ………③

（ii）$x\geqq 0$ のとき，①の両辺は正であるから　**←$b>a\geqq 0$ ならば $b^2>a^2$**

$(\sqrt{2x+1})^2>x^2$

$x^2-2x-1<0$

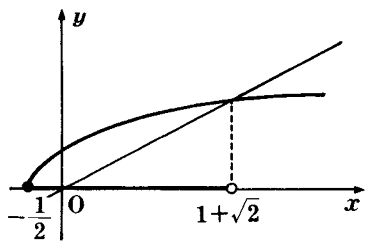
よって　$1-\sqrt{2}<x<1+\sqrt{2}$

条件より　$0\leqq x<1+\sqrt{2}$ ………④

③，④の範囲を合わせて

$$\boldsymbol{-\frac{1}{2}\leqq x<1+\sqrt{2}}$$

別　解　$y=\sqrt{2x+1}$，$y=x$ のグラフは右図のようになる。



交点の x 座標は

$\sqrt{2x+1}=x$

$2x+1=x^2$

$x^2-2x-1=0$　よって　$x=1\pm\sqrt{2}$

右図より，x の範囲は　$\boldsymbol{-\dfrac{1}{2}\leqq x<1+\sqrt{2}}$

POINT　◆ 無理方程式 $\sqrt{f(x)}>g(x)$ の解法

(根号内)≧0 より　$f(x)\geqq 0$ ………①

（ i ）$g(x)<0$ のとき，つねに成立するので，$g(x)<0$ と①の共通範囲を求める。

（ii）$g(x)\geqq 0$ のとき，両辺が正より，$f(x)\geqq\{g(x)\}^2$ を解いて，①との共通範囲を求める。

（ i ）と（ii）の範囲を合わせる。

無理不等式では，根号の中が正でなければならないこと，根号のついた式が正であること（グラフを見ると正であることがわかります）の2点に，注意します。

トレーニング

21 次の不等式を解きなさい。

$$\sqrt{2x+1}>x$$

22 次の不等式を解きなさい。

(1) $\sqrt{7-x}<2x-4$

(2) $\sqrt{3x-4}+\sqrt{x-2}>2\sqrt{x-1}$

23 次の不等式を解きなさい。

(1) $\sqrt{100-x^2}>x+2$

(2) $3-x^2<\sqrt{12-8x}$

24 次の不等式を解きなさい。

$$\sqrt{2(x+3)}>\sqrt{|9-x^2|}$$

25 次の不等式を解きなさい。ただし，$a>0$ とします。

$$\sqrt{a^2-9x^2}>6x-a$$

きょうは，不等式の解法を集中的に学習しました。もう，解けるようになりましたね。このつぎは，不等式の証明問題です。

第 9 日	方程式・不等式　　　学習日　月　日 **不等式の証明**

きょうは，不等式の証明に関するいろいろな問題に取り組みます。はりきって進めていきましょう。

まずは，差をとって不等式を証明する例題から始めます。

例題 36　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　**不等式の証明**

次の不等式を証明しなさい。

(1)　$a \geqq b \geqq c$，$x \geqq y \geqq z$ であるとき　$(a+b+c)(x+y+z) \leqq 3(ax+by+cz)$

(2)　$\sqrt{a}+\sqrt{b} \leqq \sqrt{2(a+b)}$

考え方　(1)　右辺 − 左辺 $\geqq 0$ を示します。

(2)　$(右辺)^2-(左辺)^2 \geqq 0$ から不等式が成り立つことを証明します。

解　答　(1)　右辺 − 左辺

$=3(ax+by+cz)-(a+b+c)(x+y+z)$

$=(2a-b-c)x+(2b-c-a)y+(2c-a-b)z$　　←**x，y，z で整理。**

$=(a-b)x+(a-c)x+(b-c)y+(b-a)y+(c-a)z+(c-b)z$

$=(a-b)(x-y)+(a-c)(x-z)+(b-c)(y-z)$　　………①

ここで，$a \geqq b \geqq c$，$x \geqq y \geqq z$ であるから，①式の各項はすべて正または 0 である。

よって　右辺 − 左辺 $\geqq 0$

したがって　　$(a+b+c)(x+y+z) \leqq 3(ax+by+cz)$

等号が成り立つのは，$a=b=c$ または$x=y=z$ のときに限る。

(2)　$(右辺)^2-(左辺)^2$

$=2(a+b)-(a+b+2\sqrt{ab})$

$=a-2\sqrt{ab}+b$

$=(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geqq 0$

右辺 $\geqq 0$，左辺 $\geqq 0$ より　右辺 − 左辺 $\geqq 0$

したがって　　$\sqrt{a}+\sqrt{b} \leqq \sqrt{2(a+b)}$

等号が成り立つのは，$a=b$ のときに限る。

POINT

◆　不等式 $A>B$ を証明するには，$\boldsymbol{A-B>0}$ を示します。

$A-B$ の符号を調べるのに，次の方法がよく使われます。

①　因数分解して，各因数の符号を調べる。

②　$(実数)^2 \geqq 0$ を利用する。$(実数)^2+(実数)^2+ \cdots\cdots +(実数)^2 \geqq 0$

③　条件を利用する。

◆　$A>0$，$B>0$ のとき　　$\boldsymbol{A>B \Longleftrightarrow A^2-B^2>0}$

左辺と右辺の差をとる，もしくは，２乗したものの差をとる方法は，不等式の証明での基本です。
では，トレーニングしてみましょう。

トレーニング

1 次の不等式を証明しなさい。

(1) $a \geqq b \geqq c$，$x \geqq y \geqq z$ であるとき $(a+b+c)(x+y+z) \leqq 3(ax+by+cz)$

(2) $\sqrt{a}+\sqrt{b} \leqq \sqrt{2(a+b)}$

2 a，b，c，d が正で，$\dfrac{a}{b}<\dfrac{c}{d}$ のとき，次の不等式を証明しなさい。

$$\frac{a}{b}<\frac{2a+3c}{2b+3d}<\frac{c}{d}$$

3 $a^2+\dfrac{1}{a^2} \geqq a+\dfrac{1}{a}$ を証明しなさい。

4 a，b が実数で，$|a|<1$ かつ $|b|<1$ ならば

$$|a+b|+|a-b|<2$$

であることを証明しなさい。

5 次の不等式を証明しなさい。

$$|a|+|b| \leqq 2\sqrt{a^2+b^2} \leqq 2(|a|+|b|)$$

つぎは，不等式の証明でよく見られる問題，相加平均・相乗平均およびシュワルツの不等式を利用する例題です。

例題 37 ―― 相加平均・相乗平均，シュワルツの不等式

次の不等式を証明しなさい。

(1) $x>0$，$y>0$，$z>0$ のとき $\dfrac{yz}{x}+\dfrac{zx}{y}+\dfrac{xy}{z}\geqq x+y+z$

(2) x，y，z が実数で，$x+y+z=1$ のとき $3(x^2+y^2+z^2)\geqq 1$

考え方 (1) 各項がすべて正ですから，相加平均≧相乗平均が使えます。

(2) シュワルツの不等式 $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)\geqq(ax+by+cz)^2$ で，$a=b=c=1$ の場合を考えます。

解　答 (1) $x>0$，$y>0$，$z>0$ より

$$\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}\geqq 2\sqrt{\frac{yz}{x}\cdot\frac{zx}{y}}=2z \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

←相加平均≧相乗平均

$$\frac{zx}{y}+\frac{xy}{z}\geqq 2\sqrt{\frac{zx}{y}\cdot\frac{xy}{z}}=2x \quad \cdots\cdots\cdots ②$$

$$\frac{xy}{z}+\frac{yz}{x}\geqq 2\sqrt{\frac{xy}{z}\cdot\frac{yz}{x}}=2y \quad \cdots\cdots\cdots ③$$

①，②，③より　←①，②，③の左辺どうし，右辺どうしの和

$$2\left(\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}+\frac{xy}{z}\right)\geqq 2(x+y+z)$$

したがって　$\dfrac{yz}{x}+\dfrac{zx}{y}+\dfrac{xy}{z}\geqq x+y+z$

等号が成り立つのは，$x=y=z$ のときに限る。

(2) $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)\geqq(ax+by+cz)^2$ より　←シュワルツの不等式

$$(1^2+1^2+1^2)(x^2+y^2+z^2)\geqq(1\cdot x+1\cdot y+1\cdot z)^2$$

←$a=b=c=1$

$$3(x^2+y^2+z^2)\geqq(x+y+z)^2$$

$x+y+z=1$ より

$$3(x^2+y^2+z^2)\geqq 1$$

等号が成り立つのは，$x=y=z=\dfrac{1}{3}$ のときに限る。

POINT

◆ **相加平均≧相乗平均**

① $a>0$，$b>0$ のとき　$\dfrac{a+b}{2}\geqq\sqrt{ab}$

(2) $a>0$，$b>0$，$c>0$ のとき　$\dfrac{a+b+c}{3}\geqq\sqrt[3]{abc}$

◆ **シュワルツの不等式**　$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)\geqq(ax+by+cz)^2$

問題の形を見て，すぐ利用のしかたがわかるように，トレーニングで練習していきましょう。

トレーニング

6 次の不等式を証明しなさい。

(1) $x>0$，$y>0$，$z>0$ のとき $\dfrac{yz}{x}+\dfrac{zx}{y}+\dfrac{xy}{z} \geqq x+y+z$

(2) x，y，z が実数で，$x+y+z=1$ のとき $3(x^2+y^2+z^2) \geqq 1$

7 a，b，c が正の数のとき，次の不等式を証明しなさい。

(1) $\left(\dfrac{b}{a}+\dfrac{c}{b}\right)\left(\dfrac{c}{b}+\dfrac{a}{c}\right)\left(\dfrac{a}{c}+\dfrac{b}{a}\right) \geqq 8$

(2) $a\left(\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)+b\left(\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{a}\right)+c\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right) \geqq 6$

8 $(a^2+b^2+c^2)\left(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}\right) \geqq 9$ を証明しなさい。

9 a，b，c が正の数のとき，次の不等式を証明しなさい。

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geqq \frac{2}{a+b}+\frac{2}{b+c}+\frac{2}{c+a}$$

10 $a+b+c=2$ のとき，次の不等式を証明しなさい。

$$a^2+b^2+c^2 \geqq \frac{4}{3}$$

つぎは，不等式の証明の応用として，いろいろなタイプの証明です。

例題 38　　　　**いろいろな不等式の証明**

$0<b<a$ のとき，次の不等式を証明しなさい。

$$\frac{(a-b)^2}{8a}<\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}<\frac{(a-b)^2}{8b}$$

（東京女子大）

考え方　$0<b<a$ ですから，与えられた不等式は

$$\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{8a}<\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2}<\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{8b}$$

すなわち，$\dfrac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{4a}<1<\dfrac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{4b}$ と同値になります。

解　答　（i）

$$P=\frac{(a-b)^2}{8b}-\left(\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}\right)$$
$$=\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{8b}-\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2}$$
$$=\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{8b}\{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-4b\}$$
$$=\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{8b}\{(a-b)+2\sqrt{b}(\sqrt{a}-\sqrt{b})\}$$

←$-3b=-b-2b$

ここで，$0<b<a$ より　$a-b>0$，$\sqrt{a}-\sqrt{b}>0$　であるから　$P>0$

よって　$\dfrac{(a-b)^2}{8b}>\dfrac{a+b}{2}-\sqrt{ab}$

（ii）

$$Q=\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}-\frac{(a-b)^2}{8a}$$
$$=\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2}-\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{8a}$$
$$=\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{8a}\{4a-(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2\}$$
$$=\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{8a}\{2\sqrt{a}(\sqrt{a}-\sqrt{b})+(a-b)\}$$

←$3a=2a+a$

ここで，$0<b<a$ より　$\sqrt{a}-\sqrt{b}>0$，$a-b>0$　であるから　$Q>0$

よって　$\dfrac{a+b}{2}-\sqrt{ab}>\dfrac{(a-b)^2}{8a}$

（i），（ii）より　$\dfrac{(a-b)^2}{8a}<\dfrac{a+b}{2}-\sqrt{ab}<\dfrac{(a-b)^2}{8b}$

POINT

◆ **$0<b<a$ のとき，$a-b>0$，$\sqrt{a}-\sqrt{b}>0$** の両方が成立します。

◆ **$a-b=(\sqrt{a})^2-(\sqrt{b})^2=(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})$**

$\dfrac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\dfrac{1}{2}\{(\sqrt{a})^2-2\sqrt{a}\sqrt{b}+(\sqrt{b})^2\}=\dfrac{1}{2}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2$

となることも大切な変形です。

すこし，くふうして解いています。いろいろな問題にあたって，解法を練習することです。

トレーニング

11 $0<b<a$ のとき，次の不等式を証明しなさい。

$$\frac{(a-b)^2}{8a}<\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}<\frac{(a-b)^2}{8b}$$

（東京女子大）

12 $a>b$，$c>d$，$a+b>0$，$c+d>0$ のとき，$ac>bd$ であることを証明しなさい。

13 $|a|<1$，$|b|<1$，$|c|<1$ のとき，次の不等式を証明しなさい。

(1) $ab+1>a+b$

(2) $abc+2>a+b+c$

14 $a+b+c\geqq 0$，$bc+ca+ab=1$ のとき，次の不等式を証明しなさい。

$$a+b+c\geqq\sqrt{3}$$

15 a，b，c は $a<b<c$，$a+b+c=0$ を満足する実数とします。このとき，次の不等式が成り立つことを証明しなさい。

$$\frac{1}{2}\leqq\frac{a^2+b^2+c^2}{(c-a)^2}<\frac{2}{3}$$

（お茶の水女大）

つぎは，式の大小関係を調べる例題です。

例題 39 　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　**大小比較**

$a>b>c>d>0$ のとき，次の5つの数 x，y，z，p，q の大小関係を調べなさい。

$x=ab+cd$，$y=ac+bd$，$z=ad+bc$，$p=\dfrac{a^2+b^2+c^2+d^2}{2}$，$q=2\sqrt{abcd}$

考え方　$a>b>c>d>0$ をみたすように，たとえば $a=4$，$b=3$，$c=2$，$d=1$ ときめます。すると $x=14$，$y=11$，$z=10$，$p=15$，$q=4\sqrt{6}\fallingdotseq 9.8$ となり，$p>x>y>z>q$ と見当がつきますから，$p-x>0$，$x-y>0$，$y-z>0$，$z-q>0$ を証明します。

解　答

$$p-x=\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2+d^2)-(ab+cd)$$

$$=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(c-d)^2\}>0$$

$$x-y=ab+cd-ac-bd=(a-d)(b-c)>0$$

$$y-z=ac+bd-ad-bc=(a-b)(c-d)>0$$

$$z-q=ad+bc-2\sqrt{abcd}=(\sqrt{ad}-\sqrt{bc})^2\geqq 0$$ ←**等号が成立**

したがって　　$\boldsymbol{p>x>y>z\geqq q}$

等号が成り立つのは，$\boldsymbol{ad=bc}$ のときに限る。

注　意　見当をつけるところは，答える必要ありません。

POINT　◆ 多くの**数の大小を調べる**には，次の順にします。

① 条件をみたす具体的な値を使って，大小の見当をつけます。

② 見当をつけた大小が正しいことを，必要最小な個数の不等式で証明します。

では，トレーニングに進みましょう。例題をもう一度確認することから始めます。

トレーニング

16 $a>b>c>d>0$ のとき，次の5つの数 x，y，z，p，q の大小関係を調べなさい。

$x=ab+cd$，$y=ac+bd$，$z=ad+bc$，$p=\dfrac{a^2+b^2+c^2+d^2}{2}$，$q=2\sqrt{abcd}$

17 a，b が異なる正の数のとき，次の式の大小を調べなさい。

a^5+b^5，$a^3b^2+a^2b^3$

18 a, b, cを正の数とするとき，次の式の大小を調べなさい。

$$\frac{a+b+c}{3},\ \sqrt[3]{abc},\ \frac{\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}}{3}$$

19 実数a, b, cの間に，$b+c=6+6a+3a^2$, $c-b=4+4a+a^2$が成り立つとき，a, b, cの大小を定めなさい。

20 $a>0$, $b=\dfrac{1}{2}\left(a+\dfrac{1}{a}\right)$, $c=\dfrac{1}{2}\left(b+\dfrac{1}{b}\right)$のとき，$a$, b, cの大小を調べなさい。

きょう最後の例題は，背理法を扱った命題と論証の問題です。

例題 40 　　　　　　**命題と論理**

2次関数 $f(x)=x^2+ax+b$ が $x=1,\ 2,\ 3$ でとる値の絶対値

$$|f(1)|,\ |f(2)|,\ |f(3)|$$

の中で，少なくとも1つの値は，$\frac{1}{2}$ より小さくないことを証明しなさい。ただし，a，b は定数とします。 （早稲田大）

考え方 〝少なくとも1つは $\frac{1}{2}$ より小さくない〟ことを，直接証明するのはむずかしいので，背理法を使います。命題を否定して〝3つとも $\frac{1}{2}$ より小さい〟と仮定すると，矛盾することを導きます。

解　答

$$|f(1)|=|1+a+b|<\frac{1}{2} \quad \cdots\cdots\text{①}$$

$$|f(2)|=|4+2a+b|<\frac{1}{2} \quad \cdots\cdots\text{②}$$

$$|f(3)|=|9+3a+b|<\frac{1}{2} \quad \cdots\cdots\text{③}$$

と仮定する。 ←**命題を否定する。**

①より　$-1<2(1+a+b)<1$ ………④

②より　$-1<2(4+2a+b)<1$ ………⑤

③より　$-1<2(9+3a+b)<1$ ………⑥

⑤より　$-2<-4(4+2a+b)<2$ ………⑦

④+⑥+⑦より ←**辺々を加える。**

$$-4<4<4$$

となって不合理である。 ←**矛盾を示す。**

したがって，$|f(1)|$，$|f(2)|$，$|f(3)|$ の中で，少なくとも1つは $\frac{1}{2}$ より小さくない。

POINT

◆ 命題 $p \Longrightarrow q$ を直接証明するのがむずかしいときは，**対偶法**や**背理法**を利用します。

① 対偶法……対偶 $\overline{q} \Longrightarrow \overline{p}$ を証明する。

② 背理法……命題の否定“p であって，q でないものがある”と**仮定すると矛盾する**ことを示す。

トレーニングでまず，もう一度例題の問題に取り組み，考え方をつかんでおきましょう。

トレーニング

21 2次関数 $f(x)=x^2+ax+b$ が $x=1,\ 2,\ 3$ でとる値の絶対値

$$|f(1)|,\ |f(2)|,\ |f(3)|$$

の中で，少なくとも1つの値は，$\dfrac{1}{2}$ より小さくないことを証明しなさい。ただし，a，b は定数とします。　（早稲田大）

22 $ab<1$ ならば a，b の少なくとも一方は1より小さいことを証明しなさい。

23 a，b が正の数で，$ab \geqq 1+a+b$ が成り立つとき，

$$a+b \geqq 2(1+\sqrt{2})$$

であることを示しなさい。　（福井大）

24 x，y，z が正の数で，$(x+y)(x-y)=z^2$ ならば，$x+y>z$ であることを証明しなさい。

25 a，b，c，d はすべて正の数で，$ax^3-bx^2+cx-d=0$ の解がすべて実数であるとき，次の不等式が成り立つことを証明しなさい。

$$bc \geqq 9ad$$

きょうは，不等式の証明について学習してきました。これで，終わりです。お疲れさまでした。第10日は，演習問題日です。

第 10 日	方程式・不等式　　学習日　月　日
	演習問題

きょうは，第6日から第9日まで学習してきた，方程式と不等式についての，問題練習をします。

全部で10題です。力だめしのつもりで取り組みましょう。

1 x，y についての連立方程式

$$\begin{cases} (a-3)x-2y=2a \\ 3x+(2a+1)y=-a-2 \end{cases}$$

が解をもたないように，a の値を定めなさい。

2 $x^2+ax+bc=0$ および $x^2+bx+ca=0$ が，ただ1つの共通解をもつとき，その共通でない2つの解は，$x^2+cx+ab=0$ の解であることを証明しなさい。ただし，$c \neq 0$ とします。

3 次の $\boxed{}$ にあてはまる数を求めなさい。ただし，$\boxed{}$ にあてはまる数は負でないものとします。

3 つの方程式

(1) $x^3+x+5p=0$　(2) $x^3+x^2+qx-3p^2=0$　(3) $x^2-2x+q=0$

において，p，q は実数で，$p>0$ とします。

もし，(1)，(2)，(3)のすべてに共通の解が存在するならば，$p=\boxed{(ア)}$，$q=\boxed{(イ)}$ であり，その解以外の(1)の解は，$\boxed{(ウ)}\pm\boxed{(エ)}\,i$ です。　（東京大）

4 2 次方程式 $x^2+2kx+2k^2-1=0$ が少なくとも 1 つの正の解をもつように k の値の範囲を定めなさい。

5 次の方程式を解きなさい。

(1) $2x^4-5x^3+x^2-5x+2=0$

(2) $x^5+2x^4-3x^3-3x^2+2x+1=0$

6 方程式 $\sqrt{1-x^2}=1-ax$ を解きなさい。

7 次の不等式を解きなさい。

(1) $x^2-x-5>|2x-1|$　　(2) $x^3-22x^2+75|x|-54<0$

8 実数 x に関する次の3つの不等式について，次の各問いに答えなさい。(ただし，$a>0$)

$x(3x-a)<0$ ………①　　$(x-1)(x-2)<0$ ………②

$x(9x-a^2)<0$ ………③

(1) ①または②の少なくとも一方を成立させる x の範囲を求めなさい。

(2) ③を成立させるすべての x について①または②が成立するとき，a の範囲を求めなさい。

(北海道大)

9 $\dfrac{x}{1+x}-\dfrac{y}{1-y}=\dfrac{x-y}{1+x-y}$（ただし，$xy \neq 0$）のとき，次の式の値を求めなさい。

(1) $x-y$　　　(2) $(1+x)(1-y)+y^2-2y$　　　（早稲田大）

10 次の等式が x についての恒等式となるように，定数 a_0，a_1，a_2，a_3，a_4 の値を定めなさい。

$$(x+1)^4=a_0+a_1x+a_2x(x-1)+a_3x(x-1)(x-2)+a_4x(x-1)(x-2)(x-3)$$

（兵庫医科大）

これで，演習問題はおわりです。最後までよくがんばりました。解けなかった問題があったら，解答をよく見て，かならず解けるようにしておきましょう。

関　数

数と式，方程式・不等式が終わって，数学Ｉも半分ちかく終わりました。ここまでで，式の扱いについては，かなり力がついているはずです。
ここからは，関数についての学習にはいります。ここでとりあげている関数は，２次関数，分数関数，無理関数といった基本的な関数です。これらのうちでは，やはり，２次関数が基本です。２次関数の最大・最小，２次関数のグラフと解について，完全にしておきましょう。

第 11 日	関　数　　　　学習日　　月　　日
	2次関数

きょうから，関数について学習します。関数では，とくに2次関数が重点です。2次関数のグラフが正しくかけることはもちろんのこと，その性質も十分理解しておく必要があります。

まず，2次関数以外の関数のグラフをかく問題からはじめましょう。

例題 41　　　　　　　　　　　　関数とグラフ

$$f(x)=\begin{cases} 2x & \left(x<\dfrac{1}{2}\right) \\ 2-2x & \left(x\geqq\dfrac{1}{2}\right) \end{cases}$$ とするとき，次の問いに答えなさい。

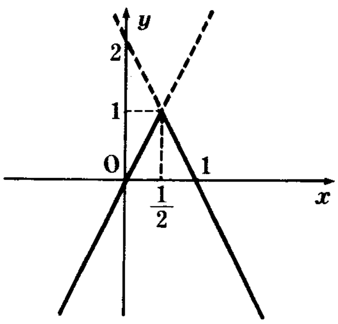
(1)　$y=f(x)$ のグラフをかきなさい。

(2)　$y=\dfrac{3}{2}x$ と，$y=f(x)$ との交点を求めなさい。

考え方　$y=2x\left(x<\dfrac{1}{2}\right)$ のグラフは，直線 $y=2x$ のうちの $x<\dfrac{1}{2}$ に対応する部分です。

