TRAINING PAPER

復刻版 DAILY® PROGRAM

高校数学 微分･積分 《見本》

1

この巻では，前半で，数列の極限について，いろいろな場合の数列の極限を求めることと，無限級数についての学習をします。後半では，関数の極限について，関数の極限の計算，指数・対数・三角関数の極限。関数の連続について学習します。

KYOIKUSOFT

TRAINING PAPER®

高校数学　微分・積分

効果的な使い方

●微分・積分のトレーニングペーパーは，5巻構成です。第5巻には総復習があります。

〈1日の構成〉

● 1号分は，平均18日です。学習のひとまとまりごとに復習日があります。

● 1日分は，次のような構成になっています。

学習内容の説明

新しい学習内容をわかりやすく説明してあります。また，定理や公式などは簡潔にまとめられています。

➡ よく読んで，しっかりと理解しよう

基本例題・例題

定理や公式などがどのように実際使われるかを示してあります。基本例題は基本的な問題，例題はやや発展的な問題をあつかいます。

➡ 考え方や解答のポイントをおさえよう

トレーニング

基本例題・例題をふまえて，実際に問題を解く練習です。トレーニングによって，解法を完全に理解します。

➡ きちんと書きこみながら，しっかりトレーニングしよう

（ここまでが1日に2～3回程度くり返されます。）

解　　答

くわしい解答が巻末にあります。

➡ 答え合わせも学習のうち，1問1問しっかりと

復　習　日

説明，例題，トレーニングで学習してきた内容を，もう一度確認します。ややレベルのたかい問題もとりあげてあります。

➡ 復習で実力を十分つけよう

〈効果的な使い方〉

❖ 2日にトレーニングペーパー1日分のペースで，計画的に学習していこう

このペースで学習していけば1か月で1号分を終えられます。

復習用として使うことはもちろんのこと，新しい学習内容でもていねいな説明がついていますから，予習用，自学自習用としておおいに利用してください。

❖ 1日分の学習は，順を追い，指示に従いながら進めよう

順を追い，指示どおりにトレーニングしていくのが基本です。ただし，慣れてきたら，自分なりに使い方を工夫してかまいません。

❖ 定期試験の前には，弱点の部分を重点的に復習しよう

ふだんの学習で間違えたところをもう一度全部やり，復習日の問題を再確認しておきましょう。

数列の極限と関数の極限

□はじめに

「極限」という言葉は，私達の日常生活でもよく使われます。いま，私の手もとにある辞書で，この言葉の意味を調べてみると，

① 物事のいちばんおわりのところ (旺文社・国語辞典)

② 或る量が一定の規則のもとに，或る確定した量に限りなく近づく場合，後者を前者の極限という。(岩波書店・広辞苑)

という説明が載っています。

この「極限」という概念は，諸君がこれから学習しようとしている「微分・積分」の基礎となるもので，きわめて重要なものです。一口でこの概念を説明することは困難ですが，おおよその数学的意味は，上に示した②でよいと思います。

それにしても，②の説明は抽象的で，明確な説明であるとはいえないようです。また，極限という用語が登場する場面によって，少しずつ違った意味をもっています。以下に，「数列の極限」と「関数の極限」について，できるだけわかりやすいように具体的に説明してみましょう。これからの学習の参考にしてください。

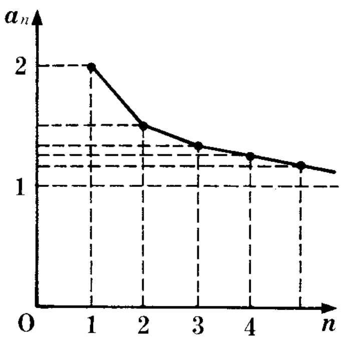
□ 数列の極限

たとえば，第 n 項 a_n が

$$a_n=\frac{n+1}{n} \qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

であるような数列 $\{a_n\}$；

$$2,\ \frac{3}{2},\ \frac{4}{3},\ \frac{5}{4},\ \cdots\cdots,\ \frac{n+1}{n},\ \cdots\cdots$$



で，番号 n を限りなく大きくすると，左の図から，a_n は定数 1 に限りなく近づいていくことがわかります。このとき

数列 $\{a_n\}$ の極限は 1 である

というのです。また，このことを記号で

$n \longrightarrow \infty$ のとき　$a_n \longrightarrow 1$　　あるいは　$\lim_{n\to\infty} a_n=1$

と書く習慣になっています。

ここで，番号 n がどんなに大きくなっても，けっして a_n が 1 に等しくならないことに十分注意してください。つまり，極限 1 はあくまでも a_n

が近づくときの目標となっているだけなのです。

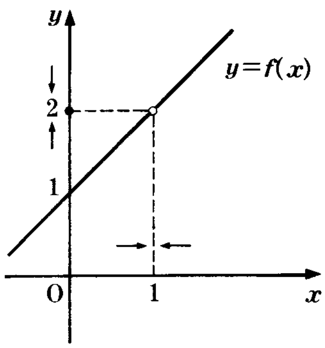
一般に，数列 $\{a_n\}$ の極限をつぎのように定めます。

> 番号 n が限りなく大きくなるとき，a_n がある一定の値 α に限りなく近づくならば，数列 $\{a_n\}$ の極限は α であるといって，
>
> $n\to\infty$ のとき $a_n\to\alpha$ 　　あるいは　$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\alpha$
>
> と書く。

□　関数の極限

たとえば，関数 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ は，$x=1$ のとき分母を 0 とするので定義されていませんが，$x\neq1$ のときは

$$f(x)=\frac{(x+1)(x-1)}{x-1}=x+1$$



となります。したがって，$f(x)$ のグラフは右の図のようになります。このグラフから，x が，1 と異なる値をとりながら，1 に限りなく近づくとき，$f(x)$ の値は 2 に限りなく近づくことがわかります。このとき

　　x が 1 に限りなく近づくときの関数 $f(x)$ の極限は 2 である

といって，記号で

$x\to1$ のとき $f(x)\to2$ 　　あるいは　$\lim\limits_{x\to1}f(x)=2$

と書く習慣になっています。

ここで，x がどんなに 1 に近づいても，けっして $f(x)$ が 2 に等しくならないことに十分注意してください。つまり，極限 2 はあくまでも $f(x)$ が近づくときの目標となっているだけです。

一般に，関数の極限をつぎのように定めます。

> x が，a でない値をとりながら，a に限りなく近づくとき，$f(x)$ がある一定の値 b に近づくならば，関数 $f(x)$ の極限は b であるといって，
>
> $x\to a$ のとき $f(x)\to b$ 　　あるいは　$\lim\limits_{x\to a}f(x)=b$
>
> と書く.

第 1 日	数列の極限　　学習日　月　日

きょうから，微分・積分の第１日目の学習をはじめます。

きょうとりあげる内容は，数列の極限についてです。数列については，もう基礎解析で学習しましたね。数列の一般項，等差数列，等比数列などいろいろありました。

まず，無限数列とその極限の説明からはじめましょう。

● 数列の極限値

自然数の列 1，2，3，4，5，6，7，……のように，ある規則にしたがって，数が限りなく並んでいるとき，この数の列のことを**無限数列**(むげんすうれつ)（または，単に**数列**）といい，その各数のことを**項**(こう)といいます。項が無限にある（限りなくある）という意味で，無限数列というのです。

無限数列

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ \cdots\cdots,\ a_n,\ \cdots\cdots$$

において，とくに a_1 を**初項**(しょこう)，a_n を**第 n 項**(だいえぬこう)（または，**一般項**(いっぱんこう)）といい，この無限数列を $\{\boldsymbol{a_n}\}$ という記号で表します。これらは，今までの数列（無限数列に対して，**有限数列**(ゆうげんすうれつ)ということもあります。）の表し方と変わりません。しかし，無限数列には，末項（すなわち，最後の項）はありません。

無限数列 $\{a_n\}$ において，項の番号 n を限りなく大きくするとき，a_n がある値 α に限りなく近づくならば，無限数列 $\{a_n\}$ は α に**収束する**(しゅうそく)といい，α を無限数列 $\{a_n\}$ の**極限値**(きょくげんち)，あるいは**極限**といいます。そして，このことを次のように記号で表します。

$$n\to\infty \text{ のとき } a_n\to\alpha \qquad \text{あるいは} \qquad \lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$$

《注》 ∞ は「むげんだい」と読み，「限りなく大きくなった状態」を表し，この状態を「無限大」といいます。∞ とは，ある大きな数のことではなく，数が大きくなった状態のことです。

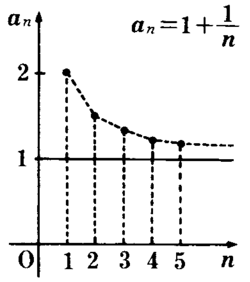
また，$n\to\infty$ とは，「n が限りなく無限大に近づくこと」，すなわち，「n が限りなく大きくなること」を表し，$a_n\to\alpha$ とは，「a_n の値が限りなく α に近づくこと」を表しています。このときの値 α は，あるひとつの定まった値のことで，数学の用語では「有限の確定した値」といい，∞ と区別しています。

