復刻版

TRAINING PAPER （特許出願中）

DAILY PROGRAM®

高校数学 基礎解析（見本）

1

この巻では，まず，三角関数を定義し，三角関数の公式やグラフについて学習します。次に，三角方程式や三角不等式の解き方について考え，加法定理，三角関数の合成などについても学習します。

三角関数

KYOIKUSHA

TRAINING PAPER®

高校数学　基礎解析

効果的な使い方

●教科書の各単元ごとに１冊のトレーニングペーパーがつくられています。学校で学習している単元にあたるトレーニングペーパーを使いましょう。
●６冊で１セットです。そのうち１冊は復習号になっています。

〈1日の構成〉

●１号分は平均15日です。１号の中には通常の学習日のほかに確認テスト，問題研究の日があります。
●１日分はほぼ次のような構成になっています。

復習マークシート

その日の基本となることをマークシート形式で確認します。

→ 答え合わせをすぐしよう　（答えは次のページのはじめ）

↓

学習内容の説明

学習内容をわかりやすく説明してあります。

→ よく読んでしっかり理解しよう

説明の前後にあるトレーニングをしながら進めましょう。

↓

基本例題・例題

定理や公式が実際にどのように使われるかを示しています。
基本例題は基本的な問題，例題はやや発展的な問題です。

→ 考え方や解答のポイントをおさえよう

↓

トレーニング

実際に問題を解く練習です。

→ きちんと書きこみながら進めよう

「チャレンジコーナー」では，程度のたかい問題をあつかいます。

↓

解　答

解答は別冊にして使うことができます。

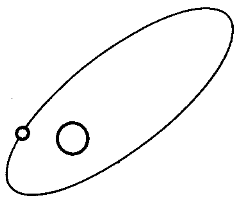
→ 答え合わせは大切　１問１問しっかりと

〈効果的な使い方〉

●学習内容は標準的な授業の進め方に合わせて配列されています。わかりやすい説明とトレーニングがついていますから予習用，復習用としておおいに活用してください。
●順を追って指示どおりにトレーニングしていくことが基本です。ただし，慣れてきたら自分なりに使い方をくふうしてかまいません。

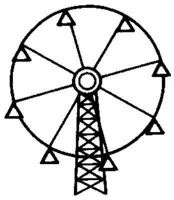
三　角　関　数

□　三角比の発展



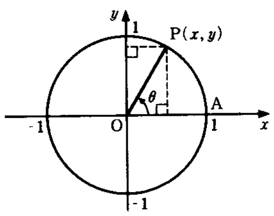
すでに数学Ｉで学習した三角比（三角法）は，古くから，測量，天文学，航海術などに用いられてきましたが，これは，三角形の３要素から三角形を決定する実用的な問題から出発しています。これが，時間的な変化を伴う運動について考えるとき，三角関数として発展することが求められるようになり，そして，惑星の運動や弦の振動などの周期的な運動を，この三角関数によって解明することができるようになったのです。

□　円運動をとらえる



わたしたちのまわりには，円運動するものがたくさんあります。遊園地の観覧車や自転車の車輪など，およそ回転するものはすべて円運動しているといってもよいでしょう。こうした円運動について考えてみましょう。

いま，原点Ｏを中心に半径１の円で，点 A(1, 0) から左まわりに回転する点 P(x, y) について，回転角 θ と点Ｐの位置の関係がどうなっているか調べてみましょう。Ｐの位置を x 座標，y 座標と分けて考え



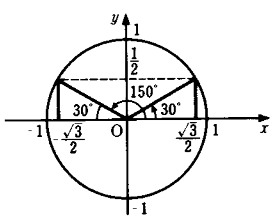
関数 $f:\theta \to$ Ｐの x 座標，　関数 $g:\theta \to$ Ｐの y 座標とします。

$\theta=0^\circ$ のときは，ＰはＡと一致するので

$$f(0^\circ)=1,\ g(0^\circ)=0$$

$\theta=30^\circ$ のときは　$f(30^\circ)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　$g(30^\circ)=\dfrac{1}{2}$

$\theta=90^\circ$ のときは　$f(90^\circ)=0$　　$g(90^\circ)=1$



$\theta=150^\circ$ のときは　$\theta=30^\circ$ のときと y 軸に関して対称となるので

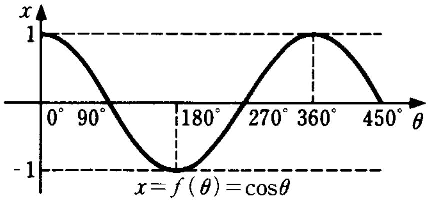
$$f(150^\circ)=-\frac{\sqrt{3}}{2}\qquad g(150^\circ)=\frac{1}{2}$$

こうして θ のいろいろな値に対応する x，y の値は次の表のようになります。

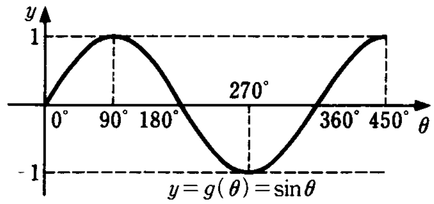
θ	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°	390°	450°
x	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0
y	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	$\frac{1}{2}$	1

１回転は 360° ですから，上の表にもあるように，$\theta=30^\circ$ のときと，$\theta=390^\circ$ のときの $f(\theta)$，$g(\theta)$ の値は一致します。すなわち，360° を越えると同じ変化をくり返すことがわかります。

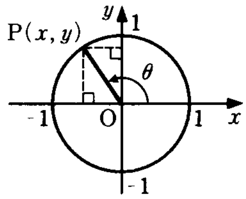
$x=f(\theta)$, $y=g(\theta)$ のグラフに表すと，下の図のようになります。



$x=f(\theta)=\cos\theta$



$y=g(\theta)=\sin\theta$

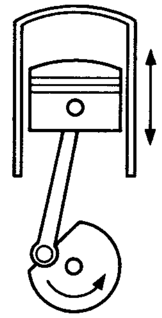


グラフからもわかるように，これらの関数は，1 次関数や 2 次関数とは異なる新しい関数で，$f(\theta)=\cos\theta$，$g(\theta)=\sin\theta$ と表されます。

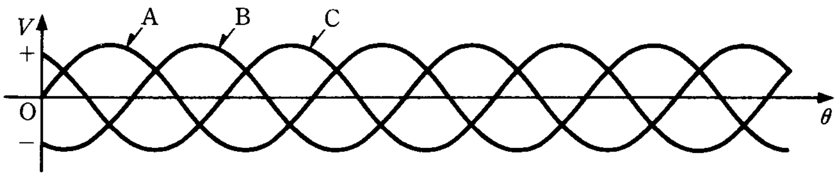
□ 身近な三角関数

回転角 θ と P の位置関係を示す関数が三角関数ということがわかりましたが，この中から，軸方向の変化だけをぬき出して考えれば，円運動と直線運動の関連がわかります。

たとえば，自動車のエンジンから車輪への力の伝達を考えてみると，エンジン内部のピストンの上下運動(直線運動)がクランクによって軸の回転運動(円運動)に変換され，この回転が車輪へ伝えられているのです。最近は見る機会も少なくなった SL の構造も，この部分に関しては，蒸気圧でピストンを動かし，クランクで動輪を回転させるという点で同様です。

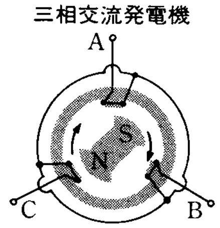


また，交流という電気の流れについてみると，発電機の軸の回転角 θ と，電圧 V の関係は，およそ次のようなグラフで表されます。



これは，三相交流と呼ばれるもので，発電機の軸の回転という運動エネルギーが電気エネルギーに変換されている例です。

三相交流発電機



こうしてみると，わたしたちの身近なところに三角関数があることがわかるでしょう。とくに，電気や電子の研究には，この三角関数が欠くことのできないものなのです。

三角関数は，数理物理学の主役と言っても過言ではありません。

ここでの学習は，そのもっとも基本的な点について学ぶものです。

第 **1** 日

一般角と弧度法

学習日　　月　　日

一般角とは？　弧度法とは？

きょうは，数学Ⅰで学んだ「三角比」の考え方を発展させる準備として，一般角と弧度法について学習しましょう。

まず，これまでに学んだことを復習しておきましょう。
[2]，[3]は，きょう新しく学習することに，おおいに関係がありますよ。

復習マークシート　　解答欄のあてはまる記号を黒くぬりつぶそう。

[1]　次の多角形の内角の和は，㋐～㋓のどれか。

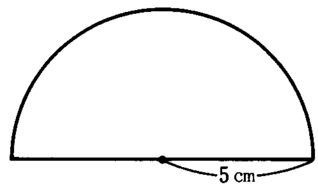
(1)　四角形　　(2)　五角形　　(3)　六角形

㋐　180°　　㋑　360°　　㋒　540°　　㋓　720°

[2]　右の図のような半径 5 cm の半円の面積は，次のどれか。

㋐　$\frac{25}{3}\pi$ cm²　　㋑　$\frac{25}{2}\pi$ cm²

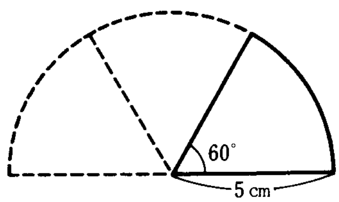
㋒　25π cm²　　㋓　$\frac{25}{2}$ cm²



[3]　半径 5 cm，中心角 60° のおうぎ形の弧の長さは，次のどれか。

㋐　5π cm　　㋑　10π cm

㋒　$\frac{5}{3}\pi$ cm　　㋓　$\frac{5}{6}\pi$ cm



解答欄		
[1]	(1)	㋐ ㋑ ㋒ ㋓
	(2)	㋐ ㋑ ㋒ ㋓
	(3)	㋐ ㋑ ㋒ ㋓
[2]		㋐ ㋑ ㋒ ㋓
[3]		㋐ ㋑ ㋒ ㋓

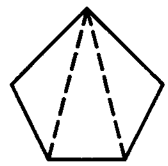
復習マークシートの解答は，順に，㋑，㋒，㋓，㋑，㋒です。
では，動径から学習を始めましょう。

◈回転の角に符号をつけて，

五角形の内角の和は，右の図のように，3 つの三角形に分けて

$$180^\circ \times 3 = 540^\circ$$

ですね。では，この 540° という角を図示できるでしょうか。



角の大きさが 0° から 360° までならできますが，それ以外の角をかき表すには，困ってしまいます。そこで次のように考えます。

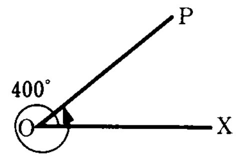
∠XOP は，半直線 OP を点 O を中心に半直線 OX の位置から回転したときにできる角と考えられますね。

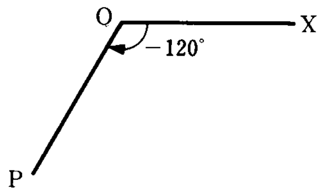
このとき，OP の回転の向きは 2 通りあって，

時計の針と反対の向きを，正
時計の針と同じ向きを，　負

と定めれば，回転の角に符号をつけて表すことができます。

たとえば，400°，−120° は右の図のようになります。





動径　**始線**　ここで，回転する半直線 OP を**動径**，はじめの半直線 OX を**始線**といいます。

トレーニング　解答は 118 ページ

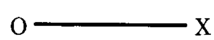
1 次の角の動径を OX を始線として図示せよ。

(1) 120°

(2) 315°

(3) 585°

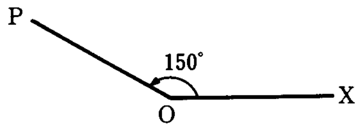
(4) −420°



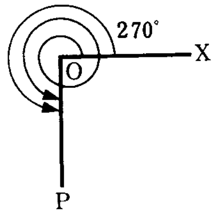
動径を図示することはできましたね。それでは一般角について学習しましょう。

◈動径の表す一般角とは？

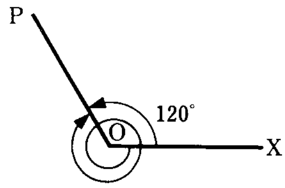
150°



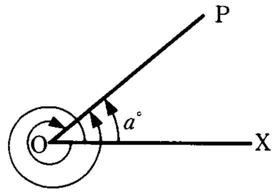
630°＝270°＋360°



－600°
＝120°＋360°×(－2)



一般角　上のように，動径の回転の向きと大きさを符号のついた角で表すとき，この角を**一般角**といいます。また，始線 OX から O のまわりに a° 回転した半直線を a° の動径といいます。



右の図からわかるように，同じ動径の表す角は，一つだけでなく無数にあり，これを動径の表す一般角といいます。

□動径の表す一般角□

a° の動径 OP が表す一般角は

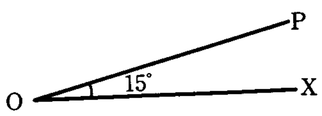
$$a^\circ+360^\circ\times n \qquad n \text{ は整数}$$

と表される。

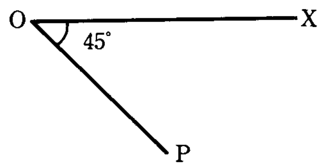
トレーニング　解答は118ページ

2 次の図示された動径の表す一般角を整数 n を用いて表せ。ただし，OX は始線，OP は動径とする。

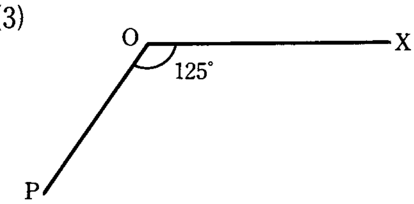
(1)



(2)

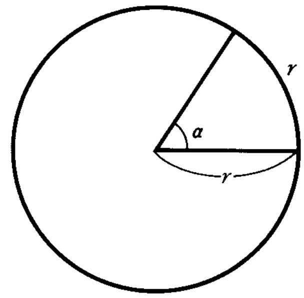


(3)



ヒント　(1)〜(3)の ∠XOP の角度はたんに角の大きさを表している。それぞれ，何度の動径かを考えて $a^\circ+360^\circ\times n$ の形に表せばよい。

◆弧の長さで角を測る「弧度法」



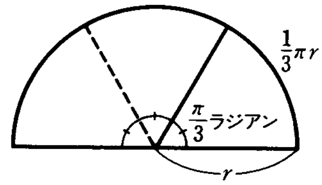
半径 r の円において，弧の長さ r に対応する中心角 α の大きさを調べてみましょう。

弧の長さは中心角に比例するので，円周の長さ $2\pi r$ と円周全体の中心角 360° との比例式をつくれば

$$r : 2\pi r = \alpha : 360^\circ$$

ゆえに　$$\alpha = \frac{180^\circ}{\pi} \fallingdotseq 57.2958^\circ$$

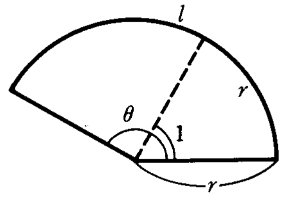
となります。この中心角は，半径の大きさに関係なく一定です。この角を



ラジアン　　**1 ラジアン(弧度)**

弧度法　　といい，これを単位として角の大きさを測る方法を**弧度法**といいます。単位のラジアンは，rad. とも書きますが，ふつうは，単位を省略して数値だけで表します。

以上の定義から，一般に弧の長さ l に対応する中心角 θ の大きさは，中心角が弧の長さに比例するので

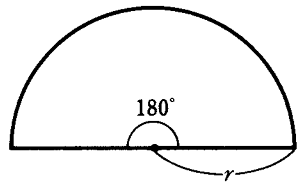


$$1 : \theta = r : l$$

が成り立ちます。すなわち，中心角 θ，半径 r，弧の長さ l には次のような関係があります。

$$l = r\theta \quad , \qquad \theta = \frac{l}{r}$$

また，この関係から，半径 r の半円を考えると，中心角は 180° で，弧の長さは πr ですから



$\boldsymbol{\pi = 180^\circ}$

$$\mathbf{180^\circ = \frac{\pi r}{r} = \pi}$$

ということになります。したがって

$\boldsymbol{1^\circ = \frac{\pi}{180}}$

$$\mathbf{1^\circ = \frac{\pi}{180}}$$

以上のことから，角の大きさを表す度と弧度は，次のように対応します。

度	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
弧度	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π

それでは，度と弧度について，トレーニングをしてみましょう。

トレーニング　解答は 118 ページ

3 次の角は，それぞれ何度か。

(1) $\frac{5}{4}\pi$　(2) $\frac{2}{5}\pi$　(3) $-\frac{5}{6}\pi$　(4) 0.9π

4 次の角を弧度法で表せ。

(1) 135°　(2) 150°　(3) 240°　(4) 330°

基本例題 1　動径の表す一般角

次の角の動径を図示せよ。ただし，動径の表す角 α を $0 \leqq \alpha < 2\pi$ で示せ。

(1) $\frac{20}{3}\pi$　(2) $-\frac{41}{4}\pi$

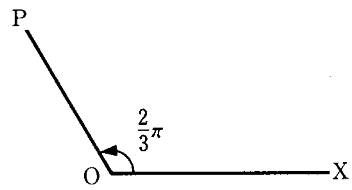
考え方　$360^\circ = 2\pi$ ラジアンであるから，動径の表す一般角を弧度法で示すと，n を整数として，一般角 θ は，$\theta = \alpha + 2n\pi$ となる。したがってこの形になおして，α の大きさを調べればよい。

解　答　(1) $\frac{20}{3}\pi$

$=\frac{2}{3}\pi + 6\pi$

$=\frac{2}{3}\pi + 2\pi \times 3$

よって，動径は右の図のようになる。

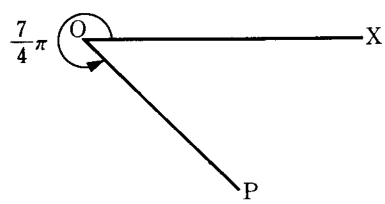


(2) $-\frac{41}{4}\pi$

$=\frac{7}{4}\pi - 12\pi$

$=\frac{7}{4}\pi + 2\pi \times (-6)$

よって，動径は右の図のようになる。



トレーニング

解答は 118 ページ

5 次の角の動径を図示せよ。ただし，動径の表す角 α を $0 \leqq \alpha < 2\pi$ で示せ。

(1) $\dfrac{23}{6}\pi$

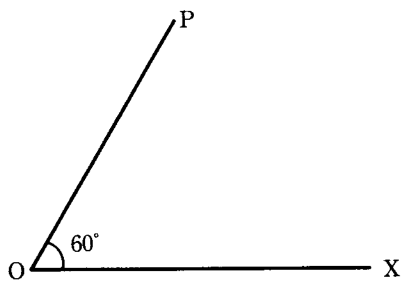
(2) $-\dfrac{9}{2}\pi$

(3) $\dfrac{100}{3}\pi$

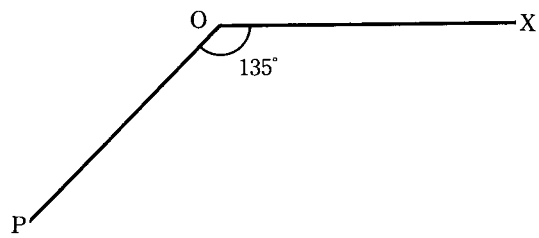
(4) $-\dfrac{55}{4}\pi$

6 次の図示された動径の表す一般角 θ を弧度法で表せ。ただし，OX を始線，OP を動径とする。

(1)



(2)



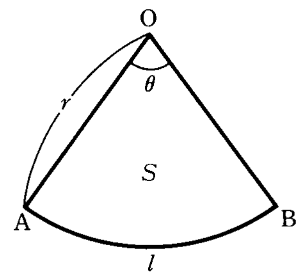
では，弧度法による応用問題を考えてみましょう。

例 題 1 ―― おうぎ形の弧の長さと面積

半径 r の円において，中心角が θ(ラジアン) である弧 AB の長さを l，おうぎ形 OAB の面積を S として，次のことを証明せよ。

(1) $l=r\theta$

(2) $S=\dfrac{1}{2}r^2\theta=\dfrac{1}{2}rl$



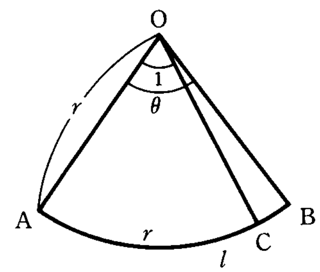
考え方 半径が一定であるとき，弧の長さ，おうぎ形の面積は，ともに中心角の大きさに比例することに注目する。比例式をたて，l，S について解けば，上記の結果が得られる。

解 答 (1) 弧度法の定義と弧の長さが中心角に比例することから，中心角 1 ラジアンのおうぎ形 OAC と比較して

$$1:\theta=r:l$$

したがって

$$l=r\theta$$



(2) おうぎ形の面積 S は，中心角に比例することから，中心角 2π のおうぎ形(円)の面積 S' と比較して

$$\theta:2\pi=S:S'$$

よって $S=\dfrac{S'\theta}{2\pi}$

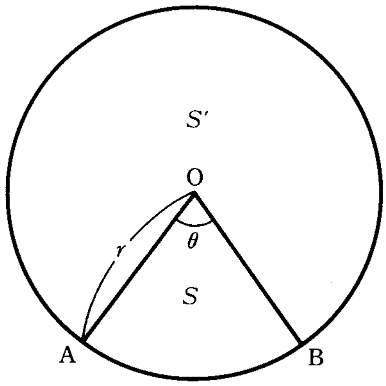
ここで，$S'=\pi r^2$ であるから

$$S=\frac{\pi r^2\theta}{2\pi}=\frac{1}{2}r^2\theta$$

また，(1)より $r\theta=l$ であるから

$$S=\frac{1}{2}r^2\theta=\frac{1}{2}r\cdot r\theta=\frac{1}{2}r\cdot l$$

ゆえに $S=\dfrac{1}{2}r^2\theta=\dfrac{1}{2}rl$

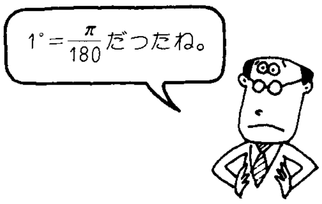


では，次のトレーニングに進みましょう。

トレーニング

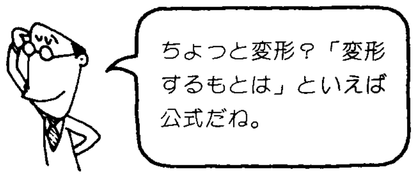
解答は 119 ページ

7 半径 8 cm，中心角 $\dfrac{3}{4}\pi$ のおうぎ形の弧の長さと面積を求めよ。



8 半径 6 cm，中心角 210° のおうぎ形の弧の長さと面積を求めよ。

9 半径 2 cm，面積 $\dfrac{2}{3}\pi$ cm^2 のおうぎ形の中心角は何度か。



10 中心角 150°，面積 $\dfrac{15}{4}\pi$ cm^2 のおうぎ形の半径を求めよ。

よくがんばりました。きょうは，これでおしまいにしましょう。

第 2 日	三　角　関　数

学習日　　月　　日

三角関数とは何だろう？

「三角関数」―――はじめて聞くことばですね。
きょうは，「三角関数」とはどういうものか，また，どのように表すのかを学習しましょう。

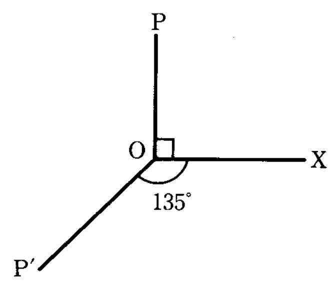
まず，数学Ⅰで学んだ「三角比」と，第1日で学んだ「動径の表す角」について復習しましょう。これらは，「三角関数」を考えるためにどうしても必要ですよ。

復習マークシート　　解答欄のあてはまる記号を黒くぬりつぶそう。

1　右の図で，始線を OX とするとき，次の動径の表す角は，㋐～㋓のどれか。

(1)　OP

(2)　OP′



㋐　$-\frac{5}{2}\pi$　　㋑　$\frac{3}{4}\pi$

㋒　$\frac{5}{4}\pi$　　㋓　$\frac{5}{2}\pi$

2　次の鋭角の三角比の値は，㋐～㋓のどれか。

(1)　$\sin 30^\circ$　　(2)　$\cos 45^\circ$　　(3)　$\tan 60^\circ$

㋐　$\frac{1}{2}$　　㋑　$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　㋒　$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　㋓　$\sqrt{3}$

3　次の鈍角の三角比の値は，㋐～㋓のどれか。

(1)　$\sin 120^\circ$　　(2)　$\cos 150^\circ$

㋐　$-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　㋑　$-\frac{1}{2}$　　㋒　$\frac{1}{2}$　　㋓　$\frac{\sqrt{3}}{2}$

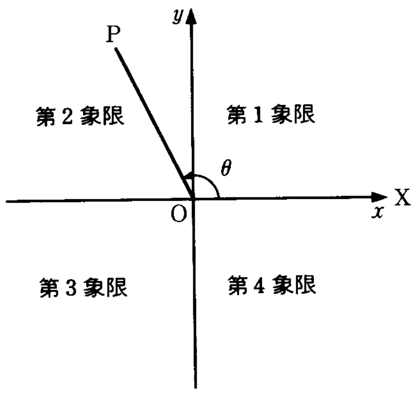
解答欄					
1	(1)	㋐	㋑	㋒	㋓
	(2)	㋐	㋑	㋒	㋓
2	(1)	㋐	㋑	㋒	㋓
	(2)	㋐	㋑	㋒	㋓
	(3)	㋐	㋑	㋒	㋓
3	(1)	㋐	㋑	㋒	㋓
	(2)	㋐	㋑	㋒	㋓

復習マークシートの解答は，順に，㊁，㋒，㋐，㋑，㊁，㊁，㋐です。
きょうは，まず，「象限の角」から学習を始めましょう。

◈象限の角とは？　その象限にある動径の表す角

象限　座標平面を，座標軸によって，4 つの部分に分けるとき，その 4 つの部分を右の図のように第 1 象限，第 2 象限，第 3 象限，第 4 象限といいます。ただし，座標軸上の点はどの象限にも属さないことにします。

また，x 軸の正の部分を始線 OX として，動径 OP が，第 1 象限，第 2 象限，第 3 象限，第 4 象限にあるとき，OP の表す角 θ をそれぞれ，第 1 象限の角，第 2 象限の角，第 3 象限の角，第 4 象限の角といいます。



では，確認のトレーニングをしてみましょう。

トレーニング　　解答は 119 ページ

1　次の角は第何象限の角か。その動径を図示して答えよ。

(1)　$\dfrac{2}{3}\pi$　　　(2)　$\dfrac{7}{6}\pi$

(3)　$-\dfrac{3}{4}\pi$　　　(4)　$-\dfrac{5}{3}\pi$

2　$0 \leqq \theta < 2\pi$ として，象限の角を不等式で表すと次のようになる。□の中に適当な値を入れよ。

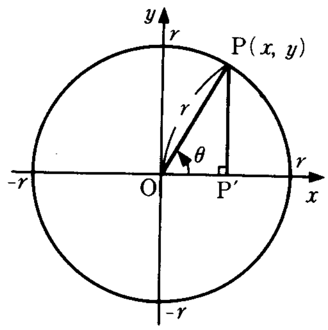
(1)　第 1 象限の角　$\square < \theta < \square$　　(2)　第 2 象限の角　$\square < \theta < \square$

(3)　第 3 象限の角　$\square < \theta < \square$　　(4)　第 4 象限の角　$\square < \theta < \square$

では，三角関数について学習しましょう。

◈三角関数とは？　三角比の一般角への拡張

座標平面上で，原点Oを中心とし，半径 r の円をかき，x 軸の正の部分を始線とする動径とこの円との交点をPとし，その座標を $(x,\ y)$ とします。



点Pが第1象限にあるとき，点Pから x 軸に垂線を下ろし，その足をP′とすると，△POP′は直角三角形で，OP′$=x$，PP′$=y$ となり，三角比の定義から

$\sin\theta=\dfrac{y}{r}$
$\cos\theta=\dfrac{x}{r}$
$\tan\theta=\dfrac{y}{x}$

$$\sin\theta=\frac{y}{r},\qquad \cos\theta=\frac{x}{r},\qquad \tan\theta=\frac{y}{x}$$

が成り立ちます。

ここで，$\dfrac{y}{r}$，$\dfrac{x}{r}$，$\dfrac{y}{x}$ の値は，半径の大きさに関係なく，θ だけできまるので，θ の動径が，第1象限以外にある場合にも，$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ を上の式によって定義し，これらを θ の**三角関数**といいます。