$y=2x\left(x<\dfrac{1}{2}\right)$ と，$y=\dfrac{3}{2}x$ の交点の座標は，$y=2x$ と $y=\dfrac{3}{2}x$ を連立方程式として解き，$x<\dfrac{1}{2}$ をみたすものを求めます。

解　答　(1)　図のようになる。



(2)　$y=2x$　　　　………①

$y=2-2x$　　　　………②

$y=\dfrac{3}{2}x$　　　　………③

とおく。

(i)　$x<\dfrac{1}{2}$ のとき　　………④

①，③から　$2x=\dfrac{3}{2}x$　　$x=0$

これは④をみたしている。

$x=0$ を①に代入すると　　$y=0$

よって，求める交点の座標は　　(0，0)

(ii)　$x\geqq\dfrac{1}{2}$ のとき　　………⑤

②，③から　$2-2x=\dfrac{3}{2}x$　　$x=\dfrac{4}{7}$

これは⑤をみたしている。

$x=\frac{4}{7}$ を③に代入すると　　$y=\frac{6}{7}$

よって，求める交点の座標は　　$\left(\frac{4}{7},\ \frac{6}{7}\right)$

POINT
◆　1次関数のグラフは直線になります。変域に制限がつくときは，それに対応する部分になります。
◆　**2つの直線の交点の座標は，2つの直線の方程式を連立方程式として解いた解で求められます。**

変域が分かれているときは，変域ごとに，絶対値がついているときは場合分けをして，かいていきます。では，グラフをかいてみましょう。

トレーニング

1　$f(x)=\begin{cases} 2x & \left(x<\frac{1}{2}\right) \\ 2-2x & \left(x\geqq\frac{1}{2}\right) \end{cases}$　とするとき，次の問いに答えなさい。

(1)　$y=f(x)$ のグラフをかきなさい。

(2)　$y=\frac{3}{2}x$ と，$y=f(x)$ との交点を求めなさい。

2　$f(x)=\begin{cases} 2x+7 & (x<-1) \\ -x+4 & (x\geqq-1) \end{cases}$　とするとき，次の問いに答えなさい。

(1)　関数 $y=f(x)$ のグラフをかきなさい。

(2)　関数 $y=f(x)$ と関数 $y=-\frac{1}{2}x+2$ のグラフの交点の座標を求めなさい。

3　関数 $y=|x+3|-2\ (-6<x\leqq2)$ のグラフをかいて，最大値と最小値を求めなさい。

4　x を越えない最大の整数を $[x]$ という記号で表すとき，次の関数 $f(x)$ のグラフをかきなさい。ただし，$-3\leqq x\leqq3$ とします。

(1)　$f(x)=[x]$　　　　(2)　$f(x)=x-[x]$

ガウス記号を含む関数のグラフもかけましたね。つぎは，通る点や頂点の座標から 2 次関数を決める問題です。

例題 42 **2 次関数の決定**

2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフは，2 点 $(-1,\ 0)$，$(2,\ 15)$ を通り，かつ $y=7x-1$ に接するといいます。$y=ax^2+bx+c$ の頂点の座標を求めなさい。ただし，a は整数とします。

考え方 まず，係数 a，b，c を決めてから，それを変形して頂点の座標を求めます。

グラフが点 $(-1,\ 0)$ を通るとは，$y=ax^2+bx+c$ で，$x=-1$ のとき，$y=0$ ということです。また，$y=ax^2+bx+c$ と $y=7x-1$ が接するとき，これらから y を消去した方程式 $ax^2+bx+c=7x-1$ の判別式が 0 になります。

解 答 $y=ax^2+bx+c$ ………①，$y=7x-1$ ………②とおく。

①のグラフが 2 点 $(-1,\ 0)$，$(2,\ 15)$ を通ることから

$a-b+c=0$ ………③ **←$(-1,\ 0)$ を通る。**

$4a+2b+c=15$ ………④ **←$(2,\ 15)$ を通る。**

直線②が放物線①に接することから，①，②から y を消去した方程式

$ax^2+(b-7)x+c+1=0$

の判別式を D とおくと

$D=(b-7)^2-4a(c+1)=0$ ………⑤ **←接する $\rightleftarrows$ 判別式$=0$**

③，④より　$b=5-a$，$c=5-2a$ **←③，④，⑤を連立方程式として解く。**

これらを⑤に代入すると

$9a^2-20a+4=0$

$(a-2)(9a-2)=0$

a は整数であるから　　$a=2$

よって　$b=3$，$c=1$

したがって，①の頂点の座標は

$$y=2x^2+3x+1=2\left(x+\frac{3}{4}\right)^2-\frac{1}{8}$$

より　$\left(-\dfrac{3}{4},\ -\dfrac{1}{8}\right)$

POINT

- **$y=f(x)$ のグラフが，点 $(a,\ b)$ を通る $\Longleftrightarrow$ $b=f(a)$**
- 放物線 $y=ax^2+bx+c$ と直線 $y=mx+n$ **が接するとき，**方程式
  $ax^2+bx+c=mx+n$
  の判別式を D とおくと，$\boldsymbol{D=0}$
- 放物線 $y=ax^2+bx+c=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{b^2-4ac}{4a}$ で
  軸は直線 $\boldsymbol{x=-\dfrac{b}{2a}}$，頂点は点 $\boldsymbol{\left(-\dfrac{b}{2a},\ -\dfrac{b^2-4ac}{4a}\right)}$

このような 2 次関数の決定問題は，関数の基本です。軸や頂点，また 2 次関数の概形はしっかりとおさえておくことです。では，トレーニングしなさい。

トレーニング

5 2次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフは，2点 $(-1,\ 0)$，$(2,\ 15)$ を通り，かつ $y=7x-1$ に接するといいます。$y=ax^2+bx+c$ の頂点の座標を求めなさい。ただし，a は整数とします。

6 関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフは，放物線 $y=-x^2+4x+3$ を平行移動したもので，2点 $(-3,\ 3)$，$(1,\ -1)$ を通るといいます。定数 a，b，c の値を求めなさい。

7 頂点が点 $(3,\ -4)$ で，点 $(5,\ 4)$ を通る放物線の式を求めなさい。

8 放物線 $y=ax^2+bx+c$ は，3点 $(-4,\ -5)$，$(-2,\ 7)$，$(-1,\ 4)$ を通るといいます。この放物線の頂点の座標を求めなさい。

9 放物線 $y=-x^2-2x-9$ と接し，2点 $(-3,\ 0)$，$(1,\ 0)$ を通る放物線の頂点の座標を求めなさい。

こんどは，放物線が通る条件が与えられている問題です。

例題 43 **グラフの位置条件**

放物線 $y=x^2+px+q$ について，

(1) 第1象限と第2象限だけを通る条件を求めなさい。

(2) x 軸の正の部分と2点で交わる条件を求めなさい。

(3) すべての象限を通る条件を求めなさい。

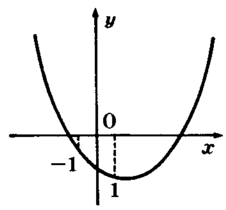
(4) x 座標が1より大きい点と，-1 より小さい点の2点で x 軸と交わる条件を求めなさい。

考え方 (1) 第1象限と第2象限だけを通る条件は，与えられた $y=x^2+px+q$ のグラフが下に凸ですから，x 軸と交わらなければよいことになります。

(2) 方程式 $x^2+px+q=0$ が異なる正の2つの解をもつ条件と同じです。

(3) グラフが下に凸ですから，y 切片が負であればすべての象限を通ります。

(4) $x=1$，$x=-1$ のときの y 座標がともに負であればよいことになります。



解　答 (1) グラフが下に凸であるから，x 軸と交わらない条件を求めればよい。

x^2 の係数が1であるから　$\boldsymbol{p^2-4q<0}$　　←判別式<0

(2) $y=f(x)=x^2+px+q=\left(x+\dfrac{p}{2}\right)^2+q-\dfrac{p^2}{4}$

グラフが x 軸の正の部分と2点で交わる条件は

(判別式)>0，(軸)>0，$f(0)>0$

である。よって

$$p^2-4q>0,\ -\frac{p}{2}>0,\ f(0)>0$$

すなわち　$\boldsymbol{p^2-4q>0,\ p<0,\ q>0}$

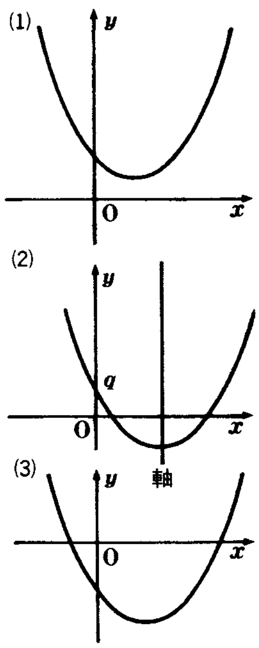
(3) グラフが下に凸であるから，y 切片が負である条件を求めればよい。

x^2 の係数が1であるから　$\boldsymbol{q<0}$

(4) $y=f(x)=x^2+px+q$ のグラフが下に凸であるから，$f(1)<0$，$f(-1)<0$ である条件を求めればよい。

$$f(1)=1+p+q<0$$
$$f(-1)=1-p+q<0$$

よって　$\boldsymbol{q<-p-1,\ q<p-1}$



POINT ◆ $y=f(x)=x^2+px+q$ が x 軸の正の部分と2点で交わる条件は

(判別式)>0，(軸)>0，$f(0)>0$から　　$p^2-4q>0$，$-\dfrac{p}{2}>0$，$f(0)=q>0$

となります。

グラフがどのようになっているのかを考えて解いていきましょう。

トレーニング

10 放物線 $y=x^2+px+q$ について，

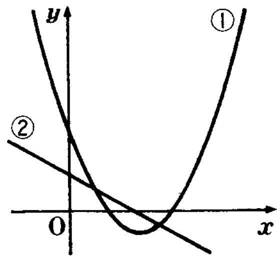
(1) 第1象限と第2象限だけを通る条件を求めなさい。

(2) x 軸の正の部分と2点で交わる条件を求めなさい。

(3) すべての象限を通る条件を求めなさい。

(4) x 座標が1より大きい点と，-1 より小さい点の2点で x 軸と交わる条件を求めなさい。

11 関数 $y=x^2+ax+b$ ……①，$y=px+q$ ……②のグラフが右の図のように与えられています。このとき，次の問いに答えなさい。



(1) a，b，p，q，a^2-4b の符号をいいなさい。

(2) $(a-p)^2>4(b-q)$ であることを示しなさい。

(3) $a<p$ であることを示しなさい。

12 放物線 $y=ax^2+bx+c$ について，次の条件を求めなさい。ただし，座標軸上の点はどの象限にも属さないものとします。

(1) 第1，第2，第4象限を通り，第3象限を通らない。

(2) 第2象限を通らない。

(3) x 座標が1より大きい2点で，x 軸と交わる。

13 放物線 $y=ax^2+bx+c$ の $0\leqq x\leqq 3$ の部分が，3点 O$(0,\ 0)$，P$(1,\ 1)$，Q$(3,\ 0)$ を頂点とする三角形の外に出ないための，a，b，c の条件を求めなさい。

こんどは，与えられた放物線が定点を通るという問題です。

例題 44 　　**放物線と定数係数**

放物線 $y=ax^2+(5a+6)x+(4a+8)$ は，定数 a の値にかかわらず，つねに2定点を通ります。この定点の座標を求めなさい。

考え方　与えられた方程式を a について整理すると $(x^2+5x+4)a+6x+8-y=0$ です。これが a の値にかかわらず成り立つことから，$x^2+5x+4=0$，$6x+8-y=0$ を連立方程式として解きます。

解　答　$(x^2+5x+4)a+6x+8-y=0$　　**←a について整理**

これが a の値にかかわらず成り立つことから

$$\begin{cases} x^2+5x+4=0 & \textbf{←}a\textbf{ の係数=0} \\ 6x+8-y=0 & \textbf{←定数項=0} \end{cases}$$

をみたす $(x,\ y)$ が，求める定点の座標である。

これを解くと

$x=-1,\ y=2$　または　$x=-4,\ y=-16$

したがって，求める2定点の座標は

$\boldsymbol{(-1,\ 2),\ (-4,\ -16)}$

POINT　◆ 定数 a を係数に含む x についての関数 y で，**a の値にかかわらず，つねに通る定点の座標を求めるには**，a について整理して

$\boldsymbol{F(x,\ y)a+G(x,\ y)=0}$

とし，$\begin{cases} \boldsymbol{F(x,\ y)=0} \\ \boldsymbol{G(x,\ y)=0} \end{cases}$ の連立方程式を解きます。

定点を通るというときは，係数について整理してみます。また，接しているときは接する条件を求めることになります。では，問題を解いてみましょう。

トレーニング

14 放物線 $y=ax^2+(5a+6)x+(4a+8)$ は，定数 a の値にかかわらず，つねに2定点を通ります。この定点の座標を求めなさい。

15 放物線 $y=ax^2+(2a+3)x+(a-6)$ は，定数 a の値にかかわらず，つねに1定点を通ります。この定点の座標を求めなさい。

16 放物線 $y=mx^2-2mx+m+1$ は，定数 m の値にかかわらず，つねにある1直線と接します。この直線の式を求めなさい。

17 放物線 $y=2x^2-4(m+2)x+m^2-3$ の頂点は，定数 m の値にかかわらず，つねにある放物線上にあります。この放物線の式を求めなさい。

18 放物線 $y=-2x^2+4px-p^2-2p$ が，定数 p の値にかかわらず，つねに放物線 $y=ax^2+bx+c$ と接するとき，定数 a，b，c の値を求めなさい。

つぎは，きょうの最後の例題です。放物線が通過する範囲についての問題です。

例題 45 ―― 放物線の頂点の軌跡

点 P$(p,\ q)$ が 3 直線 $x=1$，$y=0$，$y=x+1$ によってできる三角形の周上を 1 周するとき，放物線 $y=x^2-2px+q$ の頂点はどのような線上を動きますか。

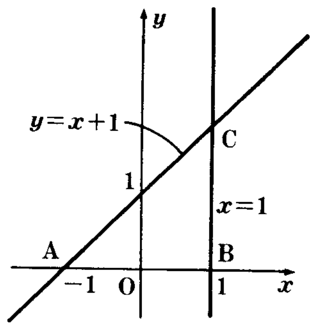
考え方　まず，放物線 $y=x^2-2px+q$ の頂点の座標を $(x,\ y)$ とし，x，y をそれぞれ p，q で表します。つぎに，点 P$(p,\ q)$ が 3 直線で囲まれた三角形の周上にある条件を p，q で表します。そして，この両方の条件から p，q を消去し，x，y についての関係を導きます。

解　答　放物線 $y=x^2-2px+q=(x-p)^2-p^2+q$
の頂点の座標を $(x,\ y)$ とすると

$x=p$，$y=-p^2+q$　………①

また，3 直線 $x=1$，$y=0$，$y=x+1$ の交点は

A$(-1,\ 0)$，B$(1,\ 0)$，C$(1,\ 2)$



よって

（ i ）　P が AB 上にあるとき

$-1 \leqq p \leqq 1$，$q=0$

これと①から

$y=-x^2$ $(-1 \leqq x \leqq 1)$

（ ii ）　P が BC 上にあるとき

$p=1$，$0 \leqq q \leqq 2$

これと①から

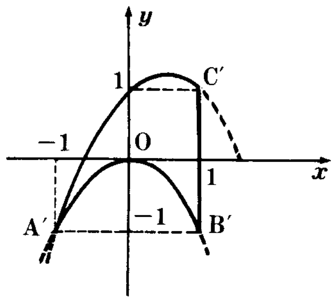
$x=1$ $(-1 \leqq y \leqq 1)$

（iii）　P が AC 上にあるとき

$-1 \leqq p \leqq 1$，$q=p+1$

これと①から

$y=-x^2+x+1$ $(-1 \leqq x \leqq 1)$



よって，点 P が A → B → C → A の順に動くとき，
放物線の頂点は，図に示した線上を A′ → B′ → C′ → A′ の順に動く。

POINT
- ◆ **点 $(x,\ y)$ の x 座標，y 座標が，p，q でそれぞれ表されるとき，x，y の関係式を求めるには，p，q を消去します。**
- ◆ 点 $(p,\ q)$ が，線分 $ax+by+c=0$，$k \leqq x \leqq l$ 上にあるとは，x を p，y を q で置き換えると成り立つということです。

「必要でない文字は消去する」と，覚えておきましょう。この方法は有効です。例題をきちんと解いてから，以下のトレーニングをしましょう。

トレーニング

19 点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ が3直線 $x=1$, $y=0$, $y=x+1$ によってできる三角形の周上を1周するとき，放物線 $y=x^2-2px+q$ の頂点はどのような線上を動きますか。

20 4点 $\mathrm{A}(0,\ 1)$, $\mathrm{B}(-1,\ 0)$, $\mathrm{C}(0,\ -1)$, $\mathrm{D}(1,\ 0)$ を頂点とする正方形の4辺 AB, BC, CD, DA 上を，点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ が1周するとき，放物線 $y=-x^2-2ax+b$ の頂点はどのような線上を動きますか。

21 点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ が放物線 $y=2x^2+2x-3$ 上にあるとき，放物線 $y=x^2+2px+q$ の頂点がえがく図形の方程式を求めなさい。

22 放物線 $y=x^2-2(a-1)x+2a(a-3)$ において，定数 a が変化するとき，この放物線の頂点がえがく図形の方程式を求めなさい。

23 直線 $y=2x-3$ と接する放物線 $y=x^2+ax+b$ の頂点が描く図形の方程式を求めなさい。

きょうは，2次関数を重点にとりあげて練習しました。とくに，頂点や軸など，2次関数の図形的なことがらは，非常に大切ですから，完全に理解しておきましょう。

第 12 日	関　数　　　　学習日　　月　　日 **最大・最小**

きょうは，関数の最大・最小についての問題を練習することにしましょう。最大・最小の問題には，関数についてのいろいろな内容が含まれています。個々の解法を十分に理解して，完全にしておきましょう。

はじめは，変域がついているときの2次関数の最大・最小です。

例題 46　　　　**区間における2次関数の最大・最小**

$y=-x^2+4x-3$ について，$0\leqq x\leqq t$ における最大値と最小値を求めなさい。

考え方　$y=-(x-2)^2+1$ と変形して，この関数のグラフの頂点の位置を確かめます。

そして，この頂点の x 座標が変域内にあるかどうか，また，それが変域の中の中央より左か右か，ちょうど中央かに場合分けして考えます。そして，変域の端点 $x=0$，t における関数値を比べます。

解　答　$y=f(x)$ とおくと　$f(x)=-(x-2)^2+1$　　**←基本変形**

$f(0)=-3$，$f(t)=-t^2+4t-3$，$f(2)=1$　　**←変域の端の点の関数値**

$f(0)-f(t)=t(t-4)$

(i)　$0<t<2$ のとき　　**←頂点の x 座標を含まない。**

この関数のグラフの頂点は，変域の外にある。

また，$f(0)-f(t)<0$

よって

$x=t$ のとき　最大値 $-t^2+4t-3$，$x=0$ のとき　最小値 -3

(ii)　$2\leqq t<4$ のとき　　**←頂点の x 座標は変域内の右側**

$f(0)-f(t)<0$

よって

$x=2$ のとき，最大値 1，$x=0$ のとき　最小値 -3

(iii)　$t=4$ のとき　　**←頂点の x 座標は変域の中央**

$f(0)-f(t)=0$

よって

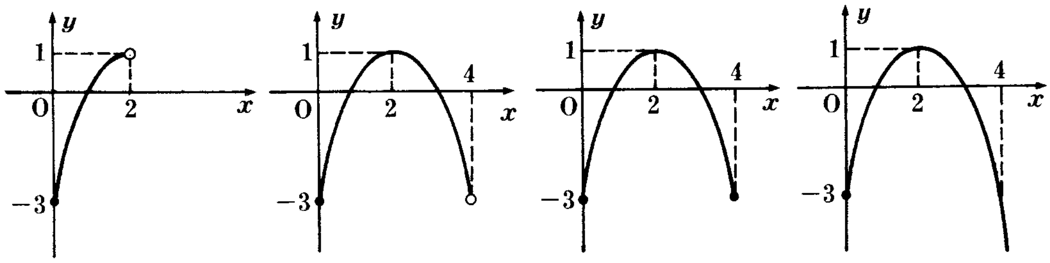
$x=2$ のとき　最大値 1，$x=0$，4 のとき　最小値 -3

(iv)　$4<t$ のとき　　**←頂点の x 座標は変域内の左側**

$f(0)-f(t)>0$

よって

$x=2$ のとき　最大値 1，$x=t$ のとき　最小値 $-t^2+4t-3$



POINT ◆ 変域に制限のある2次関数の最大値・最小値を求めるには，この関数のグラフを考えて

① **頂点の x 座標が変域内にあるかどうかを調べます。**

② **ない場合**……変域の端点の関数値を求めて比べます。

ある場合……頂点の y 座標と変域の端点の関数値を求めて比べます。

この例題では，変域に文字tがはいっていますから，tの値で場合分けして，求めます。最大値・最小値では，変域の端の点，頂点の座標に目をつけます。

トレーニング

1 $y=-x^2+4x-3$ について，$0 \leqq x \leqq t$ における最大値と最小値を求めなさい。

2 関数 $y=-2x^2+4x-3$ について，次の変域における y の最大値と最小値を求めなさい。

(1) $-3 \leqq x \leqq 3$　　(2) $0 \leqq x \leqq 2$

3 次のような x についての関数について，y の最大値と最小値を求めなさい。

(1) $y=-x^2+6x-5$ $(x \geqq 0)$　　(2) $y=x^2-x+3$ $(2<x \leqq 4)$

4 x についての2次関数 $y=-(x-a)^2+4$ の変域が $0 \leqq x \leqq 4$ のとき，y の最大値と最小値を求めなさい。

5 放物線 $y=-x^2+2x+3$ 上に3点 A(0, 3), B(3, 0), C(p, q)をとり，点Cは2点A, Bの間にあるものとします。このとき，四角形AOBCの面積の最大値を求めなさい。

トレーニングはできましたね。めんどうでも，きちんと場合分けしなくてはいけません。つぎは2次式の最大・最小でよくある問題です。

例題47 **条件つき2変数の最大・最小**

x，y が実数で，$x^2+4y^2=1$ のとき，$x+5y^2$ の最大値・最小値を求めなさい。

考え方 $x^2+4y^2=1$ を，y^2 について解きます。そして，それを $x+5y^2$ に代入して x だけの式にします。また，x，y が実数で，$y^2 \geqq 0$ であることから x の変域を求めます。そしてその変域での最大値と最小値を求めます。

解　答 $x^2+4y^2=1$ より　$y^2=\dfrac{1-x^2}{4}$ ………①

x，y は実数であるから　$1-x^2 \geqq 0$　　**←$y^2 \geqq 0$ から**

よって　$-1 \leqq x \leqq 1$ ………②　　**←x の変域**

$f(x)=x+5y^2$ とおくと，①より　　**←y を消去**

$$f(x)=x+5\cdot\frac{1-x^2}{4}=-\frac{5}{4}\left(x-\frac{2}{5}\right)^2+\frac{29}{20}$$

$$f(-1)=-1,\ f(1)=1,\ f\left(\frac{2}{5}\right)=\frac{29}{20}$$

これと②より

$x=\dfrac{2}{5}$，$y=\pm\dfrac{\sqrt{21}}{10}$ のとき　最大値 $\dfrac{29}{20}$　　**←y の値は①から計算**

$x=-1$，$y=0$ のとき　最小値 -1

POINT

- ◆ 2変数の最大・最小問題で，条件が与えられているときには，**条件から1つの変数を消去**します。
- ◆ 条件は変数を1つ消去するために使われますが，その代わりに，**残された変数の変域に制限をつけます。**