極限とか，収束といったむずかしそうなことばが出てきましたが，驚くことはありません。これからの学習でわかってしまいます。

では，数列が収束するようすを，実際に見てみましょう。

たとえば，無限数列

$$1+1,\ 1+\frac{1}{2},\ 1+\frac{1}{3},\ \cdots\cdots,\ 1+\frac{1}{n},\ \cdots\cdots$$



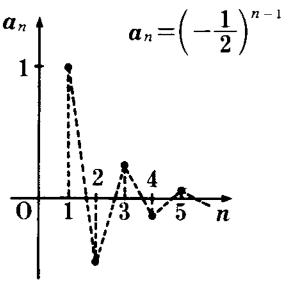
は，図からもわかるように，n が限りなく大きくなると，限りなく 1 に近づいていきます。すなわち，この無限数列は 1 に収束します。したがって

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1$$

となります。

また，無限数列

$$1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ -\frac{1}{8},\ \cdots\cdots,\ \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1},\ \cdots\cdots$$



は，図からもわかるように，n が限りなく大きくなると，正の値と負の値を交互にとりますが，限りなく 0 に近づいていきます。すなわち，0 に収束するので

$$\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}=0$$

です。

《注》 無限数列 $\{a_n\}$ において，すべての項の値が α に等しい場合，すなわち

$$\alpha,\ \alpha,\ \alpha,\ \alpha,\ \cdots\cdots,\ \alpha,\ \cdots\cdots$$

も α に収束すると考えます。ですから，記号で

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$$

と書きます。

無限数列が収束するということの意味，極限値の意味がわかりましたね。では，次の例題をしてから，トレーニングへ進みましょう。

基本例題 1 **数列の極限値**

次の無限数列の極限値を求めなさい。

(1) $\left\{\dfrac{2n+1}{n}\right\}$　　(2) $1,\ -\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{3},\ -\dfrac{1}{4},\ \cdots\cdots,\ \dfrac{(-1)^{n-1}}{n},\ \cdots\cdots$

(3) $\left\{\dfrac{1}{2^n}\right\}$　　(4) $2,\ 2,\ 2,\ 2,\ \cdots\cdots,\ 2,\ \cdots\cdots$

考え方 (1) 一般項が $\dfrac{2n+1}{n}$ のままでは，この無限数列の極限は形式的に $\dfrac{\infty}{\infty}$ になってしまいます。ですから，一般項を極限の様子が分かるように変形します。このとき，無限数列 $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ の極限値が 0 になることをもとに考えます。

(2) $(-1)^{n-1}$ は，正の値 1 と負の値 -1 を交互にとります。しかし，分母の n が限りなく大きくなると，$\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$ の全体としては，正の値と負の値を交互にとりながら，0 に限りなく

近づきます。

(3)　分子は定数 1 で，分母の 2^n は n が限りなく大きくなると限りなく大きくなります。

(4)　この無限数列は，どこまでいっても 2 のままです。このような，すべての項が 2 の無限数列 $\{2\}$ の場合，極限値は 2 であるとします。

解　答　(1)　与えられた無限数列は，変形すると $\dfrac{2n+1}{n}=2+\dfrac{1}{n}$ であるから，$n=1$，2，3，4，……とすると

$$2+1,\ 2+\frac{1}{2},\ 2+\frac{1}{3},\ 2+\frac{1}{4},\ \cdots\cdots,\ 2+\frac{1}{n},\ \cdots\cdots$$

となり，この数列の各項の整数部分の値はつねに 2 である。

また，分数部分は，n が限りなく大きくなると，分母が限りなく大きくなるので，0 に限りなく近づく。

よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n}=\mathbf{2}$

(2)　与えられた無限数列は，n が限りなく大きくなると，奇数番目の項も偶数番目の項もどちらも 0 に限りなく近づく。

よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=\mathbf{0}$

(3)　与えられた無限数列は，$n=1$，2，3，4，……とすると

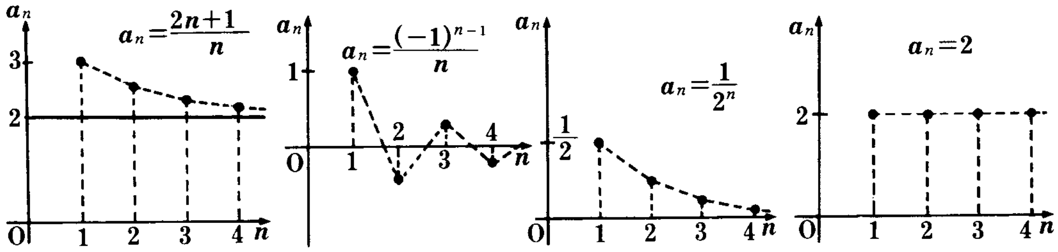
$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \cdots\cdots,\ \frac{1}{2^n},\ \cdots\cdots$$

となり，この数列は，n が限りなく大きくなると，分母が限りなく大きくなるので，0 に限りなく近づく。

よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=\mathbf{0}$

(4)　与えられた無限数列は，すべての項が 2 である。

よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}2=\mathbf{2}$



注　意　無限数列 $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ の極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ は，無限数列の極限の最も基本の式です。かけ算の九九と同じくらいスラスラ使えるようにしましょう。

無限数列の極限値の求め方はわかりましたね。n を限りなく大きくしたとき，どんな値に限りな

く近づくかを考えるのです。(4)のように，すべての項が2のものの極限値はやはり2となります。

トレーニング

1 次の無限数列の極限を求めなさい。

(1) $1,\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{7},\ \cdots\cdots,\ \frac{1}{2n-1},\ \cdots\cdots$

(2) $1,\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{9},\ \frac{1}{27},\ \cdots\cdots,\ \frac{1}{3^{n-1}},\ \cdots\cdots$

2 一般項が次の式で表される数列の極限を求めなさい。

(1) $\frac{1}{2n}$　(2) $\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$　(3) $\frac{1}{2^{n-1}}$

3 次の無限数列の極限を求めなさい。

(1) $\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \cdots\cdots,\ \frac{n}{n+1},\ \cdots\cdots$

(2) $\frac{4}{3},\ \frac{10}{6},\ \frac{16}{9},\ \frac{22}{12},\ \cdots\cdots,\ \frac{6n-2}{3n},\ \cdots\cdots$

4 次の無限数列の極限を求めなさい。

(1) $1,\ -\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{4},\ -\dfrac{1}{8},\ \cdots\cdots,\ \left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

(2) $1,\ -\dfrac{2}{3},\ \dfrac{4}{9},\ -\dfrac{8}{27},\ \cdots\cdots,\ \left(-\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$

極限値の求め方はむずかしくありませんね。
つぎは，収束しない数列のことを考えます。収束しない数列は，なんというのでしょう。

●数列の発散

無限数列 $\{a_n\}$，すなわち

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ \cdots\cdots,\ a_n,\ \cdots\cdots$$

が，ある有限な確定した値に収束しないとき，無限数列 $\{a_n\}$ は**発散**(はっさん)**する**といいます。

無限数列 $\{a_n\}$ において，項の番号 n を限りなく大きくするとき，a_n が限りなく大きくなる場合，無限数列 $\{a_n\}$ は**正**(せい)**の無限大に発散する**，または，無限数列 $\{a_n\}$ の**極限は正の無限大である**といい，記号で次のように表します。

$$\boldsymbol{n \to \infty} \textbf{ のとき } \boldsymbol{a_n \to +\infty} \qquad \text{あるいは} \qquad \boldsymbol{\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty}$$

《注》 正の無限大を表すとき，「$+\infty$」と書きますが，$+$ の符号を省略して，単に「∞」と書いてもかまいません。

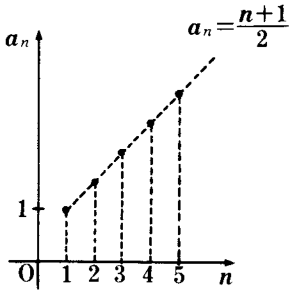
また，無限数列 $\{a_n\}$ において，項の番号 n を限りなく大きくするとき，a_n が負で，その絶対値が限りなく大きくなる場合，無限数列 $\{a_n\}$ は**負**(ふ)**の無限大に発散する**，または，無限数列 $\{a_n\}$ の**極限は負の無限大である**といい，記号で次のように表します。

$$\boldsymbol{n \to \infty} \textbf{ のとき } \boldsymbol{a_n \to -\infty} \qquad \text{あるいは} \qquad \boldsymbol{\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty}$$

《注》 負の無限大を表すとき，「$-\infty$」と書きますが，このときは，$-$ の符号は省略できません。

たとえば，無限数列

$$1,\ \frac{3}{2},\ 2,\ \frac{5}{2},\ \cdots\cdots,\ \frac{n+1}{2},\ \cdots\cdots$$