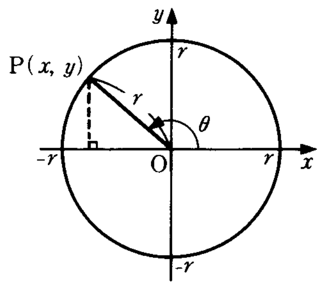
三角関数

□三角関数の定義□

座標平面上で，原点Oを中心とする半径 r の円と，x 軸の正の部分を始線とする動径との交点を，P$(x,\ y)$，動径OPの表す一般角を θ とするとき，

$$\sin\theta=\frac{y}{r},\qquad \cos\theta=\frac{x}{r},\qquad \tan\theta=\frac{y}{x}$$

が成り立つ。これらを θ の三角関数という。



—注—

n が整数で，$\theta=\dfrac{\pi}{2}+n\pi$ のとき，x は0となるので，このような θ に対して，$\tan\theta$ は定義されない。

また，$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の逆数として，次の3つの三角関数を定義する。

$$\mathrm{cosec}\,\theta=\frac{1}{\sin\theta},\qquad \sec\theta=\frac{1}{\cos\theta},\qquad \cot\theta=\frac{1}{\tan\theta}$$

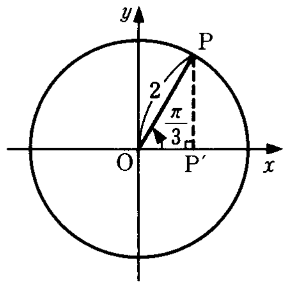
ここで，cosec，sec，cot は，それぞれ，コセカント，セカント，コタンジェントと読む。

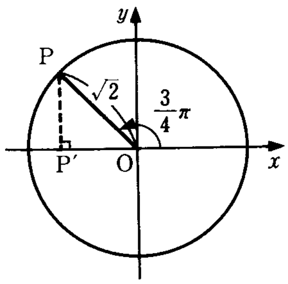
三角関数の定義をしっかり理解するために，次の基本例題を考えてみましょう。

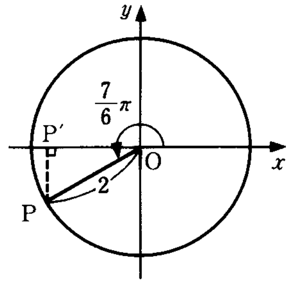
基本例題 1　　**三角関数の値**

次の図を利用して，それぞれの三角関数の値を求めよ。

(1)　$\sin\frac{\pi}{3}$　　(2)　$\cos\frac{3}{4}\pi$　　(3)　$\tan\frac{7}{6}\pi$







考え方　図に示されている直角三角形 POP′ の辺の長さを調べ，P の座標を求めれば，三角関数の定義から値を求めることができる。

解　答　(1)　$\angle\mathrm{POP'}=\frac{\pi}{3}=60^\circ$ であり，$\mathrm{OP}=2$ であるから，直角三角形 POP′ の残りの辺の長さは，$\mathrm{OP'}=1$，$\mathrm{PP'}=\sqrt{3}$ である。

よって，点 P の座標は，$(1,\ \sqrt{3})$ となり，三角関数の定義より

$$\sin\frac{\pi}{3}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

(2)　(1)と同様に，$\angle\mathrm{POP'}=45^\circ$，$\mathrm{OP}=\sqrt{2}$ より，$\mathrm{P}(-1,\ 1)$ であるから

$$\cos\frac{3}{4}\pi=\frac{-1}{\sqrt{2}}=\boldsymbol{-\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

(3)　同様に，$\angle\mathrm{POP'}=30^\circ$，$\mathrm{OP}=2$ より，$\mathrm{P}(-\sqrt{3},\ -1)$ であるから

$$\tan\frac{7}{6}\pi=\frac{-1}{-\sqrt{3}}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{3}}$$

—注—

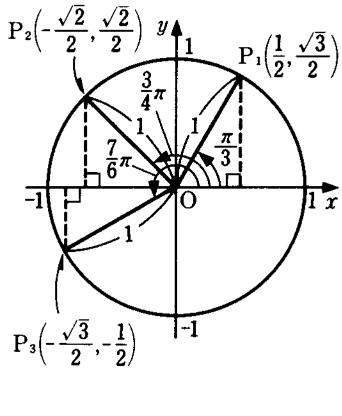
三角関数の定義では，半径 r の大きさは適当にとれるので，つねに $r=1$ としておけば，$\sin\theta=y$，$\cos\theta=x$，$\tan\theta=\frac{y}{x}$ となって，便利である。このような原点を中心とする半径 1 の円を**単位円**と呼ぶ。

したがって，上記の(1)，(2)，(3)を単位円で考えて，それぞれの P の座標を，$\mathrm{P_1}$，$\mathrm{P_2}$，$\mathrm{P_3}$ とすれば，右の図のようになり，それぞれの座標は

$$\mathrm{P_1}\left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right),\ \mathrm{P_2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right),\ \mathrm{P_3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$$

である。よって

$$\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2},\ \cos\frac{3}{4}\pi=-\frac{\sqrt{2}}{2},\ \tan\frac{7}{6}\pi=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

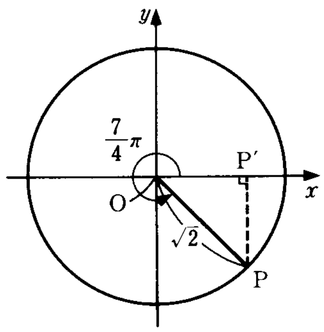


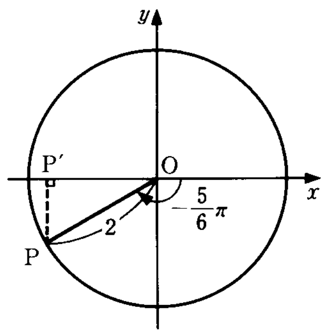
トレーニング

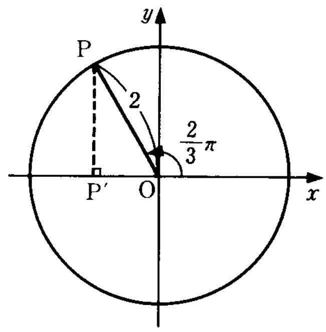
解答は 120 ページ

3 次の図を利用して，それぞれの三角関数の値を求めよ。

(1) $\sin\frac{7}{4}\pi$　　(2) $\cos\left(-\frac{5}{6}\pi\right)$　　(3) $\tan\frac{2}{3}\pi$







4 動径の位置を調べ，r の値を適当にきめて，次の値を求めよ。

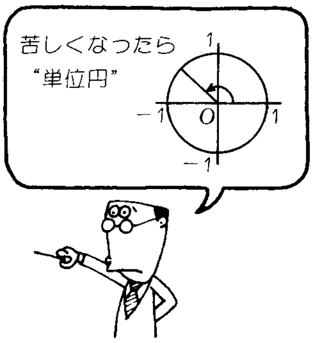
(1) $\sin 30^\circ$　　(2) $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

(3) $\tan 240^\circ$　　(4) $\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

5 **次の三角関数の値を求めよ。**

(1) $\sin 150^\circ$　　　(2) $\cos\frac{5}{4}\pi$

(3) $\tan 180^\circ$　　　(4) $\sin\frac{3}{2}\pi$



6 **三角関数 $\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ がとる値の符号は，θ がどの象限の角であるかによって定まる。**
右の表の空欄に，＋，－ の符号を入れよ。

象限	1	2	3	4
$\sin\theta$				
$\cos\theta$				
$\tan\theta$				

《ここで一息》

右の図のような，正方形３つがつながっている図形では

$\alpha+\beta+\gamma=\angle R$

が成り立ちます。

証明は，$\triangle$ADC と $\triangle$EAC が相似となることを用いて示せばよいのですが，意外とめんどうです。

ここに，エレガントな証明を紹介しておきます。

右下の図のように，正方形を３つつけ加え，点 G′ と A, Eを結ぶと，

$\angle$AG′A′＝$\angle$EG′D，$\angle$H′G′G＝$\angle$R より　$\angle$AG′E＝$\angle$R

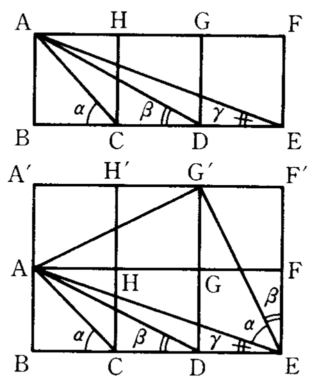
また　　AG′＝G′E

よって，$\triangle$AG′E は直角二等辺三角形で

$\angle$G′EA＝α

また，$\angle$G′EF′＝$\angle$ADB＝β ですから

$\alpha+\beta+\gamma=\angle$BEF′＝$\angle$R

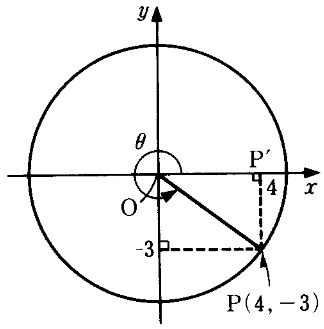


例 題 1 　　　**座標と三角関数**

x 軸の正の部分を始線として，原点 O のまわりを回転する動径が点 (4, −3) を通るとき，この動径の角 θ に対する $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$ の値を求めよ。

考え方 原点を中心とし点 (4, −3) を通る円の半径を，三平方の定理から求め，三角関数の定義からそれぞれの値を求めればよい。

解 答 点 (4, −3) を P とし，P から x 軸に下ろした垂線の足を P′ とすると，△POP′ は ∠PP′O＝∠R の直角三角形である。



よって，三平方の定理より

$$OP^2 = OP'^2 + P'P^2$$
$$= 16 + 9$$
$$= 25$$

ここで，OP＞0 であるから

$$OP = 5$$

したがって，三角関数の定義において，$r=5$ として

$$\sin\theta = \frac{-3}{5} = -\frac{3}{5},\quad \cos\theta = \frac{4}{5},\quad \tan\theta = \frac{-3}{4} = -\frac{3}{4}$$

トレーニング

解答は 122 ページ

7 **x 軸の正の部分を始線として，原点 O のまわりを回転する動径が次の点を通るとき，この動径の角 θ に対する $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$ の値を求めよ。**

(1) (12, 5) 　　　　(2) (−2, 1)

三角関数の定義は理解できましたね。きょうは，これでおしまいにしましょう。

第 **3** 日

三角関数の相互関係

学習日　　月　　日

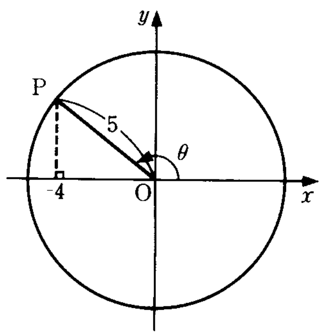
sinθ, cosθ, tanθ の相互関係は

きょうは，三角関数の定義にもとづいて，3 つの三角関数の相互関係について考えてみましょう。

まず，準備として，次のことを考えてみましょう。

復習マークシート　　解答欄のあてはまる記号を黒くぬりつぶそう。

1 動径 OP が右の図のような位置にあるとき，次の問いに答えよ。



(1) $\sin\theta$ の値は次のどれか。

㋐ $\dfrac{3}{5}$　　㋑ $\dfrac{4}{5}$

㋒ $-\dfrac{3}{5}$　　㋓ $-\dfrac{4}{5}$

(2) $\cos\theta$ の値は，(1)の㋐～㋓のどれか。

(3) $\tan\theta$ の値は，次のどれか。

㋐ $-\dfrac{4}{3}$　　㋑ $-\dfrac{3}{4}$

㋒ $\dfrac{3}{4}$　　㋓ $\dfrac{4}{3}$

2 原点を中心とし，半径が 2 の円の方程式は，次のどれか。

㋐ $x^2-y^2=2$　　㋑ $x^2+y^2=2$

㋒ $x^2-y^2=4$　　㋓ $x^2+y^2=4$

3 次の分数式を計算し簡単にしたものは，㋐～㋓のどれか。

$$\frac{\dfrac{x-1}{x}}{x-\dfrac{1}{x}}$$

㋐ x　　㋑ $\dfrac{1}{x+1}$　　㋒ $\dfrac{1}{x-1}$　　㋓ $\dfrac{1}{x}$

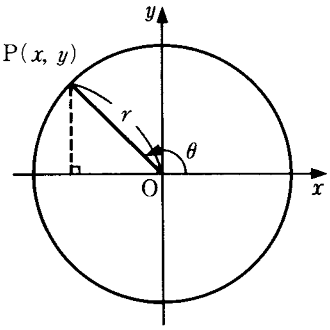
解答欄					
1	(1)	㋐	㋑	㋒	㋓
	(2)	㋐	㋑	㋒	㋓
	(3)	㋐	㋑	㋒	㋓
2		㋐	㋑	㋒	㋓
3		㋐	㋑	㋒	㋓

復習マークシートの解答は，順に，㋐，㋓，㋑，㋓，㋑です。
では，三角関数の相互関係について学習を始めましょう。

◈三角関数の相互関係

三角関数の定義は

$$\sin\theta=\frac{y}{r},\quad \cos\theta=\frac{x}{r},\quad \tan\theta=\frac{y}{x}$$



ですから

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\frac{y}{r}}{\frac{x}{r}}=\frac{\frac{y}{r}\times r}{\frac{x}{r}\times r}=\frac{y}{x}=\tan\theta \qquad \cdots\cdots\cdots ①$$

が成り立ちます。

また，P$(x,\ y)$は，原点を中心とし，半径 r の円周上の点ですから

$$x^2+y^2=r^2$$

両辺を r^2 で割ると　$\dfrac{x^2}{r^2}+\dfrac{y^2}{r^2}=\dfrac{r^2}{r^2}$

ゆえに　$\left(\dfrac{x}{r}\right)^2+\left(\dfrac{y}{r}\right)^2=1$

よって　$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$

すなわち　$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1 \qquad \cdots\cdots\cdots ②$

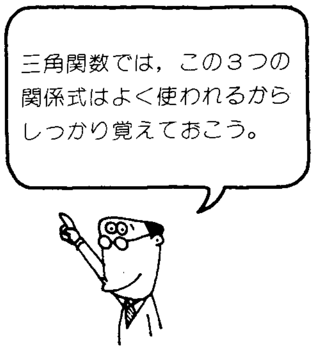
が成り立ちます。

さらに，②式の両辺を $\cos^2\theta$ で割ると

$$\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}+\frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta}=\frac{1}{\cos^2\theta}$$

よって

$$\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)^2+1=\frac{1}{\cos^2\theta}$$



ゆえに，①式の関係から

$$\tan^2\theta+1=\frac{1}{\cos^2\theta} \qquad \cdots\cdots\cdots ③$$

も成り立ちます。

①〜③の関係式は，三角関数では重要な役割を果たします。

□三角関数の相互関係□

[1]　$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$　　[2]　$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

[3]　$1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$

—注—

$\cos\theta$ の逆数を $\sec\theta$ と定義したので，[3]式は，次のようにも表せる。

$1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$

では，三角関数の相互関係を利用して，次の基本例題を考えてみましょう。

基本例題 1 　　　　**三角関数の相互関係**

θ が第 2 象限の角で，$\sin\theta=\dfrac{3}{5}$ であるとき，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ。

考え方 　まず，$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ から $\cos^2\theta$ の値を求め，θ が第 2 象限の角であることに注意して，$\cos\theta$ を求める。次に，$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ から，$\tan\theta$ を求める。

解　答 　$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ に $\sin\theta=\dfrac{3}{5}$ を代入すると

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2+\cos^2\theta=1$$

よって　　$\cos^2\theta=\dfrac{16}{25}$

ここで θ が第 2 象限の角であるから　$\cos\theta<0$

ゆえに　　$\boldsymbol{\cos\theta=-\dfrac{4}{5}}$ ………①

$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ に①と $\sin\theta=\dfrac{3}{5}$ を代入すると

$$\boldsymbol{\tan\theta}=\frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}}$$

$$=\boldsymbol{-\frac{3}{4}}$$

【別解】

$\sin\theta=\dfrac{3}{5}$ であるから，$\sin\theta$ の定義と比較して，$r=5$，$y=3$ と考えれば，右の図のようになる。

P から x 軸に下ろした垂線の足を P′ とすれば，三平方の定理より

$\mathrm{OP}^2=(\mathrm{OP'})^2+(\mathrm{PP'})^2$

ここで，OP$=5$，PP′$=3$ より

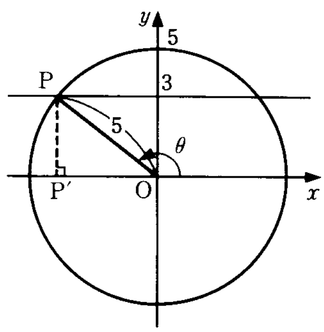
$5^2=(\mathrm{OP'})^2+3^2$

ゆえに，OP′$=4$ で，P の座標は

$(-4,\ 3)$

よって，三角関数の定義より

$\boldsymbol{\cos\theta=-\dfrac{4}{5}}$，　$\boldsymbol{\tan\theta=-\dfrac{3}{4}}$



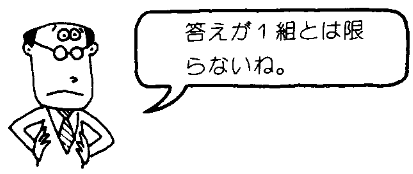
それでは，トレーニングに移りましょう。

トレーニング　　解答は 122 ページ

1 **次の問いに答えよ。**

(1) θ が第 2 象限の角で，$\sin\theta=\frac{8}{17}$ のとき，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ。

(2) $\cos\theta=\frac{7}{25}$ のとき，$\sin\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ。ただし，$0\leqq\theta<2\pi$ とする。



2 **$\tan\theta=1$ のとき，$\sin\theta$，$\cos\theta$ の値を求めよ。ただし，$0\leqq\theta<2\pi$ とする。**

ヒント　まず，$1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}$ を利用して $\cos\theta$ を求めよ。

次に，証明問題を考えてみましょう。

例 題 1 **三角関数の等式の証明**

次の等式を証明せよ。

$$\frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{1+2\sin\theta\cos\theta}=\frac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}$$

考え方　左辺を変形して右辺となることを示す。その際に $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$，　$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ などを使う。

証 明

$$
\begin{aligned}
\text{左辺}&=\frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{1+2\sin\theta\cos\theta}\\
&=\frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta} && \Leftarrow \sin^2\theta+\cos^2\theta=1\text{ より}\\
&=\frac{(\cos\theta+\sin\theta)(\cos\theta-\sin\theta)}{(\cos\theta+\sin\theta)^2} && \Leftarrow \text{因数分解}\\
&=\frac{\cos\theta-\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta}\quad\cdots\cdots\cdots① && \Leftarrow \cos\theta+\sin\theta\text{ で約分。}\\
&=\frac{\dfrac{\cos\theta-\sin\theta}{\cos\theta}}{\dfrac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta}} && \Leftarrow \text{分母，分子を }\cos\theta\text{ で割る。}\\
&=\frac{1-\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}}{1+\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}}\\
&=\frac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}=\text{右辺} && \Leftarrow \tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}
\end{aligned}
$$

すなわち　$\dfrac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{1+2\sin\theta\cos\theta}=\dfrac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}$

―注―

逆に右辺を変形して左辺となることを示してもよい。あるいは，左辺，右辺を変形して，どちらも①式となることを示してもよい。そのほか，等式の証明では，左辺 − 右辺 =0，左辺 ÷ 右辺 =1 となることを示す方法などがある。

では，トレーニングに移りましょう。

トレーニング

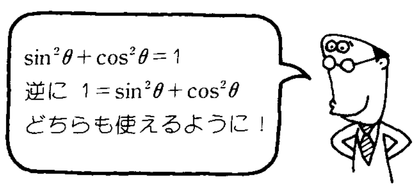
解答は 123 ページ

3 次の等式を証明せよ。

(1) $1+\dfrac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}=\dfrac{1}{\sin^2\theta}$

(2) $\left(\dfrac{\cos\theta}{1+\sin\theta}+\dfrac{\cos\theta}{1-\sin\theta}\right)\sin\theta=2\tan\theta$

(3) $\dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta}=\dfrac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$



最後に，三角関数の式の値について考えてみましょう。

例　題 2　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　**三角関数の式の値**

$\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ のとき，次の式の値を求めよ。

(1)　$\sin\theta\cos\theta$　　　　　　　　　　(2)　$\tan\theta+\dfrac{1}{\tan\theta}$

考え方　(1)は，与えられた等式の両辺を 2 乗して，$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ を利用する。(2)は，式を変形し，$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$，$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ を利用して，(1)の結果も利用する。

解　答　(1)　与式の両辺を 2 乗して

$$(\sin\theta+\cos\theta)^2=\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2$$

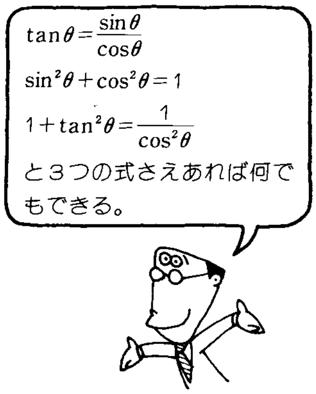
$$\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta=\frac{3}{2}$$

ここで，$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ より

$$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{3}{2}$$

よって　$$\sin\theta\cos\theta=\boldsymbol{\frac{1}{4}}$$

(2)　$$\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{1}{\frac{1}{4}}=\mathbf{4}$$



トレーニング　　**解答は 123 ページ**

4　**$\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{2}$ のとき，次の式の値を求めよ。**

(1)　$\sin\theta\cos\theta$　　　　　　　　　　(2)　$\sin^3\theta+\cos^3\theta$

きょうはこれでおしまいにしましょう。次のページは**チャレンジコーナー**です。

チャレンジコーナー

このページは，時間に余裕のある人だけしてください。

もう少し，応用力が必要な問題を考えてみましょう。

トレーニング

解答は 123 ページ

5 **θ が第 3 象限の角で，$\dfrac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta-\sin\theta}=3+2\sqrt{2}$ であるとき，次の問いに答えよ。**

(1) $\cos\theta=\sqrt{2}\sin\theta$ となることを示せ。　　(2) $\sin\theta$，$\cos\theta$ の値を求めよ。

6 **次の等式を証明せよ。**

$(1+\sin\theta+\cos\theta)^2=2(1+\sin\theta)(1+\cos\theta)$

それでは，きょうはこのへんで終わりにしましょう。

第 4 日

三角関数の公式

学習日　　月　　日

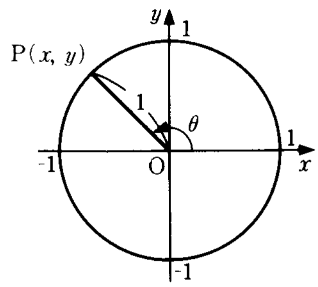
三角関数の変換公式

きょうは，θ の三角関数と $\theta+2n\pi$，$-\theta$，$\pi\pm\theta$ などの三角関数との関係について考えてみましょう。

はじめに，次のことがらを復習しておきましょう。

復習マークシート　解答欄のあてはまる記号を黒くぬりつぶそう。

1　右の図のように，単位円周上の点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とし，動径 OP の表す角を θ とするとき，次の三角関数の値は㋐～㋓のどれか。

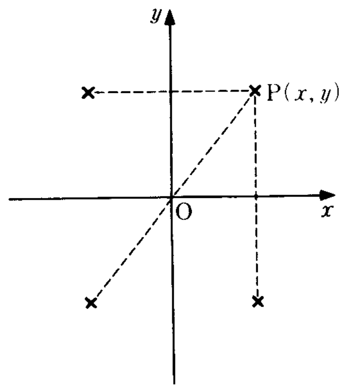


(1)　$\sin\theta$　　(2)　$\cos\theta$　　(3)　$\tan\theta$

㋐　x　　㋑　y

㋒　$\dfrac{y}{x}$　　㋓　$\dfrac{x}{y}$

2　座標平面上の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ を次のように対称に移したときの座標は㋐～㋓のどれか。



(1)　x 軸に関して対称

(2)　y 軸に関して対称

(3)　原点に関して対称

㋐　$(-x,\ y)$　　㋑　$(x,\ -y)$

㋒　$(y,\ x)$　　㋓　$(-x,\ -y)$

3　$\dfrac{133}{6}\pi$ の表す動径と一致する動径をもつ角は，次のどれか。

㋐　30°　　㋑　60°

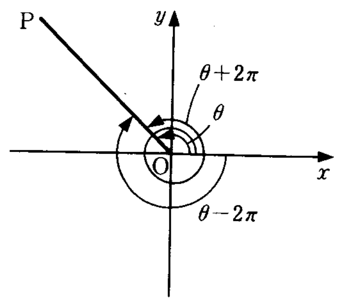
㋒　150°　　㋓　210°

解答欄					
1	(1)	㋐	㋑	㋒	㋓
	(2)	㋐	㋑	㋒	㋓
	(3)	㋐	㋑	㋒	㋓
2	(1)	㋐	㋑	㋒	㋓
	(2)	㋐	㋑	㋒	㋓
	(3)	㋐	㋑	㋒	㋓
3		㋐	㋑	㋒	㋓

復習マークシートの解答は，順に，㋑，㋐，㋒，㋑，㋐，㋓，㋐です。
では，本論にはいりましょう。

◆$\theta+2n\pi$ の三角関数は，θ の三角関数と同じ。

n が整数のとき，角 $\theta+2n\pi$ の表す動径は，角 θ の表す動径と一致するので，次の公式が成り立ちます。



公式1
$$\begin{cases}\sin(\theta+2n\pi)=\sin\theta \\ \cos(\theta+2n\pi)=\cos\theta \\ \tan(\theta+2n\pi)=\tan\theta\end{cases}$$

基本例題 1 　　**$\theta+2n\pi$ の三角関数**

次の三角関数の値を求めよ。

(1) $\sin\frac{17}{4}\pi$ 　(2) $\cos\left(-\frac{11}{2}\pi\right)$ 　(3) $\tan 6000^\circ$

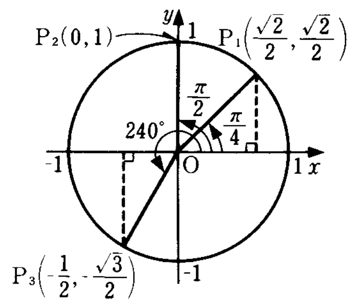
考え方 　$\theta+2n\pi$ または $\theta^\circ+n\times360^\circ$ の形に変形して解く。

解　答
(1) $\sin\frac{17}{4}\pi=\sin\left(\frac{\pi}{4}+2\times2\pi\right)=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

(2) $\cos\left(-\frac{11}{2}\pi\right)=\cos\left\{\frac{\pi}{2}+(-3)\times2\pi\right\}$

$=\cos\frac{\pi}{2}=0$

(3) $\tan6000^\circ=\tan(240^\circ+16\times360^\circ)=\tan240^\circ=\sqrt{3}$



トレーニング 　解答は 124 ページ

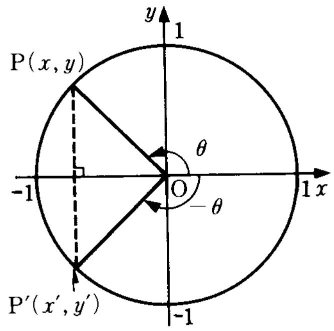
1 次の三角関数の値を求めよ。

(1) $\sin\frac{91}{6}\pi$ 　(2) $\cos\left(-\frac{25}{3}\pi\right)$ 　(3) $\tan\frac{85}{4}\pi$

(4) $\sin(-900^\circ)$ 　(5) $\cos2850^\circ$ 　(6) $\tan1935^\circ$

◈θ と $-\theta$ の三角関数の関係は

$-\theta$ の表す動径 OP′ は，θ の表す動径 OP と x 軸に関して対称の位置にあるので，$P(x,\ y)$，$P'(x',\ y')$ とすれば



$$x'=x,\quad y'=-y$$

よって　$\sin(-\theta)=y'=-y=-\sin\theta$

$\cos(-\theta)=x'=x=\cos\theta$

$\tan(-\theta)=\dfrac{y'}{x'}=\dfrac{-y}{x}=-\dfrac{y}{x}=-\tan\theta$

となります。

公式[2] $\begin{cases} \sin(-\theta)=-\sin\theta \\ \cos(-\theta)=\cos\theta \\ \tan(-\theta)=-\tan\theta \end{cases}$

基本例題 2 　　　　　　　　　　　　　　　　　　**$-\theta$ の三角関数**

次の三角関数の値を求めよ。

(1) $\sin(-60^\circ)$　　　(2) $\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$　　　(3) $\tan\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)$

考え方　$-\theta$ の動径は θ の動径と x 軸に関して対称であることを利用する。

解　答

(1) $\sin(-60^\circ)=-\sin60^\circ=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(2) $\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)=\cos\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

(3) $\tan\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)=-\tan\dfrac{\pi}{6}=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