与えられた条件から，変域を決めるところをわすれないようにしましょう。では，トレーニングです。

トレーニング

6 x，y が実数で，$x^2+4y^2=1$ のとき，$x+5y^2$ の最大値・最小値を求めなさい。

7 実数 x，y が $x^2+y^2=4$ を満たすとき，$2x-y^2$ の最大値と最小値を求めなさい。

8 x，y が実数で，$x^2-2x+2y^2=0$ のとき，$2x^2-3x+2y^2$ の最大値と最小値を求めなさい。

9 x についての2次方程式 $ax^2+2ax+2a-1=0$ が実数解をもつとき，$-a^2+a+1$ の最大値と最小値を求めなさい。

10 x についての2次関数 $y=x^2-ax+a$ の最小値 m を求めなさい。また，m の最大値 M を求めなさい。

できましたね。つぎは，変域が固定されていて，2次関数のほうに不定係数がある場合の最大・最小です。

例題 48 ―― 2次関数の不定係数と最大・最小

a を0でない実数の定数とする。2次関数

$$f(x)=ax^2-2x+a$$

の $0\leqq x\leqq 1$ における最小値を求めなさい。

考え方　$a\neq 0$ ですから

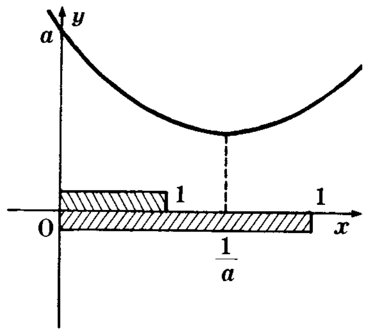
$$ax^2-2x+a=a\left(x-\frac{1}{a}\right)^2+a-\frac{1}{a}$$

$a>0$ と，$a<0$ とで分類し，グラフの凹凸と，頂点の位置で，最小値をとる x の値を場合分けして考えます。

解　答　$a\neq 0$ より　$f(x)=ax^2-2x+a=a\left(x-\dfrac{1}{a}\right)^2+a-\dfrac{1}{a}$

(i)　$a>0$ のときグラフは下に凸であるから

区間の端点の $x=1$ と，軸の $x=\dfrac{1}{a}$ の位置関係から場合分けして，



(ア)　$1<\dfrac{1}{a}$ のときすなわち，$0<a<1$ のとき

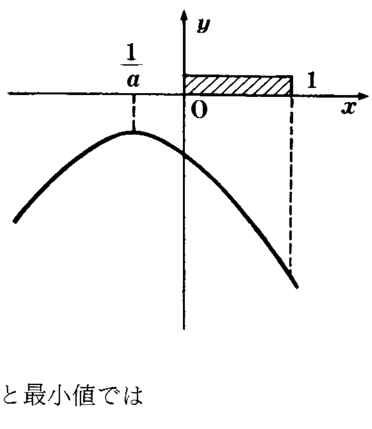
$x=1$ で最小値 $f(1)=a-2+a=2a-2$ をとる。

(イ)　$\dfrac{1}{a}\leqq 1$ のときすなわち，$1\leqq a$ のとき

$x=\dfrac{1}{a}$ で最小値 $f\left(\dfrac{1}{a}\right)=a-\dfrac{1}{a}$ をとる。

(ii)　$a<0$ のときグラフは上に凸で，しかも軸が y 軸より左側にあるので

$x=1$ のとき最小値 $f(1)=2a-2$ をとる



(i)，(ii)より

$a<1$ ($a\neq 0$) のとき　(最小値) $=2a-2$

$a\geqq 1$ のとき　(最小値) $=a-\dfrac{1}{a}$

POINT　◆　2次関数 $f(x)=ax^2+bx+c$ の区間 $\alpha\leqq x\leqq\beta$ における最大値と最小値では

(頂点の値)，$f(\alpha)$ の値，$f(\beta)$ の値

が最大値，最小値になる可能性があるものです。これらの値を比較して最大値，最小値を求めます。

頂点の値や，端の点での値に注目して，最大値，最小値を決めます。トレーニングでたしかめておきましょう。

トレーニング

11 a を0でない実数の定数とする。2次関数

$$f(x)=ax^2-2x+a$$

の $0\leqq x\leqq 1$ における最小値を求めなさい。

12 a が実数のとき，x の2次関数 $f(x)=x^2+ax+a^2$ の $-1\leqq x\leqq 0$ における最大値と最小値を求めなさい。

13 $f(x)=x^2-2kx+5k-6$ について，次の問いに答えなさい。

(1) $0\leqq x\leqq 5$ における最小値を求めなさい。

(2) $0\leqq x\leqq 5$ において，つねに $f(x)>0$ が成り立つ k の値の範囲を求めなさい。

14 x を変数とする関数を $f(x)=(a+1)x^2-2x+1$ とします。$0\leqq x\leqq 1$ の範囲でのこの関数の最小値 $m(a)$ を求めこのグラフを書きなさい。 (早稲田大)

つぎは，2次式を別の文字に置き換えて解く問題です。複2次式のような形の式をとりあげましょう。

例題 49 **おきかえによる2次関数の最大・最小**

x についての関数 $f(x)=a(x^2+2x+2)^2+2a(x^2+2x+2)+b$ が最小値6をもち，$f(0)=11$ です。このとき，定数 a，b の値と，最小値をとるときの x の値を求めなさい。

考え方 $x^2+2x+2=X$ とおくと，X の2次関数になることに着目します。ここで，$X=(x+1)^2+1\geqq 1$ より，$X\geqq 1$ という変域になることに注意します。

解答 $X=x^2+2x+2$ とおくと

$X=(x+1)^2+1$ より　$X\geqq 1$

この範囲で，$g(X)=aX^2+2aX+b=a(X+1)^2-a+b$ を考える。

$a=0$ とすると，$g(X)=b$ で，定数関数になり，条件に合わない。

よって　$a\neq 0$

$f(0)=11$ より　$g(2)=11$　　**←$x=0$ のとき　$X=0^2+2\cdot 0+2=2$**

よって　$8a+b=11$　………①

$X\geqq 1$ の範囲で，$g(X)$ は

$a<0$ のとき　最小値はない。

$a>0$ のとき　$X=1$ のとき　最小値 $3a+b$

最小値が6であることから　$a>0$ で　$3a+b=6$　………②

①，②より　$\boldsymbol{a=1,\ b=3}$

これは $a>0$ をみたす。

また，$X=1$ のとき　$(x+1)^2+1=1$ より　$x=-1$

よって，**最小値をとるときの x の値は　-1**

注　意 $g(X)$ は，6と11という少なくとも2つの関数値をもつので定数関数ではありません。

POINT ◆ x の4次関数で，くふうして X の2次関数に変形できる場合がありますが，**x の変域と X の変域は必ずしも等しくありません。**

たとえば，上の問題で，x の変域はすべての実数ですが，X の変域は $X\geqq 1$ です。

この制限された変域を利用して最小値を求めます。

4次式や，この例題の式のように同じ形の式があるときは，置き換えをして次数を下げて解いていきます。では，トレーニングをしましょう。

トレーニング

15 x についての関数 $f(x)=a(x^2+2x+2)^2+2a(x^2+2x+2)+b$ が最小値 6 をもち，$f(0)=11$ です。このとき，定数 a，b の値と，最小値をとるときの x の値を求めなさい。

16 x がすべての実数値をとって変わるとして，$f(x)=x^4-2ax^2$ の最小値を求めなさい。

17 x がすべての実数値をとって変わるとき，次の関数の最小値を求めなさい。

$$f(x)=(x^2+3x+1)(x^2+3x+2)+3x^2+9x+8$$

（長崎大）

18 x の関数 $f(x)=a(x^2+4x+6)^2+2a(x^2+4x+6)+b$ は最小値 10 をもち，$f(0)=50$ です。このとき，a，b の値と，最小値をとるときの x の値を求めなさい。

19 x の関数 $f(x)=(x^2+2x+b)^2-4(x^2+2x+b)+b-20$ は最小値 21 をもちます。このとき，b の値を求めなさい。

置き換えのしかたもわかりましたね。では，きょう最後の例題は，２変数関数の最大・最小の問題です。

例題 50 　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　**2 変数関数の最大・最小**

$f(x,\ y)=-x^2-2xy+2x+y+1\ (0\leqq x\leqq 2,\ 0\leqq y\leqq 1)$

のとりうる最大値と，そのときの x，y の値を求めなさい。

考え方　$f(x,\ y)$ を x についての２次関数とみなして，平方完成していけばよいのです。

すなわち

$$f(x,\ y)=-x^2-2(y-1)x+y+1$$

として，y を文字扱いしないで平方完成していきます。

解　答　与えられた関数を平方完成して

$$\begin{aligned} f(x,\ y) &= -x^2-2xy+2x+y+1 \quad (0\leqq x\leqq 2,\ 0\leqq y\leqq 1) \\ &= -x^2-2(y-1)x+y+1 \\ &= -\{x+(y-1)\}^2+y+1+(y-1)^2 \\ &= -\{x+(y-1)\}^2+y^2-y+2 \end{aligned}$$

←y を定数とみて平方完成。

ここで，y を$0\leqq y\leqq 1$ における定数と考えると，$0\leqq -(y-1)\leqq 1$

したがって，x の値として $-y+1$ をとることができる。

よって

$x=-y+1$ のとき $f(x,\ y)$ は最大値 y^2-y+2 をとる。　………①

また

$$y^2-y+2=\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}$$

←y について最大･最小を調べる。

これは，$0\leqq y\leqq 1$ では，$y=0$，1 のとき最大値 2 をとる。

したがって，①より $y=0$ のとき $x=1$，$y=1$ のとき $x=0$ であるから

$x=1$，$y=0$ または$x=0$，$y=1$ のとき $f(x,\ y)$ は最大値 2 をとる。

POINT　◆ ２変数関数 $f(x,\ y)=ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c$ の最大・最小は x かy についての一つの文字の式と考え，平方を完成します。そして

$$a(x+my+n)^2+l(y+p)^2+q$$

の形に直して考えます。

１つの文字について整理して，最大・最小を考えるということがわかりました。では，問題を解いてみましょう。

トレーニング

20 $f(x,\ y)=-x^2-2xy+2x+y+1$ $(0 \leqq x \leqq 2,\ 0 \leqq y \leqq 1)$
のとりうる最大値と，そのときの x，y の値を求めなさい。

21 $x+y+z=5$ のとき，$x^2+y^2+z^2$ の最小値を求めなさい。ただし，x，y，z は実数とします。

22 実数 x，y，z の間に，$x+y+z=6$，$z \leqq 1$ の関係があるとき，$x^2+y^2+z^2$ の最小値を求めなさい。

23 x，y を実数とするとき，$x^2-2(y-3)x+(1+b)y^2-12y+1$ の最小値が $-b$ となる b の値を求めなさい。

24 x，y の多項式　$z=10x^2+y^2+6xy+\sqrt{3}x+3$ について，次の問いに答えなさい。

(1) x，y を実数とするとき，z の最小値を求めなさい。

(2) $z \leqq 3$ をみたす整数の組 $(x,\ y)$ をすべて求めなさい。　(四天王寺女大)

きょうは，２次関数の最大・最小を学習しました。ここは，重要なところです。では，これで，終わりにしましょう。

第 13 日	関　数　　　　学習日　　月　　日 **グラフと方程式の解**

きょうは，方程式の解がともに1より大きいとか，解が-1と1の間にあるというような条件を求める問題，グラフの交点に関する問題をとりあげます。

解に関する問題としては，いずれも典型的な問題です。はじめは，2次方程式の2つの解が共に1より大という例題です。

例題 51　　　　**2次方程式の解の分離 (1)**

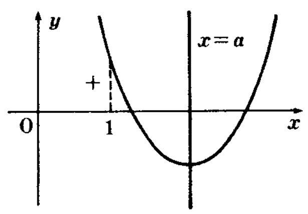
2次関数 $f(x)=x^2-2ax+4$ のグラフを利用して，2次方程式 $x^2-2ax+4=0$ の2つの解が共に1より大となるための a の条件を求めなさい。

考え方　2つの解がともに1より大であることは，放物線 $y=f(x)$ が x 軸と $x=1$ の右側で交わるか接することです。下に凸の放物線だから条件は次の3つです。

(i)　$f(x)=0$ の判別式 $D\geqq 0$

(ii)　軸の位置から　$x=a>1$

(iii)　$f(1)>0$



解　答

$$f(x)=x^2-2ax+4=(x-a)^2+4-a^2$$

より，2次関数 $f(x)$ のグラフは，下に凸の放物線で，軸の方程式は $x=a$ である。よって，2次方程式 $f(x)=0$ の2つの解がともに1より大きくなるためには

(i)　$f(x)=0$ の判別式 $D\geqq 0$ より　　**←実数条件**

$a^2-4\geqq 0$　ゆえに　$a\leqq -2,\ 2\leqq a$　　………①

(ii)　軸の位置>1 より　$a>1$　　………②

(iii)　$f(1)>0$ より　$1-2a+4>0$　よって　$a<\dfrac{5}{2}$　　………③

①，②，③より　$\boldsymbol{2\leqq a<\dfrac{5}{2}}$

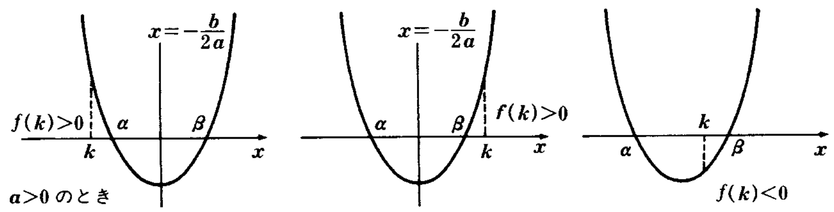
POINT　◆　2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の2つの実数解 α，$\beta(\alpha<\beta)$ と定数 k との大小関係は，2次関数 $y=f(x)=ax^2+bx+c=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{b^2-4ac}{4a}$ のグラフから，次のようになります。

2つの解が k より大 $\Longleftrightarrow$ $D\geqq 0$，$x=-\dfrac{b}{2a}>k$，$af(k)>0$

2つの解が k より小 $\Longleftrightarrow$ $D\geqq 0$，$x=-\dfrac{b}{2a}<k$，$af(k)>0$

1つが k より大，1つが k より小 $\Longleftrightarrow$ $af(k)<0$

(注)　$af(k)>0$ は，$a>0$ のとき $f(k)>0$，$a<0$ のとき $f(k)<0$ の意味。



2次方程式の解が1より大というような問題では，まず，グラフの形をおもいうかべて解いていきます。公式として覚えることはありません。では，トレーニングです。

トレーニング

1 2次関数 $f(x)=x^2-2ax+4$ のグラフを利用して，2次方程式 $x^2-2ax+4=0$ の2つの解が共に1より大となるための a の条件を求めなさい。

2 2次方程式　$x^2+2(a-1)x+7-a=0$ が次のような2つの解をもつように，実数の定数 a の値の範囲を求めなさい。

(1) 2つの解がともに負　　(2) 2つの解が異符号

3 2次方程式　$x^2-2px+4=0$ が次のような2つの解をもつように，実数の定数 p の値の範囲を求めなさい。

(1) 2つの解がともに1より小

(2) 1つの解が1より小で，他の解が1より大

4 x の2次方程式 $(k+1)(x-1)^2+x^2=2$ の2つの解がともに正の数であるために実数 k のとるべき範囲を求めなさい。　(明治大)

5 x の2次方程式 $8x^2+2mx-m^2=0$ の1つの解が1より大であるための実数 m の条件を求めなさい。

グラフの形を想像しながらできましたね。つぎも，2次方程式の解に関する問題です。

例題 52 —— **2次方程式の解の分離 (2)**

x についての2次方程式 $x^2+(4a+1)x+a^2=0$ ……①について，次の条件に適するように実数 a の値の範囲を定めなさい。

(1) ①が区間 $-1<x<1$ に2つの解をもつ。

(2) ①が $x\leqq -1$ と $-1<x<1$ にそれぞれ1つの解をもつ。

考え方　$y=f(x)=x^2+(4a+1)x+a^2$ のグラフが下に凸な放物線であることから

(1)の2つの解がともに $-1<x<1$ の範囲にある条件は

判別式 $D\geqq 0$，軸の位置が $-1<x<1$ の間，$f(-1)>0$　$f(1)>0$

(2)の1つの解が -1 以下で，もう1つの解が $-1<x<1$ の範囲にある条件は

(i) 1つの解が -1 より小，他の解が $-1<x<1$

(ii) 1つの解が -1，他の解が $-1<x<1$

の2つの場合に分けて考えます。

解　答　$f(x)=x^2+(4a+1)x+a^2$ とおく。

(1) $f(x)=0$ の判別式を D とおくと

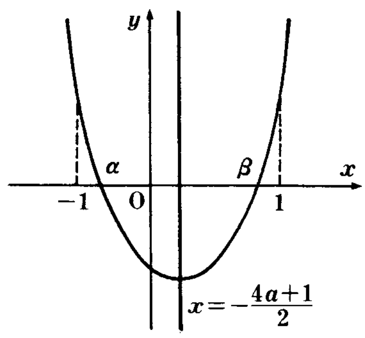
$D=(4a+1)^2-4a^2\geqq 0$ ………①

$y=f(x)$ のグラフの軸の位置から

$-1<-\dfrac{4a+1}{2}<1$ ………②

$f(-1)=1-(4a+1)+a^2>0$ ………③

$f(1)=1+4a+1+a^2>0$ ………④



①，②，③，④より

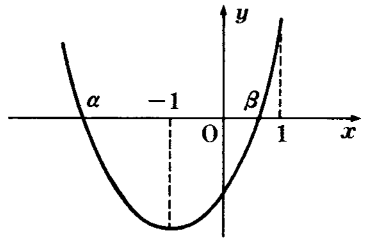
$$\boldsymbol{-2+\sqrt{2}<a\leqq -\frac{1}{2},\quad -\frac{1}{6}\leqq a<0}$$

(2) $x=-1$ を解にもつ，もたないで場合分けする。

(i) 1つの解が -1 より小，他の解が $-1<x<1$ の場合

$f(-1)=1-(4a+1)+a^2<0$ ………①

$f(1)=1+4a+1+a^2>0$ ………②



①，②より　$0<a<4$

(ii) 1つの解が -1，他の解が $-1<x<1$ の場合

$f(-1)=0$ より　$a=0,\ 4$

$a=0$ のとき　$x^2+x=0$ より $x=-1,\ 0$　これは題意に適する。

$a=4$ のとき　$x^2+17x+16=0$ より $x=-1,\ -16$　これは題意に適さない。

(i)，(ii)より　$\boldsymbol{0\leqq a<4}$

POINT　◆ 2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の2つの実数解 α，$\beta(\alpha<\beta)$ について，2次関数 $y=f(x)=ax^2+bx+c=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{b^2-4ac}{4a}$ のグラフで考えると，次のことがわかります。

2つとも $l<x<m$ の値にある $\Longleftrightarrow D \geqq 0,\ l<-\dfrac{b}{2a}<m,$

$af(l)>0,\ af(m)>0$

1つが l よりも小，もう1つが $l<x<m$ の範囲にある

$\Longleftrightarrow af(l)<0,\ af(m)>0$

この例題のほうが，前の例題よりも複雑ですが，解がどうなるかという考え方は変わりません。では，問題を解いてみましょう。

トレーニング

6 x についての2次方程式 $x^2+(4a+1)x+a^2=0$ ……①について，次の条件に適するように実数 a の値の範囲を定めなさい。

(1) ①が区間 $-1<x<1$ に2つの解をもつ。

(2) ①が $x \leqq -1$ と $-1<x<1$ にそれぞれ1つの解をもつ。

7 $f(x)=(1-a)x^2+ax+1$ とするとき，$f(x)=0$ をみたす2つの解がともに0と1との間にあるための実数 a の値の範囲を求めなさい。 (法政大)

8 2次方程式 $x^2-mx+4=0$ の2つの解がそれぞれ $x \leqq -1$，$-1<x<1$ に1つずつ存在するような実数 m の値の範囲を求めなさい。

9 x の2次方程式 $x^2-2ax+6a-5=0$ の2つの実数解が，それぞれ $-2<x<2$，$2 \leqq x$ に1つずつ存在するような実数 a の値の範囲を求めなさい。

10 x に関する2次方程式　$7x^2-(k+13)x+k^2-k-2=0$ の2つの解が，それぞれ $x<1$ および $2<x$ に1つずつあるための k の値の範囲を求めなさい。

解の配置を考えるときの解き方はわかりましたね。こんどは，4次方程式の解についての例題です。

例題 53 　　**異なる4つの実数解をもつ4次方程式**

x についての方程式 $(x^2+ax+b)(x^2+bx+a)=0$ が異なる4つの実数解をもつとき，点 $(a,\ b)$ の存在する範囲を図示しなさい。　(一橋大)

考え方 　$x^2+ax+b=0$ または $x^2+bx+a=0$ で，4つの異なる実数解をもつのですから，それぞれが異なる2つの実数解をもち，しかも共有解をもたない条件を求めます。

解　答 　$(x^2+ax+b)(x^2+bx+a)=0$ が異なる4つの実数解をもつとは，2つの2次方程式

$x^2+ax+b=0$ ………①

$x^2+bx+a=0$ ………②

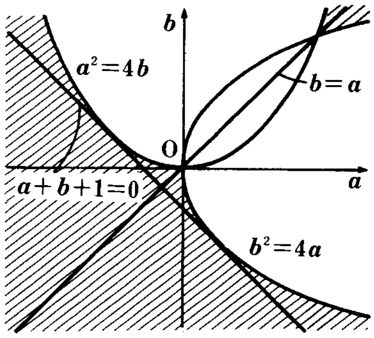
が，それぞれ異なる2つの実数解をもち，しかも，2つの方程式が共通解をもたないことである。

①が異なる2つの実数解をもつことから

$a^2-4b>0$ ………③ 　**←判別式>0**

②が異なる2つの実数解をもつことから

$b^2-4a>0$ ………④



また，①，②が共通解 x をもつとすると

①−②より　$(a-b)(x-1)=0$

ここで，$a=b$ のとき，①，②は一致する。

$x=1$ のとき，①，②は $1+a+b=0$

よって，①，②が共通解をもたない条件は

$a \neq b,\ 1+a+b \neq 0$

したがって，$(a,\ b)$ の存在する範囲は，上の図の斜線部分である。ただし，境界および直線 $b=a$，$a+b+1=0$ 上の点を含まない。

POINT ◆ 次のような特別な4次方程式が，**異なる4つの実数解をもつ条件**は次のようです。

① $(x^2+ax+b)(x^2+cx+d)=0$

$\iff$ **$x^2+ax+b=0$，$x^2+cx+d=0$ が異なる2つの実数解をもち，しかも共有解をもたない。**

② $ax^4+bx^2+c=0$ $\iff$ **$at^2+bt+c=0$ が異なる2つの正の解をもつ。**

異なる実数解をもつ条件，共有解をもたない条件で解きます。これも，判別式の応用ですね。では，トレーニング。

トレーニング

11 x についての方程式 $(x^2+ax+b)(x^2+bx+a)=0$ が異なる 4 つの実数解をもつとき，点 $(a,\ b)$ の存在する範囲を図示しなさい。 (一橋大)

12 x の 4 次方程式 $x^4-2(3a-1)x^2+a(a-2)=0$ が異なる 4 つの実数解をもつとき，実数 a の値の範囲を求めなさい。 (北海道教育大)

13 x の 4 次方程式 $x^4-2(3a+1)x^2+7a^2+3a=0$ が，実数解を 2 つ，虚数解を 2 つもつとき，実数 a の値の範囲を求めなさい。

14 x の 4 次方程式 $x^4+2px^2+p+1=0$ が，絶対値が 1 より大きくない異なる 4 つの実数解をもつとき，実数 p の値の範囲を求めなさい。 (中央大)

15 x の 4 次方程式 $x^4+ax^3-12ax^2+ax+1=0$ が異なる 4 つの実数解をもつとき，実数 a の値の範囲を求めなさい。

4次方程式といっても，結局は2次方程式の問題にして解決していくことがわかりました。つぎは，2次方程式の解について，グラフを利用して証明する問題です。

例題 54 ―― 2次関数のグラフと実数解

x についての2次方程式

$$(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)=0$$

は，$a<b<c$ のとき，つねに実数解をもつことをグラフを利用して証明しなさい。

考え方　$f(x)=(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)$ とおいて，$f(a)$，$f(b)$，$f(c)$ の値の符号を考えます。このときの符号から，$y=f(x)$ のグラフの概形を考えてみましょう。