は，図からもわかるように，n が限りなく大きくなると，正の無限大に発散します。したがって

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2}=+\infty$$

となります。

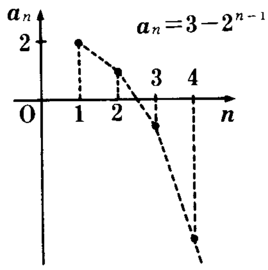
また，無限数列

$2,\ 1,\ -1,\ -5,\ \cdots\cdots,\ 3-2^{n-1},\ \cdots\cdots$

は，図からもわかるように，n が限りなく大きくなると，負でその絶対値は限りなく大きくなります。すなわち，負の無限大に発散します。したがって

$$\lim_{n\to\infty}(3-2^{n-1})=-\infty$$

となります。



収束しない数列のことを発散するということがわかりました。正の無限大を表す $+\infty$ の記号や lim の記号にも慣れましょう。では，例題をしてみましょう。

基本例題 2 　　**数列の発散**

次の無限数列の極限を求めなさい。

(1) $1,\ 4,\ 9,\ 16,\ \cdots\cdots,\ n^2,\ \cdots\cdots$ 　　(2) $\{-n+1\}$

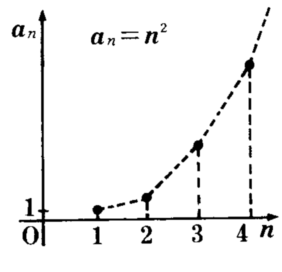
考え方 　実際に数列のいくつかの項を書いてみると，わかりやすくなります。

(1)では，1，4，9，16，25，36，……と数がどんどん大きくなります。

(2)では，0，-1，-2，-3，-4，-5，……と負の数でその絶対値がどんどん大きくなります。

解　答 　(1) 与えられた無限数列において，n を限りなく大きくすると，一般項 n^2 は限りなく大きくなる。

よって　$\lim_{n\to\infty}n^2=+\infty$

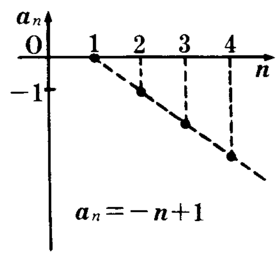


(2) 与えられた無限数列は，$n=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \cdots\cdots$ とすると

$0,\ -1,\ -2,\ -3,\ \cdots\cdots,\ -n+1,\ \cdots\cdots$

となり，この数列は，n が限りなく大きくなると，一般項 $-n+1$ は，負でその絶対値は限りなく大きくなる。

よって　$\lim_{n\to\infty}(-n+1)=-\infty$



注　意 　次のように答えてもかまいません。

(1) 極限は正の無限大。(または，正の無限大に発散する。)

(2) 極限は負の無限大。(または，負の無限大に発散する。)

極限が正の無限大である，負の無限大であることがわかりますね。では，次のトレーニングをしてみましょう。

トレーニング

5 次の無限数列の極限を求めなさい。

(1) $0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n-1,\ \cdots\cdots$

(2) $2,\ 4,\ 6,\ \cdots\cdots,\ 2n,\ \cdots\cdots$

(3) $3,\ 12,\ 27,\ \cdots\cdots,\ 3n^2,\ \cdots\cdots$

(4) $2,\ 6,\ 12,\ \cdots\cdots,\ n^2+n,\ \cdots\cdots$

6 一般項が次の式で表される数列の極限を求めなさい。

(1) $\sqrt{n+1}$

(2) $\sqrt{3n}$

(3) 2^n

(4) 3^{n+1}

7 次の無限数列の極限を求めなさい。

(1) $4,\ 3,\ 2,\ \cdots\cdots,\ 5-n,\ \cdots\cdots$

(2) $98,\ 97,\ 95,\ \cdots\cdots,\ 99-2^{n-1},\ \cdots\cdots$

8 次の無限数列の極限を求めなさい。

(1) 6, 5, 4, ……, $7-n$, ……

(2) 2, 1, 0, ……, $-n+3$, ……

(3) 95, 91, 83, ……, $99-2^{n+1}$, ……

(4) 998, 989, 899, ……, $999-10^{n-1}$, ……

9 一般項が次の式で表される数列の極限を求めなさい。

(1) $10-2n$

(2) $-3n+13$

(3) $11-n^2$

(4) $-2n^2+15$

発散する数列には，正の無限大に発散するもの，負の無限大に発散するもののほかに，振動する数列があります。このことを説明しておきましょう。

● 数列の発散（振動）

発散する無限数列 $\{a_n\}$

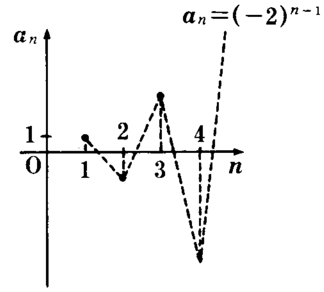
$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ \cdots\cdots,\ a_n,\ \cdots\cdots$$

が，発散はするけれども正の無限大に発散するのではなく，また，発散はするけれども負の無限大に発散するのでもないとき，無限数列 $\{a_n\}$ は**振動**（しんどう）**する**，または，無限数列 $\{a_n\}$ の**極限はない**といいます。

たとえば，無限数列

$$1,\ -2,\ 4,\ -8,\ \cdots\cdots,\ (-2)^{n-1},\ \cdots\cdots$$

を調べてみましょう。この無限数列の各項を図示してみると図のようになります。ですから，図からもわかるように，n が大きくなると，その絶対値は大きくなりますが，正の値と負の値を交互にとります。すなわち，n が限りなく大きくなると，その絶対値は限りなく大きくなりますが，符号が一定しないので，正の無限大にも負の無限大にも発散しません。



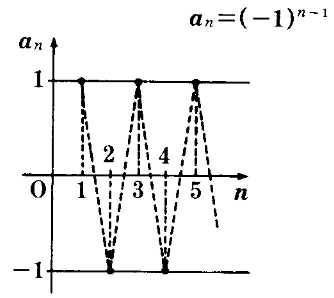
したがって，この無限数列は振動するといいます。

また，無限数列

$$1,\ -1,\ 1,\ -1,\ \cdots\cdots,\ (-1)^{n-1},\ \cdots\cdots$$

も同様にして，振動することがわかります。

無限数列 $\{a_n\}$ を，収束するか発散するかで分類すると次のようになります。



□ 数列の収束・発散 □

無限数列
- 収束する　極限は有限の確定した値………$\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$
- 発散する
  - 極限は正の無限大………………$\lim_{n\to\infty} a_n=+\infty$
  - 極限は負の無限大………………$\lim_{n\to\infty} a_n=-\infty$
  - 極限はない（振動する）

《注》「極限はない（振動する）」場合は，発散する場合のひとつであることに注意して下さい。

無限数列 $\{(-2)^{n-1}\}$ を $\lim_{n\to\infty}(-2)^{n-1}=\pm\infty$ とは書きませんし，$\{(-1)^{n-1}\}$ を $\lim_{n\to\infty}(-1)^{n-1}=\pm1$ とも書きません。振動する無限数列を $\lim_{n\to\infty} a_n=\cdots\cdots$ という式では書き表せないのです。

数列が振動する，極限はない，という表現をきちんとおさえておいてください。では，例題へ進みます。

基本例題 3　　**数列の発散（振動）**

次の無限数列の収束・発散を調べなさい。

(1)　$\{(-1)^n\}$　　　(2)　$-1,\ 2,\ -3,\ 4,\ \cdots\cdots,\ (-1)^n n,\ \cdots\cdots$

考え方　実際に数列のいくつかの項を書いてみると，わかりやすくなります。

(1)では，-1，1，-1，1，-1，1，……と -1 と 1 が交互に現われます。

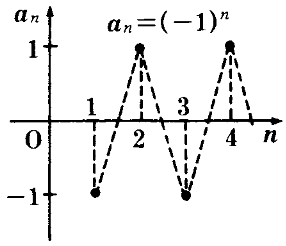
(2)では，-1，2，-3，4，-5，6，……と負の数と正の数が交互に現われ，その絶対値はどんどん大きくなっていきます。

解　答　(1)　与えられた無限数列は，$n=1$，2，3，4，……とすると

$$-1,\ 1,\ -1,\ 1,\ \cdots\cdots,\ (-1)^n,\ \cdots\cdots$$

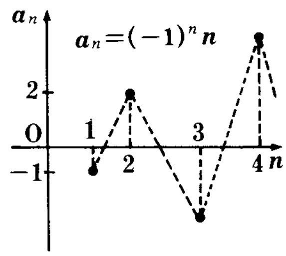
となり，この数列は -1 と 1 が交互に現われる。

よって，この無限数列は**振動**する。



(2)　与えられた無限数列は，n が限りなく大きくなると，負の数と正の数が交互に現われ，しかもその絶対値は限りなく大きくなる。

よって，この無限数列は**振動**する。



注　意　無限数列 $\{(-1)^n\}$ と $\{(-1)^{n-1}\}$ は似ていますが，異なる数列です。

両方とも，1 と -1 が交互に繰り返す点は同じですが，$\{(-1)^n\}$ では偶数番目の項が 1，$\{(-1)^{n-1}\}$ では奇数番目の項が 1 になります。