トレーニング

解答は 124 ページ

2 **次の三角関数の値を求めよ。**

(1) $\sin\left(-\dfrac{3}{4}\pi\right)$　　　(2) $\cos\left(-\dfrac{2}{3}\pi\right)$　　　(3) $\tan\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$

(4) $\sin(-30^\circ)$　　　(5) $\cos(-150^\circ)$　　　(6) $\tan(-135^\circ)$

$-\theta$ の三角関数は，θ と $-\theta$ の動径の x 軸との対称性をおさえれば，むずかしくありませんね。それでは $\pi-\theta$ の三角関数について考えてみましょう。

◆θ と $\pi-\theta$ の三角関数の関係は

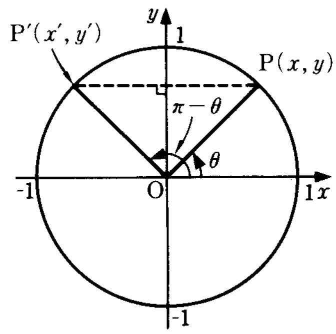
$\pi-\theta$ の表す動径 OP′ は，θ の表す動径 OP と y 軸に関して対称の位置にあるので，$P(x,\ y)$，$P'(x',\ y')$ とすれば　$x'=-x$,　$y'=y$

よって　$\sin(\pi-\theta)=y'=y=\sin\theta$

$\cos(\pi-\theta)=x'=-x=-\cos\theta$

$\tan(\pi-\theta)=\dfrac{y'}{x'}=\dfrac{y}{-x}=-\dfrac{y}{x}=-\tan\theta$

となります。



公式[3] $\begin{cases} \sin(\pi-\theta)=\sin\theta \\ \cos(\pi-\theta)=-\cos\theta \\ \tan(\pi-\theta)=-\tan\theta \end{cases}$

基本例題 3　　　**$\pi-\theta$ の三角関数**

次の三角関数の値を求めよ。

(1) $\sin\dfrac{5}{6}\pi$　　(2) $\cos120^\circ$　　(3) $\tan\dfrac{3}{4}\pi$

考え方　$\pi-\theta$ の動径は，θ の動径と y 軸に関して対称であることを利用する。

解　答　(1) $\sin\dfrac{5}{6}\pi=\sin\left(\pi-\dfrac{\pi}{6}\right)=\sin\dfrac{\pi}{6}=\mathbf{\dfrac{1}{2}}$

(2) $\cos120^\circ=\cos(180^\circ-60^\circ)=-\cos60^\circ=\mathbf{-\dfrac{1}{2}}$

(3) $\tan\dfrac{3}{4}\pi=\tan\left(\pi-\dfrac{\pi}{4}\right)=-\tan\dfrac{\pi}{4}=\mathbf{-1}$

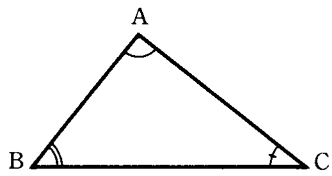
$\pi-\theta$ の動径は θ の動径と y 軸対称で，x 座標の符号が変わるから，cos と tan の符号が変わるね。

トレーニング　　**解答は 124 ページ**

3 **次の三角関数の値を求めよ。**

(1) $\sin\dfrac{3}{4}\pi$　　(2) $\cos150^\circ$　　(3) $\tan\dfrac{2}{3}\pi$

4 **三角形 ABC の内角 A, B, C について，次の等式が成り立つことを証明せよ。**



(1) $\sin(A+B)=\sin C$

(2) $\cos(A+B)=-\cos C$

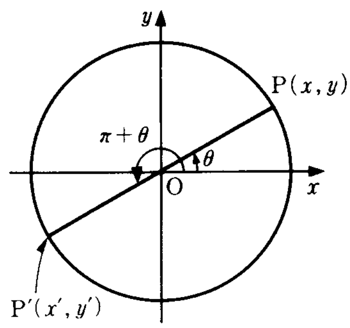
(3) $\tan(A+B)=-\tan C$

ヒント　$A+B+C=\pi$ であることに注目せよ。

では，きょうの最後に，もう 1 つ対称を。

◈θ と $\pi+\theta$ の関係は

$\pi+\theta$ の表す動径 OP′ は，θ の表す動径 OP と原点に関して対称の位置にあるので，$\mathrm{P}(x,\ y)$，$\mathrm{P}'(x',\ y')$ とすれば　$x'=-x$，　$y'=-y$



よって
$$\sin(\pi+\theta)=y'=-y=-\sin\theta$$
$$\cos(\pi+\theta)=x'=-x=-\cos\theta$$
$$\tan(\pi+\theta)=\frac{y'}{x'}=\frac{-y}{-x}=\frac{y}{x}=\tan\theta$$
となります。

公式4
$$\begin{cases}\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta\\ \cos(\pi+\theta)=-\cos\theta\\ \tan(\pi+\theta)=\tan\theta\end{cases}$$

—注—

公式4は，公式2，3を使って導くこともできる。

$\sin(\pi+\theta)=\sin\{\pi-(-\theta)\}$

$=\sin(-\theta)$　　　(公式3)

$=-\sin\theta$　　　(公式2)

基本例題 4 $\pi+\theta$ の三角関数

次の三角関数の値を求めよ。

(1) $\sin\frac{4}{3}\pi$ (2) $\cos\frac{7}{4}\pi$ (3) $\tan 240^\circ$

考え方 $\pi+\theta$ の動径は，θ の動径と原点について対称であることを利用する。

解 答 (1) $\sin\frac{4}{3}\pi=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\frac{\pi}{3}=-\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

(2) $\cos\frac{7}{4}\pi=\cos\left(\pi+\frac{3}{4}\pi\right)=-\cos\frac{3}{4}\pi=-\cos\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)$

$=-\left(-\cos\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{4}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{2}}$

(3) $\tan 240^\circ=\tan(180^\circ+60^\circ)=\tan 60^\circ=\boldsymbol{\sqrt{3}}$

トレーニング 解答は 125 ページ

5 次の三角関数の値を求めよ。

(1) $\sin 225^\circ$ (2) $\cos\frac{5}{3}\pi$ (3) $\tan\frac{11}{6}\pi$

6 次の式の値を求めよ。

(1) $\sin(-750^\circ)+\tan(-150^\circ)$ (2) $\sin\frac{2}{3}\pi\cos\frac{5}{6}\pi$

よくがんばりました。きょうは，これでおしまいにしましょう。

第 5 日

学習日　　月　　日

三角関数の公式とその利用

三角関数の変換公式とその利用について

きょうは，θ の三角関数と $\frac{\pi}{2}\pm\theta$ との関係について考え，また，変換公式の利用について考えてみましょう。

まず，次のことがらについて復習しておきましょう。

復習マークシート　　解答欄のあてはまる記号を黒くぬりつぶそう。

1　2つの三角形が合同であるための条件でないものは，次のどれか。

㋐　対応する2辺の長さとそのはさむ角が等しい。
㋑　対応する3つの角が等しい。
㋒　対応する3つの辺の長さが等しい。
㋓　対応する1つの辺の長さとその両端の角が等しい。

2　次の三角関数の値は，㋐～㋓のどれと等しいか。

(1)　$\sin(\theta+2n\pi)$　　(2)　$\cos(-\theta)$
(3)　$\cos(\pi-\theta)$　　(4)　$\sin(\pi+\theta)$

㋐　$\sin\theta$　　㋑　$-\sin\theta$　　㋒　$\cos\theta$　　㋓　$-\cos\theta$

3　次の三角関数の値は，㋐～㋓のどれと等しいか。

(1)　$\tan(-\theta)$
(2)　$\tan(\pi-\theta)$
(3)　$\tan(\pi+\theta)$

㋐　$\tan\theta$　　㋑　$-\tan\theta$
㋒　$\dfrac{1}{\tan\theta}$　　㋓　$-\dfrac{1}{\tan\theta}$

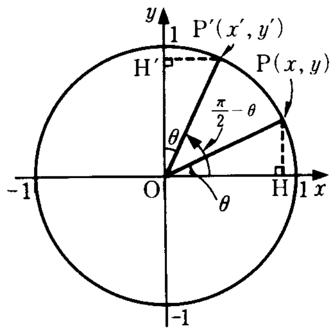
解答欄					
1		㋐	㋑	㋒	㋓
2	(1)	㋐	㋑	㋒	㋓
	(2)	㋐	㋑	㋒	㋓
	(3)	㋐	㋑	㋒	㋓
	(4)	㋐	㋑	㋒	㋓
3	(1)	㋐	㋑	㋒	㋓
	(2)	㋐	㋑	㋒	㋓
	(3)	㋐	㋑	㋒	㋓

復習マークシートの解答は，順に，㋑，㋐，㋒，㋓，㋑，㋑，㋑，㋐です。
では，きょうの本論にはいりましょう。

◈ $\dfrac{\pi}{2}-\theta$ の三角関数は，三角形の合同で。

θ の表す動径を OP，$\dfrac{\pi}{2}-\theta$ を表す動径を OP′ とし，P から x 軸に下ろした垂線の足を H，P′ から y 軸に下ろした垂線の足を H′ とすると，右の図から明らかなように

$\triangle OHP \equiv \triangle OH'P'$



よって，P(x，y)，P′(x'，y') とすれば

$x'=y \qquad y'=x$

ゆえに

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=y'=x=\cos\theta$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=x'=y=\sin\theta$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{y'}{x'}=\frac{x}{y}=\frac{1}{\frac{y}{x}}=\frac{1}{\tan\theta}$$

公式[5]

$$\begin{cases}\boldsymbol{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta}\\[2mm] \boldsymbol{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta}\\[2mm] \boldsymbol{\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{1}{\tan\theta}}\end{cases}$$

基本例題 1 **$\dfrac{\pi}{2}-\theta$ の三角関数**

次の三角関数の値を求めよ。

(1) $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{6}\right)$　　(2) $\cos(90^\circ-60^\circ)$　　(3) $\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{4}\right)$

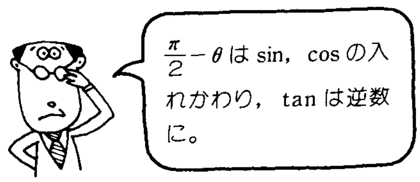
考え方　$\dfrac{\pi}{2}-\theta$ の三角関数は θ の三角関数と sin，cos の入れかわりになり，tan は逆数になることに注意する。

解　答

(1) $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{6}\right)=\cos\dfrac{\pi}{6}=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$

(2) $\cos(90^\circ-60^\circ)=\sin 60^\circ=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$

(3) $\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{\tan\frac{\pi}{4}}=\dfrac{1}{1}=\boldsymbol{1}$

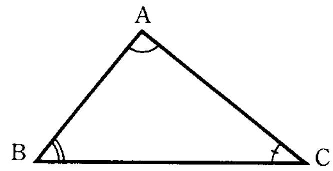


トレーニング　解答は126ページ

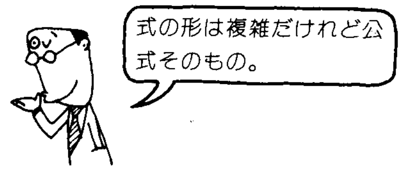
1 次の三角関数の値を求めよ。

(1)　$\sin(90^\circ - 45^\circ)$　　(2)　$\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{6}\right)$　　(3)　$\tan\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{3}\right)$

2 三角形ABCの内角 A, B, C について，次の等式が成り立つことを証明せよ。



(1)　$\sin\dfrac{B+C}{2} = \cos\dfrac{A}{2}$



(2)　$\cos\dfrac{B+C}{2} = \sin\dfrac{A}{2}$　　(3)　$\tan\dfrac{B+C}{2} = \dfrac{1}{\tan\dfrac{A}{2}}$

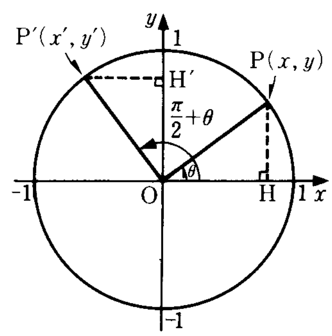
ヒント　$A+B+C=\pi$ であることに注目せよ。

では，変換公式の最後に，次のことを考えてみましょう。

◈ $\dfrac{\pi}{2}+\theta$ の三角関数も三角形の合同で。

$\dfrac{\pi}{2}+\theta$ を表す動径 OP′ は，θ を表す動径 OP を $\dfrac{\pi}{2}$ だけ回転した位置にあるので，図のように，P から x 軸に下ろした垂線の足を H，P′ から y 軸に下ろした垂線の足を H′ とすれば

$$\triangle \mathrm{OHP} \equiv \triangle \mathrm{OH'P'}$$



よって，P$(x,\ y)$，P′$(x',\ y')$ とすると

$$x' = -y \qquad y' = x$$

ゆえに　$\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right) = y' = x = \cos\theta$

$\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right) = x' = -y = -\sin\theta$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\frac{y'}{x'}=\frac{x}{-y}=-\frac{1}{\frac{y}{x}}=-\frac{1}{\tan\theta}$$

公式$\boxed{6}$
$$\begin{cases} \sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos\theta \\ \cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right)=-\sin\theta \\ \tan\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right)=-\dfrac{1}{\tan\theta} \end{cases}$$

$\frac{\pi}{2}+\theta$ は $\frac{\pi}{2}-\theta$ の三角関数と sin，cos の入れかわりは同じでも象限のズレの分だけcos，tanの符号が変わる。

基本例題 2　　　　$\frac{\pi}{2}+\theta$ の三角関数

次の三角関数の値を求めよ。

(1)　$\sin\frac{5}{6}\pi$　　　(2)　$\cos\frac{3}{4}\pi$　　　(3)　$\tan 120^\circ$

考え方　$\frac{\pi}{2}+\theta$ の三角関数は，$\frac{\pi}{2}-\theta$ の三角関数と sin，cos の入れかわり，tan が逆数になることは同じだが，符号の変化に注意する。

解　答　(1)　$\sin\frac{5}{6}\pi=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{\pi}{3}=\mathbf{\frac{1}{2}}$

(2)　$\cos\frac{3}{4}\pi=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=-\sin\frac{\pi}{4}=\mathbf{-\frac{\sqrt{2}}{2}}$

(3)　$\tan 120^\circ=\tan(90^\circ+30^\circ)=-\frac{1}{\tan 30^\circ}=-\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{3}}}=\mathbf{-\sqrt{3}}$

≪ここで一息≫

公式を覚えるときのくふう……似たような公式が数多く出てくると混乱しますね。

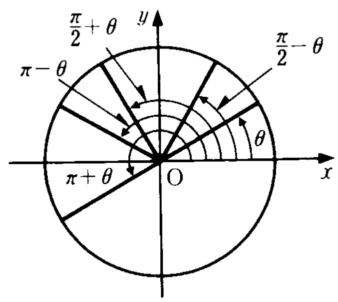
公式$\boxed{3}$～$\boxed{6}$の覚え方

① π系($\boxed{3}$，$\boxed{4}$)……式に π をふくむもの…… sin，cos，tan は変化しない。

② $\frac{\pi}{2}$系($\boxed{5}$，$\boxed{6}$)……式に$\frac{\pi}{2}$ をふくむもの…… sin は cos，cos は sin，tan は $\frac{1}{\tan}$ に変化する。

θ は第 1 象限の角として考え，それぞれの角が第何象限の角になるかによって符号をきめます。

公式	角	象限	sin	cos	tan
$\boxed{3}$	$\pi-\theta$	2	＋	－	－
$\boxed{4}$	$\pi+\theta$	3	－	－	＋
$\boxed{5}$	$\frac{\pi}{2}-\theta$	1	＋	＋	＋
$\boxed{6}$	$\frac{\pi}{2}+\theta$	2	＋	－	－



トレーニング　解答は126ページ

3 **次の三角関数の値を求めよ。**

(1) $\sin 135^\circ$　　(2) $\cos\frac{2}{3}\pi$　　(3) $\tan\frac{5}{6}\pi$

これまでに学んだ公式$\boxed{1}$～$\boxed{6}$を用いると一般角 θ の三角関数は，すべて鋭角の三角関数になおすことができます。したがって，三角関数表は，ふつう 0°～90° までの間しかありません。

こうしたことを理解するために，次の例題を考えてみましょう。

例題1　**変換公式の利用**

次の三角関数を鋭角の三角関数で表し，その値を求めよ。

(1) $\sin\frac{11}{6}\pi$　　(2) $\cos(-300^\circ)$　　(3) $\tan\frac{125}{4}\pi$

考え方　三角関数の公式をうまく利用することを考える。鋭角とは，0より大きく $\frac{\pi}{2}$ より小さい角をいう。

解　答　(1) $\sin\frac{11}{6}\pi=\sin\left(-\frac{\pi}{6}+2\pi\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\frac{\pi}{6}=\boldsymbol{-\frac{1}{2}}$

(2) $\cos(-300^\circ)=\cos(60^\circ-360^\circ)=\cos 60^\circ=\boldsymbol{\frac{1}{2}}$

(3) $\tan\frac{125}{4}\pi=\tan\left(\frac{5}{4}\pi+15\times 2\pi\right)=\tan\frac{5}{4}\pi=\tan\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)=\tan\frac{\pi}{4}=\boldsymbol{1}$

トレーニング　解答は 126 ページ

4 次の三角関数を鋭角の三角関数で表し，その値を求めよ。

(1) $\sin(-225^\circ)$　(2) $\cos(-150^\circ)$　(3) $\tan 1200^\circ$

(4) $\sin\frac{11}{4}\pi$　(5) $\cos\left(-\frac{17}{6}\pi\right)$　(6) $\tan\left(-\frac{10}{3}\pi\right)$

例 題 2　三角関数の複合計算

次の式の値を求めよ。

(1) $\cos 300^\circ \tan(-45^\circ)+\sin 150^\circ \cos 210^\circ$

(2) $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\cos\frac{5}{6}\pi+\sin\frac{3}{4}\pi+\cos\frac{7}{6}\pi$

考え方　三角関数の公式を利用して，なるべく計算しやすいようにくふうする。

解　答　(1) $\cos 300^\circ \tan(-45^\circ)+\sin 150^\circ \cos 210^\circ$

$=\cos(-60^\circ+360^\circ)(-\tan 45^\circ)+\sin(180^\circ-30^\circ)\cos(180^\circ+30^\circ)$

$=-\cos(-60^\circ)\tan 45^\circ+\sin 30^\circ(-\cos 30^\circ)$

$=-\cos 60^\circ \tan 45^\circ-\sin 30^\circ \cos 30^\circ$

$=-\frac{1}{2}\times 1-\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=-\mathbf{\frac{2+\sqrt{3}}{4}}$

(2) $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\cos\frac{5}{6}\pi+\sin\frac{3}{4}\pi+\cos\frac{7}{6}\pi$

$=-\sin\frac{\pi}{4}+\cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)$

$=-\sin\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{6}=-2\cos\frac{\pi}{6}=-2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\mathbf{-\sqrt{3}}$

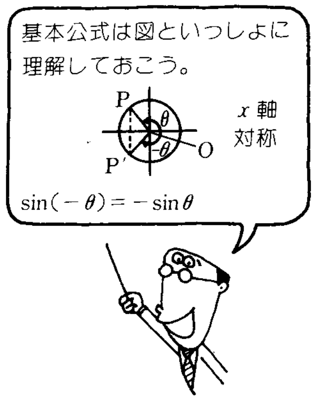
トレーニング

解答は 127 ページ

5 次の式の値を求めよ。

(1) $\sin 150^\circ - \dfrac{\sin 120^\circ}{\tan 60^\circ}$　　(2) $\tan\dfrac{3}{4}\pi\cos\dfrac{14}{3}\pi$

(3) $\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\cos\dfrac{\pi}{3}+\cos\dfrac{4}{3}\pi\sin\dfrac{5}{3}\pi$



6 次の各式を簡単にせよ。

(1) $\tan(\pi+\theta)\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right)+\cos(\pi-\theta)\tan(\pi-\theta)$

(2) $\sin\theta+\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)+\sin(\theta+\pi)+\sin\left(\theta+\dfrac{3}{2}\pi\right)$

きょうは，これでおしまいにしましょう。

第 **6** 日

三角関数のグラフ

学習日　　月　　日

三角関数のグラフ……$y=\sin\theta$ とすると，y は θ の関数です。このグラフは?

きょうは，$y=\sin\theta$，$y=\cos\theta$，$y=\tan\theta$ のグラフがどういうものになるのかを調べましょう。

はじめに，三角関数の値についてチェックしておきましょう。

復習マークシート　解答欄のあてはまる記号を黒くぬりつぶそう。

1　次の三角関数の値は，㋐～㋓のどれか。

(1) $\sin(-\theta)$

㋐ $\sin\theta$　㋑ $-\sin\theta$　㋒ $\cos\theta$　㋓ $-\cos\theta$

(2) $\sin(\pi-\theta)$

㋐ $\sin\theta$　㋑ $-\sin\theta$　㋒ $\cos\theta$　㋓ $-\cos\theta$

(3) $\sin(\pi+\theta)$

㋐ $\sin\theta$　㋑ $-\sin\theta$　㋒ $\cos\theta$　㋓ $-\cos\theta$

(4) $\cos(-\theta)$

㋐ $\sin\theta$　㋑ $-\sin\theta$　㋒ $\cos\theta$　㋓ $-\cos\theta$

(5) $\cos(\pi-\theta)$

㋐ $\sin\theta$　㋑ $-\sin\theta$　㋒ $\cos\theta$　㋓ $-\cos\theta$

(6) $\cos(\pi+\theta)$

㋐ $\sin\theta$　㋑ $-\sin\theta$　㋒ $\cos\theta$　㋓ $-\cos\theta$

2　次の三角関数の値は，㋐～㋓ のどれか。

(1) $\tan(-\theta)$

(2) $\tan(\pi-\theta)$

(3) $\tan(\pi+\theta)$

㋐ $\tan\theta$　㋑ $-\tan\theta$

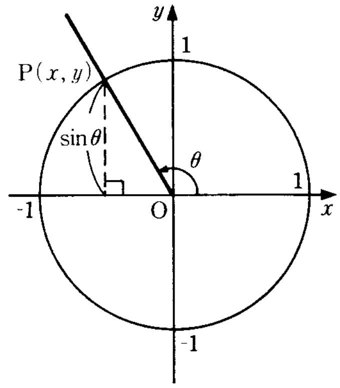
㋒ $\dfrac{1}{\tan\theta}$　㋓ $-\dfrac{1}{\tan\theta}$

解答欄					
1	(1)	㋐	㋑	㋒	㋓
	(2)	㋐	㋑	㋒	㋓
	(3)	㋐	㋑	㋒	㋓
	(4)	㋐	㋑	㋒	㋓
	(5)	㋐	㋑	㋒	㋓
	(6)	㋐	㋑	㋒	㋓
2	(1)	㋐	㋑	㋒	㋓
	(2)	㋐	㋑	㋒	㋓
	(3)	㋐	㋑	㋒	㋓

復習マークシートの解答は，順に，㋑，㋐，㋑，㋒，㋓，㋓，㋑，㋑，㋐です。
では，三角関数のグラフについて，学習を始めましょう。

◆$y=\sin\theta$ のグラフ

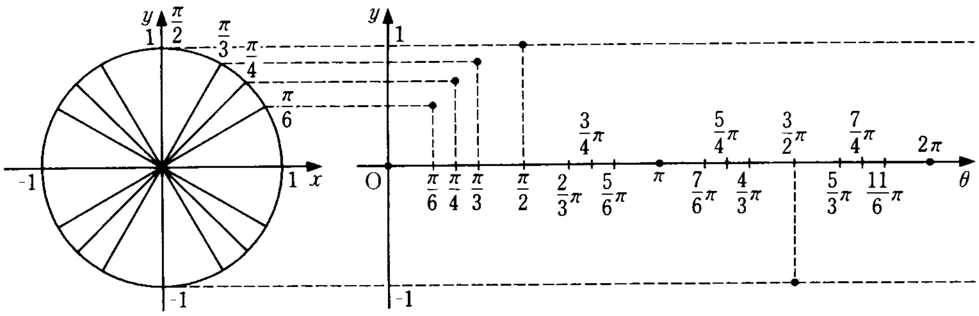
右の図のように，角 θ の動径と単位円との交点を P とし，その座標を $(x,\ y)$ とすれば，$\sin\theta$ の値は，P の y 座標で表されます。



したがって，$y=\sin\theta$ のグラフは，次のようにしてかくことができます。

下の図のように，まず，座標軸を定め，原点を中心とする単位円をかき，角 θ の動径との交点を P とします。横軸上に θ をとり，点 P の y 座標を縦軸上にとって，これらを座標とする点を順に結べば，これが $y=\sin\theta$ のグラフということになります。

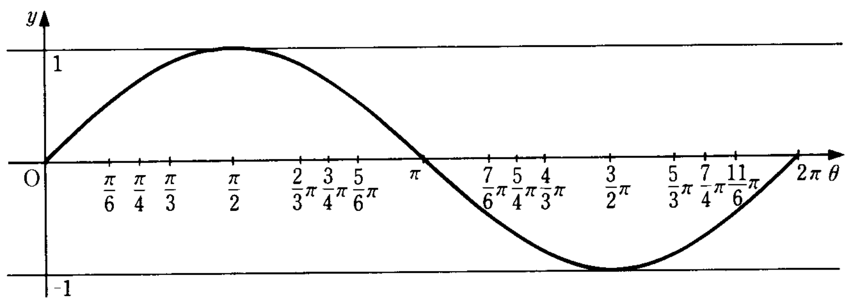
θ に，0，$\dfrac{\pi}{6}$，$\dfrac{\pi}{4}$，$\dfrac{\pi}{3}$，$\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{2}{3}\pi$，$\dfrac{3}{4}\pi$，$\dfrac{5}{6}\pi$，π，$\dfrac{7}{6}\pi$，$\dfrac{5}{4}\pi$，$\dfrac{4}{3}\pi$，$\dfrac{3}{2}\pi$，$\dfrac{5}{3}\pi$，$\dfrac{7}{4}\pi$，$\dfrac{11}{6}\pi$，2π を順にとって，グラフをかいてみましょう。



上の例 0，$\dfrac{\pi}{6}$，$\dfrac{\pi}{4}$，$\dfrac{\pi}{3}$，$\dfrac{\pi}{2}$ にならって，それぞれの点を図示し，順になめらかに結んでみましょう。

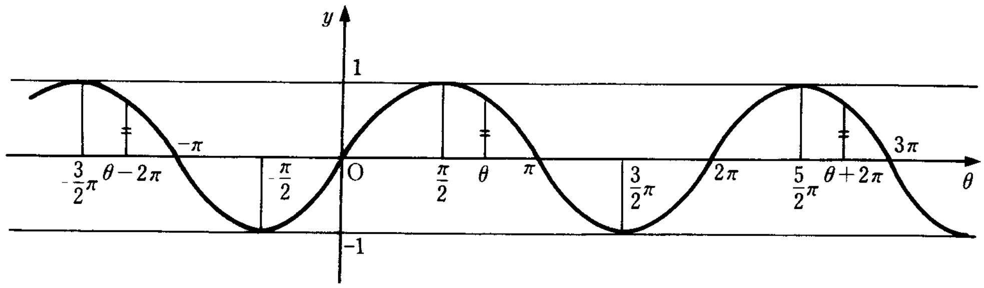
正弦曲線

下の図のようになりましたね。これを，**正弦曲線**とよびます。

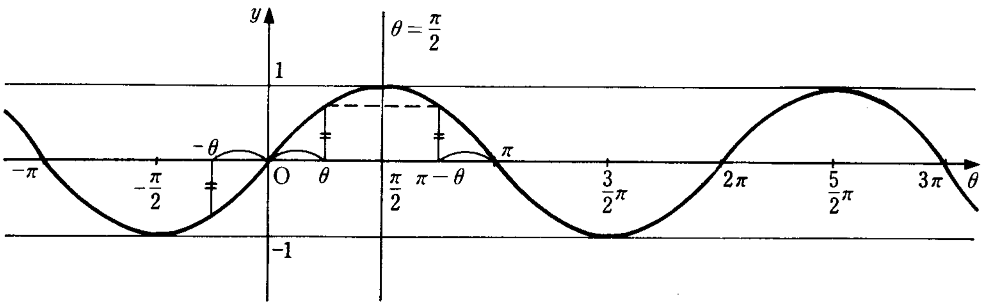


以上は，$0\leqq\theta\leqq2\pi$ のときのグラフですが，θ がそのほかの値の場合にはどうなるか，またこのグラフの特徴について，次に考えてみましょう。

まず，$\sin(\theta+2n\pi)=\sin\theta$ という関係が成り立つので，$y=\sin\theta$ のグラフは，$0\leqq\theta\leqq2\pi$ におけるグラフが 2π ごとにくり返されることがわかります。（n は整数）