解　答　$f(x)=(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)$ とおく。

$a<b<c$ より

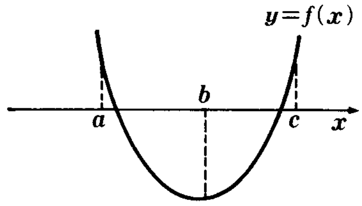
$f(a)=(a-b)(a-c)>0$　　**←$a-b<0$，$a-c<0$ から。**

$f(b)=(b-c)(b-a)<0$　　**←$b-c<0$，$b-a>0$**

$f(c)=(c-a)(c-b)>0$　　**←$c-a>0$，$c-b>0$**

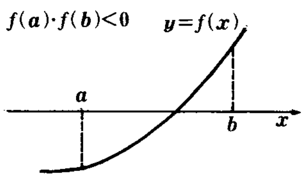
いま，$y=f(x)$ のグラフは，x^2 の係数が3で正であるから下に凸となる。

また，$f(a)>0$，$f(b)<0$，$f(c)>0$ より a と b の間，b と c の間でグラフは x 軸と交わるから，$f(x)=0$ はつねに異なる2つの実数解をもつ。



POINT　◆ $y=f(x)$ が連続で，$f(a)\cdot f(b)<0$ のとき，方程式 $f(x)=0$ は $a<x<b$ で少なくとも1つ実数解をもちます。

$f(a)\cdot f(b)<0$ は $f(a)$ の値と $f(b)$ の値が異符号であるということです。



2点の間に少なくとも1つ実数解をもつ条件など，大切な考え方です。トレーニングをして，解法を理解してしまいましょう。

トレーニング

16　x についての2次方程式

$$(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)=0$$

は，$a<b<c$ のとき，つねに実数解をもつことをグラフを利用して証明しなさい。

17 a, b, c が実数で，$a<c<b$。また，$k \neq 0$ とするとき

$$2\text{次方程式}\quad (x-a)(x-b)+k(x-c)=0$$

は，異なる２つの実数解をもつことを証明しなさい。

18 $a<b<c$ をみたす３つの定数 a, b, c に対して，x に関する方程式

$$2(x-b)(x-c)-(x-a)^2=0$$

の２根 α, $\beta(\alpha<\beta)$ と a, b, c を大小の順に並べなさい。

19 $a \neq 1$, $k \neq 0$ のとき，x についての２次方程式

$$(a-1)x^2+k(a+1)x-a+1=0$$

は，絶対値が１より小さい実数解と，絶対値が１より大きい実数解をもつことを証明しなさい。

20 ２つの方程式

$$x^2-x-a=0 \quad \cdots\cdots\cdots ① \qquad x^2+ax-1=0 \quad \cdots\cdots\cdots ②$$

について，次の(1), (2)を証明しなさい。ただし，$a>0$ とします。

(1) ①, ②はいずれも異なる２つの実数解をもつ。

(2) ②の２つの実数解のうち，ちょうど１つの解だけが①の２つの解の間にある。

できましたね。こんどは，実数解の解の個数を問う問題です。よくある形の問題です。

例題 55　　**方程式の解の個数とグラフ**

方程式 $|x^2-1|-x-k=0$ の実数解の個数は，実数 k の値によってどのように変わるかを調べなさい。ただし，重解は1個と考えることにします。

考え方　$|x^2-1|=x+k$ と変形して，$y=|x^2-1|$ と $y=x+k$ のグラフの交点の個数を調べます。k の値によって変化するのは $y=x+k$ の上下方向ですから，$y=|x^2-1|$ のグラフと接する点や，特別な点を通るときの k の値を境に，交点の個数を調べます。

解　答

$$|x^2-1|=x+k \quad \cdots\cdots\cdots①$$

の実数解の個数は

$$y=|x^2-1| \quad \cdots\cdots\cdots②, \quad y=x+k \quad \cdots\cdots\cdots③$$

のグラフの共有点の個数である。

②を変形すると，次のようになる。

$$y=\begin{cases} x^2-1 & (x \leqq -1,\ 1 \leqq x) \\ -(x^2-1) & (-1<x<1) \end{cases}$$ **←$x^2-1 \geqq 0$ のとき**　**←$x^2-1<0$ のとき**

よって，②と③が接するのは，次の方程式が重解をもつときである。

$-(x^2-1)=x+k$　**←$x \leqq -1,\ 1 \leqq x$ では接点をもたない。(下図参照)**

よって　　$1-4(k-1)=0$　**←判別式=0**

ゆえに　　$k=\dfrac{5}{4}$

また，③が②上の点 $(-1,\ 0)$，$(1,\ 0)$ を通るとき　$k=1,\ -1$

したがって，右のグラフから

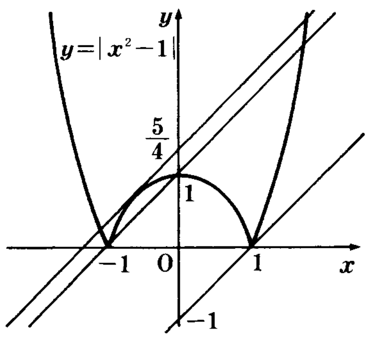
$k<-1$ のとき　0個

$k=-1$ のとき　1個

$-1<k<1,\ \dfrac{5}{4}<k$ のとき　2個

$k=1,\ \dfrac{5}{4}$ のとき　3個

$1<k<\dfrac{5}{4}$ のとき　4個



POINT

◆　方程式 $f(x)=g(x)$ の**実数解の個数は**，$y=f(x)$ のグラフと $y=g(x)$ の**グラフの共有点の個数**です。

◆　放物線 $y=ax^2+bx+c$ と直線 $y=mx+n$ が**接するのは**，方程式 $ax^2+bx+c=mx+n$ の**判別式が0のとき**です。

◆　グラフの共有点の個数を調べるときは，グラフが接するときや，特別な点を通るときを境に調べます。

方程式の解の個数を調べるときは，グラフをかいて調べるのです。グラフの共有点がどうなるかを見ながら解きます。解法としては，典型的なものです。

トレーニング

21 方程式 $|x^2-1|-x-k=0$ の実数解の個数は，実数 k の値によってどのように変わるかを調べなさい。ただし，重解は1個と考えることにします。

22 方程式 $x^2+2|x-k|-1=0$ の実数解の個数は，実数 k の値によってどのように異なるかを調べなさい。

23 方程式 $-|x^2-8x+12|+x+k=0$ の実数解の個数は，実数 k の値によって，どのように変わりますか。 （岡山大）

24 方程式 $x^2-a|x|+1=0$ が3と-3の間に4つの実根をもつ条件を求めなさい。 （関西大）

25 方程式 $|x^2-a|-x+3=0$ の実数解の個数は，実数 a の値の変化によってどう変わりますか。 （新潟大）

グラフの共有点がどうなるかわかりましたね。きょうは，関数のグラフを利用しながら，解の分離，解の個数の求め方などを学習しました。つぎは，分数関数です。

第 14 日	関　数　　　　学習日　　月　　日
	分数関数・無理関数

分数関数・無理関数

きょうは，分数関数と無理関数に関する問題をとりあげます。
分数関数のグラフ，分数不等式の解き方，無理関数と直線との交点，無理関数のグラフがおもな内容です。
はじめは，関数のグラフをかいて，漸近線を求める問題です。

例題 56　　　　漸近線

次の関数のグラフをかき，漸近線の方程式を求めなさい。

$2xy-3x+2y+3=0$

考え方　与えられた式を変形して，$y=q+\dfrac{k}{x-p}$ の形にします。すなわち，$y=\dfrac{3}{2}-\dfrac{3}{x+1}$ の形に変形します。

解　答

$2xy-3x+2y+3=0$　　　　………①

y についてまとめると

$2(x+1)y=3(x-1)$　　**←y を x の関数とみる。**

$x=-1$ とすると $0\cdot y=-6$ となるので，これをみたす y の値はない。

したがって，①は $x=-1$ では成立しない。

ゆえに　$x\neq-1$

したがって

$y=\dfrac{3(x-1)}{2(x+1)}=\dfrac{3}{2}-\dfrac{3}{x+1}$　　　　………②

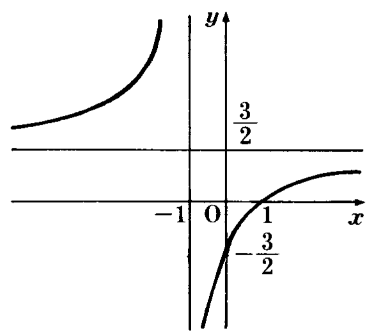
$x=0$ のとき　　$y=-\dfrac{3}{2}$

$y=0$ のとき　　$x=1$

よって，座標軸との交点は $\left(0,\ -\dfrac{3}{2}\right)$，$(1,\ 0)$

漸近線は②より，$\boldsymbol{x=-1}$，$\boldsymbol{y=\dfrac{3}{2}}$ で表される 2 直線。

したがって，グラフは右図のようになる。



POINT　◆　分数関数の漸近線

与えられた分数関数のグラフは，まず $\boldsymbol{y=q+\dfrac{k}{x-p}}$ **の形に変形**します。このとき，**漸近線は，直線 $\boldsymbol{x=p}$，$\boldsymbol{y=q}$** となります。

与えられた式を基本の式になおすこと。基本の式の平行移動を間違えないことが，注意点です。

トレーニング

1 次の関数のグラフをかき，漸近線の方程式を求めなさい。

$$2xy-3x+2y+3=0$$

2 漸近線が，2 直線 $x=2$，$y=-2$ である双曲線で，点 $(3,\ 1)$ を通るものを求めなさい。

3 $y=\dfrac{ax+b}{3x+c}$ のグラフが，点 $(2,\ 7)$ を通り，$x=1$，$y=3$ を漸近線とするとき，定数 a，b，c の値を求めなさい。

4 $y=-\dfrac{3x+1}{x+1}$ のグラフを x 軸方向に a，y 軸方向に b 平行移動すると，$y=\dfrac{x}{x-2}$ になりました。a，b の値を求めなさい。

5 $y=\dfrac{3x+q}{x+p}$ のグラフは，$y=\dfrac{1}{x}$ のグラフを平行移動したものであり，そのグラフが点 $(2,\ 4)$ を通るとき，p，q の値を求めなさい。

できましたね。こんどは，分数不等式の問題をしてみましょう。

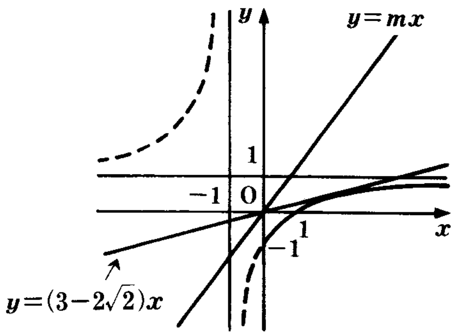
例題 57 ―――― **分数不等式の解法**

$x>0$ をみたすすべての x の値に対して，$mx>\dfrac{x-1}{x+1}$ が成り立つための m の値の範囲を求めなさい。

考え方　$x>0$ の範囲で，直線 $y=mx$ がつねに，分数関数のグラフ $y=\dfrac{x-1}{x+1}$ の上側にあるための m の条件を求めます。

解　答　$y=mx$ ………①

$y=\dfrac{x-1}{x+1}=1+\dfrac{-2}{x+1}$ ………②



①と②のグラフをかくと，右図のようになる。

①の直線が②の曲線に接するときの m の値は

$$mx=\frac{x-1}{x+1}$$

分母をはらって，まとめると

$$mx^2+(m-1)x+1=0$$

$m\neq 0$ ($m=0$ のとき接しない)だから，

判別式 D をとると $D=0$

ゆえに

$$D=(m-1)^2-4m=0$$

$$m^2-6m+1=0$$

したがって　$m=3\pm\sqrt{8}=3\pm 2\sqrt{2}$

$x>0$ で接するのは，　$m=3-2\sqrt{2}$ のときである。

図から，①のグラフが $x>0$ の範囲でつねに②のグラフより上側にあるのは

$$\boldsymbol{m>3-2\sqrt{2}}$$

のときである。

POINT　◆ $f(x)>g(x)$ がつねに成り立つ条件は，**曲線 $y=f(x)$ が，曲線 $y=g(x)$ より上側にある条件を求めればよい**ことになります。

分数不等式は，単純な不等式の問題として解けるもの，グラフを考えて解くものなどがあります。以下のトレーニングではやや応用的なものもとりあげています。

トレーニング

6　$x>0$ をみたすすべての x の値に対して，$mx>\dfrac{x-1}{x+1}$ が成り立つための m の値の範囲を求めなさい。

7 つぎの不等式を解きなさい。

(1) $\dfrac{1}{x-1}>\dfrac{2}{x+2}$　　(2) $\dfrac{x}{x-2}\leqq x+5$

8 つぎの不等式を解きなさい。

$$\frac{(x+1)(x-1)(x+2)}{(x+2)(x^2+x+1)}>0$$

9 不等式 $\dfrac{ax}{3-x}>a-3$ をみたす x の範囲を求めなさい。ただし，a は定数とします。

（三重大）

10 $\dfrac{x-a}{x^2+x+1}>\dfrac{x-b}{x^2-x+1}$ を満足する x の値の範囲が $\dfrac{1}{2}<x<1$ であるためには，a，b の値をどのようにすればよいですか。

つぎは，分数関数の，応用です。

例題 58 —— $x+\dfrac{1}{x}=t$ を利用する関数のグラフの交点

x を正の実数とするとき，

(1) $t=x+\dfrac{1}{x}$ のとりうる値の範囲を求めなさい。

(2) $f(x)=x^2+\dfrac{1}{x^2}-6x-\dfrac{6}{x}+12$ を t で表しなさい。

(3) x に関する方程式 $f(x)=a$ の実数解の個数を求めなさい。ただし，a は実数とします。また，もし重解があれば，その個数は 1 としなさい。

考え方 (1) $x>0$ より (相加平均)≧(相乗平均) の関係から，$x+\dfrac{1}{x}\geqq 2\sqrt{x\cdot\dfrac{1}{x}}$ を利用します。

(2) $x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2$ の利用をはかります。

(3) (2)の $f(x)$ を t で表した関数のグラフと $y=a$ の交点を調べればよいでしょう。

解　答 (1) $x>0$ より

$$t=x+\frac{1}{x}\geqq 2\sqrt{x\cdot\frac{1}{x}}=2$$ ←相加平均≧相乗平均

ゆえに　$\boldsymbol{t\geqq 2}$

(2) $f(x)=x^2+\dfrac{1}{x^2}-6x-\dfrac{6}{x}+12$

$=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2-6\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+12$ ←$x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2$

$=\boldsymbol{t^2-6t+10}$

(3) $t=x+\dfrac{1}{x}$ は，$t<2$ のとき解なしで，$t=2$ のとき1個，$t>2$ のとき 2 個の正の実数解をもつ

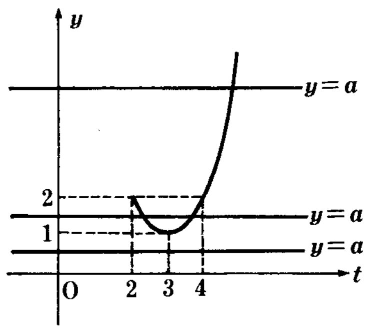
いま，x が正の実数解をもつ $t\geqq 2$ のときについて

$y=t^2-6t+10\ (t\geqq 2)$ ………①

$y=a$ ………②

のグラフの交点の個数を調べる。

①より，$y=(t-3)^2+1$ であるから，①のグラフと $y=a$ のグラフの交点は図のようになる。



$a<1$ のとき　0 個

$a=1$ のとき　1 個 ($t=3$) ←$t=3$ のとき，x は 2 個の解をもつ。

$1<a<2$ のとき　2 個 ($2<t<3$，$3<t<4$) ←各々の交点で x は 2 個。

$a=2$ のとき　2 個 ($t=2$，$t=4$) ←$t=2$ で x は 1 個，$t=4$ で 2 個。

$a>2$ のとき　1 個 ($t>4$)

したがって，$f(x)=a$ の実数解の個数は，①と②のグラフの交点の数と，$t<2$ のとき x の正の実数解の個数が 0 個，$t=2$ で 1 個，$t>2$ で 2 個であることに注意して

$a<1$ のとき 0 個，$a=1$ のとき 2 個，$1<a<2$ のとき 4 個，

$a=2$ のとき 3 個，$a>2$ のとき 2 個

となる。

POINT ◆ 方程式 $f(x)=a$ の実数解の個数を求めるには，2 つのグラフ $y=f(x)$ と $y=a$ の交点の個数を調べます。

与えられた式の形から，例題のように式をおいて，解いていきます。相加・相乗平均の関係も使います。

トレーニング

11 x を正の実数とするとき，

(1) $t=x+\dfrac{1}{x}$ のとりうる値の範囲を求めなさい。

(2) $f(x)=x^2+\dfrac{1}{x^2}-6x-\dfrac{6}{x}+12$ を t で表しなさい。

(3) x に関する方程式 $f(x)=a$ の実数解の個数を求めなさい。ただし，a は実数とします。また，もし重解があれば，その個数は 1 としなさい。

12 x を実数とするとき，次の問いに答えなさい。

(1) $f(x)=x+\dfrac{2}{x}$ の値域を求めなさい。

(2) $f(x)=a$ の実数解の個数を求めなさい。
ただし，a は実数とし，重解はその個数を 1 個とします。

13 x を正の実数とするとき，$f(x)=x^2+\dfrac{1}{x^2}-8x-\dfrac{8}{x}+17$ について，次の問いに答えなさい。

(1) $f(x)$ の値域を求めなさい。

(2) $f(x)=a$ の実数解の個数を求めなさい。ただし，a は実数とし，重解はその個数を 1 個としなさい。

14 $|x|\leqq 1$ のとき，関数 $y=\dfrac{3x+1}{3x-1}$ のとりうる値の範囲を求めなさい。

つぎは，無理関数の問題で，無理関数と直線が交わる条件を考える問題をとりあげます。

例題 59 ――― **無理関数のグラフと直線の交点**

直線 $y=mx-2m+1$ と曲線 $y=\sqrt{x-2}$ とが相異なる 2 点で交わるように，実数 m の値の範囲を定めなさい。

考え方　直線 $y=mx-2m+1$ と，$y=\sqrt{x-2}$ のグラフをかき，その交点を調べます。ここで，直線は，m の値に関係なく，1 つの定点を通ることを利用しましょう。

解答　$y=mx-2m+1$ ………①　　　$y=\sqrt{x-2}$ ………②

直線①は，m について整理すると

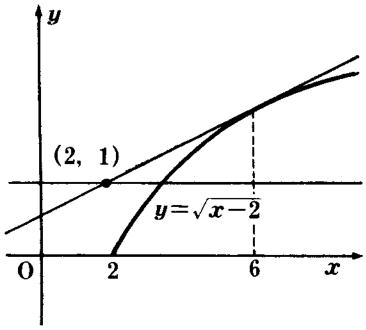
$m(x-2)+1-y=0$　**←m についての恒等式とみる。**

すなわち，m の値がいろいろな値をとるとき，つねに成立する条件は，

$x-2=0$，　$1-y=0$

これは，直線①が m の値にかかわらず定点 $(2,\ 1)$ を通っていることを示している。

①と②のグラフをかくと，右図のようになる。



①と②が接するときの m の値は

$mx-2m+1=\sqrt{x-2}$

$(mx-2m+1)^2=x-2$　**←両辺を 2 乗する。**

整理すると

$m^2x^2-(4m^2-2m+1)x+(4m^2-4m+3)=0$

判別式 $D=0$ から　**←接する ⇄ $D=0$ の利用**

$(4m^2-2m+1)^2-4m^2(4m^2-4m+3)=0$

$16m^4+4m^2+1-16m^3-4m+8m^2-16m^4+16m^3$
$-12m^2=0$

$1-4m=0$

ゆえに　$m=\dfrac{1}{4}$

したがって，上図から，①の傾き m が　$\boldsymbol{0<m<\frac{1}{4}}$ の範囲にあれば，相異なる 2 点で交わる。

POINT　◆ **m がいろいろな値をとるとき，曲線 $f(x,\ y)+mg(x,\ y)=0$ は，必ず $f(x,\ y)=0$，$g(x,\ y)=0$ の交点を通っています。**このことから，曲線がつねに通る定点を求めましょう。

無理関数と直線の関係を調べるときは，グラフをかいて，無理関数のグラフと直線がどういう位置関係にあるかを見るのです。では，トレーニングです。

トレーニング

15 直線 $y=mx-2m+1$ と曲線 $y=\sqrt{x-2}$ とが相異なる 2 点で交わるように，実数 m の値の範囲を定めなさい。

16 直線　$y=mx$　………①　　曲線　$y=\sqrt{2x-1}$　………②
の交点の数は，m の値によってどのように変わりますか。

17 直線　$y=mx+1$　………①　　曲線　$y=2\sqrt{|x|-1}+1$　………②
が交わらないように，実数 m の値の範囲を求めなさい。

18 直線　$2y=mx+1$　………①　　曲線　$y=2\sqrt{|x|+1}-2$　………②
の共有点の数が 2 個になるような m の値を求めなさい。

19 直線　$my=x-m-1$　………①　　曲線　$y=-\sqrt{1-4x}$　………②
とが相異なる 2 点で交わるように，実数 m の値の範囲を求めなさい。

最後は，ガウス記号があるときの無理関数のグラフです。

例題 60 ―――― **ガウス記号と無理関数**

2 つの関数

$$y=[x]-\sqrt{x-[x]}$$
$$y=ax-1$$

を $x\geqq 0$ において考えます。ただし，$[x]$ は x を超えない最大の整数(すなわち，$m\leqq x<m+1$ をみたす整数 m)を表す記号です。

(1) $y=[x]-\sqrt{x-[x]}$ のグラフの $0\leqq x<4$ の部分をかきなさい。

(2) $x\geqq 0$ において，2 つの関数のグラフの交点が 1 個であるような a の値の範囲を求めなさい。

(3) $x\geqq 0$ において，2 つの関数のグラフの交点が n 個 $(n\geqq 2)$ であるような a の値の範囲を求めなさい。 (慶応大)

考え方 (1) $0\leqq x<1$ のとき $[x]=0$，$1\leqq x<2$ のとき $[x]=1$，$2\leqq x<3$ のとき $[x]=2$，$3\leqq x<4$ のとき $[x]=3$ であることを使います。

(2) グラフを利用します。直線 $y=ax-1$ の傾き a の範囲を考えていけばよいことになります。

(3) $y=[x]-\sqrt{x-[x]}$ のグラフの n 個の部分と，直線 $y=ax-1$ が交わる条件を求めていきます。

解 答 (1)

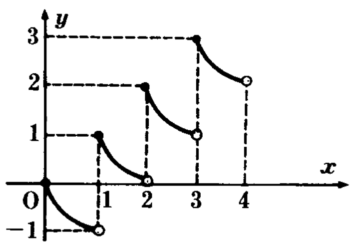
$0\leqq x<1$ のとき $[x]=0$ より $y=-\sqrt{x}$

$1\leqq x<2$ のとき $[x]=1$ より $y=1-\sqrt{x-1}$

$2\leqq x<3$ のとき $[x]=2$ より $y=2-\sqrt{x-2}$

$3\leqq x<4$ のとき $[x]=3$ より $y=3-\sqrt{x-3}$

したがって，グラフは右図のようになります。

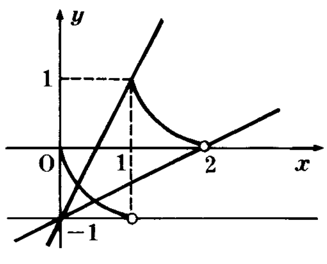


(2) 直線は，傾き a で切片が -1 である。

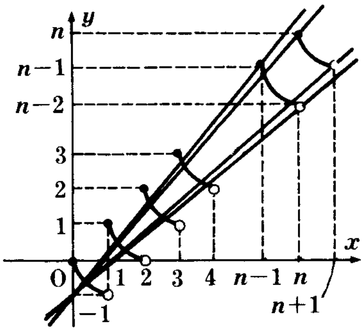
よって右図より，交点が 1 個であるのは，直線が点 $(0,\ 0)$ と点 $(1,\ 1)$ の間，点 $(1,\ -1)$ と点 $(2,\ 0)$ の間にあるときである。