各項の値が，正と負の値を交互にとって，振動している様子がわかりますね。
極限の値が 1 つに決まらないとき，極限はないといいます。

トレーニング

10　次の無限数列の極限を求めなさい。

(1)　1，-2，3，……，$(-1)^{n+1}n$，……

(2)　1，$-\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$，……，$(-1)^{n+1}\sqrt{n}$，……

11 次の無限数列の極限を求めなさい。

(1) $2,\ -4,\ 6,\ \cdots\cdots,\ (-1)^{n+1}2n,\ \cdots\cdots$

(2) $1,\ -4,\ 9,\ \cdots\cdots,\ (-1)^{n+1}n^2,\ \cdots\cdots$

(3) $\sqrt{2},\ -2,\ \sqrt{6},\ \cdots\cdots,\ (-1)^{n+1}\sqrt{2n},\ \cdots\cdots$

(4) $0,\ -1,\ \sqrt{2},\ \cdots\cdots,\ (-1)^{n+1}\sqrt{n-1},\ \cdots\cdots$

12 次の無限数列の極限を求めなさい。

(1) $\sin\frac{\pi}{2},\ \sin\pi,\ \sin\frac{3}{2}\pi,\ \cdots\cdots,\ \sin\frac{n\pi}{2},\ \cdots\cdots$

(2) $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right),\ \cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2}{3}\pi\right),\ \cos\left(\frac{\pi}{2}+\pi\right),\ \cdots\cdots,\ \cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{n\pi}{3}\right),\ \cdots\cdots$

13 次の無限数列の極限を求めなさい。

(1) $\cos\frac{\pi}{3},\ \cos\frac{2}{3}\pi,\ \cos\pi,\ \cdots\cdots,\ \cos\frac{n\pi}{3},\ \cdots\cdots$

(2) $\sin\left(\pi+\frac{\pi}{2}\right),\ \sin(\pi+\pi),\ \sin\left(\pi+\frac{3}{2}\pi\right),\ \cdots\cdots,\ \sin\left(\pi+\frac{n\pi}{2}\right),\ \cdots\cdots$

きょうは，無限数列の収束，発散について学習しました。発散する数列には，振動する数列もありましたね。次の日は極限の計算です。きょうは，これで終わりにしましょう。

第２日	学習日　　月　　日 **極限の四則(定数倍・和・差)**

無限数列の収束，発散という意味はわかっていますね。

きょうは，無限数列の極限を求める計算で，和，差，定数倍の形の計算のしかたを学習します。

はじめに，無限数列が収束するときに成り立つ数列の極限についての公式をとりあげます。

● 収束する数列の極限の計算

無限数列の極限を求めるのに，次の公式がよく利用されます。

□ 極限の計算 □

2つの無限数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ が収束して

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha,\quad \lim_{n\to\infty} b_n=\beta$$

であるとき，次のことが成り立つ。

[Ⅰ] $\lim_{n\to\infty} ka_n=k\lim_{n\to\infty} a_n=k\alpha$　(k は定数)

[Ⅱ] $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim_{n\to\infty} a_n+\lim_{n\to\infty} b_n=\alpha+\beta$

[Ⅲ] $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\lim_{n\to\infty} a_n-\lim_{n\to\infty} b_n=\alpha-\beta$

[Ⅳ] $\lim_{n\to\infty} a_nb_n=\lim_{n\to\infty} a_n\cdot\lim_{n\to\infty} b_n=\alpha\beta$

[Ⅴ] $\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}=\dfrac{\alpha}{\beta}$　(ただし，$b_n\neq 0$，$\beta\neq 0$)

《注》 極限の計算［Ⅰ］～［Ⅴ］は2つの無限数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ がともに収束するときのみにいえることです。つまり，どちらか一方が発散したり，両方とも発散するときは，この公式は使えませんから，2つの無限数列が収束していることを確認しなければなりません。

［Ⅴ］の公式で，$b_n\neq 0$，$\beta\neq 0$ とするのは，分母が0の分数は定義されないからです。

たとえば，2つの無限数列 $\left\{1+\dfrac{3}{n^2}\right\}$，$\left\{\dfrac{(-1)^n}{n}\right\}$ は，いずれも収束しますから，公式を利用して，次のように計算することができます。

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n^2}+\frac{(-1)^n}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n^2}\right)+\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n}=1+0=1$$

これは，［Ⅱ］の公式，「和の極限は，それぞれの極限の和で計算できる」ことを使って計算しています。

また，同様にして

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(2+\frac{1}{3^n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{3^n}\right)=1\cdot2=2$$

これは，[IV]の公式，「積の極限は，それぞれの極限の積で計算できる」ことを使って計算しています。

無限数列の極限の計算の式は，無限数列が収束するときに成り立ちます。では，例題へいきます。

基本例題 1 　**収束する数列の極限の計算**

$\lim_{n\to\infty}a_n=3$，$\lim_{n\to\infty}b_n=-2$ のとき，次の極限値を求めなさい。

(1) $\lim_{n\to\infty}(2a_n-3b_n)$ 　　(2) $\lim_{n\to\infty}(a_n{}^2+2b_n)$

考え方 　収束する無限数列の極限では，定数倍・和・差・積・商の極限は，それぞれ極限の定数倍・和・差・積・商になります。

この法則を使って与えられた極限値の計算を行ないます。

解 答 　$\lim_{n\to\infty}a_n=3$，$\lim_{n\to\infty}b_n=-2$ より，無限数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ は収束するので，極限の公式を用いると

(1) $\lim_{n\to\infty}(2a_n-3b_n)=2\lim_{n\to\infty}a_n-3\lim_{n\to\infty}b_n=2\times3-3\times(-2)=\mathbf{12}$

(2) $\lim_{n\to\infty}(a_n{}^2+2b_n)=(\lim_{n\to\infty}a_n)^2+2\lim_{n\to\infty}b_n=3^2+2\times(-2)=\mathbf{5}$

注 意 　基礎解析で学習した，関数の有限な確定値への極限の計算と形式上全く同じ公式が成り立っています。

$\lim_{x\to a}f(x)=\alpha$，$\lim_{x\to a}g(x)=\beta$ のとき

(i) $\lim_{x\to a}kf(x)=k\lim_{x\to a}f(x)=k\alpha$ 　(ただし，k は定数)

(ii) $\lim_{x\to a}\{f(x)+g(x)\}=\lim_{x\to a}f(x)+\lim_{x\to a}g(x)=\alpha+\beta$

(iii) $\lim_{x\to a}\{f(x)-g(x)\}=\lim_{x\to a}f(x)-\lim_{x\to a}g(x)=\alpha-\beta$

(iv) $\lim_{x\to a}f(x)g(x)=\lim_{x\to a}f(x)\lim_{x\to a}g(x)=\alpha\beta$

(v) $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim_{x\to a}f(x)}{\lim_{x\to a}g(x)}=\dfrac{\alpha}{\beta}$ 　(ただし，$\beta\neq0$)

2つの関数 $f(x)$，$g(x)$ が無限数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ に，x が n に，a が ∞ に変わっただけで，見た目は全く同じですね。

わかりましたね。では，例題と同形式の問題をしておきましょう。

トレーニング

1 $\lim_{n\to\infty} a_n=5$, $\lim_{n\to\infty} b_n=3$ のとき，次の極限値を求めなさい。

(1) $\lim_{n\to\infty}(2a_n+b_n)$

(2) $\lim_{n\to\infty}(4a_n-3b_n)$

2 $\lim_{n\to\infty} a_n=1$, $\lim_{n\to\infty} b_n=-2$, $\lim_{n\to\infty} c_n=3$ のとき，次の極限値を求めなさい。

(1) $\lim_{n\to\infty}(3a_n+4b_n)$

(2) $\lim_{n\to\infty}(5a_n-2b_n)$

(3) $\lim_{n\to\infty}(3a_n+2b_n+c_n)$

(4) $\lim_{n\to\infty}(2a_n-4b_n-3c_n)$

3 $\lim_{n\to\infty} a_n=4$, $\lim_{n\to\infty} b_n=2$ のとき，次の極限値を求めなさい。

(1) $\lim_{n\to\infty} a_n(1+b_n)$

(2) $\lim_{n\to\infty}(3{a_n}^2-4{b_n}^2)$

4 $\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n=\beta$ のとき，次の極限値を求めなさい。

(1) $\lim_{n\to\infty}(2{a_n}^2+{b_n}^3)$

(2) $\lim_{n\to\infty}({a_n}^2{b_n}^4)$

(3) $\lim_{n\to\infty}(a_n{}^3b_n{}^4+3a_n{}^2b_n{}^5)$

(4) $\lim_{n\to\infty}(3a_n{}^3b_n{}^2-a_n{}^5b_n{}^3)$

5 $\lim_{n\to\infty}a_n=2$, $\lim_{n\to\infty}b_n=-3$, $\lim_{n\to\infty}c_n=4$ のとき，次の極限値を求めなさい。