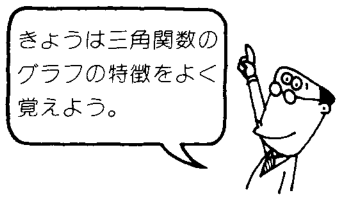


また，$\sin(-\theta)=-\sin\theta$ という関係から，$y=\sin\theta$ は原点について対称であり，$\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$ という関係から，$y=\sin\theta$ は，y 軸に平行な直線 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ について対称なことがわかります。



以上みてきたように，$y=\sin\theta$ のグラフで，θ がすべての実数値をとって変化するとき，y の値は，$-1\leqq y\leqq 1$ の範囲にあることがわかります。したがって

$y=\sin\theta$ の　定義域：　すべての実数
　　　　　　　　値　域：　$-1\leqq y\leqq 1$



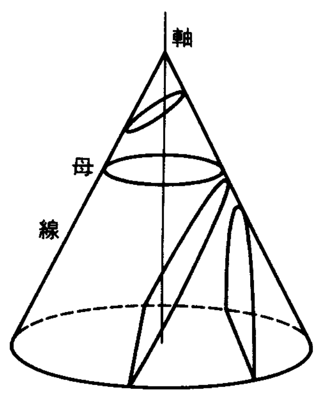
《ここで一息》

円すい，円柱を切る！

円すいを平面で切ると，切り口が2次曲線になることはよく知られています。

軸に垂直な平面で切ると　……………………………円
側面を底面に交わらない平面で切ると　…………だ円
軸をふくまない，軸と平行な平面で切ると　……双曲線
母線に平行な平面で切ると　………………………放物線

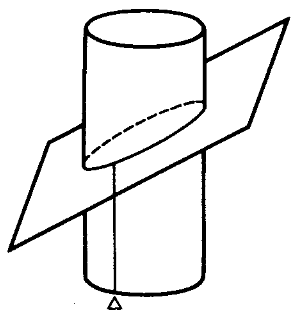
このことから，これらの曲線は，円すい曲線ともよばれます。

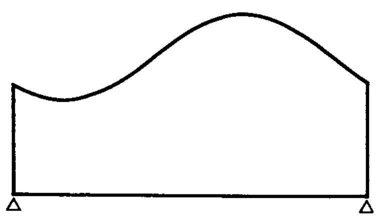


円柱を底面に平行な平面で切れば，切り口は円ですが，斜めに切るとだ円になります。この切り口を展開すると，なんと，$\sin\theta$ で表せる曲線になります。

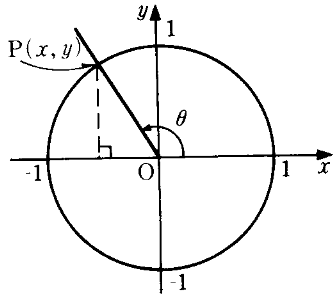
円柱に薄い紙を何回か巻きつけて，斜めに切って，広げると，きれいな曲線がとれます。

やってみましょう。



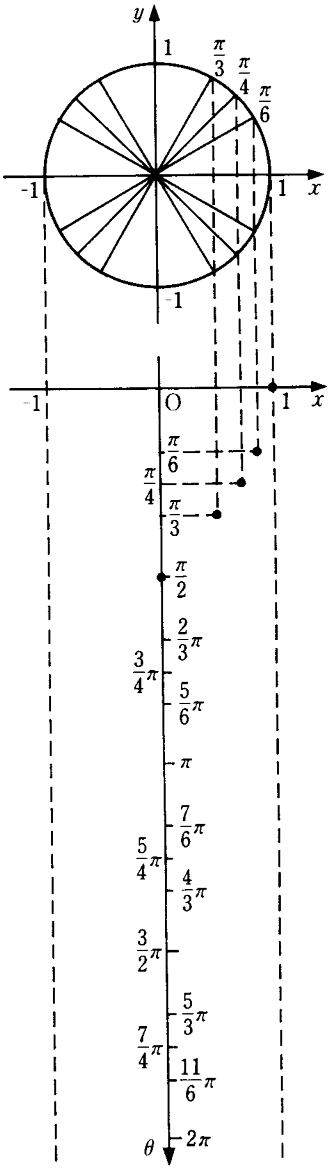


◆$y=\cos\theta$ のグラフ

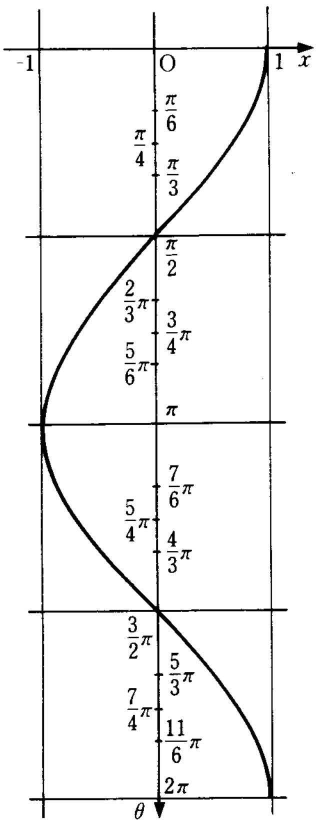


$y=\sin\theta$ のグラフと同じように，$\cos\theta$ は，右の図で角 θ の動径と単位円の交点 P の x 座標で表されるから，まず，$x=\cos\theta$ として，θ と x 座標との関係をグラフにするには，$\sin\theta$ のときとは逆に，縦軸に θ，横軸に x 座標をとって，対応する点を順に結べばよいことになります。

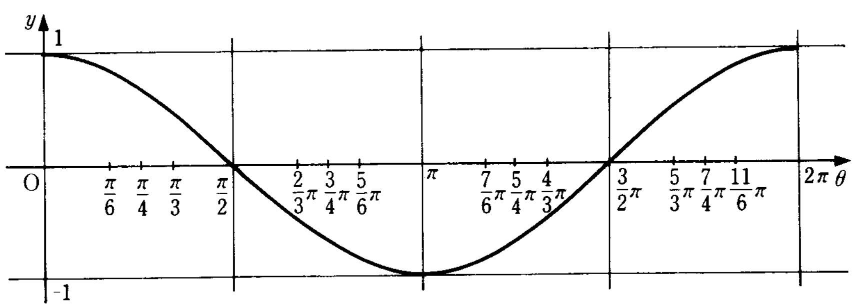
$\sin\theta$ のときと同じように，θ にいくつかの値をとって，グラフをかいてみましょう。



左下の例 $0,\ \dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{\pi}{2}$ にならって，それぞれの点を図示し，順になめらかに結んでみましょう。

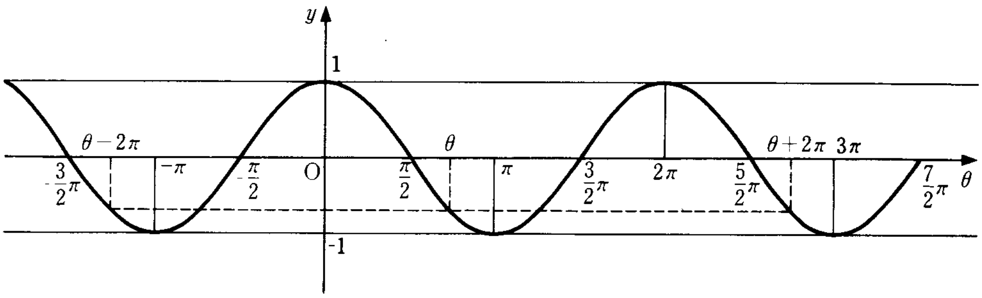


右上の図のようになりましたね。ここで，変数 x のかわりに y として縦軸にとり，θ を横軸にとれば，$y=\cos\theta$ のグラフは下のようになります。

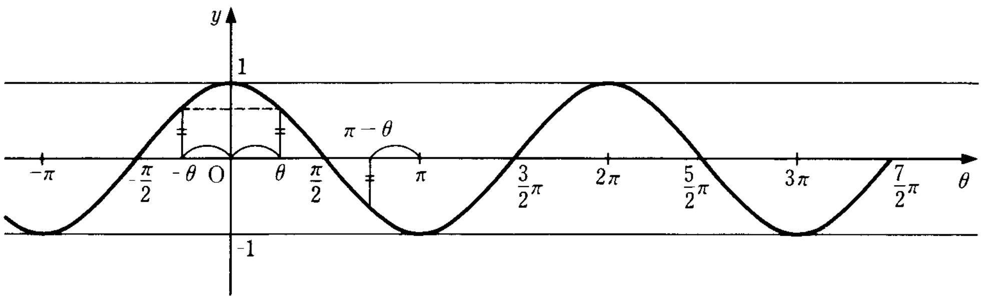


$y=\cos\theta$ のグラフを $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ の範囲でかいてみましたが，次に，θ がそのほかの値の場合にはどうなるか，また，このグラフの特徴について考えてみましょう。

まず，$\cos(\theta+2n\pi)=\cos\theta$ という関係が成り立つので，$y=\cos\theta$ のグラフは，$0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ におけるグラフが 2π ごとにくり返されることがわかります。(n は整数)



また，$\cos(-\theta)=\cos\theta$ という関係から，$y=\cos\theta$ は y 軸 $(\theta=0)$ について対称であり，$\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$ という関係から，$y=\cos\theta$ は，$\left(\frac{\pi}{2},\ 0\right)$ という点について対称であることがわかります。



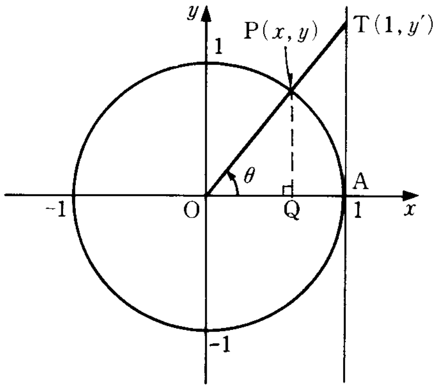
以上のように，$y=\cos\theta$ のグラフで，θ がすべての値をとって変化するとき，y の値は，$-1 \leqq y \leqq 1$ の範囲にあることがわかります。したがって

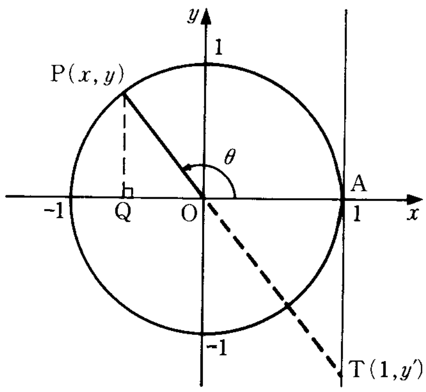
$y=\cos\theta$　の　定義域：　すべての実数

値　域：　$-1 \leqq y \leqq 1$

◈$y=\tan\theta$ のグラフ

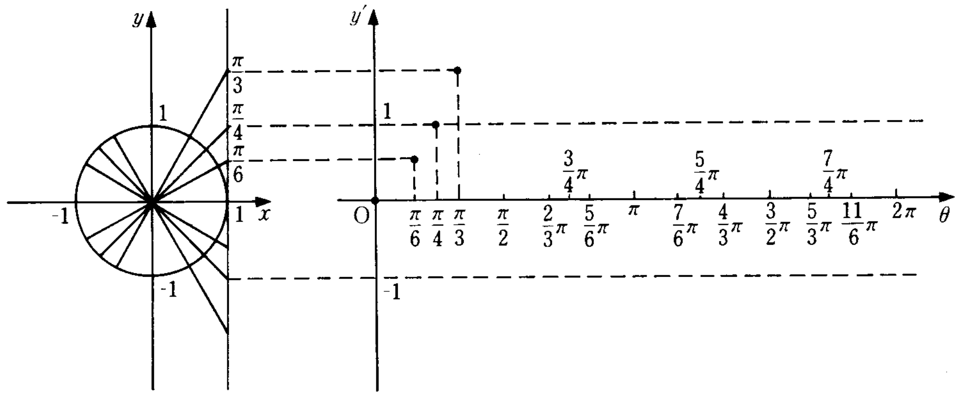
下の図で，点 A(1, 0) における単位円の接線と動径 OP との交点を $T(1,\ y')$ とし，$P(x,\ y)$ から x 軸に下ろした垂線の足を Q とすると，△POQ と △TOA が相似であることにより，符号をふくめて，$\frac{y}{x}=\frac{y'}{1}$，すなわち，$y'=\frac{y}{x}=\tan\theta$ となって，$\tan\theta$ の値は T の y 座標で与えられることがわかります。



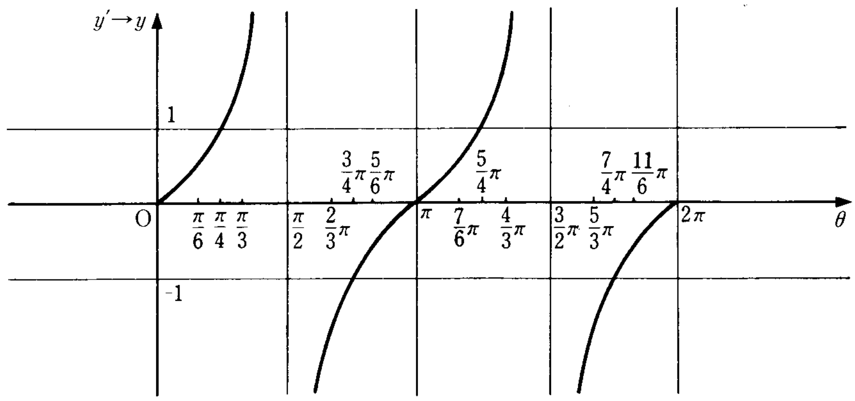


このことを利用して，$y=\sin\theta$ のときと同じようにグラフをかくことができます。

下の例 0，$\dfrac{\pi}{6}$，$\dfrac{\pi}{4}$，$\dfrac{\pi}{3}$にならって，それぞれの点を図示し，順になめらかに結んでみましょう。$\left(\theta=\dfrac{\pi}{2}\right.$ のときは，$\tan\theta=\dfrac{y}{x}$ ですから，$x=0$ となり定義されません。$\left.\right)$



下の図のようになりましたね。



ここで，変数 y' のかわりに y とすれば，$y=\tan\theta$ のグラフは，上のグラフと同じになります。

$y=\tan\theta$ のグラフの特徴について考えてみましょう。

まず，$\tan(\theta+2n\pi)=\tan\theta$ は，$\sin\theta$，$\cos\theta$ と同じですが，
$\tan(\theta+\pi)=\tan\theta$ ですから，$\tan(\theta+n\pi)=\tan\theta$ となることがわかります。したがって，$y=\tan\theta$ のグラフは，$0\leqq\theta\leqq\pi$ におけるグラフが π ごとにくり返されることになります。(n は整数)

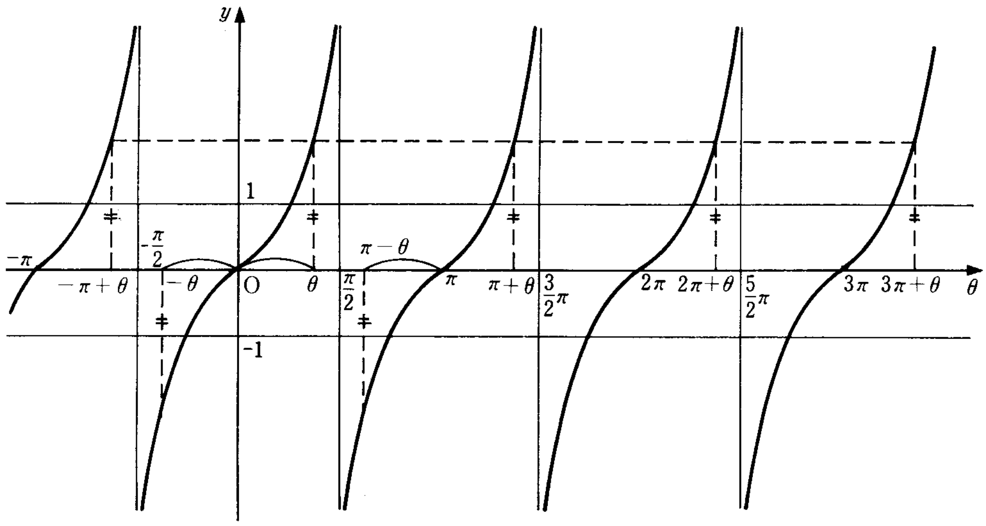
また，$\sin\theta$，$\cos\theta$ のグラフと大きく異なることは，$\theta=\dfrac{\pi}{2}+n\pi$ では，点 P の x 座標が 0 となって，$\tan\theta$ が定義されず，グラフが切れてしまうことです。そして，θ が $\dfrac{\pi}{2}+n\pi$ に近づけば近づくほど，グラフは直線 $\theta=\dfrac{\pi}{2}+n\pi$ に近づくことになります。

漸近線

こうした直線を**漸近線**といいます。

さらに，$\tan(-\theta)=-\tan\theta$ ですから，原点について対称です。

以上のことを図示すると次のようになります。



$y=\tan\theta$　の　定義域：　$\theta=\frac{\pi}{2}+n\pi$（$n$ は整数）をのぞくすべての実数

値　域：　すべての実数

□三角関数の定義域と値域□

$y=\sin\theta$，$y=\cos\theta$ の定義域は，すべての実数で

その値域は，$-1\leqq y\leqq 1$ である。

したがって，$-1\leqq\sin\theta\leqq 1$，$-1\leqq\cos\theta\leqq 1$ である。

$y=\tan\theta$ の定義域は，$\theta=\frac{\pi}{2}+n\pi$　n は整数　をのぞくすべての実数で

その値域は，すべての実数である。

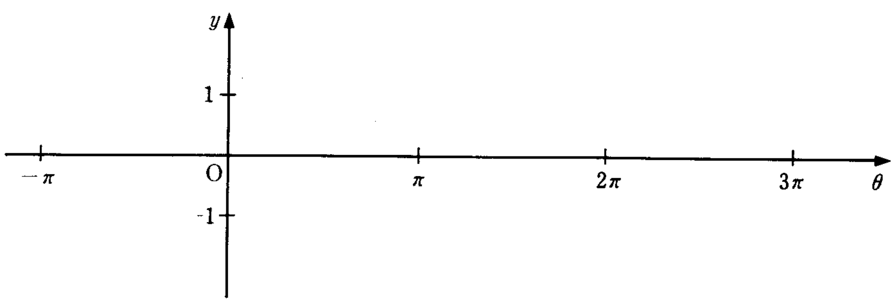
それでは，もう一度，$y=\sin\theta$，$y=\cos\theta$，$y=\tan\theta$ のグラフをかいて，きょうの学習を終わりにしましょう。

トレーニング

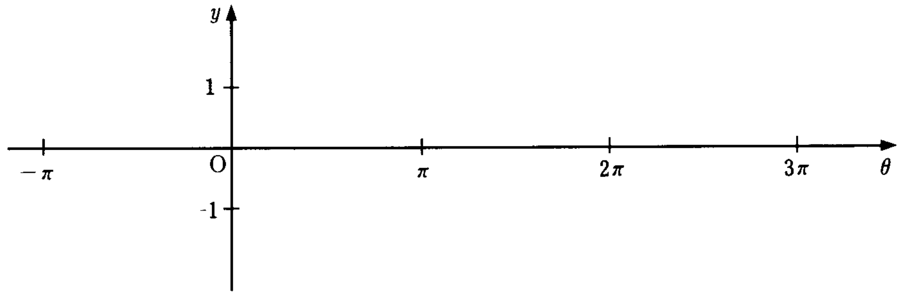
解答は 128 ページ

1 **次の三角関数のグラフをかけ。**

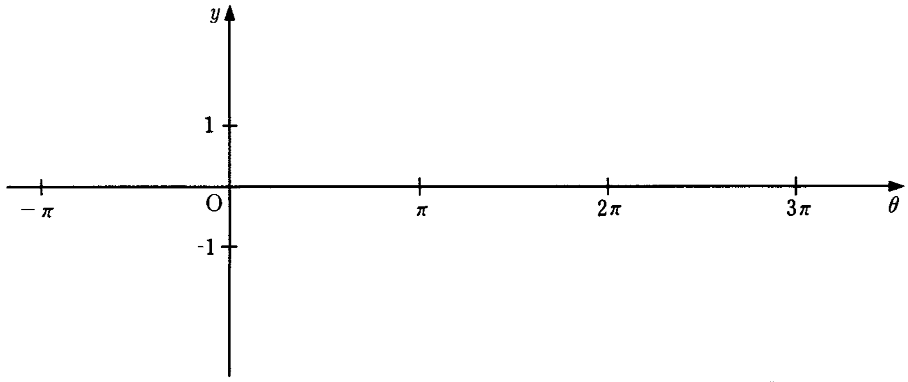
(1)　$y=\sin\theta$

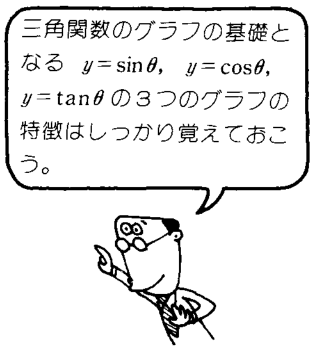


(2)　$y=\cos\theta$



(3)　$y=\tan\theta$





$y=\sin\theta$，$y=\cos\theta$，$y=\tan\theta$ のグラフはかけるようになりましたね。
きょうは，これで終わりです。

第 7 日

学習日　　月　　日

三角関数のグラフと周期

三角関数のグラフとその周期について考えてみよう。

きょうは，$y=\sin\theta$，$y=\cos\theta$，$y=\tan\theta$ のグラフをもとに，いろいろな三角関数について考え，周期について調べてみましょう。

まず，きょうの学習の準備として，これまでに学んだことを復習しましょう。

復習マークシート　　解答欄のあてはまる記号を黒くぬりつぶそう。

1　次の三角関数の値は，㋐〜㋓のどれと等しいか。

(1)　$\sin(\theta+2\pi)$

㋐　$\sin\theta$　　㋑　$-\sin\theta$　　㋒　$\cos\theta$　　㋓　$-\cos\theta$

(2)　$\cos(\theta-2\pi)$

㋐　$\sin\theta$　　㋑　$-\sin\theta$　　㋒　$\cos\theta$　　㋓　$-\cos\theta$

(3)　$\sin(\theta+3\pi)$

㋐　$\sin\theta$　　㋑　$-\sin\theta$　　㋒　$\cos\theta$　　㋓　$-\cos\theta$

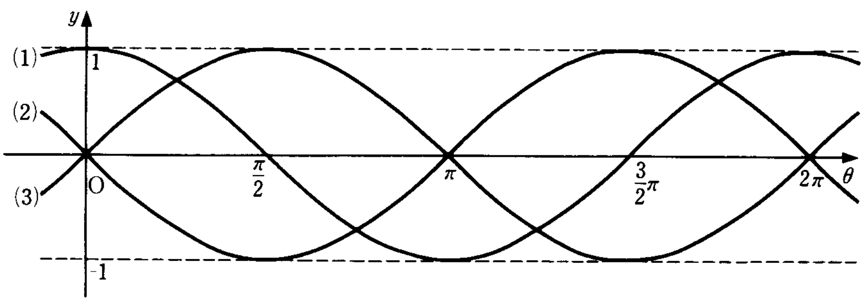
2　下の各グラフは，㋐〜㋓のどれか。

㋐　$y=\sin\theta$

㋑　$y=\cos\theta$

㋒　$y=\tan\theta$

㋓　$y=-\sin\theta$



解答欄					
1	(1)	㋐	㋑	㋒	㋓
	(2)	㋐	㋑	㋒	㋓
	(3)	㋐	㋑	㋒	㋓
2	(1)	㋐	㋑	㋒	㋓
	(2)	㋐	㋑	㋒	㋓
	(3)	㋐	㋑	㋒	㋓

復習マークシートの解答は，順に，㋐，㋒，㋑，㋑，㋓，㋐です。
では，きょうの学習を始めましょう。

◈同じ形がくり返される周期関数

周期関数
周期
基本周期

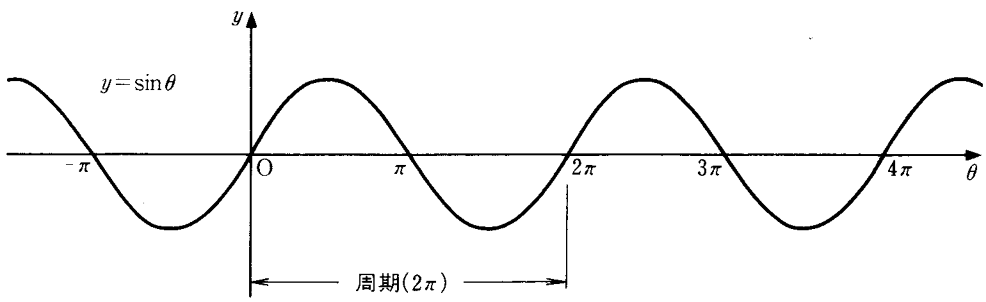
関数 $f(x)$ が $f(x+p)=f(x)$　　ただし，p は 0 でない定数　　をみたすとき，$f(x)$ を**周期関数**といい，p を**周期**といいます。

また，$f(x+p)=f(x)$ を満たす正数 p のうち，最小のものを**基本周期**といいます。たんに周期といえば，基本周期をさすのがふつうですから，今後周期は基本周期を意味するものとします。

三角関数について考えてみると

$$\begin{cases} \sin(\theta+2n\pi)=\sin\theta \\ \cos(\theta+2n\pi)=\cos\theta \\ \tan(\theta+n\pi)=\tan\theta \end{cases}$$
ただし，n は整数

となって，いずれも周期関数であることがわかります。これらの関数で $n=1$ のときが $f(x+p)=f(x)$ を満たす最小の正数 p にあたりますから周期は，$\sin\theta$，$\cos\theta$ は 2π，$\tan\theta$ は π となります。



◈$y=a\sin k\theta$ の周期は，$\dfrac{2\pi}{|k|}$

$y=a\sin k\theta$　　a，k は 0 でない定数　　の周期について調べてみましょう。

$f(\theta)=a\sin k\theta$ とすると，$k>0$ のとき

$$\begin{aligned} f\left(\theta+\frac{2\pi}{k}\right) &= a\sin k\left(\theta+\frac{2\pi}{k}\right) \\ &= a\sin(k\theta+2\pi) \\ &= a\sin k\theta \\ &= f(\theta) \end{aligned}$$

となって，$\dfrac{2\pi}{k}$ が周期であることがわかります。また，$k<0$ のときは

$$\begin{aligned} f\left(\theta+\frac{2\pi}{-k}\right) &= a\sin k\left(\theta+\frac{2\pi}{-k}\right) \\ &= a\sin(k\theta-2\pi) \\ &= a\sin k\theta \\ &= f(\theta) \end{aligned}$$

となって，$\dfrac{2\pi}{-k}$ が周期となります。以上をまとめると，$y=a\sin k\theta$ の周期は $\dfrac{2\pi}{|k|}$ となります。

同様に，$y=a\cos k\theta$，$y=a\tan k\theta$ についても，

$$f\left(\theta+\frac{2\pi}{k}\right)=a\cos k\left(\theta+\frac{2\pi}{k}\right) \qquad f\left(\theta+\frac{\pi}{k}\right)=a\tan k\left(\theta+\frac{\pi}{k}\right)$$
$$=a\cos(k\theta+2\pi) \qquad =a\tan(k\theta+\pi)$$
$$=a\cos k\theta \qquad =a\tan k\theta$$
$$=f(\theta) \qquad =f(\theta)$$

となって，周期はそれぞれ $\frac{2\pi}{|k|}$，$\frac{\pi}{|k|}$ となります。

では，三角関数の周期について，次の基本例題を考えてみましょう。

基本例題 1 ―― **三角関数の周期**

次の三角関数の周期を求めよ。

(1) $\sin 2\theta$　　(2) $2\cos\frac{1}{2}\theta$　　(3) $\tan(-3\theta)$

考え方　$a\sin k\theta$，$a\cos k\theta$，$a\tan k\theta$ の周期がそれぞれ $\frac{2\pi}{|k|}$，$\frac{2\pi}{|k|}$，$\frac{\pi}{|k|}$ であることを利用する。

解　答　(1) $a\sin k\theta$ の周期は $\frac{2\pi}{|k|}$ であるから，$\sin 2\theta$ の周期は，$k=2$ として

$$\frac{2\pi}{|2|}=\boldsymbol{\pi}$$

(2) $a\cos k\theta$ の周期は $\frac{2\pi}{|k|}$ であるから，$2\cos\frac{1}{2}\theta$ の周期は，$k=\frac{1}{2}$ として

$$\frac{2\pi}{\left|\frac{1}{2}\right|}=\boldsymbol{4\pi}$$

(3) $a\tan k\theta$ の周期は $\frac{\pi}{|k|}$ であるから，$\tan(-3\theta)$ の周期は，$k=-3$ として

$$\frac{\pi}{|-3|}=\boldsymbol{\frac{\pi}{3}}$$

―注―

周期関数の定義から考えてもよい。

(1)では $f(\theta)=\sin 2\theta$ とすると

$$f(\theta+\pi)=\sin 2(\theta+\pi)=\sin(2\theta+2\pi)$$
$$=\sin 2\theta=f(\theta)$$