したがって，そのときの傾き a は

$$0<a\leqq\frac{1}{2},\quad 2<a$$ ←等号の有無に注意。



(3) $x \geqq 0$ において，2つのグラフの交点が n 個であるのは，$y=[x]-\sqrt{x-[x]}$ のグラフの n 個の部分と直線が交わることである。



すなわち，直線が，点 $(n-1,\ n-1)$ と点 $(n,\ n)$ の間と，点 $(n+1,\ n-1)$ と点 $(n,\ n-2)$ の間に存在するときである。また，直線は必ず点 $(0,\ -1)$ を通るから，その傾き a の存在範囲は，

$$\frac{n-2+1}{n}<a \leqq \frac{n-1+1}{n+1},\quad \frac{n+1}{n}<a \leqq \frac{n-1+1}{n-1}$$

すなわち

$$\boldsymbol{\frac{n-1}{n}<a \leqq \frac{n}{n+1},\quad \frac{n+1}{n}<a \leqq \frac{n}{n-1}}$$

←等号の有無に注意。

となる。

POINT

◆ **$[x]$ はガウス記号と呼ばれ，x を超えない最大の整数を表す記号です。**

例 $[5.6]=5$，$[103.95]=103$，$[-2.5]=-3$

◆ $x=n+t$ (n は整数，$0 \leqq t<1$) のとき，

$$y=[x]-\sqrt{x-[x]}=n+\sqrt{n+t-n}=n-\sqrt{t}$$

となります。

ガウス記号を含むときのグラフの形がわかりましたね。では，実際にトレーニングしてみることにしましょう。

トレーニング

20 2つの関数

$$y=[x]-\sqrt{x-[x]}$$
$$y=ax-1$$

を $x \geqq 0$ において考えます。ただし，$[x]$ は x を超えない最大の整数（すなわち，$m \leqq x<m+1$ をみたす整数 m）を表す記号です。

(1) $y=[x]-\sqrt{x-[x]}$ のグラフの $0 \leqq x<4$ の部分をかきなさい。

(2) $x \geqq 0$ において，2つの関数のグラフの交点が1個であるような a の値の範囲を求めなさい。

(3) $x \geqq 0$ において，2つの関数のグラフの交点が n 個 $(n \geqq 2)$ であるような a の値の範囲を求めなさい。

（慶応大）

21 関数　$y=\sqrt{[x]-x+1}$　のグラフの　$-2\leqq x\leqq 2$ の部分をかきなさい。ただし，$[x]$ は x を超えない最大の整数を表す記号です。

22 次の関数のグラフをかき，最大値，最小値を求めなさい。

$y=\sqrt{2|x-1|+[x]-1}$ $(-2\leqq x\leqq 2)$

23 直線　$y=kx$　………①　　　曲線　$y=[x]+\sqrt{x-[x]}$　………②

について次の問いに答えなさい。

(1) ②のグラフの $-2\leqq x\leqq 2$ の部分をかきなさい。

(2) ①と②のグラフの交点の数が 2 個であるような k の値の範囲を求めなさい。

24 2 つの関数　$y=2\sqrt{x-[x]}$　………①　　　$y=ax+2$　………②

を考えます。

(1) ①のグラフの　$-3\leqq x<3$ の部分をかきなさい。

(2) ①と②の交点が 1 個であるような a の値の範囲を求めなさい。

(3) ①と②の交点が n 個 $(n\geqq 2)$ であるような a の値の範囲を求めなさい。

きょうは，分数関数と無理関数に関する問題を練習してきました。次の日は，関数の復習をします。

第 15 日	関　数　　　　学習日　　月　　日
	演習問題

きょうは，これまでに学習してきた関数についての復習です。2 次関数のグラフ，2 次関数の最大・最小，解の分離など，どれも基本となる重要な内容ばかりです。完全にできるように，ここで，練習しておきましょう。

では，問題をはじめなさい。

1 次の 3 つの条件をみたすように，関数 $f(x)=ax^2+bx+c$ の係数 a，b，c を定めなさい。

(1) $y=f(x)$ のグラフは点 $(1,\ 1)$ を通る。

(2) $x=1$ における $y=f(x)$ の接線の傾きは 2 である。

(3) 直線 $y=-2x+7$ は $y=f(x)$ に接する。　　　　（神戸商大）

2 実数 x，y が $x^2+4y^2=4$ をみたすとき，$x+y$ の最大値，最小値を求めなさい。

3 t の関数 $f(t)=|t(t-2)|$ の $x \leqq t \leqq x+1$ における最大値を x の関数と考えてこれを $g(x)$ とする。$g(x)$ を x で表し，そのグラフをかきなさい。 (大分大)

4 方程式 $ax^2-x-1=0$ の 2 つの解 α，β がともに -1 と 1 との間にあるための条件を求めなさい。 (東北学院大)

5 2つの放物線 $y=2x^2+2x-3$ ……①，$y=x^2+x+k$ ……②がある。

(1) ①と②が異なる2点で交わるように，k の値の範囲を求めなさい。

(2) ①がつねに②より上方にあるように，k の値の範囲を定めなさい。

6 次の方程式の実数解の個数は，実数 a の値によってどのように異なるかを調べなさい。ただし，重複解は1つと考えます。

$$|x(x-3)|-a(x-4)=0$$

7 $|x| \leqq 1$ のとき，$y=\dfrac{2x+1}{2x-1}$ のとりうる値の範囲を求めなさい。

8 すべての実数 x に対して定義された $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2+ax+1}$ の最大値が $2a$，最小値が b であるとき，定数 a，b を求めなさい。 （東京女大）

9 次の関数のグラフをかきなさい。

$$y=\sqrt{x-1-|x-2|}-1$$

10 正の数 x，y に対して，$\sqrt{x}+\sqrt{y}\leqq a\sqrt{x+y}$ が成り立つような正数 a のうちで最小のものを求めなさい。（成蹊大）

これで，関数の学習は終わりです。このつぎは，平面図形と式について学習していきます。

memo

平面図形と式

平面図形と式では，点と直線，円，不等式と領域といった，平面での図形的な扱いについて学習します。
ここでの内容は，あとで出てくるベクトル，空間図形，２次曲線などとおおいに関連があります。
平面上での点の座標，分点の公式などは，いずれも，図形としての基本です。また，不等式と領域では，領域での最大・最小などよく出題されるところです。

第 16 日	平面図形と式　　学習日　月　日
	点と直線

第16日　点と直線

平面図形と式　　学習日　　月　　日

きょうから，平面図形と式に関する問題を学習していきます。ここでは，点，直線，円，円と直線の関係，不等式の表す領域をとりあげます。

きょうは，点の座標，平面上の直線の方程式に関する問題を練習します。

まず，直線上の点の座標についての例題からです。

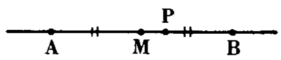
例題 61　　　　数直線上の点の座標

線分 AB 上の任意の点を P，AB の中点を M とするとき

$$PA^2+PB^2=2(AM^2+PM^2)$$

が成り立つことを証明しなさい。

考え方　数直線上に A，B，P，M をとり，A，B，P の座標を与えて等式の左辺，右辺をそれぞれ計算します。



解　答　数直線上に A，B，P，M をとり，A，B，P の座標をそれぞれ a，b，p とすると

AB の中点 M の座標は $\dfrac{a+b}{2}$ であるから

$$PA^2+PB^2=(p-a)^2+(p-b)^2$$　←左辺の計算

$$=2p^2-2(a+b)p+a^2+b^2$$

$$2(AM^2+PM^2)=2\left\{\left(\frac{a+b}{2}-a\right)^2+\left(\frac{a+b}{2}-p\right)^2\right\}$$　←右辺の計算

$$=2\left\{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2+\left(\frac{a+b}{2}-p\right)^2\right\}$$

$$=2\left\{\frac{b^2-2ab+a^2}{4}+\frac{a^2+2ab+b^2}{4}-(a+b)p+p^2\right\}$$

$$=2p^2-2(a+b)p+a^2+b^2$$

ゆえに

$$PA^2+PB^2=2(AM^2+PM^2)$$

別　解　数直線上に A，B，P，M をとり，A，B，P の座標をそれぞれ $-a$，a，p とすると，AB の中点 M の座標は 0 であるから　←中点が 0 になるように座標をとった。

$$PA^2+PB^2=(p+a)^2+(p-a)^2=2p^2+2a^2$$

$$2(AM^2+PM^2)=2(a^2+p^2)=2p^2+2a^2$$　←$\mathrm{AM}=|a-0|=|a|$

ゆえに

$$PA^2+PB^2=2(AM^2+PM^2)$$

POINT　数直線上で座標が a の点 A を $\mathbf{A}(\boldsymbol{a})$，座標が b の点 B を $\mathbf{B}(\boldsymbol{b})$ とすると

- ◆ AB の中点 M の座標は　$\mathbf{M}\left(\dfrac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}{2}\right)$
- ◆ $\mathrm{AB}=|b-a|$ だから　$\mathbf{AB}^2=(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})^2$

線分の中点の座標の表し方，2 点間の距離の表し方，分点の座標について，おさえておくことです。では，まず例題をもう一度練習してから進みましょう。

トレーニング

1 線分 AB 上の任意の点を P，AB の中点を M とするとき

$$\mathrm{PA}^2+\mathrm{PB}^2=2(\mathrm{AM}^2+\mathrm{PM}^2)$$

が成り立つことを証明しなさい。

2 2 点 A(-2)，B(8) に対して次の点の座標を求めなさい。

(1) 線分 AB の中点。　(2) 線分 AB を $3:2$ に内分する点。

(3) 線分 AB を $3:2$ に外分する点。　(4) 線分 AB を $2:3$ に外分する点。

3 2 点 A(-5)，B(7) に対して次の点の座標を求めなさい。

(1) 線分 AB の中点。　(2) 線分 AB を $3:1$ に内分する点。

(3) 線分 AB を $3:1$ に外分する点。　(4) 線分 AB を $1:3$ に外分する点。

4 線分 AB 上の任意の点を P，AB の中点を M とするとき

$$\mathrm{AP}\cdot\mathrm{PB}=\mathrm{AM}^2-\mathrm{PM}^2$$

が成り立つことを証明しなさい。

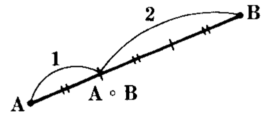
5 数直線上に 3 点 A(-1)，B(1)，C(2) があるとき，この数直線上の点で，$\mathrm{PA}^2+\mathrm{PB}^2+\mathrm{PC}^2$ を最小にする点 P の座標を求めなさい。

できましたね。中点や分点の表し方は，点の座標の基本です。次の例題は，平面上での点の座標の問題です。直線上の場合と考え方は変わりません。

例題 62　　　　座標平面上の点の座標

平面上の 2 点 A，B に対して，線分 AB の三等分点のうち A に近いほうの点を A∘B で表すものとする。このとき，(A∘B)∘C と (B∘C)∘A とが一致するとすれば，A，B，C はどんな位置関係にありますか。　(神戸大)

考え方　A，B，C の座標を与えて，A∘B，(A∘B)∘C，B∘C，(B∘C)∘A の座標を計算します。A∘B とは，AB を 1:2 に内分する点のことですから，内分点の公式が利用できます。



解　答　A，B，C の座標をそれぞれ $(a_1,\ a_2)$，$(b_1,\ b_2)$，$(c_1,\ c_2)$ とすると，A∘B は線分 AB を 1:2 に内分する点であるから，A∘B の x 座標は $\dfrac{2a_1+b_1}{3}$。(A∘B)∘C は点 A∘B と C を結ぶ線分を 1:2 に内分する点であるから，その x 座標は

$$\frac{2\times\dfrac{2a_1+b_1}{3}+c_1}{3}=\frac{4a_1+2b_1+3c_1}{9}\quad\cdots\cdots\cdots①$$

←(A∘B)∘C の x 座標。

B∘C の x 座標は $\dfrac{2b_1+c_1}{3}$。よって，(B∘C)∘A の x 座標は

$$\frac{2\times\dfrac{2b_1+c_1}{3}+a_1}{3}=\frac{3a_1+4b_1+2c_1}{9}\quad\cdots\cdots\cdots②$$

←(B∘C)∘A の x 座標。

(A∘B)∘C と (B∘C)∘A が一致するから，①と②は等しい。

$$4a_1+2b_1+3c_1=3a_1+4b_1+2c_1$$
$$2b_1=a_1+c_1$$
$$b_1=\frac{a_1+c_1}{2}$$

同様にして，y 座標からも，$b_2=\dfrac{a_2+c_2}{2}$ が導かれる。

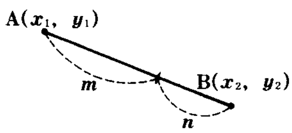
ゆえに，**点 B は線分 AC の中点**である。

POINT

◆ $A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$ のとき，AB を $m:n$ に分ける点の座標は

$$\left(\frac{nx_1+mx_2}{m+n},\ \frac{ny_1+my_2}{m+n}\right)$$

ただし，m と n が同符号のときは内分点，異符号のときは外分点を表す。



◆ とくに，AB の**中点の座標**は

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2},\ \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

平面上での点の座標の場合も，直線上と同様に，中点と分点の表現を間違えないようにしないとい

けません。また，三角形の重心の座標の表し方も重要です。

トレーニング

6 平面上の2点A，Bに対して，線分ABの三等分点のうちAに近いほうの点をA∘Bで表すものとする。このとき，(A∘B)∘Cと(B∘C)∘Aとが一致するとすれば，A，B，Cはどんな位置関係にありますか。 (神戸大)

7 平面上の3点A(x_1, y_1)，B(x_2, y_2)，C(x_3, y_3)を頂点とする△ABCの重心Gの座標を求めなさい。

8 2点A(-2, 5)，B(4, -1)を結ぶ線分ABに対して，次の点の座標を求めなさい。

(1) 2:1に内分する点。　(2) 2:1に外分する点。

(3) 1:2に外分する点。　(4) 中点。

9 △ABCの辺BC，CA，ABを$m:n$の比に内分する点をそれぞれP，Q，Rとすると，△PQRと△ABCの重心は一致することを証明しなさい。

10 a，bを任意の実数とし，平面上に4点A(4, a)，B(a, 1)，C(1, b)，D(b, 4)をとる。線分ABの中点をP，線分CDの中点をQ，線分PQの中点をR(x, y)とするとき，次の問いに答えなさい。

(1) Rの座標(x, y)をa，bで表しなさい。

(2) 四角形ABCDが平行四辺形であるとき，$a+b$の値を求めなさい。

問題で与えられたとおりに条件をつければ，みんなできたはずです。つぎは，直線の問題をしてみましょう。直線の傾きが変化する問題です。

例題 63 　　　　**直線の傾き**

(1) 2 直線 $3x-2y+6=0$，$y+2x-10=0$ と x 軸が囲む三角形の面積を求めなさい。

(2) 直線 $y=mx+8$ が上の三角形の周と共有点をもたないように，m の値の範囲を定めなさい。

(常葉学園大)

考え方　(1) 2 直線の交点を求め，三角形を図示してみましょう。

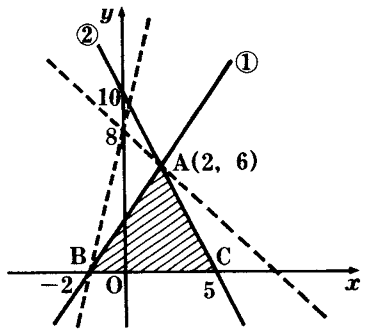
(2) $y=mx+8$ は $(0,\ 8)$ を中心として回転する（傾きが変わる）直線ですから，この直線と(1)の三角形の共有点を調べます。

解　答　(1) $3x-2y+6=0$ ………①

$y+2x-10=0$ ………②

①，②の交点を A とすると，A(2，6) である。

また，①，②と x 軸との交点をそれぞれ B，C とすると，B(−2，0)，C(5，0) であるから，△ABC は右図のようになる。



ゆえに

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times 7\times 6=\mathbf{21}$$　**←底辺 7，高さ 6**

(2) $y=mx+8$ ………③

③が点 A を通るのは $m=-1$ のとき，③が点 B を通るのは $m=4$ のときであるから，③が△ABC の周と共有点をもたないような m の範囲は

$$\mathbf{-1<m<4}$$

POINT　◆ 直線 $y=mx+b$ は，m を増加させると，点 $(0,\ b)$ を中心として左まわり（時計の針と反対向き）に回転します。**点 $(0,\ b)$ が固定点**ですから，この点をもとにして直線を動かし**共有点を調べます。**

直線が通る定点がわかれば，傾きが変わることから，直線の動きがわかります。直線と図形との関係を見れば，みたすべき条件がきまります。では，トレーニングです。

トレーニング

11 (1) 2 直線 $3x-2y+6=0$，$y+2x-10=0$ と x 軸が囲む三角形の面積を求めなさい。

(2) 直線 $y=mx+8$ が上の三角形の周と共有点をもたないように，m の値の範囲を定めなさい。

(常葉学園大)

12(1)　2直線 $2x+y-6=0$，$2x-y+2=0$ と x 軸が囲む三角形の面積を求めなさい。

(2)　直線 $y=mx-2$ が，上の三角形の周と共有点をもたないように m の値の範囲を定めなさい。

13(1)　2直線 $3x-y+2=0$，$x+y+6=0$ と x 軸が囲む三角形の面積を求めなさい。

(2)　直線 $y=mx-3$ が上の三角形の周と共有点をもつように m の値の範囲を定めなさい。

14(1)　4つの直線 $x-y-1=0$，$x-y+4=0$，$y=2$，$y=5$ によって囲まれてできる四角形の面積を求めなさい。

(2)　直線 $y=mx$ が上の四角形の周と共有点をもつように m の値の範囲を定めなさい。

15　平面上で原点をOとし，第1象限内にある点Aの座標を $(a,\ b)$ とする。Aを通って x 軸の正の部分，y 軸の正の部分とそれぞれP，Qで交わる直線をひいて，三角形OPQの面積が1になるようにするための a，b の条件を求めなさい。　（名古屋大）

できましたね。こんども，直線の方程式の問題です。例題を解いてみましょう。

例題 64 　　**直線の通る点**

次の方程式は，k が任意の実数に対してつねに 1 つの定点を通る直線を表すことを証明しなさい。

$$(k+2)x-(k+3)y-k=0$$

考え方 　与えられた方程式を　$k(\quad)+(\quad)=0$　の形になおして，この等式を k についての恒等式と考えます。

解　答 　与えられた方程式を変形して

$$k(x-y-1)+(2x-3y)=0 \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

①が任意の実数 k に対して成り立つための条件は

$x-y-1=0$　かつ　$2x-3y=0$　　**←①を k についての恒等式とみる。**

ゆえに

$x=3,\ y=2$

すなわち，直線①は k の値に関係なくつねに点 $(3,\ 2)$ を通る。

POINT

◆ 等式　$kA+B=0$　が任意の k について成り立つための条件は

$\boldsymbol{A=B=0}$

◆ 2 直線 $a_1x+b_1y+c_1=0$，$a_2x+b_2y+c_2=0$ の交点を通る直線の方程式は，

$\boldsymbol{(a_1x+b_1y+c_1)+k(a_2x+b_2y+c_2)=0}$　　k は定数

と書けます。$k(x-y-1)+(2x-3y)=0$ は，直線 $x-y-1=0$，$2x-3y=0$ の交点を通る直線を表しています。その交点が定点です。

---

2 直線の交点を通る直線の方程式を，POINT の形に表して使うことがよくありますから覚えておきましょう。では，トレーニングです。

トレーニング

16 次の方程式は，k が任意の実数に対してつねに 1 つの定点を通る直線を表すことを証明しなさい。

$$(k+2)x-(k+3)y-k=0$$

17 次の方程式は，k が任意の実数に対してつねに1つの定点を通る直線を表すことを証明しなさい。

$$(4k+3)x-(3k+1)y-(2k+1)=0$$

18 2直線 $2x-y-1=0$，$3x+2y-3=0$ の交点と点 $(-1,\ 1)$ を通る直線の方程式を求めなさい。

19 2直線 $x+2y-3=0$，$x-2y+2=0$ の交点と点 $(-3,\ 0)$ を通る直線の方程式を求めなさい。

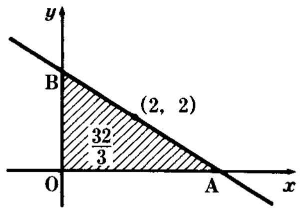
20 2直線 $5x+3y-5=0$，$2x-y-1=0$ の交点を通り，直線 $2x-3y-10=0$ に平行な直線の方程式を求めなさい。

2直線の交点を通る直線の方程式は使えますね。つぎは，直線の方程式を決定する問題です。

例題 65 　　切片方程式

点$(2,\ 2)$を通る直線がx軸，y軸の正の部分と交わる点をそれぞれA，Bとする。A，Bと原点Oで作られる$\triangle$OABの面積が$\dfrac{32}{3}$となるときの直線の方程式を求めなさい。

考え方　直線がx軸，y軸と交わる点がA，Bですから，A，Bを通る直線を考え，その直線が$(2,\ 2)$を通るとすればよいでしょう。三角形の1つの頂点が原点にありますから，面積は簡単に表せます。



解　答　A$(a,\ 0)$，B$(0,\ b)$とすると，直線ABの方程式は

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \quad \cdots\cdots①$$

①が点$(2,\ 2)$を通ることから　$\dfrac{2}{a}+\dfrac{2}{b}=1$

両辺にabをかけて　$2(a+b)=ab \quad \cdots\cdots②$

また，$a>0$，$b>0$であるから　$\triangle \mathrm{OAB}=\dfrac{1}{2}ab=\dfrac{32}{3}$

ゆえに　$ab=\dfrac{64}{3}$

②より　$a+b=\dfrac{32}{3}$

a，bを解とするtの2次方程式を作ると

$$t^2-\frac{32}{3}t+\frac{64}{3}=0$$

←$t^2-(a+b)t+ab=0$を利用している。

$$3t^2-32t+64=0$$
$$(t-8)(3t-8)=0$$
$$t=8,\ \frac{8}{3}$$

よって　$(a,\ b)=\left(8,\ \dfrac{8}{3}\right),\ \left(\dfrac{8}{3},\ 8\right)$　←a，bのとり方で2通りある。

ゆえに，求める直線は

$$\frac{x}{8}+\frac{3}{8}y=1 \quad または \quad \frac{3}{8}x+\frac{y}{8}=1$$

すなわち　$\boldsymbol{x+3y=8}$　または　$\boldsymbol{3x+y=8}$

POINT　◆ x軸と点$(a,\ 0)$で交わり，y軸と点$(0,\ b)$で交わる直線の方程式は

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

と表せます。この方程式のことを**切片方程式**といいます。

問題で与えられている三角形の面積についての条件をすなおに考えればできます。以下のトレーニングも同様に考えて解いていきます。

トレーニング

21 点$(2,\ 2)$を通る直線がx軸，y軸の正の部分と交わる点をそれぞれA，Bとする。A，Bと原点Oで作られる△OABの面積が$\dfrac{32}{3}$となるときの直線の方程式を求めなさい。

22 点$(-3,\ 3)$を通る直線がx軸の負の部分，y軸の正の部分と交わる点をそれぞれA，Bとする。A，Bと原点Oで作られる△OABの面積が$\dfrac{75}{4}$となるときの直線の方程式を求めなさい。

23 点$(1,\ 2)$を通る直線がx軸，y軸の正の部分と交わる点をそれぞれA，Bとする。A，Bと原点Oで作られる△OABの面積の最小値を求めなさい。

24 原点を通る直線が3点$\mathrm{A}(1,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ 1)$，$\mathrm{C}\left(\dfrac{3}{2},\ 0\right)$を頂点とする三角形を，面積の等しい2つの部分に分けるとき，その直線の傾きを求めなさい。　　（東京大）