(1) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{b_n+c_n}{a_n}$

(2) $\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{b_n}{a_n}+\dfrac{c_n}{b_n}+\dfrac{a_n}{c_n}\right)$

(3) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{b_nc_n}{a_n}$

(4) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{a_nb_n+b_nc_n+c_na_n}$

6 $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$, $\lim_{n\to\infty}b_n=\beta$ のとき，次の極限値を求めなさい。ただし，$\alpha\neq 0$ とします。

(1) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{4b_n}{a_n}$

(2) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{b_n{}^2+3}{2a_n}$

(3) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{1-b_n{}^2}{1+a_n{}^2}$

(4) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n{}^3}{5+b_n{}^2}$

できましたね。数列が収束している，ということをおさえておくことが大切です。
つぎは，数列が発散するときの極限の計算です。

●発散する数列の極限の計算（定数倍・和・積）

2つの無限数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ について

$$\lim_{n\to\infty}a_n=+\infty,\quad \lim_{n\to\infty}b_n=+\infty$$

であるとき，次の式が成り立ちます。

[I] $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=+\infty$ 　　⇦形式的に $(+\infty)+(+\infty)=+\infty$

[II] $\lim_{n\to\infty}a_nb_n=+\infty$ 　　⇦形式的に $(+\infty)\times(+\infty)=+\infty$

[III] $\begin{cases} k>0 \text{ のとき} & \displaystyle\lim_{n\to\infty} ka_n = +\infty \\ k<0 \text{ のとき} & \displaystyle\lim_{n\to\infty} ka_n = -\infty \end{cases}$

⇦形式的に $(+)\times(+\infty)=+\infty$

⇦形式的に $(-)\times(+\infty)=-\infty$

《注》 [I]では，無限数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ の各項の和を項とする新しい無限数列 $\{a_n+b_n\}$，すなわち

$$a_1+b_1,\ a_2+b_2,\ a_3+b_3,\ a_4+b_4,\ \cdots\cdots,\ a_n+b_n,\ \cdots\cdots$$

も，正の無限大に発散することを意味しています。

同様に，[II]では，無限数列 $\{a_nb_n\}$，すなわち

$$a_1b_1,\ a_2b_2,\ a_3b_3,\ a_4b_4,\ \cdots\cdots,\ a_nb_n,\ \cdots\cdots$$

も，正の無限大に発散することを意味しています。

たとえば，2つの無限数列 $\{n^2\}$，$\{3n\}$ はいずれも正の無限大に発散しますから

$$\lim_{n\to\infty}(n^2+3n)=+\infty$$

$$\lim_{n\to\infty} n^2\cdot 3n=+\infty$$

となります。

また，2つの無限数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ について

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha\text{(有限な確定した値)},\ \lim_{n\to\infty} b_n=+\infty$$

であるとき，次の式が成り立ちます。

[IV] $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=+\infty$ ⇦形式的に $\alpha+(+\infty)=+\infty$

[V] $\begin{cases} \alpha>0 \text{ のとき} & \displaystyle\lim_{n\to\infty} a_nb_n = +\infty \\ \alpha<0 \text{ のとき} & \displaystyle\lim_{n\to\infty} a_nb_n = -\infty \end{cases}$

⇦形式的に $(+)\times(+\infty)=+\infty$

⇦形式的に $(-)\times(-\infty)=-\infty$

《注》 ここで $\alpha>0$ という条件は，α が正であればいいのであって，1でも，$\dfrac{1}{2}$ でも，$\dfrac{1}{10^{100}}$ でも，絶対値がどんなに小さい数でも，無限数列 $\{a_nb_n\}$ は正の無限大に発散します。

たとえば，2つの無限数列 $\left\{2-\dfrac{1}{n}\right\}$，$\{n^2\}$ について

$$\lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{1}{n}\right)=2,\ \lim_{n\to\infty} n^2=+\infty$$

ですから

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\left(2-\frac{1}{n}\right)+n^2\right\}=+\infty$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{1}{n}\right)\cdot n^2=+\infty$$

となります。

$(+\infty)\times(+\infty)=+\infty$ というような式は形式的な式ですから，解答には書きません。頭の中で，思っていればよいのです。では，例題をみてください。

基本例題 2 発散する数列の極限の計算（定数倍・和・積）

次の無限数列の極限を求めなさい。

(1) 5, 10, 15, 20, ……, $5n$, ……　　(2) $\{n^2+n\}$

考え方　一般項が与えられていますから，$n\to\infty$ のときの極限を考えます。
このとき，形式的に，$\infty+\infty=\infty$，$a\times\infty=\infty$（a は正の数）の式が成り立っています。

解　答　(1) 一般項が $5n$ であるから，求める極限は

$$\lim_{n\to\infty}5n=+\infty$$

(2) 一般項が n^2+n であるから，求める極限は $\lim_{n\to\infty}n^2=\infty$，$\lim_{n\to\infty}n=\infty$ より，

$$\lim_{n\to\infty}(n^2+n)=+\infty$$

n が正の無限大に発散すれば，$5n$ もやはり正の無限大に発散します。
では，トレーニングでたしかめておきましょう。

トレーニング

7 $\lim_{n\to\infty}a_n=+\infty$のとき，数列 $\{ca_n\}$ の極限を調べなさい。

8 $\lim_{n\to\infty}a_n=+\infty$ のとき，数列 $\{k^2a_n\}$ の極限を調べなさい。

9 $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$, $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$ のとき，数列 $\{k(a_n+2b_n)\}$ の極限を調べなさい。

きょうは，無限数列が収束するときの極限の計算と，無限大に発散するときの和の形，定数倍の形での極限を学習しました。つぎの日も，極限の計算のつづきです。

第 3 日	学習日　　月　　日 **極限の大小(不定形の極限)**

無限数列が収束するときの極限の計算，無限数列が無限大に発散するときの和，積の極限については学習しました。

きょうは，そのままの形では，分母と分子が無限大になるもの，無限大と無限大の差の形になるものなどをとりあげて，極限を求める練習をしましょう。

● 発散する数列の極限の計算（商）

2 つの無限数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ について

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty,\quad \lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$$

であるとき，無限数列 $\left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\}$ の極限について考えてみましょう。

収束する数列の極限の計算での公式 [V] を形式的に適用してみると

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \frac{\infty}{\infty}$$

という形になりますが，これを単純に約分して，1 としては誤りです。

というのは，この商の形の無限数列 $\left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\}$ の極限については，次に示すようにいろいろな場合が起こりうるからです。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n+2}{n-1} = \lim_{n\to\infty}\frac{3+\dfrac{2}{n}}{1-\dfrac{1}{n}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3+\dfrac{2}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)} = \frac{3}{1} = 3$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n+2}{3n-1} = \lim_{n\to\infty}\frac{3+\dfrac{2}{n}}{3-\dfrac{1}{n}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3+\dfrac{2}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3-\dfrac{1}{n}\right)} = \frac{3}{3} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+2}{n-1} = \lim_{n\to\infty}\frac{3n+\dfrac{2}{n}}{1-\dfrac{1}{n}} = +\infty$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n+2}{n^2-1} = \lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{3}{n}+\dfrac{2}{n^2}}{1-\dfrac{1}{n^2}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3}{n}+\dfrac{2}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)} = \frac{0}{1} = 0$$

上に示した極限の計算では，**分母・分子を n あるいは n^2 で割って，**

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2} = 0$$

が用いられていることに注目して下さい。

一般に，形式的に極限が $\dfrac{\infty}{\infty}$ となる無限数列の極限を求めるには，**極限が求められる形に変形する**ことが必要となります。

□ $\dfrac{\infty}{\infty}$ の極限の求め方 □

形式的に極限が $\dfrac{\infty}{\infty}$ となる無限数列の極限は，次の基本的な式が利用できるように式変形する。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0 \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$$

形式的に分母と分子の極限が無限大になるときは，極限が求められる形に変形しなくてはいけません。では，例題をしてみましょう。

基本例題 1 **発散する数列の極限の計算（商）**

次のような一般項をもつ無限数列の極限を求めなさい。

(1) $\dfrac{2n+5}{3n}$　　(2) $\dfrac{-n+3}{n^2+1}$

考え方　極限が形式的に，$\dfrac{\infty}{\infty}$ や $\dfrac{-\infty}{\infty}$ となる数列は，一般項を極限が求まる形に式変形してから考えます。

このとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$ 等が使えるように式変形します。式変形には

(ⅰ) 分母・分子を最高次数の n で割る。

が，よく使われます。

解　答

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2n+5}{3n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{5}{n}}{3}$

ここで，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{5}{n}\right)=2$ より　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2n+5}{3n}=\boldsymbol{\frac{2}{3}}$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{-n+3}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{-\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}}$

ここで，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}\right)=0$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)=1$ より　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{-n+3}{n^2+1}=\frac{0}{1}=\mathbf{0}$