よって，$\sin 2\theta$ の周期は π である。

トレーニング

解答は 128 ページ

1 次の三角関数の周期を求めよ。

(1) $\cos 3\theta$　　(2) $\sin\left(-\dfrac{\theta}{2}\right)$　　(3) $\tan 4\theta$　　(4) $-2\sin(-3\theta)$

簡単に求めることができましたね。では，次の基本例題を考えましょう。

基本例題 2　　**三角関数のグラフ**

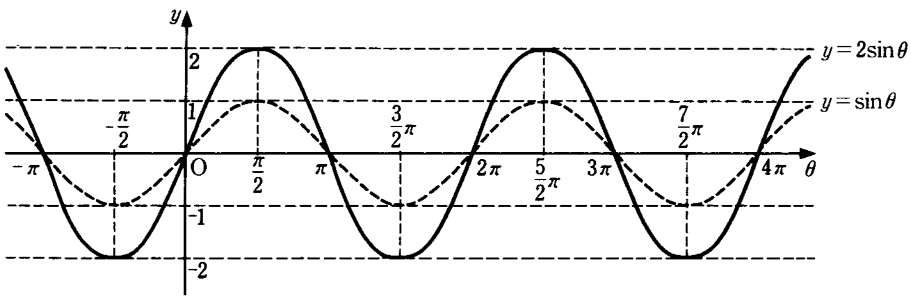
次の三角関数のグラフをかけ。

(1) $y=2\sin\theta$　　(2) $y=\cos 2\theta$

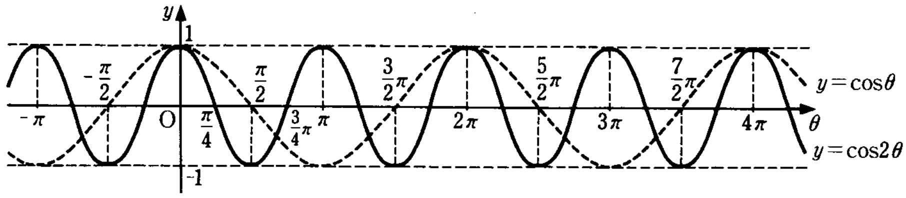
考え方　(1) $2\sin\theta$ は $\sin\theta$ の 2 倍であるから，$y=2\sin\theta$ のグラフは，$y=\sin\theta$ のグラフを y 軸方向に 2 倍に拡大したものである。

(2) $\cos 2\theta$ の周期は π であるから，$y=\cos 2\theta$ のグラフは，$y=\cos\theta$ のグラフを θ 軸方向に $\dfrac{1}{2}$ に縮小したものである。

解　答　(1) $y=2\sin\theta$ のグラフは，$y=\sin\theta$ のグラフを y 軸方向に 2 倍に拡大したものである。よって，下の図の実線のようになる。



(2) $y=\cos 2\theta$ のグラフは，$y=\cos\theta$ のグラフを θ 軸方向に $\dfrac{1}{2}$ に縮小したものである。よって，下の図の実線のようになる。



例題からわかるように，$y=a\sin\theta$ のグラフは，$y=\sin\theta$ のグラフを y 軸方向に，a 倍に拡大（縮小）したものであり，$y=\sin k\theta$ のグラフは，$y=\sin\theta$ のグラフを θ 軸方向に $\dfrac{1}{k}$ に縮小（拡大）したものです。ただし，a，k は正とします。

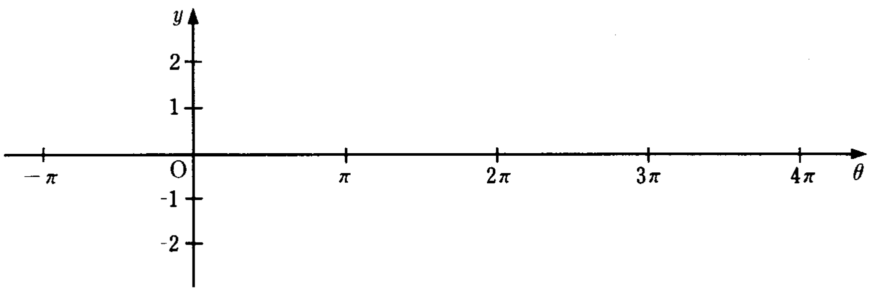
それでは，トレーニングで三角関数のグラフをかく練習をしてみましょう。

トレーニング

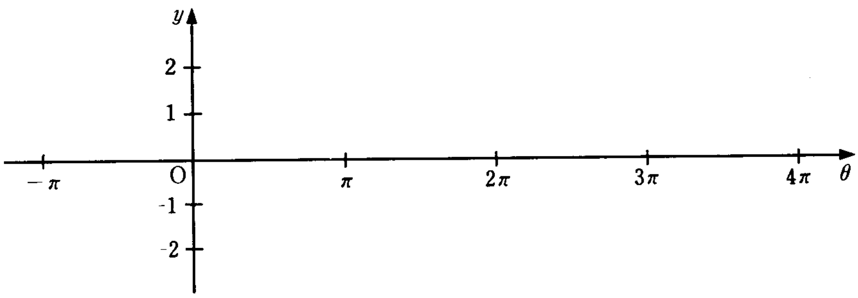
解答は 128 ページ

2 次の三角関数のグラフをかけ。

(1) $y=\sin\dfrac{1}{2}\theta$



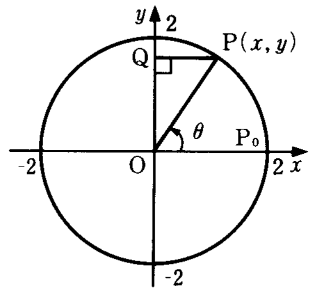
(2) $y=\dfrac{3}{2}\cos\theta$



では，次の例題に移りましょう。

例 題 1 　　　単振動

右の図のように，原点を中心とする半径 2 の円周上に点 $P_0(2,\ 0)$ がある。点 P が P_0 を出発してこの円周上を正の向きに，毎秒 $\dfrac{1}{12}$ 回転の速さで動いている。P から y 軸に垂線 PQ をひくとき，点 Q の運動について次の問いに答えよ。



(1) t 秒後の動径の表す角 θ を求めよ。
(2) t 秒後の Q の y 座標を t の式で示せ。
(3) (2)の t と y の式をグラフに示せ。

考え方 (1) 1 回転は 2π だから，t 秒後には $2\pi\times\dfrac{1}{12}\times t$ となる。
(2) Q の y 座標は，P の y 座標と同じであるから，三角関数の定義から明らか。
(3) y を縦軸，t を横軸にとって考える。

解　答 (1) 1 回転は 2π だから，t 秒後の動径の表す角 θ は

$$\boldsymbol{\theta}=2\pi\times\frac{1}{12}\times t=\boldsymbol{\frac{\pi}{6}t}$$

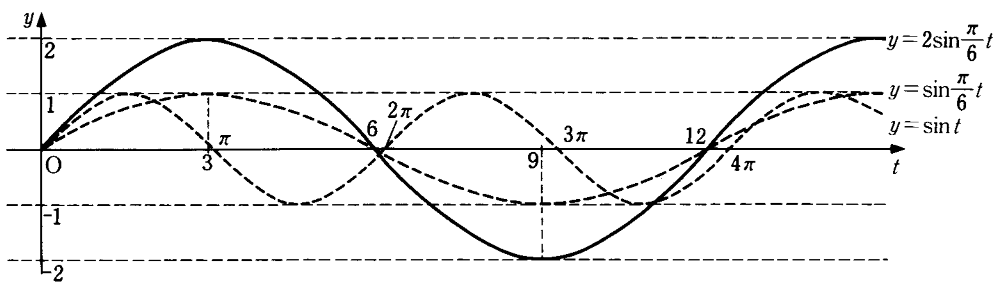
(2) Q の y 座標は，P の y 座標と同じであるから，三角関数の定義より

$$\sin\theta=\frac{y}{2}$$

よって　　$\boldsymbol{y=2\sin\frac{\pi}{6}t}$

(3) $y=2\sin\dfrac{\pi}{6}t$ のグラフは，$y=\sin t$ のグラフを t 軸方向に $\dfrac{6}{\pi}$ 倍に拡大し，y 軸方向に 2 倍に拡大したものである。

題意より，$t\geqq 0$ であるから，グラフは下の図の実線のようになる。

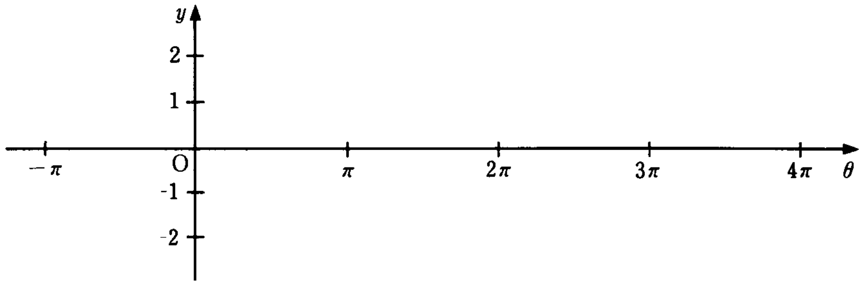


—注—
点 Q は y 軸上 $-2\leqq y\leqq 2$ の間を往復運動していて，位置と時間との関係が正弦曲線で表される。この点 Q のような往復運動を，単振動という。

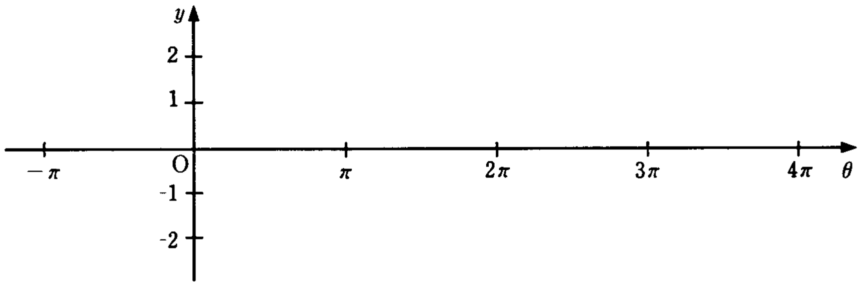
トレーニング　解答は 129 ページ

3 次の三角関数のグラフをかけ。

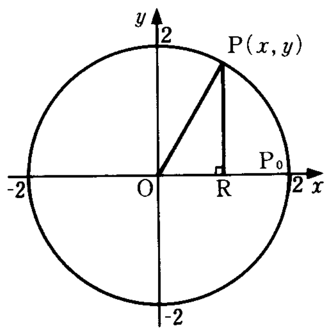
(1)　$y=2\sin 2\theta$



(2)　$y=\frac{1}{2}\cos\frac{1}{2}\theta$

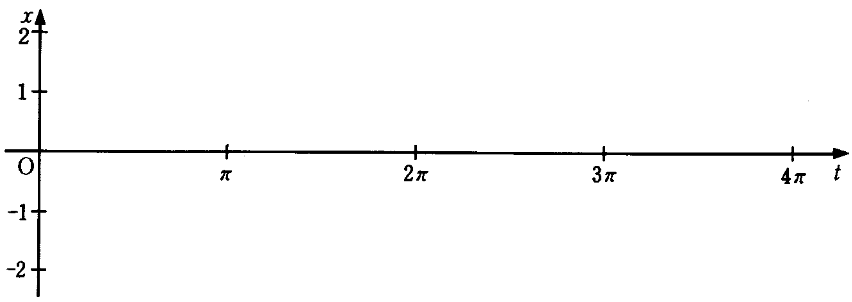


4 右の図のように，原点を中心とする半径 2 の円周上に点 $P_0(2,\ 0)$ がある。点 P が P_0 を出発してこの円周上を正の向きに，毎秒 $\frac{1}{12}$ 回転の速さで回っている。P から x 軸に垂線 PR をひくとき，点 R の運動について，次の問いに答えよ。



(1)　t 秒後の点 R の x 座標を t の式で示せ。

(2)　(1)の t と x の式をグラフに示せ。



きょうの学習はこれまでにしましょう。

学習日　月　日

第 8 日　いろいろな三角関数のグラフ

いろいろな三角関数のグラフの特徴を知ろう

きょうは，$y=\sin\theta$，$y=\cos\theta$，$y=\tan\theta$ のグラフを基本に，いろいろな三角関数のグラフについて，考えてみましょう。

では，はじめに次のことを復習しておきましょう。

復習マークシート　**解答欄のあてはまる記号を黒くぬりつぶそう。**

1　次の三角関数の周期は㋐～㋓のどれか。

(1) $\sin\frac{1}{3}\theta$　(2) $\cos 2\theta$　(3) $\tan\left(-\frac{1}{2}\theta\right)$

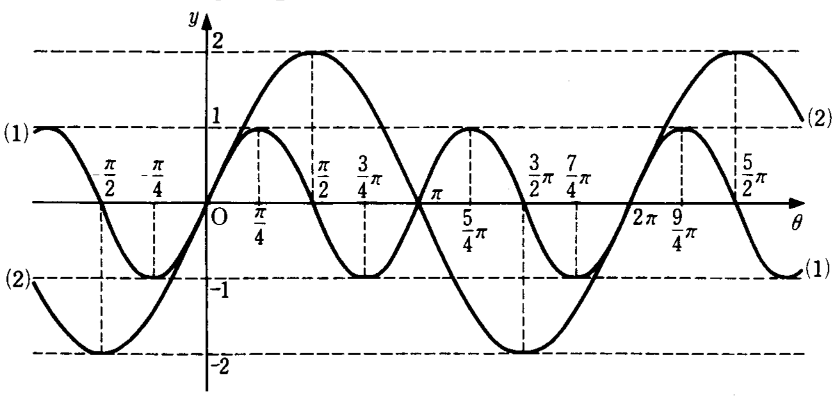
㋐ π　㋑ 2π　㋒ 4π　㋓ 6π

2　次の $\boxed{}$ の中にはいる適当なものは㋐～㋓のどれか。

$y=(x-1)^2+2$ のグラフは，$y=x^2$ のグラフを x 軸方向に $\boxed{(1)}$，y 軸方向に $\boxed{(2)}$ だけ，平行移動したものである。また，$y=a(x-p)^2+q$ のグラフは，$y=ax^2$ のグラフを x 軸方向に $\boxed{(3)}$，y 軸方向に $\boxed{(4)}$ だけ平行移動したものである。

㋐ 2　㋑ 1　㋒ p　㋓ q

3　次の各グラフは㋐～㋓のどれか。



㋐ $y=\frac{1}{2}\sin\theta$　㋑ $y=\sin\frac{1}{2}\theta$

㋒ $y=\sin 2\theta$　㋓ $y=2\sin\theta$

解答欄					
1	(1)	㋐	㋑	㋒	㋓
	(2)	㋐	㋑	㋒	㋓
	(3)	㋐	㋑	㋒	㋓
2	(1)	㋐	㋑	㋒	㋓
	(2)	㋐	㋑	㋒	㋓
	(3)	㋐	㋑	㋒	㋓
	(4)	㋐	㋑	㋒	㋓
3	(1)	㋐	㋑	㋒	㋓
	(2)	㋐	㋑	㋒	㋓

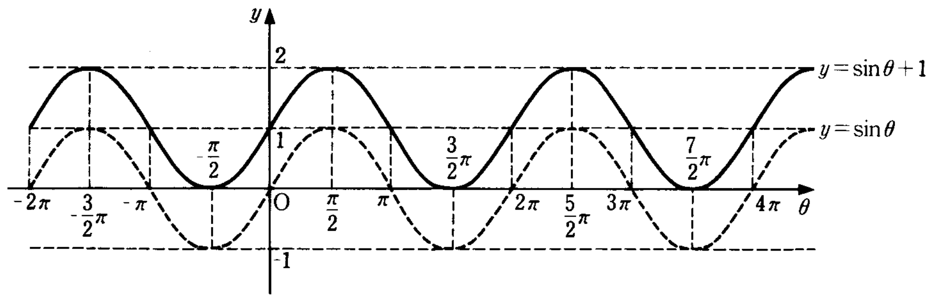
復習マークシートの解答は，順に，㊁，㋐，㋑，㋑，㋐，㋒，㊁，㋒，㊁です。
では，きょうの学習にはいりましょう。

基本例題 1 ― $y=\sin\theta+q$ のグラフ

$y=\sin\theta+1$ のグラフをかけ。

考え方　y の値は，$\sin\theta$ よりもつねに1だけ大きいから，$y=\sin\theta+1$ のグラフは，$y=\sin\theta$ のグラフを y 軸方向に1だけ平行移動したものである。

解　答　$y=\sin\theta+1$ のグラフは，$y=\sin\theta$ のグラフを y 軸方向に1だけ平行移動したものであるから，グラフは下の図の実線のようになる。

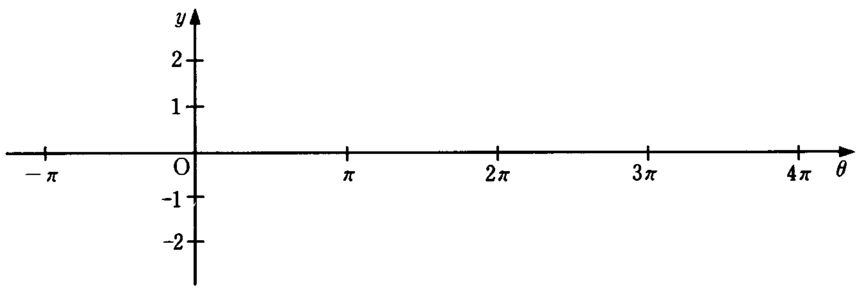


トレーニング

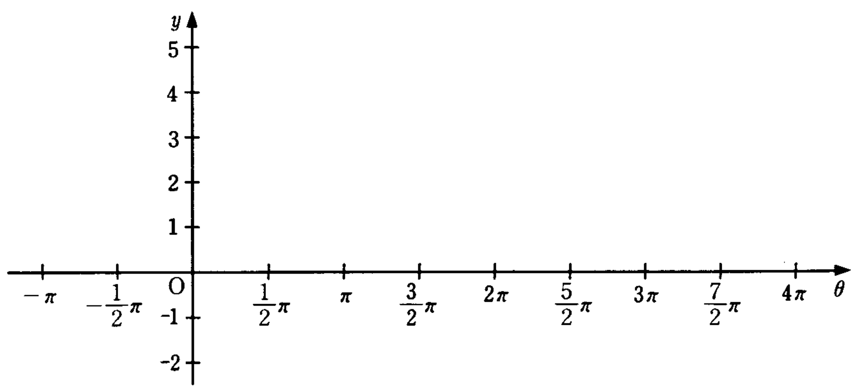
解答は 129 ページ

1 次のグラフをかけ。

(1)　$y=\cos\theta-1$



(2)　$y=\tan\theta+2$

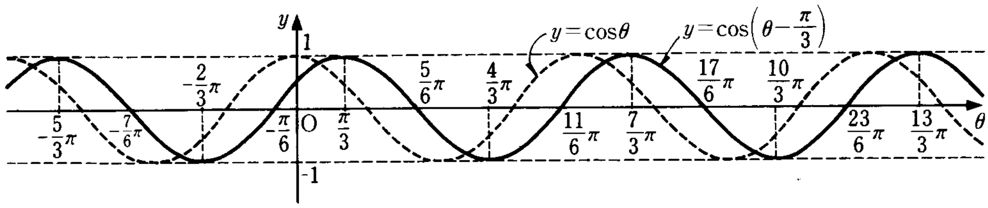


基本例題 2 　　　　**$y=\cos(\theta-\alpha)$ のグラフ**

$y=\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)$ のグラフをかけ。

考え方　$y=\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)$ のグラフは，$y=\cos\theta$ のグラフを θ 軸方向に $\dfrac{\pi}{3}$ だけ平行移動したものである。

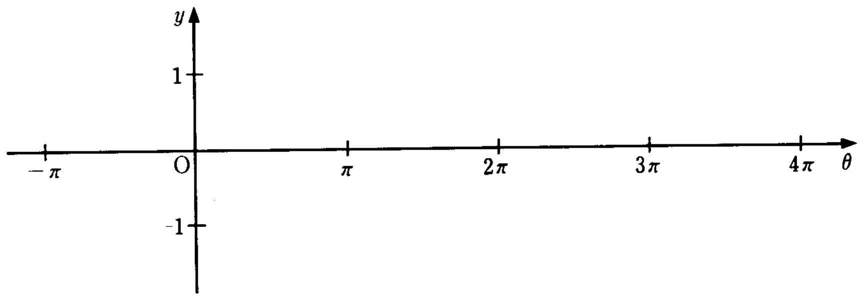
解　答　$y=\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)$ のグラフは，$y=\cos\theta$ のグラフを θ 軸方向に $\dfrac{\pi}{3}$ だけ平行移動したものであるから，グラフは下の図の実線のようになる。



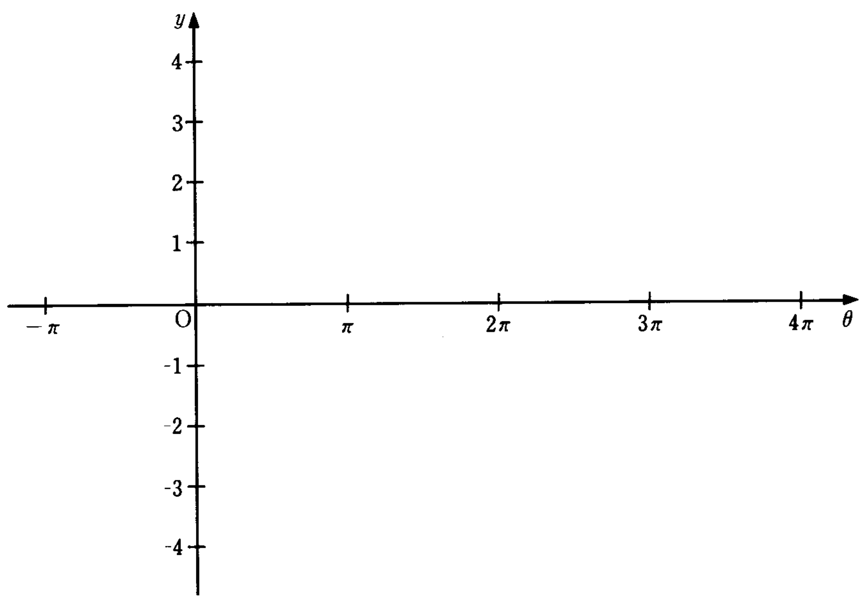
トレーニング　　解答は 129 ページ

2　次のグラフをかけ。

(1)　$y=\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)$



(2)　$y=\tan\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)$

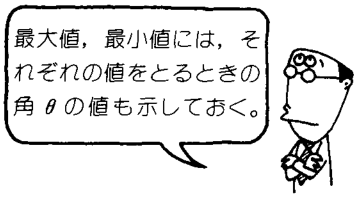


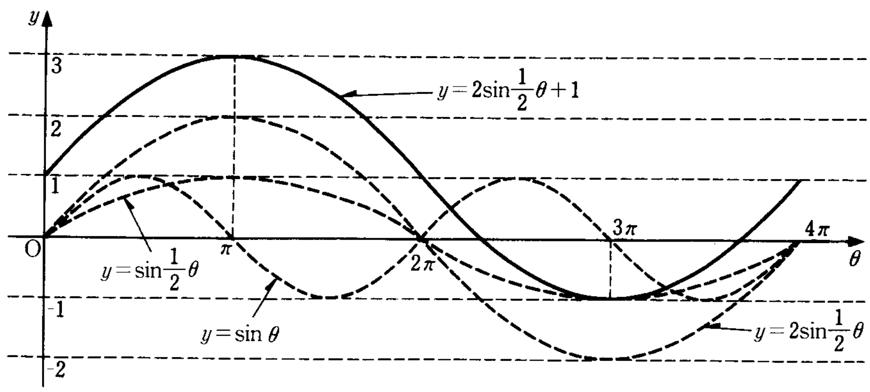
例 題 1 　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　**$y=a\sin k\theta+q$ のグラフ**

$0\leqq\theta\leqq4\pi$ の範囲で，$y=2\sin\frac{1}{2}\theta+1$ のグラフをかき，y の最大値，最小値を求めよ。

考え方　$y=2\sin\frac{1}{2}\theta+1$ のグラフは，$y=\sin\theta$ のグラフを θ 軸方向に 2 倍に拡大し，y 軸方向に 2 倍に拡大したものを，y 軸方向に 1 だけ平行移動したものである。

解　答　$y=2\sin\frac{1}{2}\theta+1$ のグラフは，$y=\sin\theta$ のグラフを θ 軸方向に 2 倍に拡大し，y 軸方向に 2 倍に拡大したものを，y 軸方向に 1 だけ平行移動したものである。
$0\leqq\theta\leqq4\pi$ より，グラフは下の図の実線のようになる。
　グラフから y の最大値，最小値は，
　$\theta=\pi$ のとき最大値　3
　$\theta=3\pi$ のとき最小値　-1
をとる。





トレーニング

解答は 130 ページ

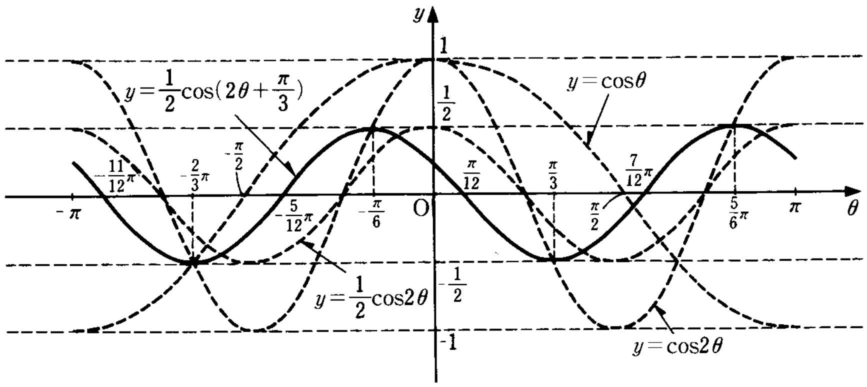
3　**$-\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$ の範囲で，$y=\frac{1}{2}\cos2\theta-1$ のグラフをかき，y の最大値，最小値を求めよ。**

例 題 2　　$y=a\cos(k\theta-\alpha)$ のグラフ

$-\pi \leqq \theta \leqq \pi$ の範囲で，$y=\dfrac{1}{2}\cos\left(2\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)$ のグラフをかけ。

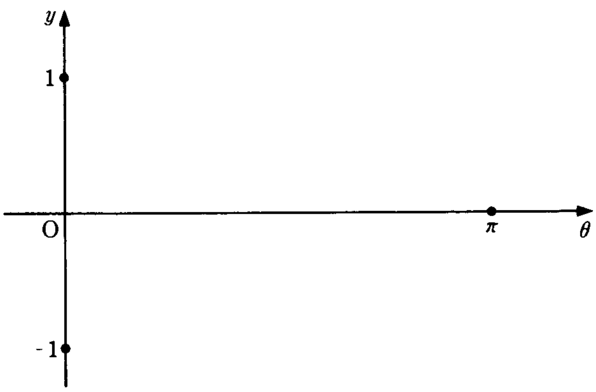
考え方　$\cos\left(2\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)=\cos2\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)$ であるから，グラフは，$y=\cos\theta$ のグラフを，θ 軸方向に $\dfrac{1}{2}$ に縮小し，y 軸方向に $\dfrac{1}{2}$ に縮小したものを，θ 軸方向に $-\dfrac{\pi}{6}$ だけ平行移動したものである。

解　答　$y=\dfrac{1}{2}\cos2\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)$ のグラフは，$y=\cos\theta$ のグラフを，θ 軸方向に $\dfrac{1}{2}$ に縮小し，y 軸方向に $\dfrac{1}{2}$ に縮小したものを，θ 軸方向に $-\dfrac{\pi}{6}$ だけ平行移動したものである。よって，$-\pi \leqq \theta \leqq \pi$ のとき，グラフは下の図の実線のようになる。



トレーニング　　解答は 130 ページ

4　$0 \leqq \theta \leqq \pi$ の範囲で，$y=\dfrac{1}{2}\sin\left(2\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)$ のグラフをかけ。



いろいろな三角関数のグラフをかいてきましたが，慣れましたね。
それでは，ここでまとめておきましょう。

◈いろいろな三角関数のグラフ

$\boxed{1}$　$y=a\sin\theta$ のグラフ
　$y=\sin\theta$ のグラフを y 軸方向に a 倍に拡大（縮小）したもの。

$\boxed{2}$　$y=\sin k\theta$ のグラフ
　$y=\sin\theta$のグラフを θ 軸方向に $\dfrac{1}{k}$ に縮小（拡大）したもの。