きょうは，平面図形と式で，点と直線に関する基本的な問題を練習しました。次の日は，円についての問題をとりあげます。

第 17 日	平面図形と式　　　学習日　月　日
	円

第17日　円

平面図形と式　　学習日　　月　　日

きょうは，平面図形と式で円に関する学習をします。

この日は，円の方程式の基礎と，図形としての円のみかたによって解決できる問題をとりあげました。

まずはじめに，点と直線との距離を求める公式を利用して解く問題をします。

例題 66　　　　**点と直線の距離**

点 A(3, 2), B(6, −1), C($2t$, t^2+8) のとき，△ABC の面積の最小値を求めなさい。

考え方　A，B は定点ですから，直線 AB の方程式を求め，点 C とこの直線との距離を求めます。△ABC の面積は，線分 AB を底辺とし，点 C と直線 AB との距離を高さとして求めることができます。

解　答　直線 AB の方程式は　$y-2=\dfrac{-1-2}{6-3}(x-3)$ から　$x+y-5=0$　………①

点 C($2t$, t^2+8) から，①へ垂線 CH をひくと

$$\mathrm{CH}=\frac{|2t+t^2+8-5|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{|t^2+2t+3|}{\sqrt{2}}$$

$$=\frac{(t+1)^2+2}{\sqrt{2}}\qquad \leftarrow (t+1)^2+2>0$$

また　$\mathrm{AB}=\sqrt{(6-3)^2+(-1-2)^2}=3\sqrt{2}$ であるから，△ABC の面積は

$$\triangle \mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{CH}$$

$$=\frac{3\sqrt{2}\{(t+1)^2+2\}}{2\sqrt{2}}$$

$(t+1)^2+2$ は，$t=-1$ のとき，最小値 2 をとる。このとき $\triangle \mathrm{ABC}=\dfrac{3\times 2}{2}=3$

ゆえに，△ABC の面積は **$t=-1$ のとき，最小値 3 をとる。**

POINT　◆　点 (x_1, y_1) と直線 $ax+by+c=0$ との距離は

$$\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

で求めることができます。

例　点 $(-1, 2)$ と直線 $3x-2y+1=0$ との距離　$\dfrac{|3\cdot(-1)+(-2)\cdot 2+1|}{\sqrt{3^2+(-2)^2}}=\dfrac{6\sqrt{13}}{13}$

点と直線との距離の公式は，応用範囲がひろい式ですから，十分使えるようにしておきましょう。例題の解法を確かめてから問題を解いていきます。

トレーニング

1 点 A(3, 2), B(6, −1), C($2t$, t^2+8) のとき，△ABC の面積の最小値を求めなさい。

2 点 A(−2, 2), B(1, −7), C($-t^2-3$, $6t$) のとき，△ABC の最小値を求めなさい。

3 平行な 2 直線 $x+2y+5=0$, $x+2y-1=0$ の間の距離を求めなさい。

4 直線 $3x-4y=1$ に平行で，この直線から 1 の距離にある直線の方程式を求めなさい。

5 2 直線 $3x+y-4=0$, $x+y-1=0$ の交点を通り，原点からの距離が 1 に等しい直線の方程式を求めなさい。

点と直線との距離の公式の使い方はわかりましたね。つぎは，円の方程式を決める問題で，基本的なものです。円が通る点から方程式を決めます。

例題 67 　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　**円の方程式**

次の問いに答えなさい。

(1)　2点 A$(-2,\ 5)$，B$(4,\ 1)$ を直径の両端とする円の方程式を求めなさい。

(2)　3点 $(8,\ 0)$，$(-4,\ 0)$，$(0,\ 6)$ を頂点とする三角形の外心の座標を求めなさい。(岩手大)

考え方　(1)　直径の両端が与えられていますから，円の中心と半径がわかります。

(2)　3点を通る円の方程式を求めます。円の中心が，三角形の外心に一致します。

解　答　(1)　AB の中点を M とすると，M の座標は

$$\left(\frac{-2+4}{2},\ \frac{5+1}{2}\right)=(1,\ 3)$$

よって，M$(1,\ 3)$ が円の中心となる。半径は

$$\mathrm{AM}=\sqrt{(1+2)^2+(3-5)^2}=\sqrt{13}$$

ゆえに，求める円の方程式は

$$\boldsymbol{(x-1)^2+(y-3)^2=13}$$　←中心 $(1,\ 3)$，(半径)$^2=13$

(2)　3点を通る円の方程式を $x^2+y^2+ax+by+c=0$ とおく。

この円が3点 $(8,\ 0)$，$(-4,\ 0)$，$(0,\ 6)$ を通ることから

$$\begin{cases} 64+8a+c=0 \\ 16-4a+c=0 \\ 36+6b+c=0 \end{cases}$$

これを解くと　$a=-4,\ b=-\dfrac{2}{3},\ c=-32$

よって，求める円の方程式は

$$x^2+y^2-4x-\frac{2}{3}y-32=0$$

$$(x-2)^2+\left(y-\frac{1}{3}\right)^2=\frac{325}{9}$$　←$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ の形に変形。

ゆえに，三角形の外心の座標は $\boldsymbol{\left(2,\ \dfrac{1}{3}\right)}$ である。

POINT

◆　A，B を直径の両端とする円の中心は，AB の中点となります。
点 $(a,\ b)$ を中心とし，r を半径とする円の方程式は

$$\boldsymbol{(x-a)^2+(y-b)^2=r^2}$$

◆　円の方程式は

$$\boldsymbol{x^2+y^2+ax+by+c=0}$$

の形でも与えられます。3点が与えられているような場合には，この方程式が便利です。

円の方程式がわかればすぐにできますね。円の方程式の形は使いやすいものを使うことです。では，トレーニングです。

トレーニング

6 次の問いに答えなさい。

(1) 2点 A$(-2,\ 5)$, B$(4,\ 1)$ を直径の両端とする円の方程式を求めなさい。

(2) 3点 $(8,\ 0)$, $(-4,\ 0)$, $(0,\ 6)$ を頂点とする三角形の外心の座標を求めなさい。(岩手大)

7 次の問いに答えなさい。

(1) 2点 A$(-5,\ 1)$, B$(3,\ 7)$ を直径の両端とする円の方程式を求めなさい。

(2) 3点 A$(4,\ 2)$, B$(-3,\ 1)$, C$(5,\ -5)$ を通る円の方程式を求めなさい。

8 3点 O$(0,\ 0)$, A$(1,\ 2)$, B$(4,\ 3)$ を頂点とする三角形の外心の座標を求めなさい。

9 2直線 $2x-y-1=0$, $x+y+7=0$ の交点を中心とし，原点を通る円の方程式を求めなさい。

10 次の円の方程式を求めなさい。

(1) 点 C$(2,\ -1)$ を中心とし，点 A$(-1,\ 3)$ を通る円。

(2) 点 C$(3,\ 4)$ を中心とし，x 軸に接する円。

できましたね。円は中心の位置と半径で決まってしまいます。x 軸，y 軸との関係も，このことを考えればすぐにわかります。次の例題は，半円のグラフをかく問題です。

例題 68 　　　　　　　　　　　　　　　　　　**半円の方程式**

次の方程式のグラフをかきなさい。

(1) $y=\sqrt{2x-x^2}$

(2) $x=3-\sqrt{16-y^2}$

考え方 (1) ルートがじゃまですから，両辺を 2 乗して式を整理します。このとき，$\sqrt{2x-x^2}\geqq 0$ ですから，左辺の $y\geqq 0$ であることを忘れないようにします。

(2) 3 を移項して両辺を 2 乗します。このときも，$\sqrt{16-y^2}\geqq 0$ であることを忘れないようにします。

解答 (1) $y=\sqrt{2x-x^2}$ ………①

両辺を 2 乗して

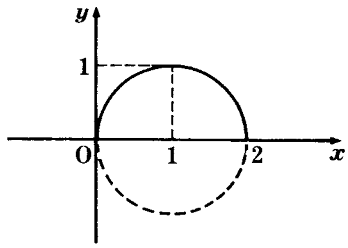
$y^2=2x-x^2$

$(x-1)^2+y^2=1$ ………②

また，$\sqrt{2x-x^2}\geqq 0$ より $y\geqq 0$

ゆえに，①は円②の $y\geqq 0$ の部分を表す。

したがって，①のグラフは図のようになる。



(2) $x=3-\sqrt{16-y^2}$ ………③

$x-3=-\sqrt{16-y^2}$

両辺を 2 乗して

$(x-3)^2=16-y^2$

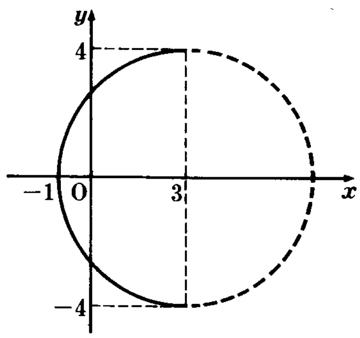
$(x-3)^2+y^2=16$ ………④

また，$\sqrt{16-y^2}\geqq 0$ より $x-3\leqq 0$ すなわち

$x\leqq 3$

ゆえに，③は円④の $x\leqq 3$ の部分を表す。

したがって，③のグラフは図のようになる。



POINT ◆ **$A=\sqrt{B}$ は $A^2=B$ かつ $A\geqq 0$ と同値**です。

したがって

$$y=\sqrt{2x-x^2} \rightleftarrows \begin{cases} y^2=2x-x^2 \\ y\geqq 0 \end{cases}$$

$$x-3=-\sqrt{16-y^2} \rightleftarrows \begin{cases} (x-3)^2=16-y^2 \\ x-3\leqq 0 \end{cases}$$

となります。$y\geqq 0$，$x-3\leqq 0$ の条件を忘れないようにします。

ルートがついた式を，簡単に 2 乗してはいけません。ルートがついた式は正であることをかならずおさえておきます。よく間違えるところですから注意してください。では，トレーニングします。

トレーニング

11 次の方程式のグラフをかきなさい。

(1) $y=\sqrt{2x-x^2}$

(2) $x=3-\sqrt{16-y^2}$

12 次の方程式のグラフをかきなさい。

(1) $y=\sqrt{4x-x^2}$

(2) $x=2-\sqrt{9-y^2}$

13 次の方程式のグラフをかきなさい。

(1) $y=-\sqrt{-10x-x^2}$

(2) $y=-1+\sqrt{4-x^2}$

14 次の方程式のグラフをかきなさい。

(1) $x=1+\sqrt{-5-6y-y^2}$

(2) $y=\sqrt{9-x^2}$

正しくかけましたね。つぎは，円の方程式を決める問題ですが，すこし応用的になっています。

例題 69 　　**座標軸に接する円の方程式**

点 $(0,\ 1)$ と点 $(4,\ a)$ を通り，x 軸に接する円がただ1つしかないとき，a の値とこの円の方程式を求めなさい。

考え方　この円は，点 $(0,\ 1)$ と点 $(4,\ a)$ を通って x 軸に接しています。x 軸に接しているということは，この円の中心の y 座標が円の半径になるということです。

解　答　円の中心を $(\alpha,\ \beta)$ とすると，この円が x 軸に接することから，半径は $|\beta|$ に等しい。したがって，この円の方程式は

$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\beta^2$　　**←$|\beta|^2=\beta^2$**

$x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y+\alpha^2=0$

この円が点 $(0,\ 1)$，$(4,\ a)$ を通ることから

$1-2\beta+\alpha^2=0$　　………①　　**←2点を通る条件。**

$16+a^2-8\alpha-2\beta a+\alpha^2=0$　　………②

①，②から β を消去する。①より $2\beta=1+\alpha^2$ であるから

$16+a^2-8\alpha-a(1+\alpha^2)+\alpha^2=0$

$(1-a)\alpha^2-8\alpha+a^2-a+16=0$　　………③

接する円がただ1つしかないということは，③をみたす実数 α がただ1つ存在するということである。

(i)　$a\neq1$ のとき　　**←③の2次の係数が0でないとき。**

③の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=16-(1-a)(a^2-a+16)=a^3-2a^2+17a=a(a^2-2a+17)=0$$

よって　$a=0,\ 1\pm4i$　　**←③が重解をもつ。円がただ1つ存在する条件。**

a は実数であるから $a=0$ で，これは $a\neq1$ をみたす。

このとき，③より　$\alpha^2-8\alpha+16=0$　　$(\alpha-4)^2=0$

よって　$\alpha=4,\ \beta=\dfrac{17}{2}$

(ii)　$a=1$ のとき

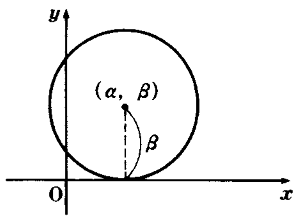
③はただ1つの実数解をもち　$\alpha=2,\ \beta=\dfrac{5}{2}$

したがって，a の値は　$\boldsymbol{a=0,\ 1}$ で，求める円の方程式は

$a=0$ のとき　　$\boldsymbol{(x-4)^2+\left(y-\frac{17}{2}\right)^2=\left(\frac{17}{2}\right)^2}$

$a=1$ のとき　　$\boldsymbol{(x-2)^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2=\left(\frac{5}{2}\right)^2}$

POINT ◆ 中心が$(\alpha,\ \beta)$で x 軸に接する円の半径は $|\beta|$
中心が$(\alpha,\ \beta)$で y 軸に接する円の半径は $|\alpha|$
中心の座標が負になることもありますから絶対値記号をつけています。



円が軸に接すること，また円がただ1つしかないという条件にあてはまるものを求めています。2次方程式が重解をもつ条件は基本です。では，トレーニングをしましょう。

トレーニング

15 点$(0,\ 1)$と点$(4,\ a)$を通り，x 軸に接する円がただ1つしかないとき，a の値とこの円の方程式を求めなさい。

16 点$(-1,\ 0)$と点$(a,\ 3)$を通り，y 軸に接する円がただ1つしかないとき，a の値とこの円の方程式を求めなさい。

17 x 軸，y 軸に接し，中心が直線 $2x-y=3$ 上にある円の方程式を求めなさい。

18 2点$(5,\ 1)$，$(-2,\ 8)$を通り，x 軸に接する円の中心の y 座標を求めなさい。　(一橋大)

19 直線 $y=x+2$ と円 $x^2+y^2-10x-2y=0$ との2つの交点を直径の両端とする円の方程式を求めなさい。　(福島大)

では，きょうの最後の例題に進みます。

例題 70 ―― 軌跡（円）

座標平面上の原点をOとし，点$A(a,\ 0)$をとる。$OP:AP=m:n$となる点Pの軌跡を求めなさい。ただし，$a\neq0$，$m>0$，$n>0$とします。

考え方 点Pの座標を$(x,\ y)$とし，$OP:AP=m:n$の条件をx，yの関係式で表すと考えればよいでしょう。$OP:AP=m:n$は$nOP=mAP$と書き変えられます。

解　答 $P(x,\ y)$とすると

$$OP^2=x^2+y^2$$
$$AP^2=(x-a)^2+y^2=x^2+y^2-2ax+a^2$$

$OP:AP=m:n$であるから　$n^2OP^2=m^2AP^2$　**← $nOP=mAP$から。**

ゆえに

$$n^2(x^2+y^2)=m^2(x^2+y^2-2ax+a^2)$$
$$(m^2-n^2)x^2+(m^2-n^2)y^2-2am^2x+a^2m^2=0 \quad \cdots\cdots①$$

（i）$m\neq n$のとき，m^2-n^2で両辺を割って　**← $m\neq n$，$m=n$で場合分け。**

$$x^2+y^2-\frac{2am^2}{m^2-n^2}x+\frac{a^2m^2}{m^2-n^2}=0$$
$$\left(x-\frac{am^2}{m^2-n^2}\right)^2+y^2=\frac{a^2m^4}{(m^2-n^2)^2}-\frac{a^2m^2}{m^2-n^2}$$
$$=\frac{a^2m^2(m^2-m^2+n^2)}{(m^2-n^2)^2}$$
$$=\frac{a^2m^2n^2}{(m^2-n^2)^2}$$

ゆえに，点Pの軌跡は**円**$\boldsymbol{\left(x-\frac{am^2}{m^2-n^2}\right)^2+y^2=\left(\frac{amn}{m^2-n^2}\right)^2}$である。

（ii）$m=n$のとき

①は　$-2am^2x+a^2m^2=0$

$a\neq0$，$m^2\neq0$より　$x=\frac{a}{2}$　ゆえに，点Pの軌跡は**直線**$\boldsymbol{x=\frac{a}{2}}$である。

POINT ◆ 軌跡の問題では，**動点の座標を$(x,\ y)$として**，与えられた条件をx，y**の関係式**になおして求めます。

問題で与えられた条件を正しく数式で表すこと，式の変形，計算を間違いなくすることが，軌跡を求めるときの注意点です。では，ていねいに問題を解いてみましょう。

トレーニング

20 座標平面上の原点をOとし，点A$(a,\ 0)$をとる。OP : AP$=m:n$となる点Pの軌跡を求めなさい。ただし，$a \neq 0$，$m>0$，$n>0$とします。

21 2定点A$(-3,\ 0)$，B$(1,\ 0)$に対してPA : PB$=3:1$となるような点Pの軌跡を求めなさい。

22 平面上に3点A$(2,\ 1)$，B$(-1,\ 4)$，C$(-4,\ -2)$が与えられているとき，次の条件にあてはまる点Pの軌跡を求めなさい。

(1) $AP^2+BP^2+CP^2=63$　　(2) $AP^2+2CP^2=3BP^2$

23 2点A$(a,\ 0)$，B$(b,\ c)$と，原点Oを中心とする半径rの円Oの周上の動点Pが与えられているとき，△PABの重心Qの軌跡を求めなさい。

24 円$x^2+y^2-12x+27=0$の周上を動く点Pと原点Oとを結ぶ線分OPを$2:1$に内分する点Qの軌跡を求めなさい。

きょうは，円の方程式に関する問題を練習しました。円の図形的な意味と円の方程式がわかっていれば解ける問題ばかりでした。つぎは，円と直線に関する問題を学習します。

平面図形と式　　学習日　月　日

第18日　円と直線

このまえは，円の方程式に関する問題を練習しました。きょうは，円と直線に関する問題を練習することにします。

直線と円との交点，円と直線との接線などは，典型的な問題です。はじめに，まず，傾きが決まっている接線の方程式を求める問題をしてみましょう。

例題 71　　傾きのわかる接線の方程式

直線 $3x+5y=1$ に平行で，円 $x^2+y^2=1$　に接する直線の方程式を求めなさい。

考え方　求める直線の方程式は $3x+5y=1$ に平行ですから，$3x+5y=k$ とおけます。円と接する条件は，点と直線の距離の公式を利用するか，または，2次方程式の判別式を利用します。

解　答　求める直線は $3x+5y=1$ に平行であるから，

$3x+5y=k$　………①とおける。

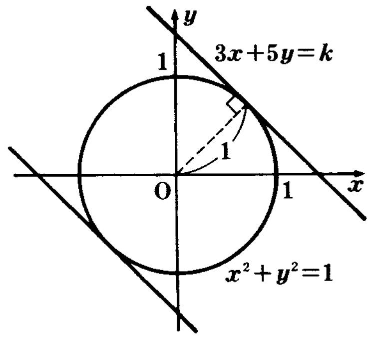
円 $x^2+y^2=1$ の中心 $(0,\ 0)$ と，この直線との距離は円の半径1に等しいから

$$\frac{|3\cdot0+5\cdot0-k|}{\sqrt{3^2+5^2}}=1 \quad \leftarrow 3x+5y-k=0 \text{ との距離}$$

$|k|=\sqrt{34}$　　よって　$k=\pm\sqrt{34}$

ゆえに求める直線の方程式は

$$\boldsymbol{3x+5y=\pm\sqrt{34}}$$



別　解　直線 $3x+5y=1$ の傾きは $-\dfrac{3}{5}$ であるから，求める直線を $y=-\dfrac{3}{5}x+n$ ……①とおき，①を $x^2+y^2=1$ ……②の式へ代入すると

$$x^2+\left(-\frac{3}{5}x+n\right)^2=1$$

整理すると　$34x^2-30nx+25n^2-25=0$　………③

①と②が接するのは，③が重解をもつときであるから，③の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=(15n)^2-34(25n^2-25)=0$$

$225n^2-850n^2+850=0$　　これを解いて　$n^2=\dfrac{34}{25}$　　よって $n=\pm\dfrac{\sqrt{34}}{5}$

ゆえに，求める直線の方程式は　$y=-\dfrac{3}{5}x\pm\dfrac{\sqrt{34}}{5}$

POINT ◆ 点 $(x_1,\ y_1)$ と直線 $ax+by+c=0$ との距離の公式 $\dfrac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

◆ 円 $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$ と直線 $ax+by+c=0$ が接するのは，円の中心 $(\alpha,\ \beta)$ とこの**直線との距離が円の半径 r と等しい**ときで，点と直線との距離の公式が利用できます。

点と直線との距離の公式を利用する解き方は，図形的な意味もわかりますし，解法としてはすっきりしています。トレーニングのはじめの問題は例題と同問です。

トレーニング

1 直線 $3x+5y=1$ に平行で，円 $x^2+y^2=1$ に接する直線の方程式を求めなさい。

2 直線 $2y=6x-7$ に平行で，円 $(x+1)^2+(y+3)^2=25$ に接する直線の方程式を求めなさい。

3 直線 $-2x-3y=5$ に平行で，円 $x^2+y^2=4$ に接する直線の方程式を求めなさい。

4 直線 $y=-\dfrac{1}{3}x+1$ に垂直で，円 $x^2+(y-2)^2=16$ に接する直線の方程式を求めなさい。

5 直線 $3x-4y=1$ に垂直で，円 $(x+4)^2+y^2=9$ に接する直線の方程式を求めなさい。

つぎは，円と直線との接点がわかっているときの接線の方程式の問題です。

例題 72 　　　　**接点のわかる接線の方程式**

円 $x^2+y^2+ax+by+c=0$ 　上の点 $A(x_1,\ y_1)$ における接線の方程式は，次のように表されることを証明しなさい。

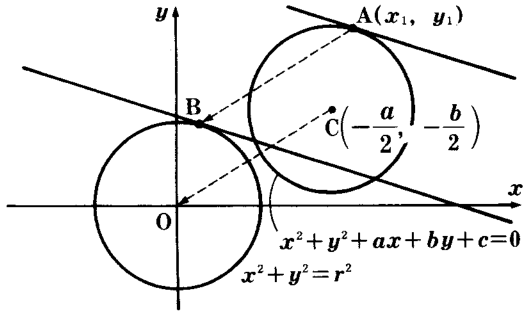
$$x_1x+y_1y+\frac{1}{2}a(x+x_1)+\frac{1}{2}b(y+y_1)+c=0$$

考え方　原点を中心とする円 $x^2+y^2=r^2$ 上の点 $(x_0,\ y_0)$ における接線の公式を利用します。そのために，与えられた円を平行移動して考えます。

解　答　円の方程式 $x^2+y^2+ax+by+c=0$ を変形して

$$\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\left(y+\frac{b}{2}\right)^2=\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-c$$

………①



したがって，この円の中心 C は

$C\left(-\frac{a}{2},\ -\frac{b}{2}\right)$ で，半径を r とすると

$$r=\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-c}$$

点 C が原点に移るような平行移動によって，点 $A(x_1,\ y_1)$ は点 $B\left(x_1+\frac{a}{2},\ y_1+\frac{b}{2}\right)$ に移り，円①は円 $x^2+y^2=r^2$ に移る。

点 $B\left(x_1+\frac{a}{2},\ y_1+\frac{b}{2}\right)$ における円 $x^2+y^2=r^2$ の接線の方程式は

$$\left(x_1+\frac{a}{2}\right)x+\left(y_1+\frac{b}{2}\right)y=r^2 \quad \cdots\cdots\cdots②$$

←点 B での接線の方程式。

また，原点を点 C に移す平行移動により，点 B は点 A に移り，円 $x^2+y^2=r^2$ は，円①に移る。また，直線②は，x 方向に $-\frac{a}{2}$，y 方向に $-\frac{b}{2}$ 平行移動されるから

$$\left(x_1+\frac{a}{2}\right)\left(x+\frac{a}{2}\right)+\left(y_1+\frac{b}{2}\right)\left(y+\frac{b}{2}\right)=r^2 \quad \cdots\cdots\cdots③$$