注　意　形式的に，$\infty+\infty=\infty$，$\infty\times\infty=\infty$ は成り立ちますが，$\infty-\infty=0$，$\infty\div\infty=1$ は成り立ちません。

a を正の数とするとき，次の関係が成り立ちます。

$\infty+a=\infty$，$a+\infty=\infty$　　$\infty\times a=\infty$，$a\times\infty=\infty$　　$\dfrac{\infty}{a}=\infty$，$\dfrac{a}{\infty}=0$

$\infty-a=\infty$，$a-\infty=-\infty$

分母，分子を最高次の次数のもので割っていることがわかります。変形そのものは，むずかしくありません。では，問題を解いていきましょう。

トレーニング

1 次のような一般項をもつ数列の極限を求めなさい。

(1) $\dfrac{5n}{2n-1}$　　(2) $\dfrac{-n^2+1}{n+1}$

2 次のような一般項をもつ数列の極限を求めなさい。

(1) $\dfrac{3n}{4n-1}$　　(2) $\dfrac{-n^2+n+1}{n-1}$

3 次のような一般項をもつ数列の極限を求めなさい。

(1) $\dfrac{1+5n}{1-3n}$　　(2) $\dfrac{2+3n-4n^2}{5+4n+3n^2}$

(3) $\dfrac{3n^3}{n^3+n^2}$　　(4) $\dfrac{n^6+1}{n^3+1}$

4 次のような一般項をもつ数列の極限を求めなさい。

(1) $\dfrac{n}{\sqrt{2n}+1}$　　(2) $\dfrac{1-3n}{1-\sqrt{3n}}$

5 次のような一般項をもつ数列の極限を求めなさい。

(1) $\dfrac{\sqrt{n^2+3}}{\sqrt{2n^2+1}+\sqrt{n}}$　　(2) $\dfrac{\sqrt{2n^2-1}}{\sqrt{n^2-1}-\sqrt{n}}$

わかりましたね。こんどは，極限が発散するもので，差の形のものの極限の計算を考えます。差の形のときは，注意が必要です。

●発散する数列の極限の計算（差）

2つの無限数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ について

$$\lim_{n\to\infty} a_n=+\infty,\quad \lim_{n\to\infty} b_n=+\infty$$

であるとき，無限数列 $\{a_n-b_n\}$ の極限について考えてみましょう。

収束する数列の極限の計算の公式 [III] を形式的に適用してみると

$$\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n-\lim_{n\to\infty}b_n=\infty-\infty$$

という形になりますが，これを同じものをひいているからといって，単純に0としては誤りです。

というのは，この差の形の無限数列 $\{a_n-b_n\}$ の極限については，次に示すようにいろいろな場合が起こりうるからです。

$$\lim_{n\to\infty}(n^2-2n)=\lim_{n\to\infty}n^2\left(1-\frac{2}{n}\right)=+\infty$$

$$\lim_{n\to\infty}(n-3n^2)=\lim_{n\to\infty}n^2\left(\frac{1}{n}-3\right)=-\infty$$

上に示した計算のポイントは，**最高次の項でくくり出す**というところにあります。

一般に，形式的に極限が $\infty-\infty$ となる無限数列の極限を求めるには，そのままでは求められませんので，極限が求められる形に変形することが必要となります。

たとえば，$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$ のような無理式の差の形では，次のような変形をして極限を求めます。

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{1}$$

と考えて，**分母・分子に $\sqrt{n+1}+\sqrt{n}$ をかけて，分子を有理化すると**

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{1}\times\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\frac{(\sqrt{n+1})^2-(\sqrt{n})^2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

ゆえに　$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0$

差の形の極限の考え方がわかりましたね。では，この形のときの例題をしてみましょう。

基本例題 2　　　**発散する数列の極限の計算（差）**

次のような一般項をもつ無限数列の極限を求めなさい。

(1)　$2n^2-2n$　　　(2)　$\sqrt{n}-\sqrt{n+1}$

(3)　$n-\sqrt{n}$　　　(4)　$\dfrac{1}{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}$

考え方　極限が形式的に，$\infty-\infty$ や $\dfrac{1}{\infty-\infty}$ となる数列は，一般項を極限が求まる形に式変形してから考えます。

このとき，$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$，$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$ 等が使えるように式変形します。式変形には，次のような方法があります。

(i)　n の最高次数でくくり出す。

(ii)　根号を含むときは，共役数を分母・分子にかける。

解　答　(1)　$\lim_{n\to\infty}(2n^2-2n)=\lim_{n\to\infty}n^2\left(2-\frac{2}{n}\right)$

ここで，$\lim_{n\to\infty}n^2=\infty$，$\lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{2}{n}\right)=2$ より　$\lim_{n\to\infty}(2n^2-2n)=\infty$

(2)　$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n}-\sqrt{n+1})=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n}-\sqrt{n+1})(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n-(n+1)}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{-1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=\mathbf{0}$

(3)　$\lim_{n\to\infty}(n-\sqrt{n})=\lim_{n\to\infty}n\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

ここで，$\lim_{n\to\infty}n=\infty$，$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=1$ より　$\lim_{n\to\infty}(n-\sqrt{n})=\infty$

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}{(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}{n-(n-1)}$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})=\infty$

注　意　形式的に，$\infty+\infty=\infty$，$\infty\times\infty=\infty$ は成り立ちますが，$\infty-\infty=0$，$\infty\div\infty=1$ は成り立ちません。注意して下さい。

差の形のときも，商のときと同じように，そのままの形では求められませんから，式を変形します。無理式が出てきたときに有理化するのは，数学では，よく使う手段です。では，次の問題をして解法を理解してしまいましょう。

トレーニング

6 次のような一般項をもつ数列の極限を求めなさい。

(1) n^3-3n^2　　(2) $7n-n^2$

7 次のような一般項をもつ数列の極限を求めなさい。

(1) n^3-2n^2　　(2) $6n-n^2$

(3) $2n-\sqrt{n}$　　(4) $n\sqrt{n}-n^2$

8 次のような一般項をもつ数列の極限を求めなさい。

(1) $\sqrt{n+5}-\sqrt{n}$　　(2) $\sqrt{n+4}-\sqrt{n+3}$

9 次のような一般項をもつ数列の極限を求めなさい。

(1) $\sqrt{n+8}-\sqrt{n}$

(2) $\sqrt{n}(\sqrt{n+3}-\sqrt{n})$

10 次のような一般項をもつ数列の極限を求めなさい。

(1) $\dfrac{2}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$　　(2) $\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}-n}$

11 次のような一般項をもつ数列の極限を求めなさい。

(1) $\dfrac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$　　(2) $\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+3}-\sqrt{n+2}}$

練習問題が多かったのですが，できましたね。有理化の計算など，確実にできなくてはいけません。

つぎに，極限値の関係についての説明をしましょう。

●極限値の大小関係

2つの無限数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ で，対応する項の大きさと極限値の関係を調べてみましょう。

たとえば，無限数列 $\{a_n\}$

$$1+\frac{1}{1},\ 1+\frac{1}{2},\ 1+\frac{1}{3},\ 1+\frac{1}{4},\ \cdots\cdots,\ 1+\frac{1}{n},\ \cdots\cdots$$

と無限数列 $\{b_n\}$

$$2+\frac{1}{1},\ 2+\frac{1}{2},\ 2+\frac{1}{3},\ 2+\frac{1}{4},\ \cdots\cdots,\ 2+\frac{1}{n},\ \cdots\cdots$$

において，対応する項の大きさを比較してみると

$$1+\frac{1}{1}<2+\frac{1}{1},\ 1+\frac{1}{2}<2+\frac{1}{2},\ 1+\frac{1}{3}<2+\frac{1}{3},\ \cdots\cdots,\ 1+\frac{1}{n}<2+\frac{1}{n},\ \cdots\cdots$$

ですから，つねに $a_n<b_n$ となっています。また

$n\to\infty$ のとき　$a_n\to 1$, $b_n\to 2$　ですから　$\lim_{n\to\infty}a_n<\lim_{n\to\infty}b_n$

となっていることがわかります。

一般に，収束する無限数列の大小関係については，次の2つの定理が成り立ちます。

□ 項の大小と極限値の関係 □

[I]　2つの無限数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ が収束して

$\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$, $\lim_{n\to\infty}b_n=\beta$

であるとき

$a_n\leqq b_n$　$(n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$ ならば　$\alpha\leqq\beta$

[II]　3つの無限数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ において

$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}c_n=\alpha$

であるとき

$a_n\leqq b_n\leqq c_n$　$(n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$ ならば

$\{b_n\}$ も収束して　$\lim_{n\to\infty}b_n=\alpha$

定理[I]において，等号をはずした不等式

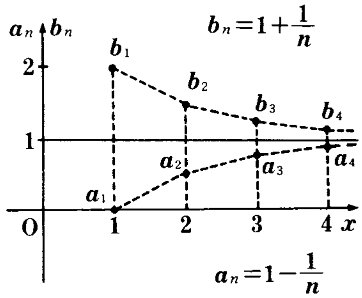
$a_n<b_n$　$(n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$ ならば　$\alpha<\beta$