$\boxed{3}$　$y=\sin\theta+q$ のグラフ
　$y=\sin\theta$のグラフを y 軸方向に q だけ平行移動したもの。

$\boxed{4}$　$y=\sin(\theta-\alpha)$ のグラフ
　$y=\sin\theta$ のグラフを θ 軸方向に α だけ平行移動したもの。

以上の 4 つを基本型として，これらを合わせて次のようなものにまとめられる。

$\boxed{5}$　$y=a\sin k\theta+q$ のグラフ
　$y=\sin\theta$ のグラフを，θ 軸方向に $\dfrac{1}{k}$ に縮小（拡大）し，y 軸方向に a 倍に拡大（縮小）したものを，さらに y 軸方向に q だけ平行移動したもの。

$\boxed{6}$　$y=a\sin k(\theta-\alpha)$ のグラフ
　$y=\sin\theta$ のグラフを，θ 軸方向に $\dfrac{1}{k}$ に縮小（拡大）し，y 軸方向に a 倍に拡大（縮小）したものを，さらに θ 軸方向に α だけ平行移動したもの。

さらに，$\boxed{5}$，$\boxed{6}$を 1 つにまとめれば，次のようになる。

□$y=a\sin k(\theta-\alpha)+q$ のグラフ□

$y=a\sin k(\theta-\alpha)+q$ のグラフは，$y=\sin\theta$ のグラフを θ 軸方向に $\dfrac{1}{k}$ に縮小（拡大）し，y 軸方向に a 倍に拡大（縮小）したものを，さらに，θ 軸方向に α，y 軸方向に q だけ平行移動したものである。

一注一
　ここで用いている a，k は正の数である。a が負の場合は，a が正の場合のグラフと x 軸に対称なグラフになり，k が負の場合は，$\sin(-\theta)=-\sin\theta$ によって，a の正，負におきかえて考えればよい。
　$\cos\theta$，$\tan\theta$ についても上記の $\sin\theta$ の場合と同様にグラフを考えればよい。

きょうは，これでおしましまいにしましょう。

第 9 日　# 三角方程式

学習日　　月　　日

三角方程式…………はじめて聞くことばですね。

きょうは，三角方程式とはなにか，また，その解法はどうすればよいのかについて考えてみましょう。

まず，きょうの学習の準備として，三角関数の値や２次方程式の解について復習しておきましょう。

復習マークシート　　**解答欄のあてはまる記号を黒くぬりつぶそう。**

1　次の三角関数の値は，㋐～㋓のどれか。

(1) $\sin\frac{\pi}{2}$　　(2) $\tan\frac{\pi}{3}$　　(3) $\cos 0$

㋐ 0　　㋑ $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　㋒ 1　　㋓ $\sqrt{3}$

2　次の三角関数の値は，㋐～㋓のどれか。

(1) $\sin\frac{\pi}{6}$　　(2) $\cos\frac{\pi}{6}$　　(3) $\sin\frac{\pi}{3}$

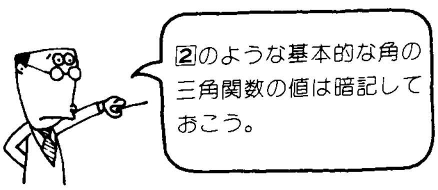
(4) $\cos\frac{\pi}{3}$　　(5) $\sin\frac{\pi}{4}$　　(6) $\tan\frac{\pi}{4}$

㋐ $\frac{1}{2}$　　㋑ $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　㋒ $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　㋓ 1

3　２次方程式 $x^2-3x-4=0$ の解は，次のどれか。

㋐ $1,\ 4$　　㋑ $-1,\ 4$

㋒ $1,\ -4$　　㋓ $-1,\ -4$



解答欄					
1	(1)	㋐	㋑	㋒	㋓
	(2)	㋐	㋑	㋒	㋓
	(3)	㋐	㋑	㋒	㋓
2	(1)	㋐	㋑	㋒	㋓
	(2)	㋐	㋑	㋒	㋓
	(3)	㋐	㋑	㋒	㋓
	(4)	㋐	㋑	㋒	㋓
	(5)	㋐	㋑	㋒	㋓
	(6)	㋐	㋑	㋒	㋓
3		㋐	㋑	㋒	㋓

復習マークシートの解答は，順に，ⓤ，ⓔ，ⓤ，ⓐ，ⓤ，ⓤ，ⓐ，ⓘ，ⓔ，ⓘです。
では，三角方程式について学習を始めましょう。

◈三角方程式とは？

三角方程式

$\sin\theta=\frac{1}{2}$，$\tan\theta=\sqrt{3}$，$\sin\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$ などのように，三角関数の角に未知数をふくむ方程式を**三角方程式**といいます。

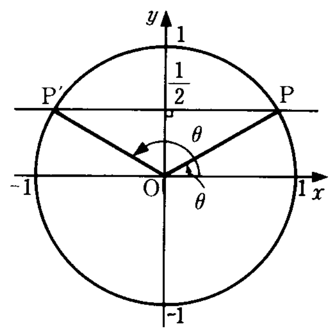
これから，具体的な例で三角方程式の解き方について考えてみましょう。

基本例題 1　　**$\sin\theta=a$ の解法**

$0\leqq\theta<2\pi$ のとき，$\sin\theta=\frac{1}{2}$ をみたす角 θ を求めよ。また，θ が一般角のときはどうか。

考え方　単位円と直線 $y=\frac{1}{2}$ との交点を P，P′ として，動径 OP，OP′ の表す角を求める。

解　答　角 θ の動径と単位円との交点の y 座標が $\sin\theta$ の値を表すので，右の図のように，単位円と $y=\frac{1}{2}$ との交点を P，P′ とし，動径 OP，OP′ の表す角を求めればよい。



$0\leqq\theta<2\pi$ のとき，それぞれ

$$\theta=\frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi$$

一般角では，それぞれ

$$\theta=\frac{\pi}{6}+2n\pi,\ \frac{5}{6}\pi+2n\pi \qquad n\text{ は整数}$$

トレーニング　　解答は 131 ページ

1　**$0\leqq\theta<2\pi$ のとき，次の式をみたす角 θ を求めよ。また，θ が一般角のときはどうか。**

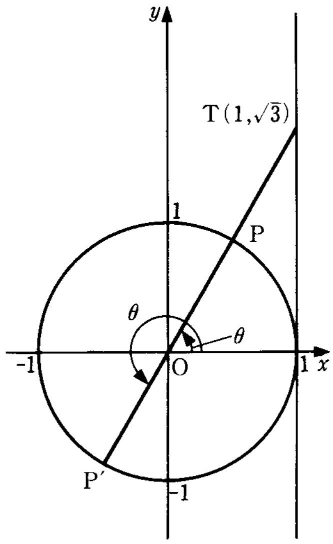
(1)　$\cos\theta=\frac{1}{2}$　　　　(2)　$2\sin\theta=\sqrt{2}$

基本例題 2 　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　**$\tan\theta=a$ の解法**

$0\leqq\theta<2\pi$ のとき，$\tan\theta=\sqrt{3}$ をみたす角 θ を求めよ。また，θ が一般角のときはどうか。

考え方 　点 $\mathrm{T}(1,\ \sqrt{3})$ と原点 O を結ぶ直線が，単位円と交わる点を P，P′ とし，動径 OP，OP′ を表す角を求める。

解　答 　角 θ の動径と直線 $x=1$ の交点の y 座標が $\tan\theta$ の値を表すから，右の図のように，点 $\mathrm{T}(1,\ \sqrt{3})$ と原点を結ぶ直線と単位円との交点を P，P′ とし，動径の表す角を求めればよい。



$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲で考えれば，それぞれ

$$\theta=\frac{\pi}{3},\ \frac{4}{3}\pi$$

一般角では

$$\theta=\frac{\pi}{3}+n\pi \qquad n\text{ は整数}$$

―注―

$\dfrac{\pi}{3}+2n\pi,\ \dfrac{4}{3}\pi+2n\pi$ は，$\dfrac{\pi}{3}+n\pi$ 　 n は整数 　とまとめられる。

トレーニング

解答は 131 ページ

2 **$0\leqq\theta<2\pi$ のとき，次の式をみたす角 θ を求めよ。また，θ が一般角のときはどうか。**

(1) $\tan\theta=-1$ 　　　　(2) $\sqrt{3}\tan\theta=1$

どうですか。図から動径の表す角がすぐ頭に浮かびますか。
では，これまでのところをまとめておきましょう。

◈三角方程式の解法

$\sin\theta=a$，$\cos\theta=a$，$\tan\theta=a$ などをみたす θ を求めることを，三角方程式を解くといいます。

三角関数は周期関数ですから，角 θ に制限がないときは，三角方程式の解は無数にあります。

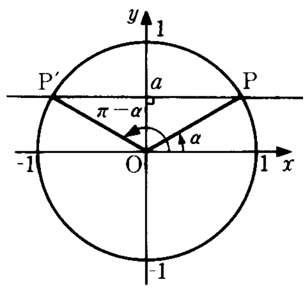
基本的な三角方程式の解を求めるには，次のような図をかき，単位円の性質を利用して求めることができます。

1 $\sin\theta=a$ の一般解

$\sin\theta=a$ の解の1つを α とすると，一般解は

$$\begin{cases}\theta=\alpha+2n\pi \\ \theta=(\pi-\alpha)+2n\pi\end{cases}\qquad n\text{ は整数}$$

となります。

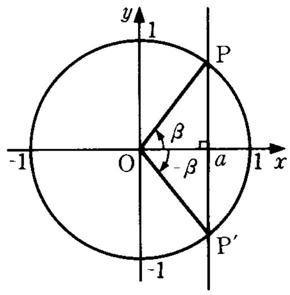


2 $\cos\theta=a$ の一般解

$\cos\theta=a$ の解の1つを β とすると，一般解は

$$\theta=\pm\beta+2n\pi\qquad n\text{ は整数}$$

となります。

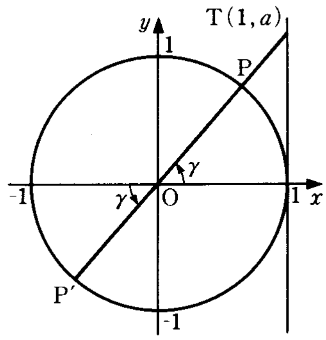


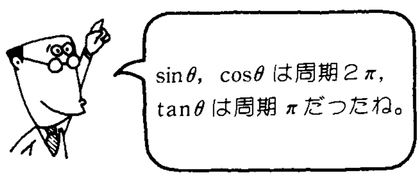
3 $\tan\theta=a$ の一般解

$\tan\theta=a$ の解の1つを γ とすると，一般解は

$$\theta=\gamma+n\pi\qquad n\text{ は整数}$$

となります。





では，例題に移りましょう。

例 題 1　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　**三角方程式**

$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，$\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{1}{2}$ をみたす角 θ を求めよ。

考え方　$\theta-\dfrac{\pi}{3}=\alpha$ とおいて考える。このとき変数 α の変域に注意する。

解　答　$\theta-\dfrac{\pi}{3}=\alpha$ とおくと，与式は　$\sin\alpha=\dfrac{1}{2}$

また，$0 \leqq \theta < 2\pi$ であるから，$\theta=\alpha+\dfrac{\pi}{3}$ より

$$0 \leqq \alpha+\frac{\pi}{3} < 2\pi$$

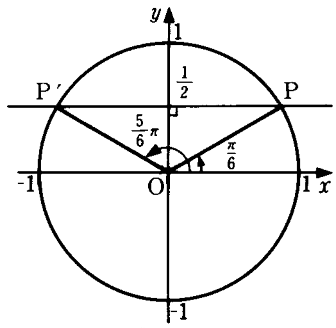
すなわち　$-\dfrac{\pi}{3} \leqq \alpha < \dfrac{5}{3}\pi$

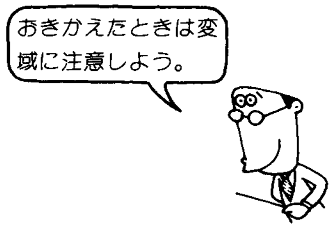
このとき，$\sin\alpha=\dfrac{1}{2}$ を解けば，右の図より

$$\alpha=\frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi$$

よって　$\boldsymbol{\theta}=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{3}=\boldsymbol{\dfrac{\pi}{2}}$,

$\boldsymbol{\theta}=\dfrac{5}{6}\pi+\dfrac{\pi}{3}=\boldsymbol{\dfrac{7}{6}\pi}$





トレーニング　　**解答は 132 ページ**

3　**$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の方程式をみたす角 θ を求めよ。**

(1)　$\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　　　(2)　$\tan(\pi-\theta)=-\sqrt{3}$

例 題 2 — 少し複雑な形の三角方程式

$0 \leqq x < 2\pi$ のとき，次の方程式をみたす角 x を求めよ。

$$2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$$

考え方 $\cos x = t$ とおくと，$-1 \leqq t \leqq 1$ で，$2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$ は，$2t^2 + t - 1 = 0$ となる。まずこの 2 次方程式を解き，次に $\cos x = t$ として，$\cos x$ についての方程式を解く。

解 答 $\cos x = t$ とおくと，$2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$ は

$$2t^2 + t - 1 = 0,\ \text{ただし，} -1 \leqq t \leqq 1$$

$$(2t-1)(t+1) = 0$$

よって　$t = \dfrac{1}{2},\ -1$

$t = \dfrac{1}{2}$ のとき，$\cos x = \dfrac{1}{2}$ であるから，$0 \leqq x < 2\pi$ より

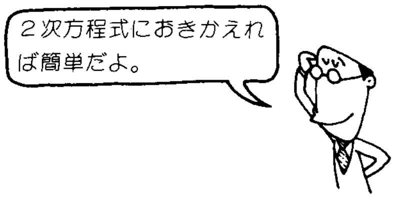
$$x = \frac{\pi}{3},\ \frac{5}{3}\pi$$

$t = -1$ のとき，$\cos x = -1$ であるから，$0 \leqq x < 2\pi$ より

$$x = \pi$$

ゆえに

$$\boldsymbol{x = \frac{\pi}{3},\ \pi,\ \frac{5}{3}\pi}$$



トレーニング

解答は 132 ページ

4 **$0 \leqq x < 2\pi$ のとき，次の方程式をみたす x を求めよ。**

(1) $2\sin^2 x = \sin x + 1$　　　(2) $\cos^2 x + 3\sin x = 3$

きょうは，これでおしまいにしましょう。次のページに**チャレンジコーナー**があります。まだ，余力のある人はどうぞ。

チャレンジコーナー このページは，時間に余裕のある人だけしてください。

もう少し応用力の必要な問題を考えてみましょう。

トレーニング

解答は 133 ページ

5 **$y=\cos^2\theta+\sin\theta$ の最大値，最小値を，次の順序で求めよ。**

(1) $\sin\theta=t$ とおくとき，t の値の範囲を示せ。

(2) y を t の関数で表せ。

(3) y の最大値，最小値を求めよ。

お疲れさまでした。がんばりましたね。次の日は，三角不等式を学習します。

第10日

三角不等式

学習日　月　日

三角不等式とは？

きょうは，三角不等式の解き方について学習しましょう。前日の三角方程式の延長ですから，これをよく理解しておきましょう。

まず，復習から始めましょう。

復習マークシート　解答欄のあてはまる記号を黒くぬりつぶそう。

1　$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の三角方程式をみたす θ は，㋐～㋓のどれか。

(1)　$\sin\theta = \frac{1}{2}$

㋐　$\frac{\pi}{4}$，$\frac{3}{4}\pi$　　㋑　$\frac{\pi}{6}$，$\frac{5}{6}\pi$　　㋒　$\frac{\pi}{3}$，$\frac{5}{3}\pi$　　㋓　$\frac{\pi}{4}$，$\frac{7}{4}\pi$

(2)　$\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$

㋐　$\frac{\pi}{4}$，$\frac{3}{4}\pi$　　㋑　$\frac{\pi}{6}$，$\frac{5}{6}\pi$　　㋒　$\frac{\pi}{3}$，$\frac{5}{3}\pi$　　㋓　$\frac{\pi}{4}$，$\frac{7}{4}\pi$

2　次の不等式をみたす x の範囲は，㋐～㋓のどれか。

(1)　$x - 2 < 1$

㋐　$x > 2$　　㋑　$x < 2$　　㋒　$x > 3$　　㋓　$x < 3$

(2)　$3x + 2 > 8$

㋐　$x > 2$　　㋑　$x < 2$　　㋒　$x > 3$　　㋓　$x < 3$

3　次の不等式の解は，㋐～㋓のどれか。

(1)　$(x-1)(x-2) < 0$

㋐　$x < 1$，$x > 2$　　㋑　$x < -2$，$x > -1$

㋒　$-2 < x < -1$　　㋓　$1 < x < 2$

(2)　$(x+1)(x+2) > 0$

㋐　$x < 1$，$x > 2$　　㋑　$x < -2$，$x > -1$

㋒　$-2 < x < -1$　　㋓　$1 < x < 2$

解答欄					
1	(1)	㋐	㋑	㋒	㋓
	(2)	㋐	㋑	㋒	㋓
2	(1)	㋐	㋑	㋒	㋓
	(2)	㋐	㋑	㋒	㋓
3	(1)	㋐	㋑	㋒	㋓
	(2)	㋐	㋑	㋒	㋓

復習マークシートの解答は，順に，㋑，㋓，㋓，㋐，㋓，㋑です。
では，三角不等式について考えてみましょう。

基本例題 1 **$\sin\theta > a$ の解法**

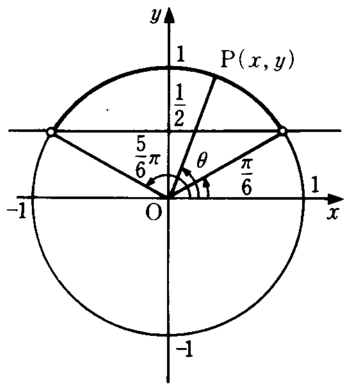
$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，不等式　$\sin\theta > \dfrac{1}{2}$ をみたす θ の範囲を求めよ。

考え方　原点を中心とする単位円周上で考えると，$\sin\theta = y$ である。したがって，この円周上の点 P の y 座標が $\dfrac{1}{2}$ より大きくなる範囲を調べ，動径 OP の表す角の範囲を求めればよい。

解　答　$0 \leqq \theta < 2\pi$ で，$\sin\theta = \dfrac{1}{2}$ となるのは $\theta = \dfrac{\pi}{6}$，$\dfrac{5}{6}\pi$ のときであるから，点 P の y 座標が $\dfrac{1}{2}$ より大きくなるのは右の図の太線の部分である。

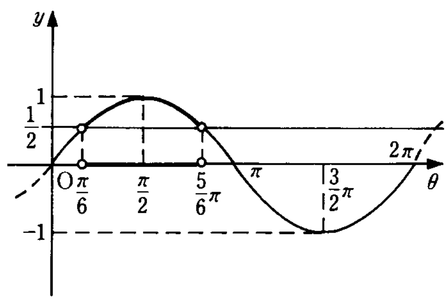
したがって，$\sin\theta > \dfrac{1}{2}$ をみたす θ の範囲は

$$\boldsymbol{\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{5}{6}\pi}$$



【別解】
$y = \sin\theta$ とおき，このグラフをかいて，グラフから $y > \dfrac{1}{2}$ となる θ の範囲を調べる。

$\sin\theta = \dfrac{1}{2}$ となるのは，$\theta = \dfrac{\pi}{6}$，$\dfrac{5}{6}\pi$ であるから，不等式の解は，$\boldsymbol{\dfrac{\pi}{6} < \theta < \dfrac{5}{6}\pi}$ となる。



トレーニング　　解答は 133 ページ

1　**$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の不等式をみたす θ の範囲を求めよ。**

(1)　$\sin\theta > \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

(2) $\sin\theta \leqq -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

2 **$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の不等式をみたす θ の範囲を求めよ。**

(1) $\cos\theta > \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

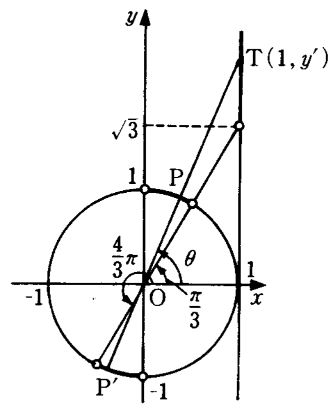
(2) $\cos\theta \leqq -\dfrac{1}{2}$

基本例題 2 　　**$\tan\theta > a$ の解法**

$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，不等式　$\tan\theta > \sqrt{3}$ をみたす θ の範囲を求めよ。

考え方　原点を中心とする単位円と直線 $x=1$ を考えて，$x=1$ 上の点を $\mathrm{T}(1,\ y')$ とすると $\tan\theta = y'$ であるから $\tan\theta=\sqrt{3}$ となる θ を求め，$\tan\theta>\sqrt{3}$ となる θ の範囲を求めればよい。

解　答　$0 \leqq \theta < 2\pi$ で T の y 座標が $\sqrt{3}$ より大きいとき，対応する単位円上の点 P，P′ の範囲は右の図の太線の部分である。



$\tan\theta=\sqrt{3}$ となるのは $\theta=\dfrac{\pi}{3}$，$\dfrac{4}{3}\pi$ であるから，

$\tan\theta>\sqrt{3}$ をみたす θ の範囲は

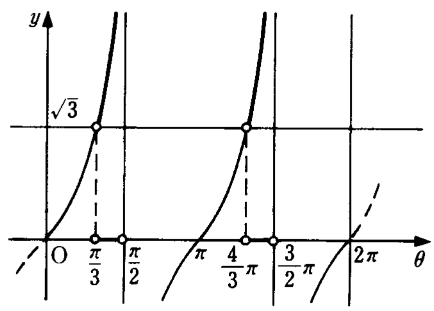
$$\boldsymbol{\frac{\pi}{3}<\theta<\frac{\pi}{2},\ \frac{4}{3}\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi}$$

【別解】

$y=\tan\theta$ とおき，このグラフをかいて，グラフから $y>\sqrt{3}$ となる θ の範囲を調べる。

$\tan\theta=\sqrt{3}$ となるのは，$\theta=\dfrac{\pi}{3}$，$\dfrac{4}{3}\pi$ であるから，不等式の解は

$$\frac{\pi}{3}<\theta<\frac{\pi}{2},\ \frac{4}{3}\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$$



トレーニング　　解答は 134 ページ

3　**$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の不等式をみたす θ の範囲を求めよ。**

(1)　$\tan\theta>\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　　　(2)　$\tan\theta \leqq -1$

単位円の利用もグラフの利用もわかりましたね。では，次に例題を考えましょう。

例 題 1 三角不等式

$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の不等式をみたす θ の範囲を求めよ。

$$\sin\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) > \frac{1}{\sqrt{2}}$$

考え方 $\theta - \dfrac{\pi}{3} = \alpha$ とおいて考える。$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，α の範囲に注意する。

解 答 $\theta - \dfrac{\pi}{3} = \alpha$ とおくと，$\theta = \alpha + \dfrac{\pi}{3}$ であるから，

$0 \leqq \theta < 2\pi$ より

$$0 \leqq \alpha + \frac{\pi}{3} < 2\pi \qquad \text{よって，} \qquad -\frac{\pi}{3} \leqq \alpha < \frac{5}{3}\pi$$

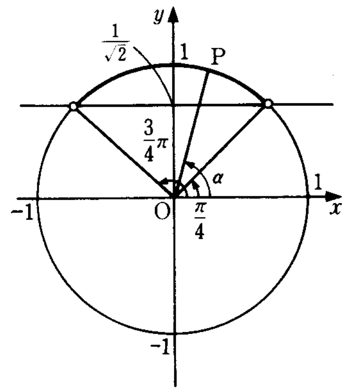
この範囲で，$\sin\alpha > \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ を解くと，右の図より

$$\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{3}{4}\pi$$

ここで α をもとにもどすと

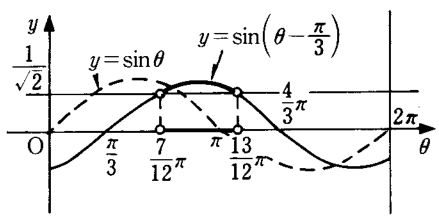
$$\frac{\pi}{4} < \theta - \frac{\pi}{3} < \frac{3}{4}\pi$$

ゆえに $\quad \boldsymbol{\dfrac{7}{12}\pi < \theta < \dfrac{13}{12}\pi}$



—注—

$y = \sin\left(\theta - \dfrac{\pi}{3}\right)$ とおき，グラフで考えれば，右の図のようになる。



トレーニング 解答は 135 ページ

4 **$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の不等式をみたす θ の範囲を求めよ。**

(1) $\cos\left(\theta + \dfrac{\pi}{2}\right) < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

(2) $\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right) \geqq 0$

5 **$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の不等式をみたす θ の範囲を求めよ。**

(1) $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right) > \dfrac{1}{2}$

(2) $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right) > \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

(3) $\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right) > 1$

きょうは，これでおしまいにしましょう。次のページにチャレンジしたい人は，どうぞ。

チャレンジコーナー　このページは，時間に余裕のある人だけしてください。

もう少し応用力の必要な問題を，次のトレーニングで考えてみましょう。

トレーニング

解答は 136 ページ

6 **$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の不等式をみたす θ の範囲を求めよ。**

(1)　$2\sin^2\theta + \sin\theta - 1 > 0$

(2)　$2\sin^2\theta > \sin\theta + 1$

(3)　$2\cos^2\theta \geqq 3\sin\theta$

第11日

確認テスト

学習日　　月　　日

これまで三角関数についての基本的な事項を学習してきましたが，よく理解できましたね。

きょうは，こうしたことがらについて復習をかねて**確認テスト**をしてみましょう。

時間；50分

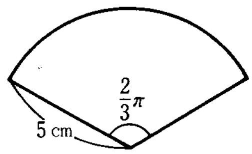
得点	$\overline{100}$

解答は137ページ

配点；各5点　計10点

1　次の問いに答えよ。

(1)　半径5 cm，中心角$\dfrac{2}{3}\pi$のおうぎ形の弧の長さと面積を求めよ。



(2)　x軸の正の部分を始線として，原点のまわりに回転する動径が点(8，15)を通るとき，この動径の角θに対する$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$の値を求めよ。

配点；(1) 5 点，(2) 5 点，(3) 10 点　計 20 点

2 **次の問いに答えよ。**

(1)　θ が第 3 象限の角で，$\cos\theta=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ のとき，$\sin\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ。

(2)　$\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)+\cos(-\theta)+\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right)+\cos(\pi+\theta)$ を簡単にせよ。　(西日本工大)

(3)　θ が第 4 象限の角で $\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ のとき，$\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)$ の値を求めよ。　(日本福祉大)

配点；各 10 点　計 30 点

3 関数 $y=2\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$ について次の問いに答えよ。ただし，$-\pi \leqq x \leqq \pi$ とする。

（久留米工大）

(1)　$x=-\pi$，$x=-\frac{5}{6}\pi$，$x=\frac{\pi}{2}$，$x=\frac{2}{3}\pi$，$x=\pi$ のとき，y の値を求めよ。

(2)　この関数のグラフを図示し，(1)で求めたすべての座標を図の中に記入せよ。

(3)　$2\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=-1$ をみたす x の値を求めよ。

配点；10 点

4 等式 $\dfrac{1-2\sin^2\theta}{1-2\sin\theta\cos\theta}+\dfrac{1+2\sin\theta\cos\theta}{1-2\cos^2\theta}=0$ を証明せよ。

配点；(1) 5 点，(2) 10 点　計 15 点

5 次の三角方程式を解け。

(1) $\cos\theta=-\dfrac{1}{2}$

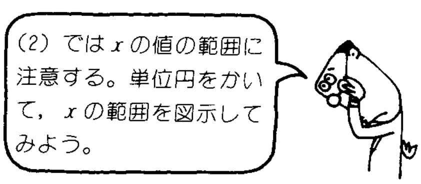
(2) $2\sin^2\theta-3\cos\theta=0$　ただし，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$

配点；(1) 5 点，(2) 10 点　計 15 点

6 次の三角不等式を解け。ただし，$0\leqq x<2\pi$ とする。

(1) $\sin x\geqq\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(2) $\sin x<\cos^2 x-\sin^2 x$