←点 A での接線。

に移る。③を変形して

$$x_1x+y_1y+\frac{1}{2}a(x+x_1)+\frac{1}{2}b(y+y_1)+\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}=\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-c$$

$$x_1x+y_1y+\frac{1}{2}a(x+x_1)+\frac{1}{2}b(y+y_1)+c=0$$

これが，点 $A(x_1,\ y_1)$ における円①の接線の方程式である。

注　意　原点に中心がある円上の点での接線の公式が使えるように，円①を平行移動させて接線を求めました。ですから，この接線を逆に平行移動させた直線が点 $A(x_1,\ y_1)$ での接線になります。

POINT ◆ 円 $x^2+y^2=r^2$ 上の点 $(x_0,\ y_0)$ における接線の方程式は

$$\boldsymbol{x_0x+y_0y=r^2}$$

例 円 $x^2+y^2=4$ 上の点 $(-1,\ \sqrt{3})$ における接線の方程式は　$\boldsymbol{-x+\sqrt{3}y=4}$

接点がわかっているときの接線の方程式の公式は，覚えておかなくてはいけません。例題では，円を移動して接線の公式が使える形にして解いています。

トレーニング

6 円 $x^2+y^2+ax+by+c=0$　上の点 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$ における接線の方程式は，次のように表されることを証明しなさい。

$$x_1x+y_1y+\frac{1}{2}a(x+x_1)+\frac{1}{2}b(y+y_1)+c=0$$

7 次の円で，与えられた点における接線の方程式を求めなさい。

(1) $x^2+y^2=25$　$(4,\ 3)$　　(2) $x^2+y^2=20$　$(2,\ -4)$

8 円 $x^2+y^2+2x-3y+2=0$ 上にある次の点における接線の方程式を求めなさい。

(1) $(0,\ 2)$　　(2) $(-2,\ 1)$

9 円 $(x+a)^2+(y+b)^2=r^2$ 上の点 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$ における接線の方程式は次のように表されることを証明しなさい。

$$(x_1+a)(x+a)+(y_1+b)(y+b)=r^2$$

10 次の円で，与えられた点における接線の方程式を求めなさい。

(1) $(x-1)^2+(y-2)^2=25$　$(4,\ 6)$

(2) $(x+3)^2+(y-3)^2=13$　$(-1,\ 0)$

円を移動させるところを，しっかり理解してください。つぎは，円外の点から円にひく接線の問題で，これも，典型的な問題です。

例題 73 ― 円外の点からひいた接線の方程式

点 $(2,\ 2)$ から円 $x^2+y^2-6x+8=0$ にひいた接線の方程式を求めなさい。

考え方　円の中心と接線との距離が円の半径に等しいことを利用するか，または，2 次方程式の判別式を利用します。

解答　$x^2+y^2-6x+8=0$ ………①

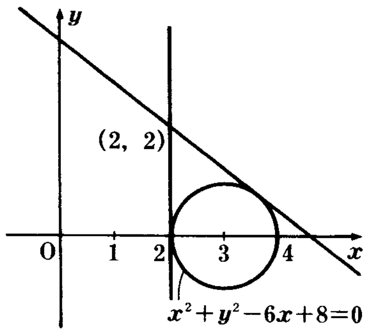
①を変形して　$(x-3)^2+y^2=1$

この円の中心は $(3,\ 0)$ で半径は 1 である。

求める接線は点 $(2,\ 2)$ を通るから

$a(x-2)+b(y-2)=0$ ………②

（a，b の少なくとも一方は 0 でない）とおける。



円の中心と②の直線との距離は，円の半径 1 に等しいから

$$\frac{|a\cdot 3+b\cdot 0-2a-2b|}{\sqrt{a^2+b^2}}=1$$

$$|a-2b|=\sqrt{a^2+b^2} \quad \text{………③}$$

$|a-2b|\geqq 0$，$\sqrt{a^2+b^2}\geqq 0$ であるから，③の両辺を 2 乗しても③と同値である。

$(a-2b)^2=a^2+b^2$

$3b^2-4ab=0$　　$b(3b-4a)=0$

よって，$b=0$ または　$b=\dfrac{4}{3}a$

$b=0$ のとき

②は　$a(x-2)=0$ となり $a\neq 0$ より　$x=2$　　← **a，b は同時には 0 でない。**

$b=\dfrac{4}{3}a$ のとき

②は　$3a(x-2)+4a(y-2)=0$ ………④

ここで $a=0$ なら $b=0$ となるから，$a\neq 0$ である。

ゆえに④より　$3(x-2)+4(y-2)=0$　　$3x+4y=14$

したがって，求める接線の方程式は　$\boldsymbol{x=2}$ と $\boldsymbol{3x+4y=14}$　である。

別解　円 $x^2+y^2-6x+8=0$ ……①の中心は $(3,\ 0)$ で半径は 1 であるから，y 軸に平行な接線は $x=2$ と $x=4$ である。このうち $x=2$ は点 $(2,\ 2)$ を通る。

また，y 軸に平行でない接線を $y-2=m(x-2)$ ……②とおくと，①，②から y を消去して

$x^2+(mx-2m+2)^2-6x+8=0$

$(m^2+1)x^2-2(2m^2-2m+3)x+4m^2-8m+12=0$ ………③

①と②が接するのは，③の判別式 D が 0 のときであるから

$$\frac{D}{4}=(2m^2-2m+3)^2-(m^2+1)(4m^2-8m+12)=0$$

$$4m^4+4m^2+9-8m^3-12m+12m^2-4m^4+8m^3-16m^2+8m-12=0$$

$$4m+3=0 \qquad \text{よって} \quad m=-\frac{3}{4}$$

ゆえに，②より　$3x+4y=14$

したがって，求める接線の方程式は　$\boldsymbol{x=2}$ と $\boldsymbol{3x+4y=14}$ である。

POINT

◆ 点 $(x_0,\ y_0)$ を通る直線は　$\boldsymbol{a(x-x_0)+b(y-y_0)=0}$

点 $(x_0,\ y_0)$ を通って傾き m の直線は　$\boldsymbol{y-y_0=m(x-x_0)}$

とおくことができます。

◆ 円外の点からひいた円の接線の方程式を求めるには，**円の中心と接線との距離が円の半径に等しい**とするか，**2次方程式の判別式**を利用します。

解答のような方法で解いてもいいですし，別解の方法で解いてもかまいません。では，トレーニングの問題をしておきましょう。

トレーニング

11 点 $(2,\ 2)$ から円 $x^2+y^2-6x+8=0$ にひいた接線の方程式を求めなさい。

12 点 $(1,\ 3)$ から円 $x^2+y^2=5$ にひいた接線の方程式を求めなさい。

13 点 $(10,\ 5)$ から円 $x^2+y^2=25$ にひいた接線の方程式を求めなさい。

14 点 $(-5,\ -1)$ から円 $x^2+y^2-2y-3=0$ にひいた接線の方程式を求めなさい。

できましたね。こんどは，直線と円の交点についての問題です。

例題 74 ―――― 直線と円の交点

直線 $y=2x+k$ と円 $x^2+y^2=4$ について，次の問いに答えなさい。

(1) 2点 P，Q で交わるときの k の値の範囲を求めなさい。

(2) 弦 PQ の長さが 2 となる k の値を求めなさい。

考え方 (1) 直線と円が交わる条件は，実数解をもつことです。2次方程式が実数解をもつための条件を利用します。

(2) 点 P，Q の x 座標を x_1，x_2 とし，点 P，Q が直線 $y=2x+k$ 上にあることから弦 PQ の長さを計算してみましょう。

解　答 (1) $y=2x+k$ ………①，　$x^2+y^2=4$ ………②

①を②へ代入して

$$x^2+(2x+k)^2=4$$

$$5x^2+4kx+k^2-4=0 \quad \cdots\cdots\cdots ③$$

← y を消去。x についての2次方程式。

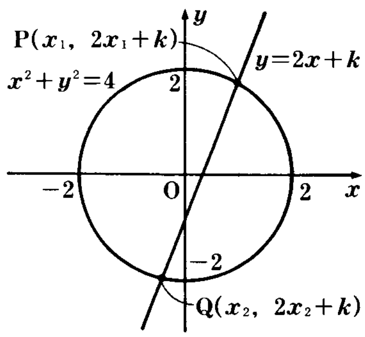
①と②が2点で交わるのは，③が異なる実数解をもつときであるから，③の判別式を D とおくと

$$\frac{D}{4}=4k^2-5k^2+20>0 \qquad よって，k^2<20$$

ゆえに，求める k の値の範囲は　$\boldsymbol{-2\sqrt{5}<k<2\sqrt{5}}$

(2) P，Q は①上にあるから，P$(x_1,\ 2x_1+k)$，Q$(x_2,\ 2x_2+k)$ とすると

$$\begin{aligned}PQ^2&=(x_2-x_1)^2+4(x_2-x_1)^2\\&=5(x_2-x_1)^2\\&=5\{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2\}\end{aligned}$$



x_1，x_2 は③の2つの解であるから，解と係数の関係より

$$x_1+x_2=-\frac{4}{5}k, \qquad x_1x_2=\frac{k^2-4}{5}$$

ゆえに

$$PQ^2=5\left(\frac{16}{25}k^2-\frac{4k^2-16}{5}\right)=\frac{80-4k^2}{5}$$

PQ＝2 より　$\dfrac{80-4k^2}{5}=4$　すなわち $k^2=15$

ゆえに，$\boldsymbol{k=\pm\sqrt{15}}$

POINT

◆ $y=ax+b$ と $x^2+y^2=r^2$ が**異なる2点で交わる**ための条件は，この2式から y を消去した x についての2次方程式 $x^2+(ax+b)^2=r^2$ が**異なる2つの実数解をもつ**ことなので，**判別式が $D>0$** となります。

◆ 2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解が x_1，x_2 のとき

$$\boldsymbol{x_1+x_2=-\frac{b}{a} \qquad x_1x_2=\frac{c}{a}} \qquad (解と係数の関係)$$

が成り立ちます。

直線と円の交点に関する問題は，2次方程式の解の問題に帰着されます。トレーニングでは，応用的な問題もとりあげます。

トレーニング

15 直線 $y=2x+k$ と円 $x^2+y^2=4$ について，次の問いに答えなさい。

(1) 2点P，Qで交わるときの k の値の範囲を求めなさい。

(2) 弦PQの長さが2となる k の値を求めなさい。

16 直線 $y=kx-2$ と円 $x^2+y^2=1$ があるとき

(1) 2点P，Qで交わるときの k の値の範囲を求めなさい。

(2) 弦PQの長さが1となる k の値を求めなさい。

17 円 $(x-3)^2+y^2=4$ と，原点を通る直線 $y=mx$ との交点をP，Qとするとき，OP，OQの積が一定であることを証明しなさい。

18 直線 $x=my+6$ と円 $x^2+y^2=4$ が交わってできる弦PQの中点Mの座標を m で表しなさい。

19 実数 a，b，c が条件 $3(a^2+b^2)=4c^2$，$c\neq 0$ をみたすとき，次の問いに答えなさい。

(1) 直線 $ax+by+c=0$ は，円 $x^2+y^2=1$ と異なる2点P，Qで交わることを示しなさい。

(2) 弦PQの長さを求めなさい。

つぎは，きょう最後の例題で，円と円の位置関係の問題です。では，やってみましょう。

例題 75 ―― 2つの円の位置関係

2つの円 $x^2+y^2-6x+2y+6=0$，$x^2+y^2-14x-4y+44=0$ について，次の問いに答えなさい。

(1) この2つの円は外接していることを示しなさい。

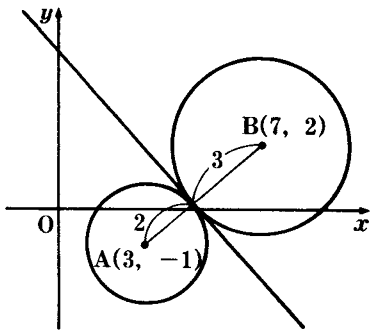
(2) 接点における共通接線の方程式を求めなさい。

考え方 (1) 2つの円の位置関係を調べるのですから，中心間の距離，2つの円の半径を比べればよいのです。

(2) 共通接線は，2つの円の中心を結んでできる直線に垂直です。このことを使います。

解　答 (1) $x^2+y^2-6x+2y+6=0$ ………①

$x^2+y^2-14x-4y+44=0$ ………②



①を変形して

$(x-3)^2+(y+1)^2=4$

ゆえに，円①の中心を A，半径を r_1 とすると，A(3, −1)，$r_1=2$ である。

また②を変形して

$(x-7)^2+(y-2)^2=9$

ゆえに，円②の中心を B，半径を r_2 とすると B(7, 2)，$r_2=3$ である。

このとき

$\mathrm{AB}=\sqrt{(7-3)^2+(2+1)^2}=5$ ←円の中心間の距離

$r_1+r_2=5$ ←半径の和

したがって，$\mathrm{AB}=r_1+r_2$ となり円①と円②は外接する。

(2) 2つの円の接点を $\mathrm{C}(x_1,\ y_1)$ とすると，円①と円②の半径が2と3であるから，点 C は AB を 2 : 3 に内分する点である。よって

$$x_1=\frac{3\cdot3+2\cdot7}{5}=\frac{23}{5},\qquad y_1=\frac{3\cdot(-1)+2\cdot2}{5}=\frac{1}{5}$$

また，線分 AB の傾きは $\dfrac{3}{4}$ である。

共通接線は，点 C を通り AB に垂直な直線であるから，その方程式は

$$y-\frac{1}{5}=-\frac{4}{3}\left(x-\frac{23}{5}\right)$$ ←$\dfrac{3}{4}\cdot\left(-\dfrac{4}{3}\right)=-1$。垂直条件。

すなわち，　$\mathbf{4x+3y=19}$　である。

POINT ◇ 中心が A で半径 r_1 の円と，中心が B で半径 r_2 の円の位置関係

$\mathrm{AB}=r_1+r_2 \Longleftrightarrow$ 外接する

$\mathrm{AB}=|r_1-r_2| \Longleftrightarrow$ 内接する

◇ 2つの円が接しているとき，接点における共通接線は，2つの円の**中心を結ぶ直線に垂直**になります。

円と円との位置関係では，２つの円の中心間の距離と，半径の長さが考えるときの基本です。図形的に見れば，わかりますね。では，トレーニングしましょう。

トレーニング

20 ２つの円　$x^2+y^2-6x+2y+6=0$，$x^2+y^2-14x-4y+44=0$ について，次の問いに答えなさい。

(1)　この２つの円は外接していることを示しなさい。

(2)　接点における共通接線の方程式を求めなさい。

21 ２つの円 $x^2+y^2+14x-8y+1=0$，$x^2+y^2-10x+2y+1=0$ について，次の問いに答えなさい。

(1)　この２つの円は外接していることを示しなさい。

(2)　接点における共通接線の方程式を求めなさい。

22 ２つの円 $x^2+y^2-2ax-2y+1=0$ と $x^2+y^2-2x-2ay+1=0$ が接するように正の定数 a の値を定めなさい。

23 円 $(x-a)^2+y^2=1$ と円 $(x+a)^2+y^2=1$ が共有点をもたないための条件を求めなさい。

24 円 $x^2+y^2-4ax-2ay+20a-25=0$ と円 $x^2+y^2=5$ が接するように a の値を定めなさい。

（東京工大）

きょうは，円と直線，円と円の問題をしました。ここに出てきた問題は，いずれも，基本パターンですから，かならずできるようにしておきましょう。

第 19 日	平面図形と式　　学習日　　月　　日
	不等式の表す領域

きょうは，不等式の表す領域について学習します。

いろいろな不等式で，その表す領域や，不等式で表された条件のもとでの最大・最小の問題を練習してみましょう。

はじめは，まず，不等式で表された領域を図示する問題です。

例題 76 ——— 不等式の領域

x，y を実数とするとき，不等式 $|x|+|x-y|\leqq 1$ の表す領域を図示せよ。　(長崎大)

考え方　絶対値記号をはずすため，$x\geqq 0$，$x<0$ と $x\geqq y$，$x<y$ の場合に分けて考えます。

解答　(i)　$x\geqq 0$ ……① かつ $y\leqq x$ ……②のとき

$x+x-y\leqq 1$ より $y\geqq 2x-1$ ………③

①，②，③をみたす領域は図のⓘの部分である。

(ii)　$x\geqq 0$ ……④ かつ $y>x$ ……⑤のとき

$x-x+y\leqq 1$ より $y\leqq 1$ ………⑥

④，⑤，⑥をみたす領域は図のⓘⓘの部分である。

(iii)　$x<0$ ……⑦ かつ $y\leqq x$ ……⑧のとき

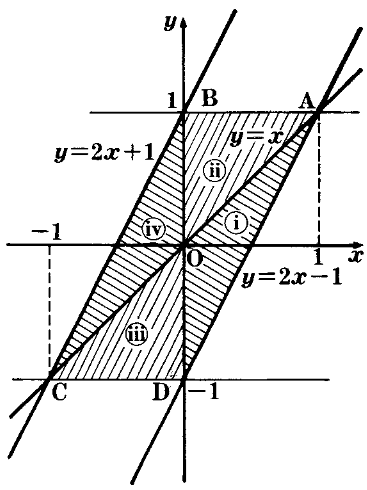
$-x+x-y\leqq 1$ より $y\geqq -1$ ………⑨

⑦，⑧，⑨をみたす領域は図のⓘⓘⓘの部分である。

(iv)　$x<0$ ……⑩ かつ $y>x$ ……⑪のとき

$-x-x+y\leqq 1$ より $y\leqq 2x+1$ ………⑫

⑩，⑪，⑫をみたす領域は図のⓘⓥの部分である。



ゆえに，求める領域は，図の平行四辺形 ABCD の周および内部である。

POINT

◆ $|a|$ の絶対値のはずし方は，$a\geqq 0$ と $a<0$ の場合に分けて

$a\geqq 0$ のとき $|a|=a$,　$a<0$ のとき $|a|=-a$

とします。

◆ $y>f(x)$ の領域は，$y=f(x)$ のグラフの**上側**

$y<f(x)$ の領域は，$y=f(x)$ のグラフの**下側**

絶対値を含んだ形の不等式，積や商の形の不等式など，いろいろな不等式の領域を図示することをトレーニングします。

トレーニング

1 x，y を実数とするとき，不等式 $|x|+|x-y|\leqq 1$ の表す領域を図示せよ。　（長崎大）

2 次の不等式の表す領域を図示しなさい。

(1) $(x-2y+3)(2x+y-1)>0$　　(2) $\dfrac{x^2+y^2-4}{xy}\leqq 0$

3 次の不等式の表す領域を図示しなさい。

(1) $y\geqq\dfrac{1}{x}$，$y<x$　　(2) $x^2+y^2-3x-|x-2y|\leqq -1$

4 次の不等式の表す領域を図示しなさい。

(1) $|x+y|\leqq 1$　　(2) $x^2+y^2\leqq 2|x|+2|y|$

5 x，y を実数とするとき，不等式 $|x+2y|+|x-y|\leqq 6$ の表す領域を図示しなさい。

つぎは，点が存在する範囲を示す問題です。

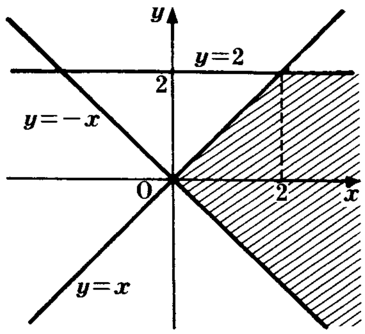
例題 77 — **点の存在する範囲**

$x \geqq 0$，$y \geqq 0$，$x-y \leqq 2$ のとき　点 $(x+y,\ x-y)$ の存在する範囲を図示しなさい。

考え方　点 $(x+y,\ x-y)$ の x 座標を X，y 座標を Y とおき，x，y を X，Y で表して，条件の不等式へ代入します。

解　答　$x+y=X$，$x-y=Y$ とおくと

$$x=\frac{X+Y}{2},\quad y=\frac{X-Y}{2}$$



$x \geqq 0$ より　$\dfrac{X+Y}{2} \geqq 0$　　ゆえに　$Y \geqq -X$ ………①

$y \geqq 0$ より　$\dfrac{X-Y}{2} \geqq 0$　　ゆえに　$Y \leqq X$ ………②

$x-y \leqq 2$ より　$\dfrac{X+Y}{2}-\dfrac{X-Y}{2} \leqq 2$

ゆえに　$Y \leqq 2$　………③

①，②，③より，点 $(x+y,\ x-y)$ の存在する範囲は，3 つの不等式

$y \geqq -x$，$y \leqq x$，$y \leqq 2$

をみたす領域で，図の斜線の部分である。ただし，境界を含む。

POINT　◆ 点 $(f(x,\ y),\ g(x,\ y))$ の存在する範囲を求めるには，$\boldsymbol{X=f(x,\ y)}$，$\boldsymbol{Y=g(x,\ y)}$ とおいて，x，y を X，Y で表し，与えられた条件に x，y を代入することにより，X，Y の式を作ればよい。

不等式が与えられていて，その条件のもとで，点が存在する範囲を調べているわけです。置き換えをして求めていくことになります。

トレーニング

6　$x \geqq 0$，$y \geqq 0$，$x-y \leqq 2$ のとき　点 $(x+y,\ x-y)$ の存在する範囲を図示しなさい。

7 平面上の点 $P(u,\ v)$ に，$x=u+v$，$y=-2u+v$ によって定まる点 $Q(x,\ y)$ を対応させるとき，点 Q が集合 $\{(x,\ y) \mid |x| \leqq 2,\ |y| \leqq 2\}$ に属するような点 P が存在する範囲を図示しなさい。

8 $x \geqq 0$，$y \geqq -1$，$x-y \geqq -2$ のとき，点 $(x+y,\ 2x-y)$ の存在する範囲を図示しなさい。

9 $p \geqq 0$，$q \geqq 0$，$r \geqq 0$，$p+q+r=1$ のとき，$x=p+3q+4r$，$y=2p+q+3r$ で表される点 $(x,\ y)$ の存在する範囲を図示しなさい。

10 u，v を実数とするとき，$x=u+v$，$y=uv$，$u^2+uv+v^2 \leqq 1$ なる 3 つの式を同時にみたす点 $(x,\ y)$ の存在する範囲を図示しなさい。

できましたね。つぎは，点の集合の包含関係を問う例題です。

例題 78 　　　　**集合の包含関係**

$A=\{(x,\ y)\mid x^2+y^2\leqq 1\}$，$B=\{(x,\ y)\mid y\geqq x^2+k\}$

$C=\{(x,\ y)\mid y\geqq x+k\}$

について，次の問いに答えなさい。

(1) $A\subseteqq B$ であるための条件を求めなさい。

(2) $A\cap C$ が空集合であるための条件を求めなさい。 （奈良女大）

考え方　(1) A は円の周と内部，B は放物線とその上側の領域を表します。ここでは，円が放物線の内部に全部含まれる場合を求めればよいのです。放物線と円が接するときを調べます。

(2) C は直線 $y=x+k$ とその上側の領域です。この領域と円が共有点をもたなければいいわけです。円とこの直線が接するときが1つのポイントです。

解　答　(1) $x^2+y^2=1$ ……①　　$y=x^2+k$ ……②

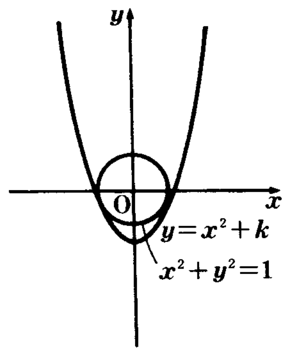
①と②が図のように接するのは，

$y^2+y-k-1=0$ ………③

が重解をもつときである。

ゆえに，③の判別式を D とおくと

$D=1+4k+4=0$　　$k=-\dfrac{5}{4}$



$A\subseteqq B$ となるのは，円①が放物線②の上側（接するときを含めて）にあるときであるから

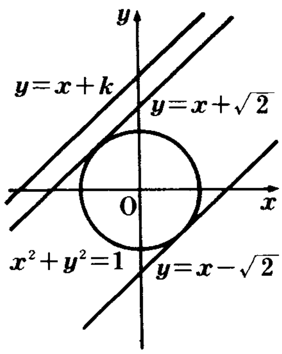
$\boldsymbol{k\leqq -\dfrac{5}{4}}$

の場合である。

(2) $y=x+k$ ………④

①と④が接するのは，円の中心 (0，0) と直線④との距離が1に等しいときであるから

$\dfrac{|k|}{\sqrt{2}}=1$　　ゆえに，$k=\pm\sqrt{2}$



$A\cap C$ となるのは，円①が直線④の下側（接するときを含めない）にあるときであるから

$\boldsymbol{k>\sqrt{2}}$

の場合である。

POINT　◆ 円 $x^2+y^2=1$ と 放物線 $y=x^2+k$ が2点で接するための条件を求めるには，2つの方程式から x^2 を消去して y の2次方程式を作り，この**2次方程式が重解をもつ**ための条件を求めます。