であるとは，必ずしもいえません。

たとえば，$a_n=1-\dfrac{1}{n}$, $b_n=1+\dfrac{1}{n}$ とすると，$a_n<b_n$ $(n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$ ですが

$\alpha=\lim_{n\to\infty}a_n=1$, $\beta=\lim_{n\to\infty}b_n=1$

となり，$\alpha<\beta$ は成り立たず，$\alpha=\beta$ となっています。



定理[II]は，無限数列$\{b_n\}$の極限が直接には求めにくいとき，同じ値に収束する2つの無限数列$\{a_n\}$，$\{c_n\}$を使って，はさみうちの形で数列$\{b_n\}$の極限を求められるというものです。この意味で，定理[II]を「はさみうちの定理」ということもあります。

トレーニング

12 次の数列において，a_nとb_nの大小関係を調べ，さらに$\lim_{n\to\infty}a_n$と$\lim_{n\to\infty}b_n$を求めなさい。

(1) $a_n=1-\dfrac{1}{2n}$，$b_n=1+\dfrac{1}{2n}$

(2) $a_n=3+\dfrac{1}{\sqrt{n}}$，$b_n=3-\dfrac{1}{\sqrt{n}}$

次の例題で，実際に極限値の関係を使って解いている例を見てみることにしましょう。

基本例題 3 　　**極限値の大小関係(1)**

$\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sin\dfrac{n\pi}{6}$を求めなさい。

考え方

$\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sin\dfrac{n\pi}{6}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{\sin\dfrac{n\pi}{6}}{n}$で，$\lim_{n\to\infty}n=+\infty$，$-1\leqq\lim_{n\to\infty}\sin\dfrac{n\pi}{6}\leqq1$ですから，求める極限値は0になりそうです。しかし，このままでは予想ですから，きちんといえていません。

そこで，収束する無限数列の極限値の関係

$a_n\leqq c_n\leqq b_n$，$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=\alpha$ならば，$\lim_{n\to\infty}c_n=\alpha$

を利用します。そのためには，まず，$\dfrac{1}{n}\sin\dfrac{n\pi}{6}$の値を，$n$を含む不等式で表すことから考えます。

解 答　n は自然数であるから　$-1 \leqq \sin\frac{n\pi}{6} \leqq 1$

これより　$-\frac{1}{n} \leqq \frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{6} \leqq \frac{1}{n}$

ここで，$\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\right)=0$，$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ であるから　$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{6}=\mathbf{0}$

収束する極限値の関係で，はさみうちの形で極限値を求めていることがわかりますね。では，問題を解いてみることにします。

トレーニング

13 数列 $\left\{\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{6}\right\}$ の極限を求めなさい。

14 数列 $\left\{\frac{1}{n}\sin n\theta\right\}$ の極限を求めなさい。

15 数列 $\left\{\frac{1}{n}\cos^2 n\theta\right\}$ の極限を求めなさい。

最後にもう１つ例題を考えてみましょう。

例題 4 　　　　**極限値の大小関係(2)**

一般項 $a_n=\dfrac{n}{2^n}$ の無限数列 $\{a_n\}$ に対して，$n \geqq 2$ のとき $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leqq \dfrac{3}{4}$ であることを示しなさい。また，$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$ であることを示しなさい。

考え方　$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ を，$a_{n+1}=\dfrac{n+1}{2^{n+1}}$，$a_n=\dfrac{n}{2^n}$ より n の式で表してから，$\dfrac{3}{4}$ と比較します。

$\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leqq \dfrac{3}{4}$ が示せれば，この式より $\dfrac{a_n}{a_{n-1}} \leqq \dfrac{3}{4}$ ですから，$a_n \leqq \dfrac{3}{4}a_{n-1}$ が導けます。次に，この式 $a_n \leqq \dfrac{3}{4}a_{n-1}$ を利用して，a_{n-1} と a_{n-2} を比べ，その次に a_{n-2} と a_{n-3} を比べ，……というように以下繰り返し，a_n と a_2 を比べた式を導き，$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ を考えます。

解　答

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\dfrac{n+1}{2^{n+1}}}{\dfrac{n}{2^n}}=\frac{n+1}{2^{n+1}}\cdot\frac{2^n}{n}=\frac{n+1}{2n}$$

$n \geqq 2$ のとき　$\dfrac{3}{4}-\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{3}{4}-\dfrac{n+1}{2n}=\dfrac{n-2}{4n} \geqq 0$

よって　$\dfrac{3}{4}-\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \geqq 0$

ゆえに　$\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leqq \dfrac{3}{4}$

次に，$\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leqq \dfrac{3}{4}$ より，$a_{n+1} \leqq \dfrac{3}{4}a_n$ であるから

$$a_n \leqq \frac{3}{4}a_{n-1},\quad a_{n-1} \leqq \frac{3}{4}a_{n-2},\quad a_{n-2} \leqq \frac{3}{4}a_{n-3},\quad \cdots\cdots,\quad a_4 \leqq \frac{3}{4}a_3,\quad a_3 \leqq \frac{3}{4}a_2$$

これより

$$a_n \leqq \frac{3}{4}a_{n-1} \leqq \frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}a_{n-2} \leqq \left(\frac{3}{4}\right)^2\cdot\frac{3}{4}a_{n-3} \leqq \cdots\cdots \leqq \left(\frac{3}{4}\right)^{n-4}\cdot\frac{3}{4}a_3 \leqq \left(\frac{3}{4}\right)^{n-3}\cdot\frac{3}{4}a_2$$

ゆえに，$n \geqq 3$ のとき，$a_n \leqq \left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-2}a_2=\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-2}\cdot\dfrac{2}{2^2}=\dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-2}$

ここで，$a_{n+1} \leqq \dfrac{3}{4}a_n$ より，$a_1>a_2>a_3>\cdots\cdots>a_{n-1}>a_n$ で $a_n=\dfrac{n}{2^n}>0$

すなわち，$0<a_n \leqq \dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-2}$ で，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-2}=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}0=0$ であるから