第12日

加　法　定　理

学習日　　月　　日

三角関数の加法定理とは？

きょうは，三角関数の加法定理を学習しましょう。
重要な定理ですから，しっかり理解し，利用できるようにしておきましょう。

まず，きょうの学習にはいる前に次の復習をしておきましょう。

復習マークシート　解答欄のあてはまる記号を黒くぬりつぶそう。

1　次の三角関数の値は，㋐～㋓のどれと等しいか。

(1)　$\sin(-\theta)$

㋐　$\sin\theta$　　㋑　$-\sin\theta$　　㋒　$\cos\theta$　　㋓　$-\cos\theta$

(2)　$\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)$

㋐　$\sin\theta$　　㋑　$-\sin\theta$　　㋒　$\cos\theta$　　㋓　$-\cos\theta$

(3)　$\cos(-\theta)$

㋐　$\sin\theta$　　㋑　$-\sin\theta$　　㋒　$\cos\theta$　　㋓　$-\cos\theta$

(4)　$\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)$

㋐　$\sin\theta$　　㋑　$-\sin\theta$　　㋒　$\cos\theta$　　㋓　$-\cos\theta$

2　座標平面上の2点を $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$ とするとき，線分ABの長さは，次のどれか。

㋐　$(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$　　㋑　$(x_2-x_1)^2-(y_2-y_1)^2$

㋒　$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$　　㋓　$\sqrt{(x_2-x_1)^2-(y_2-y_1)^2}$

3　次の三角関数の公式の $\boxed{}$ の中にはいるものは，㋐～㋓のどれか。

(1)　$\tan\theta=\dfrac{\boxed{}}{\cos\theta}$

㋐　$\sin\theta$　　㋑　$\cos\theta$　　㋒　-1　　㋓　1

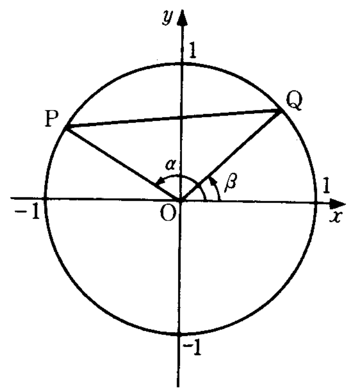
(2)　$\sin^2\theta+\cos^2\theta=\boxed{}$

㋐　$\sin\theta$　　㋑　$\cos\theta$　　㋒　-1　　㋓　1

解答欄					
1	(1)	㋐	㋑	㋒	㋓
	(2)	㋐	㋑	㋒	㋓
	(3)	㋐	㋑	㋒	㋓
	(4)	㋐	㋑	㋒	㋓
2		㋐	㋑	㋒	㋓
3	(1)	㋐	㋑	㋒	㋓
	(2)	㋐	㋑	㋒	㋓

復習マークシートの解答は，順に，㋑，㋒，㋒，㋐，㋒，㋐，㋓です。
では，三角関数の加法定理の学習を始めましょう。

◈三角関数の加法定理



まず，$\cos(\alpha-\beta)$ を α，β の三角関数で表すことを考えてみましょう。

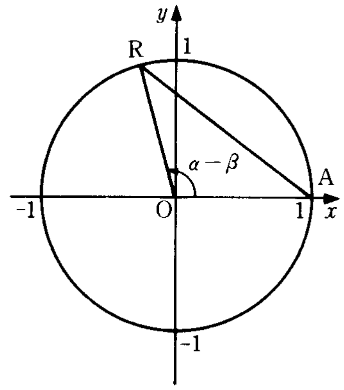
右の図のように，動径 OP，OQ の表す角をそれぞれ α，β とすると

$$P(\cos\alpha,\ \sin\alpha),\ Q(\cos\beta,\ \sin\beta)$$

です。

ここで線分 PQ の長さを l_1 とすれば

$$\begin{aligned} l_1^2 &= (\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2 \\ &= \cos^2\alpha-2\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta+\sin^2\alpha-2\sin\alpha\sin\beta+\sin^2\beta \\ &= 2-2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta) \end{aligned}$$



また，三角形 OPQ を原点のまわりに $-\beta$ だけ回転して，点 Q が A(1, 0) に重なるようにしたときの点 P の位置を R とすると，R の座標は

$$R(\cos(\alpha-\beta),\ \sin(\alpha-\beta))$$

ですから，線分 AR の長さを l_2 とすれば

$$\begin{aligned} l_2^2 &= \{1-\cos(\alpha-\beta)\}^2+\{0-\sin(\alpha-\beta)\}^2 \\ &= 1-2\cos(\alpha-\beta)+\cos^2(\alpha-\beta)+\sin^2(\alpha-\beta) \\ &= 2-2\cos(\alpha-\beta) \end{aligned}$$

ここで，PQ＝RA より，$l_1=l_2$ ですから，$l_1^2=l_2^2$，すなわち

$$2-2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)=2-2\cos(\alpha-\beta)$$

よって

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta \qquad \cdots\cdots\cdots ①$$

という関係式が成り立ちます。

次に，①の式で，β を $-\beta$ におきかえると，$\sin(-\beta)=-\sin\beta$，$\cos(-\beta)=\cos\beta$ より

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos(-\beta)+\sin\alpha\sin(-\beta)$$

よって

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta \qquad \cdots\cdots\cdots ②$$

また，①の式で，$\alpha=\dfrac{\pi}{2}-\alpha$ におきかえると

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta \qquad \cdots\cdots\cdots ③$$

さらに，③の式で，β を $-\beta$ におきかえると

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta \qquad \cdots\cdots\cdots ④$$

以上，①～④の 4 つの式が成り立つことがわかりました。これに，$\tan(\alpha+\beta)$，

加法定理　$\tan(\alpha-\beta)$ について成り立つ式を加えて，**三角関数の加法定理**といいます。

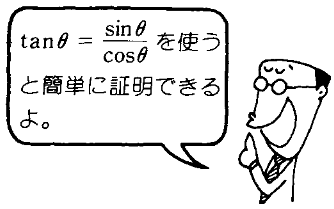
では次のトレーニングで $\tan(\alpha+\beta)$，$\tan(\alpha-\beta)$ を $\tan\alpha$ と $\tan\beta$ で表してみましょう。

トレーニング

解答は 139 ページ

1 $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$，$\tan(-\theta)=-\tan\theta$ であることを利用して，次の加法定理を証明せよ。

(1) $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$　　(2) $\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$



◆加法定理のまとめ

□加法定理□

1. $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$
   $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$
2. $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$
   $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$
3. $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$
   $\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

―注―

$\alpha-\beta$ の加法定理は，$\alpha+\beta$ の加法定理で β のかわりに $-\beta$ とおくことによって得られる。

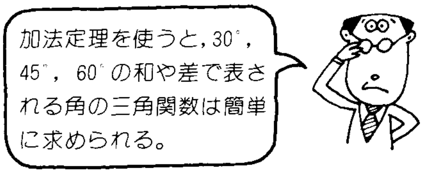
基本例題 1 　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　加法定理の利用(1)

sin75° の値を求めよ。

考え方　75°＝30°＋45° として，加法定理を利用する。

解　答

$$
\begin{aligned}
\sin 75^\circ &= \sin(30^\circ + 45^\circ) \\
&= \sin 30^\circ \cos 45^\circ + \cos 30^\circ \sin 45^\circ \\
&= \frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} \\
&= \boldsymbol{\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}}
\end{aligned}
$$



トレーニング　　**解答は 139 ページ**

2 加法定理を利用して，次の三角関数の値を求めよ。

(1)　cos75°　　　　(2)　tan75°

(3)　sin15°　　　　(4)　cos105°

≪ここで一息≫

加法定理[1]，[2]は，回転の一次変換からも導かれますね。公式を忘れたときは便利です。

角 θ の回転は，$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ で与えられるので，角 $\alpha+\beta$ の回転は，角 α，β の回転の合成で表されます。ですから

$$
\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta & -(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta) \\ \sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta & \cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

例 題 1 　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　**加法定理の利用(2)**

$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{\pi}{2}<\beta<\pi$ で，$\cos\alpha=\dfrac{4}{5}$，$\sin\beta=\dfrac{5}{13}$ のとき，$\sin(\alpha+\beta)$ を求めよ。

考え方　$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ と条件から，$\sin\alpha$，$\cos\beta$ の値を調べ，加法定理を利用する。

解　答　$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ より

$$\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha=1-\left(\frac{4}{5}\right)^2=\frac{9}{25}$$

ここで，$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ より，$\sin\alpha>0$ であるから　$\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$

同様に

$$\cos^2\beta=1-\sin^2\beta=1-\left(\frac{5}{13}\right)^2=\frac{144}{169}$$

ここで，$\dfrac{\pi}{2}<\beta<\pi$ より，$\cos\beta<0$ であるから　$\cos\beta=-\dfrac{12}{13}$

よって，加法定理を利用すると，

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\frac{3}{5}\times\left(-\frac{12}{13}\right)+\frac{4}{5}\times\frac{5}{13}$$

$$=\frac{-36+20}{65}=-\mathbf{\frac{16}{65}}$$

トレーニング　　**解答は 140 ページ**

3　**$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{\pi}{2}<\beta<\pi$ で，$\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\sin\beta=\dfrac{1}{2}$ のとき，次の値を求めよ。**

(1)　$\sin(\alpha+\beta)$　　　　　　　　(2)　$\cos(\alpha-\beta)$

4 $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$，$0<\beta<\frac{\pi}{2}$ で，$\sin\alpha=\frac{2}{3}$，$\cos\beta=\frac{3}{5}$ のとき，次の値を求めよ。

(1) $\cos(\alpha+\beta)$

(2) $\tan(\alpha+\beta)$

5 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，$0<\beta<\frac{\pi}{2}$ で，次の式をみたすとき，$\alpha+\beta$ を求めよ。

(1) $\tan\alpha=\frac{1}{2}$，$\tan\beta=\frac{1}{3}$

(2) $\cos\alpha=\frac{1}{7}$，$\cos\beta=\frac{11}{14}$

きょうは，これで終わりにしましょう。

第13日

学習日　月　日

2倍角・半角の公式

2倍角・半角の公式とは？

きょうは，加法定理の応用として，2倍角，半角の公式を学習し，利用できるようにしましょう。

はじめに，復習からはいりましょう。

復習マークシート　解答欄のあてはまる記号を黒くぬりつぶそう。

1 次の三角関数の値と等しいものは，㋐～㋓のどれか。

(1) $\sin(\alpha+\beta)$

㋐ $\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$　㋑ $\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

㋒ $\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$　㋓ $\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

(2) $\cos(\alpha+\beta)$

㋐ $\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$　㋑ $\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

㋒ $\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$　㋓ $\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

(3) $\sin(\alpha-\beta)$

㋐ $\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$　㋑ $\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

㋒ $\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$　㋓ $\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

(4) $\cos(\alpha-\beta)$

㋐ $\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$　㋑ $\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

㋒ $\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$　㋓ $\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

2 次の無理数の2重根号をはずして簡単にしたものは，㋐～㋓のどれか。

(1) $\sqrt{8+2\sqrt{15}}$

㋐ $\sqrt{5}+\sqrt{3}$　㋑ $-\sqrt{5}+3$

㋒ $\sqrt{5}-\sqrt{3}$　㋓ $-\sqrt{5}-3$

(2) $\sqrt{8-2\sqrt{15}}$

㋐ $\sqrt{5}+\sqrt{3}$　㋑ $-\sqrt{5}+3$

㋒ $\sqrt{5}-\sqrt{3}$　㋓ $-\sqrt{5}-3$

解答欄					
1	(1)	㋐	㋑	㋒	㋓
	(2)	㋐	㋑	㋒	㋓
	(3)	㋐	㋑	㋒	㋓
	(4)	㋐	㋑	㋒	㋓
2	(1)	㋐	㋑	㋒	㋓
	(2)	㋐	㋑	㋒	㋓

復習マークシートの解答は，順に，㋑，㋓，㋒，㋐，㋐，㋒です。
では，2倍角の公式から考えてみましょう。

◈ 2倍角の公式

2倍角の公式

加法定理を利用して，**2倍角の公式**を導くことができます。

まず

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

で，$\beta=\alpha$ とすれば

左辺$=\sin(\alpha+\alpha)=\sin2\alpha$

右辺$=\sin\alpha\cos\alpha+\cos\alpha\sin\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$

したがって

$$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$$

次に

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

で，$\beta=\alpha$ とすれば

左辺$=\cos(\alpha+\alpha)=\cos2\alpha$

右辺$=\cos\alpha\cos\alpha-\sin\alpha\sin\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$

したがって

$$\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$$

また，$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ を用いて，右辺を変形すると

$$\begin{aligned}\cos2\alpha&=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\\&=1-2\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1\end{aligned}$$

さらに

$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

で，$\beta=\alpha$ とすれば

左辺$=\tan(\alpha+\alpha)=\tan2\alpha$

右辺$=\dfrac{\tan\alpha+\tan\alpha}{1-\tan\alpha\tan\alpha}=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

したがって

$$\tan2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

□2倍角の公式□

[1] $\boldsymbol{\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha}$

[2] $\boldsymbol{\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1}$

[3] $\boldsymbol{\tan2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}}$

それでは，2倍角の公式を覚えるために，次のトレーニングをしてみましょう。

トレーニング

解答は 141 ページ

1 次の $\boxed{\quad}$ の中に適当な値を入れよ。

(1) $\sin 90^\circ = 2\sin\boxed{\quad}\cos\boxed{\quad}$
$= \boxed{\quad}$

(2) $\cos 180^\circ = \cos^2\boxed{\quad} - \sin^2\boxed{\quad}$
$= \boxed{\quad}$

(3) $\tan 60^\circ = \dfrac{2\tan\boxed{\quad}}{1-\tan^2\boxed{\quad}} = \boxed{\quad}$

(4) $2\sin 20^\circ\cos 20^\circ = \sin\boxed{\quad}$

(5) $1-2\sin^2 25^\circ = \cos\boxed{\quad}$

(6) $\dfrac{2\tan 10^\circ}{1-\tan^2 10^\circ} = \tan\boxed{\quad}$

基本例題 1 **2 倍角の公式**

$\sin\theta = \dfrac{3}{5}$ のとき，$\sin 2\theta$，$\cos 2\theta$，$\tan 2\theta$ の値を求めよ。ただし，$0^\circ < \theta < 90^\circ$ とする。

考え方 $0^\circ < \theta < 90^\circ$ の条件に注意して，$\cos^2\theta = 1-\sin^2\theta$ より $\cos\theta$ の値を求め，2 倍角の公式を利用する。

解　答 $\sin\theta = \dfrac{3}{5}$，$\cos^2\theta = 1-\sin^2\theta$ より

$$\cos^2\theta = 1-\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$$

ここで，$0^\circ < \theta < 90^\circ$ より，$\cos\theta > 0$ であるから

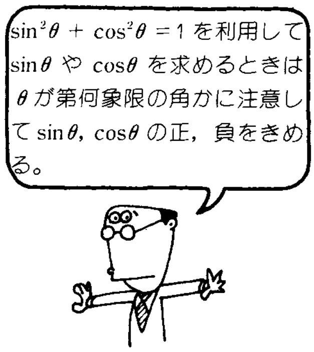
$$\cos\theta = \frac{4}{5}$$

よって，2 倍角の公式に代入すると

$$\mathbf{\sin 2\theta} = 2\sin\theta\cos\theta = 2\times\frac{3}{5}\times\frac{4}{5} = \mathbf{\frac{24}{25}}$$

$$\mathbf{\cos 2\theta} = 1-2\sin^2\theta = 1-2\times\left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1-\frac{18}{25} = \mathbf{\frac{7}{25}}$$

また　$\mathbf{\tan 2\theta} = \dfrac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta} = \dfrac{\frac{24}{25}}{\frac{7}{25}} = \mathbf{\dfrac{24}{7}}$



—注—

$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \dfrac{3}{4}$ より，2 倍角の公式を利用してもよい。

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = \frac{2\times\frac{3}{4}}{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{2\times3\times4}{16-9} = \frac{24}{7}$$

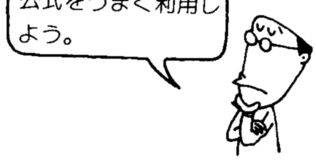
トレーニング　　解答は 141 ページ

2 $\cos\alpha=-\dfrac{1}{3}$ のとき，次の値を求めよ。ただし，$90^\circ<\alpha<180^\circ$ とする。

(1) $\sin2\alpha$　　(2) $\cos2\alpha$　　(3) $\tan2\alpha$

3 次の等式を証明せよ。

(1) $\dfrac{\sin2\theta}{1+\cos2\theta}=\tan\theta$　　(2) $\dfrac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}=\sin2\theta$



では，次に，半角の公式について考えましょう。

◈半角の公式

半角の公式

2 倍角の公式を利用すると次の**半角の公式**を導くことができます。

まず，　$\cos 2\alpha = 1-2\sin^2\alpha$ より

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$$

ここで，α を $\frac{\alpha}{2}$ でおきかえると

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}$$

次に，　$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$ より

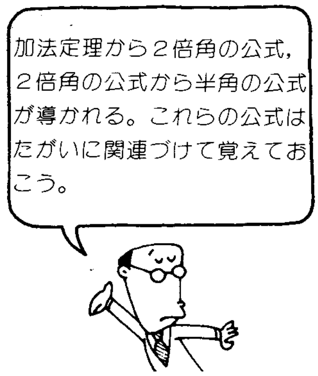
$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$$

同様に，α を $\frac{\alpha}{2}$ でおきかえると

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}$$

さらに，　$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ を利用すると

$$\tan^2\frac{\alpha}{2} = \left(\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}\right)^2 = \frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{\frac{1-\cos\alpha}{2}}{\frac{1+\cos\alpha}{2}} = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$$



□半角の公式□

1 $\displaystyle \sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}$

2 $\displaystyle \cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}$

3 $\displaystyle \tan^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$

トレーニング

解答は 142 ページ

4 次の $\boxed{}$ の中に適当な値を入れよ。

(1) $\sin^2 30^\circ = \dfrac{1-\cos\boxed{}}{2} = \boxed{}$

(2) $\cos^2 75^\circ = \dfrac{1+\cos\boxed{}}{2} = \boxed{}$

(3) $\tan^2 45^\circ = \dfrac{1-\cos\boxed{}}{1+\cos\boxed{}} = \boxed{}$

(4) $\dfrac{1-\cos 40^\circ}{2} = \sin^2\boxed{}$

(5) $\dfrac{1+\cos 50^\circ}{2} = \cos^2\boxed{}$

(6) $\dfrac{1-\cos 20^\circ}{1+\cos 20^\circ} = \tan^2\boxed{}$

基本例題 2 　　　　　　　　　　　　　　　　　　**半角の公式**

$\sin 22.5^\circ$，$\cos 22.5^\circ$，$\tan 22.5^\circ$ の値を求めよ。

考え方　半角の公式を利用する。このとき$\sin 22.5^\circ>0$，$\cos 22.5^\circ>0$，$\tan 22.5^\circ>0$ に注意する。

解　答　半角の公式より

$$\sin^2 22.5^\circ=\sin^2\frac{45^\circ}{2}=\frac{1-\cos 45^\circ}{2}=\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}=\frac{2-\sqrt{2}}{4}$$

ここで，$\sin 22.5^\circ>0$ であるから

$$\mathbf{\sin 22.5^\circ}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}}$$

同様に

$$\cos^2 22.5^\circ=\cos^2\frac{45^\circ}{2}=\frac{1+\cos 45^\circ}{2}=\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}=\frac{2+\sqrt{2}}{4}$$

ここで，$\cos 22.5^\circ>0$ であるから

$$\mathbf{\cos 22.5^\circ}=\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}}$$

また

$$\tan^2 22.5^\circ=\tan^2\frac{45^\circ}{2}=\frac{1-\cos 45^\circ}{1+\cos 45^\circ}=\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$$

$$=\frac{(2-\sqrt{2})^2}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}=3-2\sqrt{2}$$

ここで，$\tan 22.5^\circ>0$ であるから

$$\mathbf{\tan 22.5^\circ}=\sqrt{3-2\sqrt{2}}=\sqrt{2-2\sqrt{2}+1}$$

$$=\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}=\boldsymbol{\sqrt{2}-1}$$

—注—

$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ を利用して，次のように解いてもよい。

$$\tan 22.5^\circ=\frac{\sin 22.5^\circ}{\cos 22.5^\circ}=\frac{\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}}{\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}}=\sqrt{3-2\sqrt{2}}$$

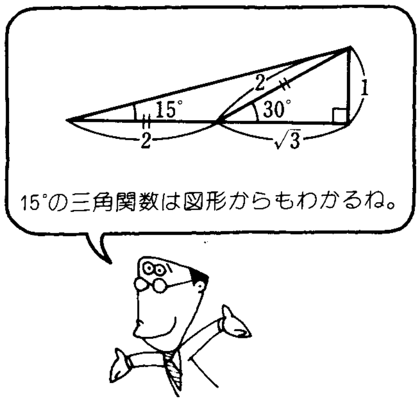
$$=\sqrt{2}-1$$

では，最後に次のトレーニングをしてみましょう。

トレーニング

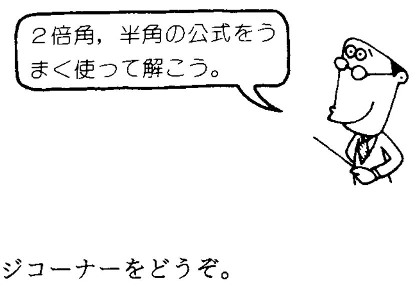
解答は 142 ページ

5 **半角の公式を利用して，sin15°，cos15°，tan15° の値を求めよ。**



6 **$\tan\dfrac{\alpha}{2}=t$ とするとき，次の式が成り立つことを証明せよ。**

$$\sin\alpha=\frac{2t}{1+t^2},\quad \cos\alpha=\frac{1-t^2}{1+t^2},\quad \tan\alpha=\frac{2t}{1-t^2}$$



きょうは，これでおしまいにしましょう。時間のある人はチャレンジコーナーをどうぞ。

チャレンジコーナー このページは，時間に余裕のある人だけしてください。

もう少し応用力の必要な問題を考えてみましょう。

トレーニング　　**解答は 142 ページ**

7 $\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}$ のとき，次の値を求めよ。

(1) $\sin 2\theta$　　　(2) $\sin^3\theta+\cos^3\theta$

8 $\sin\theta-\cos\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ のとき，次の値を求めよ。ただし，$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ とする。

(1) $\sin\theta+\cos\theta$　　　(2) $\sin^4\theta-\cos^4\theta$

ごくろうさまでした。

第14日	積 ⟷ 和の公式 学習日　月　日

積を和に，和を積になおす公式とは？

きょうは，加法定理を利用して，三角関数の積を和に，和を積になおすことを学習しましょう。

まず，次のことを復習しておきましょう。

復習マークシート　解答欄のあてはまる記号を黒くぬりつぶそう。

1 次の連立方程式の解は，㋐～㋓のどれか。

(1) $\begin{cases} x+y=3 \\ x-y=1 \end{cases}$

㋐ $\begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases}$　㋑ $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$　㋒ $\begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$　㋓ $\begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} 2x+y=1 \\ x-2y=3 \end{cases}$

㋐ $\begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases}$　㋑ $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$　㋒ $\begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$　㋓ $\begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}$

2 次の三角関数の値と等しいものは，㋐～㋓のどれか。

(1) $\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

㋐ $\sin(\alpha+\beta)$　㋑ $\sin(\alpha-\beta)$

㋒ $\cos(\alpha+\beta)$　㋓ $\cos(\alpha-\beta)$

(2) $\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

㋐ $\sin(\alpha+\beta)$　㋑ $\sin(\alpha-\beta)$

㋒ $\cos(\alpha+\beta)$　㋓ $\cos(\alpha-\beta)$

(3) $\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

㋐ $\sin(\alpha+\beta)$　㋑ $\sin(\alpha-\beta)$

㋒ $\cos(\alpha+\beta)$　㋓ $\cos(\alpha-\beta)$

(4) $\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

㋐ $\sin(\alpha+\beta)$　㋑ $\sin(\alpha-\beta)$

㋒ $\cos(\alpha+\beta)$　㋓ $\cos(\alpha-\beta)$

解答欄					
1	(1)	㋐	㋑	㋒	㋓
	(2)	㋐	㋑	㋒	㋓
2	(1)	㋐	㋑	㋒	㋓
	(2)	㋐	㋑	㋒	㋓
	(3)	㋐	㋑	㋒	㋓
	(4)	㋐	㋑	㋒	㋓

復習マークシートの解答は，順に，㋑，㋓，㋓，㋑，㋒，㋐です。
では，三角関数の積を和（差）になおす公式の学習から始めましょう。

◈三角関数の積を和(差)になおす公式

積を和（差）になおす公式は，加法定理から容易に導くことができます。

まず，加法定理より

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta \quad \cdots\cdots\cdots ②$$

①，②の辺々を加えると

$$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cos\beta$$

よって　$\sin\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\}$　………③

①から②の辺々をひくと

$$\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\sin\beta$$

よって　$\cos\alpha\sin\beta=\dfrac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\}$　………④

同様に，加法定理より

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta \quad \cdots\cdots\cdots ⑤$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta \quad \cdots\cdots\cdots ⑥$$

⑤，⑥の辺々を加えると

$$\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\cos\beta$$

よって　$\cos\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\}$　………⑦

⑤から⑥の辺々をひくと

$$\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)=-2\sin\alpha\sin\beta$$

よって　$\sin\alpha\sin\beta=-\dfrac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\}$　………⑧

□三角関数の積を和（差）になおす公式□

[1] $\boldsymbol{\sin\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\}}$

[2] $\boldsymbol{\cos\alpha\sin\beta=\dfrac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\}}$

[3] $\boldsymbol{\cos\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\}}$

[4] $\boldsymbol{\sin\alpha\sin\beta=-\dfrac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\}}$

それでは，積を和（差）になおす公式を利用して，次の基本例題を考え，トレーニングをしてみましょう。

基本例題 1　　三角関数の積を和（差）になおす公式

次の値を求めよ。

(1)　$\cos 37.5^\circ \cos 7.5^\circ$　　　(2)　$\cos 15^\circ \sin 75^\circ$

考え方　積を和（差）になおす公式を利用する。

解　答　(1)　$\cos\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\}$ を用いて

$$\cos 37.5^\circ\cos 7.5^\circ=\frac{1}{2}\{\cos(37.5^\circ+7.5^\circ)+\cos(37.5^\circ-7.5^\circ)\}$$
$$=\frac{1}{2}(\cos 45^\circ+\cos 30^\circ)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\boldsymbol{\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{4}}$$

(2)　$\cos\alpha\sin\beta=\dfrac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\}$ を用いて

$$\cos 15^\circ\sin 75^\circ=\frac{1}{2}\{\sin(15^\circ+75^\circ)-\sin(15^\circ-75^\circ)\}$$
$$=\frac{1}{2}\{\sin 90^\circ-\sin(-60^\circ)\}$$
$$=\frac{1}{2}(\sin 90^\circ+\sin 60^\circ)$$
$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\boldsymbol{\frac{2+\sqrt{3}}{4}}$$

―注―

(2)では，$\cos 15^\circ\sin 75^\circ=\sin 75^\circ\cos 15^\circ$ であるから，$\sin\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\}$ を用いてもよい。

トレーニング

解答は 143 ページ

1　**次の値を求めよ。**

(1)　$\sin 37.5^\circ\sin 7.5^\circ$　　　(2)　$\sin 105^\circ\cos 15^\circ$

2 次の式を簡単にせよ。

(1) $\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)$

(2) $\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{6}\right)$

3 次の等式が成り立つことを証明せよ。

(1) $\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)=\cos^2\alpha-\sin^2\beta$

(2) $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)=\sin^2\alpha-\sin^2\beta$

では，次に和(差)を積になおす公式について考えましょう。

◆三角関数の和(差)を積になおす公式

この公式は，積を和(差)になおす公式から容易に導くことができます。

$\alpha+\beta=A$，$\alpha-\beta=B$ とすると，$\alpha=\dfrac{A+B}{2}$，$\beta=\dfrac{A-B}{2}$ となりますから，積を和(差)になおす公式 $\boxed{1}$ から

$$\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}=\frac{1}{2}(\sin A+\sin B)$$

よって　$\sin A+\sin B=2\sin\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$

同様に，積を和(差)になおす公式 $\boxed{2}$，$\boxed{3}$，$\boxed{4}$ を変形すれば，それぞれ

$$\sin A-\sin B=2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$

$$\cos A+\cos B=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

$$\cos A-\cos B=-2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$

となります。

□三角関数の和(差)を積になおす公式□

$\boxed{1}$ $\boldsymbol{\sin A+\sin B=2\sin\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}}$

$\boxed{2}$ $\boldsymbol{\sin A-\sin B=2\cos\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{A-B}{2}}$

$\boxed{3}$ $\boldsymbol{\cos A+\cos B=2\cos\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}}$

$\boxed{4}$ $\boldsymbol{\cos A-\cos B=-2\sin\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{A-B}{2}}$