◆ 領域の包含関係を調べるには，まず図形的に把握することが大切です。放物線と円，円と直線などが接するときが，含む，含まれないのポイントになります。

集合の記号を使って表されていても，不等式の領域となんら変わりません。含まれるとか含まれな

いとか，領域を考えればよいのです。

トレーニング

11 $A=\{(x,\ y)\mid x^2+y^2\leqq 1\}$，$B=\{(x,\ y)\mid y\geqq x^2+k\}$

$C=\{(x,\ y)\mid y\geqq x+k\}$

について，次の問いに答えなさい。

(1) $A\subseteqq B$ であるための条件を求めなさい。

(2) $A\cap C$ が空集合であるための条件を求めなさい。 (奈良女大)

12 座標平面上の点の集合

$A=\{(x,\ y)\mid x^2+y^2\leqq r^2,\ r>0\}$，$B=\{(x,\ y)\mid y\leqq -x^2+2\}$，

$C=\{(x,\ y)\mid y\geqq 2x+2\}$

について，次の問いに答えなさい。

(1) $A\subset B$ であるための条件を求めなさい。

(2) $A\cap C$ が空集合であるための条件を求めなさい。

13 $y\geqq|x-a|$ をみたす点 $(x,\ y)$ の集合を A，$y\leqq -|x|+b$ をみたす点 $(x,\ y)$ の集合を B とし，$A\cap B$ は空集合ではないとする。このとき，a，b の関係式を求めなさい。

14 座標平面上の点の集合

$A=\{(x,\ y)\mid 2x+y\geqq 10,\ x>0,\ y>0\}$

$B=\{(x,\ y)\mid 3x+4y\geqq 25,\ x>0,\ y>0\}$

について，集合 $A\cap B$ を図示しなさい。

15 不等式 $x+y+1\geqq 0$ をみたす点 $(x,\ y)$ の集合を A，定数 p，q に対して不等式 $y\geqq\dfrac{1}{2}x^2+px+q$ をみたす点 $(x,\ y)$ の集合を B とするとき，$A\supset B$ であるための p，q の条件を求めなさい。 (宮崎大)

領域を表してしまえば，すぐにわかりましたね。つぎは，正領域・負領域の考え方によって問題を解いていきます。

例題 79 　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　**正領域，負領域**

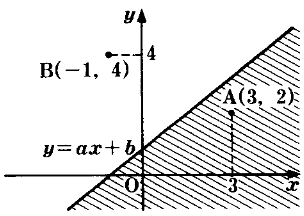
直線 $y=ax+b$ 　が 2 点 A(3, 2), B(−1, 4) の間を通っている。

(1) a と b の関係を求めよ。

(2) 点 P(a, b) の集合を図示せよ。

考え方　(1) 直線 $y=ax+b$ が 2 点 A，B の間を通っているということは，点 A と B が $y>ax+b$，$y<ax+b$ のどちらかの領域に別々に分かれて存在しているということです。

(2) (1)で求めた不等式を図示すればよいのです。



解　答　(1) 点 A(3, 2) が領域 $y>ax+b$ にあるとき

点 B(−1, 4) は領域 $y<ax+b$ にあるから　　　**←A と B は別の領域に存在。**

$3a+b-2<0$ 　かつ　 $-a+b-4>0$ 　………①

点 A が領域 $y<ax+b$ にあるとき

点 B は領域 $y>ax+b$ にあるから

$3a+b-2>0$ 　かつ　 $-a+b-4<0$ 　………②

①，②より，直線 $y=ax+b$ が点 A と B の間を通るための条件は

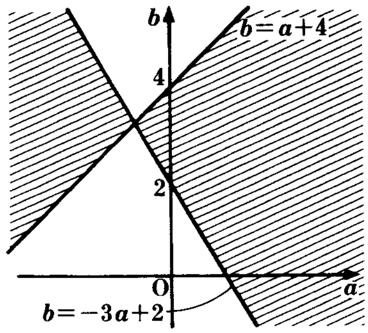
$\boldsymbol{(b+3a-2)(b-a-4)<0}$　　　**←①，②をまとめると，積が負となる。**

(2) (1)より P(a, b) の集合は

$\begin{cases} b<-3a+2 \\ b>a+4 \end{cases}$ 　または　 $\begin{cases} b>-3a+2 \\ b<a+4 \end{cases}$

をみたす領域である。

ゆえに，点 P の存在する範囲は，図の斜線部分である。ただし，境界は含まない。



POINT　◆　直線 $y=ax+b$ が，2 点 A，B の間を通るための条件は

点 A，B が領域 $y>ax+b$ と領域 $y<ax+b$ に**分かれて存在する**ことと同値です。

---

2 点の間を通っているということを，2 点が 2 つの領域に分かれて存在している，ととらえています。ある点，たとえば原点を不等式に代入したとき，その不等式が成り立てば，原点のある側がその不等式をみたす領域です。

トレーニング

16 直線 $y=ax+b$ が2点A(3, 2), B(−1, 4)の間を通っている。

(1) aとbの関係を求めよ。

(2) 点P$(a,\ b)$の集合を図示せよ。

17 直線 $y=ax+b$ が2点A(2, −2), B(−5, 1)の間を通っている。

(1) aとbの関係を求めなさい。

(2) 点P$(a,\ b)$の集合を図示しなさい。

18 関数 $y=\dfrac{1}{x}$ のグラフ上の2点を結ぶ線分の中点となるような点全体の集合を図示しなさい。　(名古屋大)

19 放物線 $y=x^2$ 上を動く点をP, 放物線 $y=x^2-2x+2$ 上を動く点をQとするとき, 線分PQの中点の動く範囲を図示しなさい。　(名古屋工業大)

では，つぎに，不等式の表す領域の最後の例題として，領域内での最大・最小の問題をしておきましょう。

例題 80 ―― 領域における最大・最小

$y=ax+b$ は $x=1$ のとき $1\leqq y\leqq 2$，$x=2$ のとき $2\leqq y\leqq 4$ となるとき，

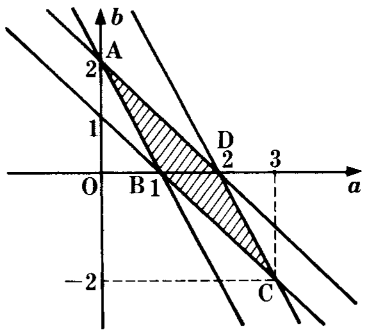
(1) $x=3$ のときの y の範囲を求めなさい。

(2) $x=p$ のとき，$-5\leqq y\leqq k$ となった。このときの p と k の値を求めなさい。 (早稲田大)

考え方 与えられた条件から，点 $(a,\ b)$ のとり得る値の範囲がわかりますから，ab 座標平面上での領域における最大・最小の問題としてとらえます。

解 答 (1) $x=1$ のとき $1\leqq y\leqq 2$ より $1\leqq a+b\leqq 2$ ………①

$x=2$ のとき $2\leqq y\leqq 4$ より $2\leqq 2a+b\leqq 4$ ………②



①，②をみたす点 $(a,\ b)$ の存在する範囲は，図の斜線部分で境界を含む。

$x=3$ のとき $y=3a+b$ より

$b=-3a+y$ ………③

$x=3$ のときの y の値の範囲を求めるには，直線③が，図の斜線の部分と共有点をもつように y の値の範囲を求めればよい。

←傾き -3。パラメータ y の直線とみる。

直線③が点 A$(0,\ 2)$ を通るとき $y=2$

直線③が点 C$(3,\ -2)$ を通るとき $-2=-9+y$ より $y=7$ ←このとき y 最大。

したがって，求める y の値の範囲は **$2\leqq y\leqq 7$**

(2) $x=p$ のとき $y=ap+b$ より $b=-pa+y$ ………④

y の値が増加するにしたがって，直線④は上方に平行移動する。

(i) $-p\leqq -2$ すなわち $p\geqq 2$ のとき。 ←傾き p に注目して場合分け。

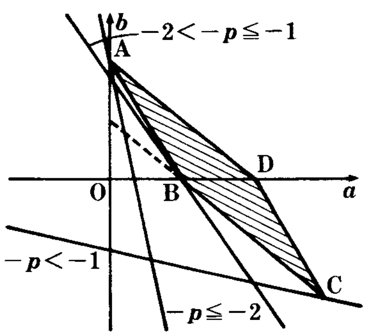
直線④が点 A$(0,\ 2)$ を通るとき y は最小となる。 ←y の最小値を調べている。

このとき

$2=0+y$ すなわち $y=2$

ところが，条件から y の最小値は -5 であるから，これは不適である。

(ii) $-2<-p\leqq -1$ すなわち $1\leqq p<2$ のとき。



直線④が点 B$(1,\ 0)$ を通るとき y は最小となる。

このとき

$0=-p+y$ よって $y=p=-5$

ところが，$p=-5$ は $1\leqq p<2$ をみたさないので不適である。

(iii) $-p>-1$ すなわち $p<1$ のとき。

直線④が点 C$(3,\ -2)$ を通るとき y は最小とな

る。このとき

$-2=-3p+y$　よって　$y=3p-2=-5$

ゆえに　$p=-1$

$p=-1$ は，$p<1$ をみたすから条件に適する。

このとき，直線④が点 A(0, 2) を通るとき y は最大値 k をとるから

$y=2$　すなわち　$k=2$

以上より，求める p と k の値は　$\boldsymbol{p=-1}$，$\boldsymbol{k=2}$ である。

POINT　◆　x と y についての不等式が与えられているとき，この条件のもとで $px+qy$ の最大値，最小値を求めるには，$\boldsymbol{px+qy=k}$ とおいて，この方程式の表す直線と不等式の表す領域が**共有点をもつための条件**を調べます。

領域での最大・最小は領域と共有点をもつという条件で，パラメーターを動かしてみるのです。では，トレーニングしましょう。

トレーニング

20　$y=ax+b$ は $x=1$ のとき $1\leqq y\leqq 2$，$x=2$ のとき $2\leqq y\leqq 4$ となるとき，

(1)　$x=3$ のときの y の範囲を求めなさい。

(2)　$x=p$ のとき，$-5\leqq y\leqq k$ となった。このときの p と k の値を求めなさい。　（早稲田大）

21(1)　次の 4 つの不等式 $y\leqq 2x+1$，$y\geqq -x+1$，$y\geqq 3x-11$，$y\leqq -2x+9$ を同時にみたす点 P$(x,\ y)$ の存在する範囲を図示しなさい。

(2)　点 P$(x,\ y)$ が上の範囲を動くとき，$y-x^2$ の最大値，最小値およびそれぞれの場合における x，y の値を求めなさい。　（島根大）

22　点 $(x,\ y)$ が不等式 $2x^2-xy+x-y^2+5y-6\geqq 0$ をみたす領域を動いているとき，x^2+y^2 の最小値を求めなさい。　（弘前大）

23 2つの正の数 x，y が $2x+y \leqq 4$，$3x+5y \leqq 15$ をみたすとき

(1) $x+y$ の最大値を求めなさい。

(2) xy の最大値および，そのときの x，y の値を求めなさい。 (岐阜大)

24 30万円以上の予算で，ある会合を計画した。男子の出席者数は女子より多いがその2倍は越えないと見込み，会費を男子7千円，女子6千円とした。この会合が実施できるための最低出席者数は男女合わせて何名か。 (金沢大)

きょうは，不等式の領域にかんする問題をとりあげて学習しました。これで，平面図形と式はおしまいです。つぎは，復習日です。

第 **20** 日	平面図形と式　　　学習日　月　日
	演習問題

きょうは，平面図形と式の復習をします。平面図形と式に関する問題を，いろいろ集めてありますから，ここで，いままでの学習をまとめるつもりで，問題練習してみましょう。全部できれば，平面図形と式は卒業です。

では，問題をはじめなさい。

1 △ABC の辺 BC またはその延長上に点 D をとり，次の式が成り立つようにしたとき，点 D の位置を求めなさい。

$$AB^2+AC^2=2AD^2+BD^2+CD^2$$

2 2 直線 $y=ax+a$　………①，$(a-2)x+(3a-4)y+6=0$　………② があります。a が変化するとき，直線群①と②は，それぞれ定点を通ることを証明しなさい。また，直線①と②とが直交するとき，a の値を求めなさい。　（福岡大）

3 2直線 $x-2y+3=0$，$x-y+1=0$ の交点を通り，かつ，原点からの距離が1に等しい直線の方程式を求めなさい。

4 次の問いに答えなさい。

(1) 円 $x^2+y^2-2x+4y+1=0$ と直線 $x+2y+2=0$ との2つの交点と点 $(2,\ 3)$ とを通る円の方程式を求めなさい。

(2) (1)の円と直線が交わってできる弦を直径とする円の方程式を求めなさい。

5 方程式　$x^2+y^2=|x|+|y|$　の表す図形の面積を求めなさい。

6 円 $x^2+y^2=25$ の外部の点 A$(1,\ -7)$ からこの円にひいた2つの接線は直交することを証明しなさい。

7 直線 $y=mx+2$ が 2点 A(3, 2), B(−1, 4) を結ぶ線分と A, B 以外の点で交わるような m の値の範囲を求めなさい。

8 次の問いに答えなさい。

(1) $|X|+|Y|\leqq 2$ をみたす点 P(X, Y) の存在する範囲を XY 平面に図示しなさい。

(2) $x=X-Y$, $y=XY$ とおく。点 P(X, Y) が(1)の範囲を動くとき，点 Q(x, y) の動く範囲を求め，これを xy 平面に図示しなさい。 (北海道大)

9 2直線　$x-my=0$　………①，$mx+y-2m-4=0$　………②の交点Pは，実数 m が変化するとき，どんな軌跡をえがきますか。

10 a を実数とするとき，直線 $y=2ax-a^2-2a-2$　が通り得ない範囲を図示しなさい。

これで，第1巻の学習はおしまいです。よくがんばりましたね。第2巻は，三角比，三角関数の学習からはじめます。この調子で学習を進めていきましょう。

memo

大学受験デイリープログラム100日　数学・理系

＊一部変更することがあります

各巻・各日の学習内容

学習内容の細目は，おもなものに限って示してあります

● 第1巻　数と式，方程式・不等式，関数，平面図形と式

1 **整式の整理**　乗法公式による展開整理，いろいろな因数分解，整数問題。
2 **整式の除法**　わり算の実行，剰余定理，完全平方式の利用，因数定理。
3 **分数式**　部分分数形利用の計算，比例式利用，繁分数式など。
4 **無理数の計算**　平方根の性質と計算，2重根号と分母の有理化，式の値。
5 **演習問題**　数と式に関する演習問題。因数定理，無理式の計算，整数問題など。
6 **2次方程式**　解の公式，解と係数の関係，2次方程式の作成など。
7 **高次方程式**　相反方程式，3次方程式の解と係数の関係，複素数解など。
8 **不等式の解法**　絶対値を含む不等式，連立，高次，無理不等式。
9 **不等式の証明**　相加・相乗平均，コーシー・シュワルツの不等式，大小比較。
10 **演習問題**　方程式・不等式の演習問題。剰余定理，解と係数の関係など。
11 **2次関数**　ガウス記号を含む関数，2次関数のグラフ，2次関数の作成。
12 **最大・最小**　2次関数の最大・最小，区間つきの最大・最小など。
13 **グラフと方程式の解**　解の配置，異なる実数解をもつ条件，交点の個数。
14 **分数関数・無理関数**　分数関数のグラフ，分数不等式，無理関数のグラフ。
15 **演習問題**　関数に関する演習問題。最大値・最小値，方程式の解の条件。
16 **点と直線**　点の座標，分点表示，直線の傾きの範囲，定点を通る直線。
17 **円**　円の方程式，半円のグラフ，円の方程式の決定，アポロニウスの円。
18 **円と直線**　傾きのわかる接線，接点のわかる接線，直線と円の交点。
19 **不等式の表す領域**　点の存在する範囲，正・負領域，領域内での最大・最小。
20 **演習問題**　平面図形に関する演習問題。点と直線の距離，交点の軌跡など。

● 第2巻　三角・指数・対数関数，2次曲線，ベクトル

21 **三角比・三角関数の計算**　三角比の値，変換式，三角関数の相互関係など。
22 **三角方程式・不等式**　単純形・2次形・絶対値形・連立形などの方程式・不等式。
23 **正弦定理・余弦定理**　三角形の解法，三角形の形状，最大・最小，加法定理。
24 **三角関数の応用**　三角形の面積，三角形の作成条件，内接円・外接円。
25 **演習問題**　三角比・三角関数に関する演習問題。正弦・余弦定理，形状など。
26 **指数関数**　指数関数のグラフ，指数の計算，指数を用いた式の値など。
27 **対数の計算**　対数の計算，対数の性質，最大・最小，けた数。
28 **対数関数**　対数関数のグラフ，対数で表された曲線のグラフ，対数の大小。
29 **指数・対数の方程式・不等式**　指数方程式・不等式，対数方程式・不等式
30 **演習問題**　指数・対数関数に関する演習問題。けた数，方程式，不等式など。
31 **放物線**　放物線の定義，放物線の性質，直交接線，軌跡など。
32 **だ円**　だ円の定義，接線，パラメータ表示，軌跡がだ円になるもの。
33 **双曲線**　双曲線のグラフ，双曲線の方程式の決定，双曲線の性質，接線。
34 **2次曲線と直線**　2次曲線と直線の交点，だ円と直線(弦の長さ・中点)。
35 **演習問題**　2次曲線に関する演習問題。領域内での最大・最小など。
36 **ベクトルの演算**　1次独立，分点表示，図形への応用，係数比較など。
37 **内積**　成分を使っての内積，ベクトルの大きさ，図形へのあてはめ。
38 **平行・垂直**　1直線上にある条件，垂直の基本，内積を使っての証明など。
39 **図形への応用**　ベクトル方程式(直線・円)，領域，最大・最小。
40 **演習問題**　ベクトルに関する演習問題。演算，係数比較，四面体の体積。

● 第3巻　空間図形，行列・1次変換，数列

41 **空間図形**　空間座標，正四面体，内分，・外分点，四面体の重心。
42 **直線**　直線の方程式，直線までの距離，2直線の位置関係，2直線の交点。
43 **平面**　平面の方程式，2平面の交線，直線を含む平面など。
44 **直線と平面**　対称な点，2平面の交線と直線，平面に垂直な平面。
45 **球**　球による直線の切り取り，球の中心，球に接する平面の方程式。
46 **演習問題**　空間図形に関する演習問題。2直線の共通垂線の方程式など。
47 **行列の計算**　相等・和，積の法則，要素比較，行列の要素を使わない計算。
48 **逆行列**　逆行列をもたない条件，連立方程式，逆行列の計算。
49 **ケーリー・ハミルトンの公式**　公式の計算，$a+d$，$ad-bc$の値，応用など。
50 **A^nの計算**　固有値の性質，固有値を利用したA^nの計算。
51 **1次変換**　ベクトルと1次変換，合成，点・直線の変換など。
52 **回転・対称移動**　点・直線の回転，2次曲線の回転，大きさ不変の写像。
53 **演習問題**　行列・1次変換に関する演習問題。演算，回転・対称移動など。
54 **等差・等比数列**　等差数列の条件，等差数列の和，等比・等差混合問題。
55 **Σの計算**　単純形・応用，ΣΣの計算，部分分数形の計算など。
56 **階差数列・群数列**　等差となる階差数列，等比となる階差数列，群数列。
57 **いろいろな数列**　2項定理，$S-rS$の利用，和で定義された数列。
58 **$a_{n+1}=pa_n+q$の解法**　対数をとる方法，2項間・3項間の漸化式など。
59 **いろいろな漸化式**　2項間の和，対数をとる方法，3項間の和など。
60 **演習問題**　数列に関する演習問題。帰納法，群数列，不等式の証明など。

● 第4巻　微分法・積分法，確率，極限

61 **微分係数・導関数**　関数の極限，平均変化率，微分係数の定義利用。
62 **増減・極値**　関数の増加・減少，極値をもたない条件，極大・極小の計算。
63 **曲線のグラフ**　増減表とグラフ，x軸に接するグラフ，接線，法線。
64 **最大・最小**　最大値・最小値，係数決定，文字を含む関数。
65 **方程式・不等式への応用**　実数解の個数，条件をみたす解をもつ条件。
66 **不定積分・定積分**　不定積分の計算，偶・奇関数，絶対値を含む定積分。
67 **定積分の応用**　文字を含む定積分の最大・最小，関数方程式など。
68 **面積**　曲線と接線とで囲まれた面積，面積を2等分する直線など。
69 **体積**　x軸回転の体積，x軸の両側にある部分の回転体体積など。
70 **演習問題**　微分・積分に関する演習問題。体積の最大・最小など。
71 **順列**　順列，同種のものを含む順列，重複順列，円順列など。
72 **組合せ**　組合せ，グループ分け，重複組合せ，不定方程式の解。
73 **確率**　確率の計算(順列利用・組合せ利用)，サイコロの確率，余事象。
74 **確率の加法・乗法定理**　加法定理，排反事象，従属事象の乗法定理，独立試行。
75 **演習問題**　確率に関する演習問題。2項定理，確率の乗法定理利用など。
76 **数列の極限**　極限値の計算，漸化式で与えられた極限(単純形・連立形)。
77 **無限級数**　等比級数，収束・発散，極限関数のグラフ，級数の収束条件。
78 **三角関数・指数・対数関数の極限**　三角・指数・対数関数の極限。
79 **連続関数**　連続関数の極限値，係数決定，極限関数，連続関数の条件。
80 **演習問題**　極限に関する演習問題。数列の極限，関数の極限など。

● 第5巻　微分，積分，統計

81 **導関数**　積の微分，三角関数の微分，対数微分法，陰関数の微分。
82 **接線・平均値の定理**　平均値の定理の応用，接線の方程式，接する条件。
83 **増減・極値**　極値の判定，増減表，極値より関数決定，極大・極小の和。
84 **曲線の追跡**　分数関数のグラフ，指数関数のグラフ，三角関数のグラフ。
85 **最大・最小**　無理関数・指数関数・対数関数・三角関数の最大・最小など。
86 **不等式・方程式への応用**　指数・対数・三角方程式の解，不等式の証明。
87 **近似式，速度・加速度**　1次の近似式，2次の近似式，いろいろな量の変化率。
88 **演習問題**　微分法に関する演習問題。接線の数，最大・最小，関数の決定など。
89 **不定積分・定積分**　累乗形・三角関数の不定積分，分数関数の不定積分。
90 **置換積分・部分積分**　置換積分・部分積分による不定積分・定積分。
91 **定積分の計算**　原始関数で定義される関数，定積分で定義される関数など。
92 **面積**　直線と曲線で囲まれた面積，面積の総和，媒介変数表示。
93 **体積**　回転体の体積，x軸の両側にくる部分の回転，空間における回転体。
94 **曲線の長さ・道のり**　曲線の長さ，媒介変数表示の長さ，速度・道のりなど。
95 **微分方程式**　微分方程式の作成，微分方程式の利用・解法手順など。
96 **演習問題**　積分法に関する演習問題。定積分の最大・最小，関数方程式など。
97 **確率変数・確率分布**　サイコロ・くじの確率変数と確率分布，標準偏差。
98 **2項分布・正規分布**　2項分布の性質，2項分布の計算，正規分布の性質・計算。
99 **推定・検定**　推定の基本式，母平均の推定，比率の推定，検定。
100 **演習問題**　統計に関する演習問題。サイコロの確率分布，正規分布など。

● 第6巻

◆入試問題を主体とした応用的な問題練習で，実力をよりいっそう確実なものにする。
◆そのあと，総合問題に取り組み，実戦的な力を養成する。

TRAINING PAPER

DAILY PROGRAM

発行人　加藤　譲
発行所　株式会社 教育社

大学受験デイリープログラム100日

高校3年 数学