トレーニング

解答は 144 ページ

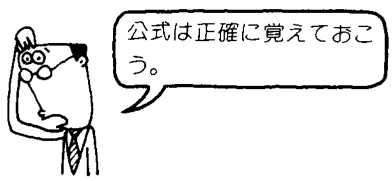
4 **次の $\boxed{}$ の中に適当な数値を入れよ。**

(1) $\sin105^\circ+\sin15^\circ=2\sin\boxed{}\cos\boxed{}=\boxed{}$

(2) $\sin75^\circ-\sin15^\circ=2\cos\boxed{}\sin\boxed{}=\boxed{}$

(3) $\cos105^\circ+\cos15^\circ=2\cos\boxed{}\cos\boxed{}=\boxed{}$

(4) $\cos75^\circ-\cos15^\circ=\boxed{}\sin\boxed{}\sin\boxed{}=\boxed{}$



基本例題 2 三角関数の和（差）を積になおす公式

次の値を求めよ。

(1) $\sin 75^\circ + \sin 15^\circ$ (2) $\cos 15^\circ - \cos 105^\circ$

考え方 和（差）を積になおす公式を利用する。

解　答 (1) $\sin A + \sin B = 2\sin\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$ を用いて

$$\sin 75^\circ + \sin 15^\circ = 2\sin\frac{75^\circ+15^\circ}{2}\cos\frac{75^\circ-15^\circ}{2}$$
$$=2\sin 45^\circ\cos 30^\circ$$
$$=2\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{6}}{2}}$$

(2) $\cos A - \cos B = -2\sin\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{A-B}{2}$ を用いて

$$\cos 15^\circ - \cos 105^\circ = -2\sin\frac{15^\circ+105^\circ}{2}\sin\frac{15^\circ-105^\circ}{2}$$
$$=-2\sin 60^\circ\sin(-45^\circ)$$
$$=2\sin 60^\circ\sin 45^\circ$$
$$=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{6}}{2}}$$

トレーニング

解答は 144 ページ

5 次の値を求めよ。

(1) $\cos 75^\circ + \cos 15^\circ$ (2) $\sin 15^\circ - \sin 105^\circ$

6 次の式を簡単にせよ。

(1) $\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\theta\right)+\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\theta\right)$ (2) $\cos\left(\dfrac{\pi}{6}-\theta\right)-\cos\left(\dfrac{\pi}{6}+\theta\right)$

きょうは，これでおしまいにしましょう。

第15日	三角関数の合成	学習日　　月　　日

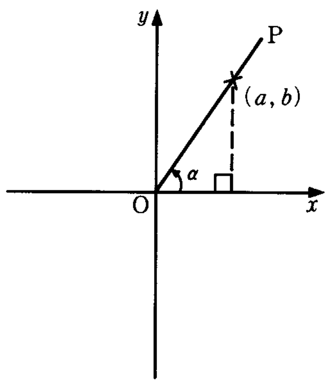
三角関数の合成………どうするのかな？

きょうは，三角関数の学習の最後に，三角関数の合成について考えてみましょう。

では，まず次の復習から始めましょう。

復習マークシート　　解答欄のあてはまる記号を黒くぬりつぶそう。

1 右の図のように，動径 OP 上に点$(a,\ b)$があるとき，次の値は㋐〜㋓のどれを表すか。ただし，動径 OP の表す角を α とする。



(1) $\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$　　(2) $\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$　　(3) $\dfrac{b}{a}$

㋐ $\sin\alpha$　　㋑ $\cos\alpha$

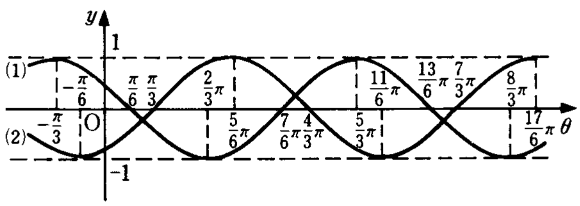
㋒ $\cot\alpha$　　㋓ $\tan\alpha$

2 $y=2\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)$ について，次の問いに答えよ。

(1) 最大値はどれか。　　(2) 最小値はどれか。

㋐ -3　　㋑ -2　　㋒ 2　　㋓ 3

3 次のグラフは，㋐〜㋓のどれか。



㋐ $y=\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)$　　㋑ $y=\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)$

㋒ $y=\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)$　　㋓ $y=\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)$

解答欄					
1	(1)	㋐	㋑	㋒	㋓
	(2)	㋐	㋑	㋒	㋓
	(3)	㋐	㋑	㋒	㋓
2	(1)	㋐	㋑	㋒	㋓
	(2)	㋐	㋑	㋒	㋓
3	(1)	㋐	㋑	㋒	㋓
	(2)	㋐	㋑	㋒	㋓

復習マークシートの解答は，順に，㋑，㋐，㋓，㋒，㋑，㋒，㋑です。
では，三角関数の合成について学習を始めましょう。

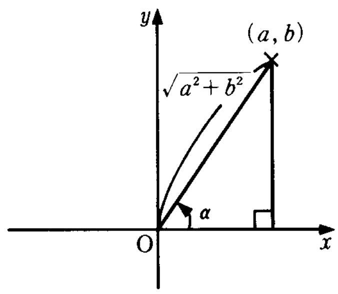
◈三角関数の合成

□三角関数の合成□

$$a\sin\theta + b\cos\theta = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$$

ただし，$\sin\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\cos\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ である。

一注一
右の図のようにして α の値を求める。
α がすぐに求められない場合は，
$\sin\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\cos\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$
を書きそえておくこと。



まず，上の式が成り立つことを示しましょう。

$$\begin{aligned}
\text{左辺} &= a\sin\theta + b\cos\theta \\
&= \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\theta + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\theta\right) \\
&= \sqrt{a^2+b^2}(\cos\alpha\sin\theta + \sin\alpha\cos\theta) && \Leftarrow \text{条件より} \\
&= \sqrt{a^2+b^2}(\sin\theta\cos\alpha + \cos\theta\sin\alpha) \\
&= \sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha) && \Leftarrow \text{加法定理より} \\
&= \text{右辺}
\end{aligned}$$

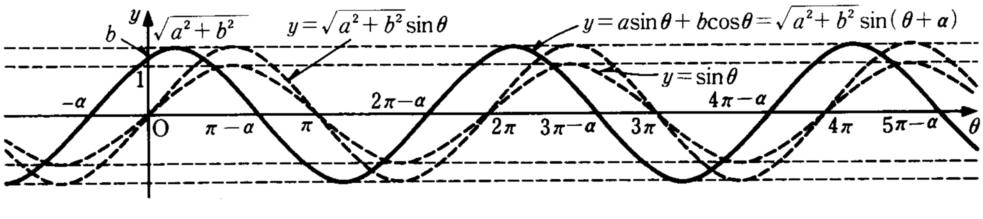
では，これをグラフで考えてみると

$y = a\sin\theta$ ……①　　　$y = b\cos\theta$ ……②

①，②の 2 つの三角関数のグラフを合成すると

$y = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$ ……③

すなわち，③は，$y=\sin\theta$ のグラフを，y 軸方向に $\sqrt{a^2+b^2}$ 倍に拡大（縮小）したものを，θ 軸方向に $-\alpha$ だけ平行移動して得られることがわかります。



それでは，次のページの基本例題を考えてみましょう。

基本例題 1 　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　**三角関数の合成**

$2\sin\theta+\sqrt{5}\cos\theta$ を $r\sin(\theta+\alpha)$ の形で表せ。

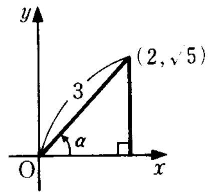
考え方 　三角関数の合成の公式を利用する。

解　答 　$r=\sqrt{2^2+(\sqrt{5})^2}=\sqrt{9}=3$ だから

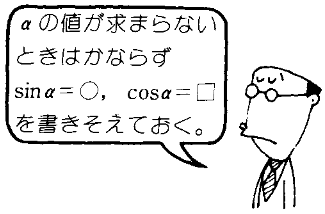
$$\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{3},\quad \cos\alpha=\frac{2}{3}$$

このとき

$$2\sin\theta+\sqrt{5}\cos\theta=3\left(\frac{2}{3}\sin\theta+\frac{\sqrt{5}}{3}\cos\theta\right)$$
$$=3(\sin\theta\cos\alpha+\cos\theta\sin\alpha)$$
$$=3\sin(\theta+\alpha)$$



$\begin{cases}\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{5}}{3}\\ \cos\alpha=\dfrac{2}{3}\end{cases}$



トレーニング

解答は 144 ページ

1 　**次の等式を証明せよ。**

$$\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$$

2 　**次の式を $r\sin(\theta+\alpha)$ の形で表せ。**

(1)　$\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta$

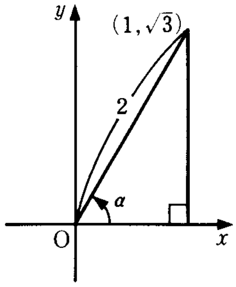
(2)　$2\sin\theta-2\sqrt{3}\cos\theta$

例 題1 　　　　　　　　　　　　　　　　　　**三角関数の合成の利用**

$\boldsymbol{y=\sin x+\sqrt{3}\cos x}$ **の最大値，最小値を求め，そのグラフをかけ。**

考え方　公式を利用して，$y=r\sin(x+\alpha)$ の形にして考える。$-1\leqq\sin(x+\alpha)\leqq 1$ に注目すれば，最大値，最小値がわかる。

解　答　$\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{4}=2$ だから

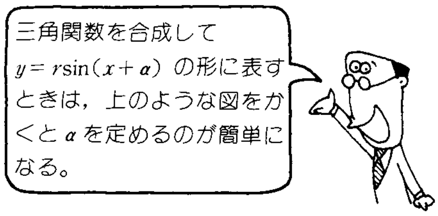


$$\begin{cases}\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ \cos\alpha=\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

$$\begin{aligned}y&=\sin x+\sqrt{3}\cos x\\&=2\left(\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)\\&=2\left(\sin x\cos\frac{\pi}{3}+\cos x\sin\frac{\pi}{3}\right)\\&=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\end{aligned}$$

ここで，$-1\leqq\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)\leqq 1$ であるから

$$-2\leqq 2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\leqq 2$$



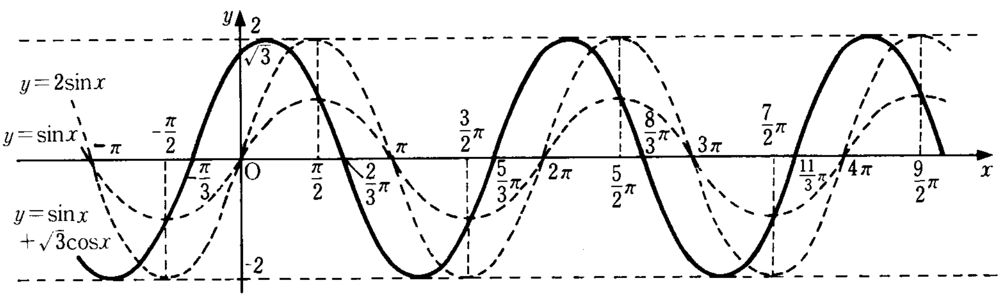
よって

$\boldsymbol{x=\dfrac{\pi}{6}+2n\pi}$ **のとき　最大値　2**

$\boldsymbol{x=\dfrac{7}{6}\pi+2n\pi}$ **のとき　最小値　−2**

ただし，$\boldsymbol{n}$ は整数とする。

また，グラフは，$y=\sin x$ のグラフを，y 軸方向に2倍に拡大し，x 軸方向に $-\dfrac{\pi}{3}$ だけ平行移動して得られるので下の図の実線のようになる。



では，次のトレーニングをしてみましょう。

トレーニング　解答は 145 ページ

3 **$y=\sin x+\cos x$ の最大値，最小値を求め，そのグラフをかけ。**

4 **次の三角関数の最大値，最小値を求めよ。**

(1)　$y=4\sin x+3\cos x$　　(2)　$y=2\sin x+\cos x$

≪ここで一息≫

知っていると便利な公式……ド・モアブルの公式 $(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$　ただし $i^2=-1$，n は自然数。

$n=2$，3 のときが 2 倍角，3 倍角(第 16 日の確認テスト5)の公式ですが，これは容易に確かめられますね。では，数学的帰納法により簡略に証明しましょう。

〔I〕　$n=1$ のときは明らかに成り立つ。

〔II〕　$n=k$ のとき成り立つと仮定すると，$n=k+1$ のとき

$$\begin{aligned}&(\cos\theta+i\sin\theta)^{k+1}\\&=(\cos k\theta+i\sin k\theta)(\cos\theta+i\sin\theta)\\&=(\cos k\theta\cos\theta-\sin k\theta\sin\theta)+i(\sin k\theta\cos\theta+\cos k\theta\sin\theta)\\&=\cos(k+1)\theta+i\sin(k+1)\theta\end{aligned}$$

よって，$n=k+1$ のときも成り立つ。

〔I〕,〔II〕により，与式はすべての自然数 n について成り立つ。

5 次の三角関数の最大値，最小値を求めよ。

(1) $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+\cos x$

(2) $y=\sin x-4\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$

(3) $y=\sin x+\sqrt{3}\cos x+2$

きょうは，これでおしまいにしましょう。

第16日

確認テスト

学習日　　月　　日

時間；50分

得点	/100

解答は146ページ

三角関数の公式がたくさんありましたね。公式を覚えるときには，そのキーポイントをしっかりおさえておくことがたいせつです。

きょうは，こうした点の確認をしてみましょう。

配点；各5点　計10点

1 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ のとき，次の値を求めよ。

(1) $\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}$ のときの，$\sin2\theta$，$\cos2\theta$，$\tan2\theta$

(2) $\cos2\theta=\frac{1}{3}$ のときの，$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$

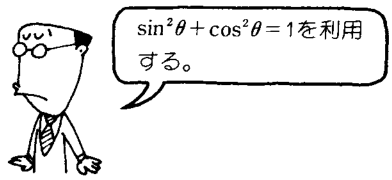
配点；各 5 点　計 15 点

2 次の問いに答えよ。

(1)　$\sin 795^\circ$ の値を求めよ。　（茨城大）

(2)　$\begin{cases} \sin x + \cos y = \sin z \\ \cos x + \sin y = \cos z \end{cases}$

が成り立つとき，$\sin(x+y)$ の値を求めよ。　（福岡大）



(3)　α，β が鋭角で，$\sin\alpha = \dfrac{1}{2}$，$\cos\beta = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ のとき，$\sin(\alpha+\beta)$ の値を求めよ。　（足利工大）

配点；(1) 5 点，(2) 10 点　計 15 点

3 **$\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{3}$ のとき，次の式の値を求めよ。**

(1)　$\sin 2\theta$

(2)　$\sin^3\theta+\cos^3\theta$

配点；各 5 点　計 20 点

4 **次の式を簡単にせよ。**

(1)　$\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)$

(2)　$\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{12}\right)\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{12}\right)$

(3)　$\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)-\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{6}\right)$

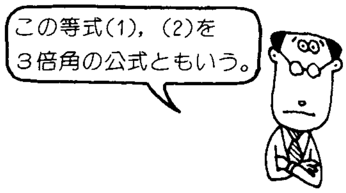
(4)　$\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)+\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)$

配点；各 10 点　計 20 点

$\boxed{5}$ **次の式を証明せよ。**

(1) $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$

(2) $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$



配点；各 10 点　計 20 点

$\boxed{6}$ **次の式を $r\sin(x+\alpha)$，$r>0$ の形に変形し，その最大値，最小値を求めよ。**

(1) $\dfrac{1}{3}\sin x - \dfrac{\sqrt{3}}{3}\cos x$

(2) $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)+\cos\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)$

第17日	問　題　研　究	学習日　　月　　日

これまで，三角関数についていろいろと学習してきました。基本的な問題を解く力はもう十分ついていますね。そこで，きょうはこの章のしめくくりとして，やや発展した問題に挑戦してみましょう。

この日で取り上げた研究問題は，これまであなたが学習して身につけた実力で十分解けるようにステップ形式にしてあります。〔解　答〕と書かれた横のスペースに解答を記入していきましょう。

➡ 研究問題の解答は 149 ページ

研究問題 1　　加法定理の利用

α，β はともに鋭角で，$\tan\alpha=\dfrac{1}{2}$，$\tan\beta=\dfrac{1}{3}$ のとき，次の問いに答えよ。

(1)　$\sin\alpha$，$\cos\alpha$，$\sin\beta$，$\cos\beta$ の値を求めよ。

(2)　$\cos(\alpha-\beta)\tan(\alpha+\beta)$ の値を求めよ。　　（工学院大）

〔解　答〕

どの公式を利用するのか，ポイントをつかめば簡単ですね。では次に挑戦しましょう。

研究問題② 三角不等式

次の問いに答えよ。

(1) $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ のとき，$-1<\tan x<\sqrt{3}$ をみたす x の範囲を求めよ。

(2) $0<x<\frac{\pi}{2}$，$0<y<\frac{\pi}{2}$ のとき，$-1<\tan(y-x)<\sqrt{3}$ をみたす $(x,\ y)$ の範囲を図示せよ。

〔解　答〕

この問題の(2)は，(1)を利用できることがわかれば簡単ですね。では次にアタックしましょう。

研究問題③　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　**三角方程式**

三角方程式 $\sin^3\theta+\cos^3\theta=1$ について，次の問いに答えよ。

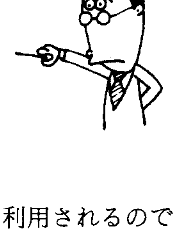
(1)　$\sin\theta+\cos\theta=x$ とおいて，x の方程式を導け。

(2)　(1)の方程式を解き，x の値を求めよ。

(3)　θ の値を求めよ。　　　　　　　　　　　　　　　　　　　（東北学院大）

〔解　答〕

$\sin^3\theta+\cos^3\theta=1$ のように sin と cos を入れかえても変わらない式は $\sin\theta+\cos\theta=x$ とおいて x の式で表して解くことができる。このとき x の変域に注意する。



この研究問題のように $\sin\theta+\cos\theta=x$ とおいて三角方程式を解く方法はときどき利用されるのでしっかり覚えておきましょう。では，次の研究問題を考えてみましょう。

研究問題4　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　三角関数の合成

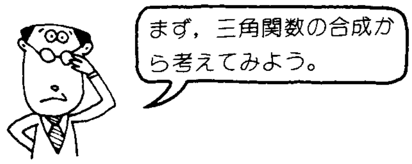
関数 $y=\sin 2x-\sqrt{3}\cos 2x-2$ について，次の問いに答えよ。

(1)　この関数の最大値，最小値を求めよ。

(2)　この関数のグラフは x 軸と共有点をもつ。その x 座標を求めよ。ただし，$-\pi \leqq x \leqq \pi$ とする。

(3)　(2)の x に対する $\sin x$ の値を求めよ。

〔解　答〕



三角関数の合成はたいせつな考え方ですね。では，最後の研究問題に挑戦しましょう。

研究問題[5]　　特別な三角関数の値

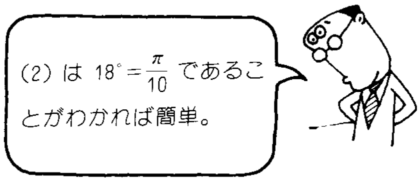
次の問いに答えよ。

(1)　$5\theta=\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\sin 2\theta=\cos 3\theta$ が成り立つことを示せ。

(2)　(1)を利用して，$\sin 18^\circ$ の値を求めよ。　（滋賀医大）

(3)　(2)を利用して，$\sin 36^\circ$ の値を求めよ。　（横浜国大）

〔解　答〕



これで，この章の学習は終わりです。ここでの学習内容は，「微分，積分」の中でも利用されます。基本的な事項は，しっかり身につけておきましょう。

三角関数は指数関数・対数関数とファミリーだ!!

a^x, $\log x$, $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$

これらの関数がなぜファミリーなんだろう。そんなに近い関数とは何か。今回はそれを紹介しよう。表に出ない，裏に隠された深い関係を調べてみよう。

見方 1.　その名を超越関数という

関数は大別すると，次の 2 つに分けられる。

$$\begin{cases}\text{代数関数(整関数・有理関数・無理関数)}\\ \text{超越関数(指数関数・対数関数・三角関数)}\end{cases}$$

超越関数とは，数値を代入して関数値を求めることができない関数である。

たとえば

$$f(x)=x^3-2x^2+x-1$$
$$g(x)=\log x$$
$$h(x)=\sin x$$

とすると

$$f(\sqrt{2})=2\sqrt{2}-2\times 2+\sqrt{2}-1$$
$$=3\sqrt{2}-5$$

$$\left.\begin{array}{l} g(\sqrt{2})=\log\sqrt{2}\\ h(\sqrt{2})=\sin\sqrt{2}\end{array}\right\}\text{(値が求められない)}$$

のように，数値を代入して，計算によって関数値を求めることができないのである。

もちろん，$\log 1=0$，$\sin\frac{\pi}{2}=1$ のように，関数値のわかるものがいくつかあるが，これは代入計算によったものではなくて，数値を記憶していたのにすぎない。

このことにより，どんな結果がおこるかというと，

方程式が解けない

のである。方程式を解くということは，四則計算を用いて，逆算を行って解くのであるが，

$$\sin x=0.3$$

の場合，x の値は表を見ること以外には求めることができないのである。このように，超越関数は，関数値を表によってしか求めることができないものをいうのである。

三角関数表，指数関数表，対数関数表が，これらの関数値を求める，ただ 1 つの手がかりである。もっとも，最近では電卓がすべて覚えておいてくれる便利な時代が来たのであるが。

見方 2.　対数は三角関数から作られた

対数を作った人は，スコットランドのマーキストン男爵ジョン・ネイピア (1550〜1617) である。

ネイピアは，三角関数の加法定理の中で

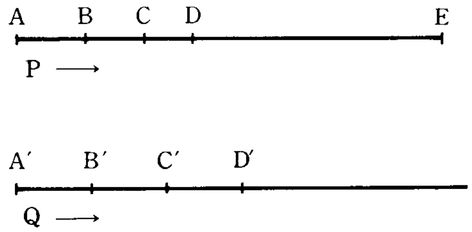
$$\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}\left\{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\right\}$$

となることより，積の計算が和の計算になることに気づいて，何とかして，関数の積の計算を和の計算に直すことができないかについて，くふうをしたのである。その理由は，計算を楽に，ミスも少なくするには，積よりも和の方がよいからである。

これが，対数という考え方の起源であるといわれている。

そのためのくふうを簡単に紹介しておこう。「下図のF・1において，AEを定直線，A′D′をA′から無限に延長された直線とする。いま，2点P，QがA，A′から，それぞれE，D′へ向って移動する。その速度は，出発点A，A′においては，同じ速度vとする。

F・1



しかし，AE上の点Pは，速度が減少し，任意の点Cに達したときには，その速度は距離CEに比例するものとする。(だから，点PがEに近づくにつれて，速度は激減する)

そこで，点PがAからCまで移動したとき，点QがA′からC′まで移動したとする。このとき，ネイピアは，A′C′をCEの対数と定義したのである。」(カジョリ初等数学史下，共立全書，p.225)

このような定義をすると，動点PからEまでの距離が

$$v,\ v\left(1-\frac{c}{v}\right),\ v\left(1-\frac{c}{v}\right)^2,\ \cdots\cdots,\ v\left(1-\frac{c}{v}\right)^n,\ \cdots$$

と表せるとき，上の距離に対応する時間に，点QがA′から動点Qまで移動した距離は

0，1，2，……，n，……

となり，等比数列が等差数列に対応することがわかるであろう。(cはある定数)

この対応を対数というのである。等比(積)を等差(和)に対応させることができたのである。

三角関数の積 ⟷ 和の公式より，
対数関数の$\log ab=\log a+\log b$

見方3. 指数関数は三角関数で表される

〈ここは，すこし範囲を超えるので，気楽に読んで下さい。〉

指数関数a^xは，$a>0$，xは実数であったが，指数を実数から虚数まで拡張すると，次のような形が求められる。ここで

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

とすると

$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$　　θは実数
(オイラーの公式)

となる。

この式について確かめてみると

$\theta=0$のとき

左辺$=e^0=1$

右辺$=\cos 0+i\sin 0=1$

となって成り立つ。

$\theta=\dfrac{\pi}{2}$のとき

左辺$=e^{\frac{\pi}{2}i}$

右辺$=\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}=i$

よって　$e^{\frac{\pi}{2}i}=i$

$\theta=2\pi$のとき

左辺$=e^{2\pi i}$

右辺$=\cos 2\pi+i\sin 2\pi=1$

よって　$e^{2\pi i}=1$

ここで，$\theta=0$のときと比べると

$e^0=e^{2\pi i}$　(2πが周期であることがわかる)

それでは，面白い展開をしてみよう。指数法則を虚数の場合に拡張すると

$$e^{(\alpha+\beta)i}=e^{i\alpha}e^{i\beta}\qquad\cdots\cdots\cdots①$$

となる。

このことから，オイラーの公式が正しいかどうかを確かめてみる。

左辺$=e^{(\alpha+\beta)i}=\cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta)$

右辺$=e^{i\alpha}e^{i\beta}$

$=(\cos\alpha+i\sin\alpha)(\cos\beta+i\sin\beta)$

$=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

$+i(\cos\alpha\sin\beta+\sin\alpha\cos\beta)$

ここで，加法定理を用いると

右辺$=\cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta)$

となって，①式が成り立つことがいえる。

このことから，三角関数の加法定理が成り立てば，オイラーの公式が成り立つこと，さらに指数が虚数である指数関数についても，指数法則が成り立つことがいえそうである。

このことから，次の対応を考えることができる。

指数 ⟶ 角

$\theta \longrightarrow \theta$

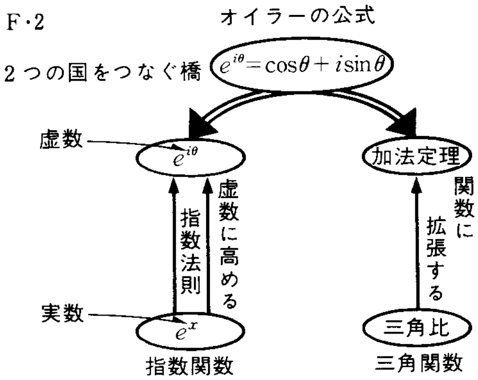
$\alpha+\beta \longrightarrow \alpha+\beta$

もとにかえすと

$e^{i\alpha}e^{i\beta} \longrightarrow$ $\alpha+\beta$ の cos, sin の和

この関係を図示すると次のようになる。

F・2



このように，全く関係がないとみられていた指数関数と三角関数の間には，このように太いパイプがつながっていたのである。このことを，太平洋と大西洋をつなぐパナマ運河にたとえる人もいるのである。

また，このオイラーの公式を用いると，加法定理も容易に求められる。

$e^{(\alpha-\beta)i}=e^{i\alpha}e^{-i\beta}$　であるから

$\cos(\alpha-\beta)+i\sin(\alpha-\beta)$

$=(\cos\alpha+i\sin\alpha)\{\cos(-\beta)+i\sin(-\beta)\}$

となり，右辺を計算すれば

$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

と公式が求められる。

また，$(e^{i\theta})^2=e^{2i\theta}$　であるから

$(\cos\theta+i\sin\theta)^2=\cos2\theta+i\sin2\theta$

左辺を計算すると

$\cos^2\theta-\sin^2\theta+i(2\sin\theta\cos\theta)$

となり　$\cos2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta$

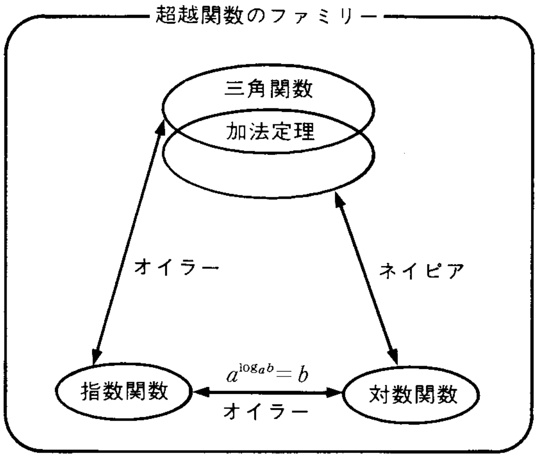
$\sin2\theta=2\sin\theta\cos\theta$

このようにして，オイラーの公式を用いると，三角関数の加法定理が，簡単に代数的計算によって求められることがわかったと思う。

最後に，三角関数・指数関数・対数関数にはなじみの薄い人もあるだろうが，これらの関数がファミリーであることを，ネイピア，オイラー（1707～1783）によって，導かれたのである。

知識をバラバラではなくて，1つの体系にまとめてもらいたいので，このことを紹介したのである。

F・3



参考図書

「カジョリ　初等数学史」小倉金之助補訳　共立全書
「三角・指数のろまん」江藤邦彦著　三省堂
「数学入門　(上)(下)」遠山啓著　岩波新書
「微分と積分その思想と方法」遠山啓著　日本評論社

教育社

TRAINING PAPER
DAILY PROGRAM

発行人　加藤　譲
発行所　株式会社 教育社

高校数学／基礎解析