$$\lim_{n\to\infty} a_n=0$$

では，最後のトレーニングです。n 乗の形を階乗の形と比較したり，階乗を n 乗の形と比較するというようなくふうをして解くものです。

トレーニング

16 一般項が次の式で表される数列の極限を求めなさい。

(1) $\dfrac{n!}{n^{n+1}}$　　　　(2) $\dfrac{3^n}{n!}$

きょうは，学習する内容がたくさんありました。おつかれさまでした。問題を解いていくうちに，解法が身についてきますから，がんばって続けましょう。

第4日	学習日　　月　　日 **数列 $\{r^n\}$ の極限**

基礎解析の数列で等比数列というものを学習しましたね。きょうは，等比数列の形をした数列の極限を考えてみることにします。

まず，はじめに，無限等比数列の意味と，その極限がどのようになるかからはじめることにしましょう。

● 無限等比数列の極限

無限数列

$$r,\ r^2,\ r^3,\ r^4,\ \cdots\cdots,\ r^n,\ \cdots\cdots$$

のように，一般項が r^n の形で表されるとき，この数列を**無限等比数列**(とうひ)といい，r を**公比**(こうひ)といいます。

では，この無限等比数列の極限を調べてみましょう。この無限等比数列の公比 r にいろいろな値を代入して，それぞれの極限を調べてみると次のようになります。

(i)　$r=0.1$ のとき，$\{r^n\}$ は

$$0.1,\ (0.1)^2,\ (0.1)^3,\ (0.1)^4,\ \cdots\cdots$$

ですから，これは

$$0.1,\ 0.01,\ 0.001,\ 0.0001,\ \cdots\cdots$$

となり，0 に収束します。

(ii)　$r=-0.1$ のとき，$\{r^n\}$ は

$$-0.1,\ (-0.1)^2,\ (-0.1)^3,\ (-0.1)^4,\ \cdots\cdots$$

ですから，これは

$$-0.1,\ 0.01,\ -0.001,\ 0.0001,\ \cdots\cdots$$

となり，0 に収束します。

(iii)　$r=10$ のとき，$\{r^n\}$ は

$$10,\ 10^2,\ 10^3,\ 10^4,\ \cdots\cdots$$

ですから，これは

$$10,\ 100,\ 1000,\ 10000,\ \cdots\cdots$$

となり，正の無限大に発散します。

(iv)　$r=-10$ のとき，$\{r^n\}$ は

$$-10,\ (-10)^2,\ (-10)^3,\ (-10)^4,\ \cdots\cdots$$

ですから，これは

$$-10,\ 100,\ -1000,\ 10000,\ \cdots\cdots$$

となり，振動します。

このように，無限等比数列の極限は公比 r の値に応じていろいろに変わります。

無限等比数列 $\{r^n\}$ の極限についてまとめると，次のようになります。

□ **無限等比数列の極限** □

［Ｉ］ 無限等比数列 $\{r^n\}$ の極限

$r>1$ のとき　$\lim_{n\to\infty} r^n=+\infty$

$r=1$ のとき　$\lim_{n\to\infty} r^n=1$

$|r|<1$ のとき　$\lim_{n\to\infty} r^n=0$

$r\leqq -1$ のとき　極限はない（振動する）

［II］ 無限等比数列 $\{r^n\}$ の収束する条件

$\{r^n\}$ が収束するための条件は　$-1<r\leqq 1$

定理［Ｉ］を証明しておきます。

(1)　$r>1$ のとき，$r=1+h\,(h>0)$ とおくと，$n\geqq 2$ ならば，二項定理によって

$$r^n=(1+h)^n=1+nh+\frac{n(n-1)}{2}h^2+\cdots\cdots+h^n>1+nh$$

$h>0$ であるから　$\lim_{n\to\infty}(1+nh)=+\infty$

ゆえに　$\lim_{n\to\infty} r^n=+\infty$

(2)　$r=1$ のとき，すべての n について $r^n=1$ であるから　$\lim_{n\to\infty} r^n=1$

(3)　$|r|<1$ のとき，$r=0$ ならば，すべての n について $r^n=0$ であるから　$\lim_{n\to\infty} r^n=0$

また，$r\neq 0$ ならば，$\dfrac{1}{|r|}>1$ であるから，(1)により

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{|r^n|}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{|r|}\right)^n=+\infty$$

よって　$\lim_{n\to\infty}|r^n|=0$

ゆえに　$\lim_{n\to\infty} r^n=0$

(4)　$r=-1$ のとき，$-1,\ 1,\ -1,\ 1,\ \cdots\cdots$ となり，数列 $\{r^n\}$ は発散する。

(5)　$r<-1$ のとき，(1)により，$\lim_{n\to\infty}|r^n|=+\infty$ であるが，各項の符号は交互に変わるので，数列 $\{r^n\}$ は発散する。

無限等比数列の極限では，公比 r の値によって収束，発散が決まってくることがポイントです。次の例題で，具体的な無限等比数列の収束，発散を調べましょう。

基本例題 1 ―― **無限等比数列の極限**

次のような一般項をもつ無限数列の極限を求めなさい。

(1)　$\left(\dfrac{3}{2}\right)^n$　　　　(2)　$\left(-\dfrac{3}{4}\right)^n$

考え方　一般項が $\left(\dfrac{3}{2}\right)^n$，$\left(-\dfrac{3}{4}\right)^n$ の無限数列は，無限等比数列です，また，無限等比数列 $\{r^n\}$ の極限を調べるときは，$r>1$，$r=1$，$|r|<1$，$r\leqq -1$ の場合に分けて考えます。

ですから，$\left(\dfrac{3}{2}\right)^n$，$\left(-\dfrac{3}{4}\right)^n$ の極限を調べるには，$\dfrac{3}{2}$ と $-\dfrac{3}{4}$ のそれぞれを1，-1 と比較します。

解　答　(1)　$\dfrac{3}{2}>1$ であるから，無限等比数列 $\left(\dfrac{3}{2}\right)^n$ は**発散**する。

(2)　$\left|-\dfrac{3}{4}\right|<1$ であるから，無限等比数列 $\left(-\dfrac{3}{4}\right)^n$ は**収束**し，その極限値は **0**

注　意　無限等比数列 $\{r^n\}$ の収束・発散を調べるには，r を1，-1 と比較しますが，$r=1$，$r=-1$ のときは注意して下さい。

$r=1$ のときは収束し，その極限値は1

$r=-1$ のときは振動します。(極限はなし。)

例題は，わかりましたね。無限等比数列では，収束する条件がとくに大切です。$r=-1$ のときは振動しますから，注意してください。

では，トレーニングです。

トレーニング

1　次のような一般項をもつ無限数列の収束，発散を調べ，収束するときは，その極限を求めなさい。

(1)　$\left(\dfrac{5}{7}\right)^{n-1}$　　(2)　$\dfrac{(\sqrt{5})^n}{2^n}$

(3)　$1-(-1)^n$　　(4)　$(-3)^n$

2　次のような一般項をもつ無限数列の収束，発散を調べ，収束するときは，その極限を求めなさい。

(1)　$\left(\dfrac{3}{5}\right)^{n-1}$　　(2)　$\dfrac{(\sqrt{6})^n}{2^n}$

(3)　$2-(-1)^n$　　(4)　$\left(-\dfrac{3}{2}\right)^n$

3 次のような一般項をもつ数列の極限を求めなさい。

(1) $3\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}$　　(2) $(-2)\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}$

4 次のような一般項をもつ数列の極限を求めなさい。

(1) $3\left(\frac{5}{7}\right)^{n-1}$　　(2) $(-3)\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}$

5 次のような一般項をもつ数列の極限を求めなさい。

(1) 5^n-4^n　　(2) $2^{3n}-3^{2n}$

6 次のような一般項をもつ数列の極限を求めなさい。

(1) 4^n-3^n　　(2) $3^{2n}-2^{3n}$

7 次のような一般項をもつ数列の極限を求めなさい。

(1) $\dfrac{3^n-2^n}{5^n-1}$　　　(2) $\dfrac{1+(0.3)^n}{(-0.5)^n}$

つぎは，無限等比数列が収束するための条件を使った例題をしてみましょう。

基本例題 2　　　**無限等比数列が収束する条件**

無限等比数列 $\left\{\left(\dfrac{1}{x}\right)^n\right\}$ が収束するような実数 x の値の範囲を定めなさい。また，そのときの極限を求めなさい。

考え方　無限等比数列 $\{r^n\}$ が収束するのは，$r=1$ か $|r|<1$ のときで，その極限は，$r=1$ のとき $\lim\limits_{n\to\infty}r^n=1$，$|r|<1$ のとき $\lim\limits_{n\to\infty}r^n=0$ です。

ですから，与えられた無限等比数列 $\left\{\left(\dfrac{1}{x}\right)^n\right\}$ で $r=\dfrac{1}{x}$ と考えて，$\dfrac{1}{x}$ の値で場合分けして考えます。

解　答　無限等比数列 $\left\{\left(\dfrac{1}{x}\right)^n\right\}$ が収束するのは，$\dfrac{1}{x}=1$，$\left|\dfrac{1}{x}\right|<1$ のときである。

(i) $\dfrac{1}{x}=1$，すなわち，$\boldsymbol{x=1}$ **のとき**収束し，その極限値は

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^n=\mathbf{1}$$

(ii) $\left|\dfrac{1}{x}\right|<1$，すなわち，$\boldsymbol{|x|>1}$ **のとき**収束し，その極限値は

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^n=\mathbf{0}$$

わかりましたね。では，トレーニングでたしかめておきましょう。

トレーニング

8 数列 $\left\{\left(\dfrac{x^3}{4+x^2}\right)^n\right\}$ が収束するような x の値の範囲を定め，そのときのその数列の極限を求めなさい。

9 数列$\left\{\left(\dfrac{3x^3}{1+2x^2}\right)^n\right\}$が収束するような$x$の値の範囲を定め，そのときのその数列の極限を求めなさい。

10 数列$\left\{\left(\dfrac{1+2x}{1-2x}\right)^n\right\}$が収束するような$x$の値の範囲を定め，そのときのその数列の極限を求めなさい。

つぎに，無限等比数列に関連した例題で，無限等比数列のかたちが式の中にはいっているものをとりあげましょう。

基本例題 3 ―― **無限等比数列を含む数列の極限**

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+r^n}$を求めなさい。ただし，$r \neq -1$とします。

考え方 まず，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}r^n$を考えます。$\{r^n\}$は無限等比数列ですから，$r>1$，$r=1$，$|r|<1$，$r<-1$に場合分けして考えます。

次に，それぞれのr^nに対して，$\dfrac{1}{1+r^n}$がどうなるか調べます。

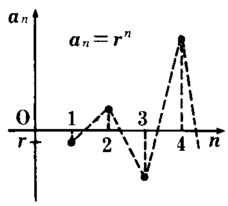
解　答　(i)　$r>1$ のとき，$\lim_{n\to\infty} r^n=+\infty$ であるから　$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+r^n}=\mathbf{0}$

(ii)　$r=1$ のとき，$\lim_{n\to\infty} r^n=1$ であるから　$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+r^n}=\mathbf{\frac{1}{2}}$

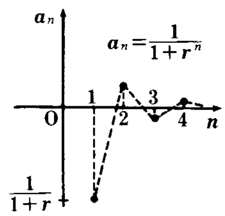
(iii)　$|r|<1$ のとき，$\lim_{n\to\infty} r^n=0$ であるから　$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+r^n}=\mathbf{1}$

(iv)　$r<-1$ のとき，$\lim_{n\to\infty}|r^n|=+\infty$ であるから　$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+r^n}=\mathbf{0}$

注　意　$r<-1$ のとき，無限等比数列 $\{r^n\}$ は負の値と正の値を交互にとり，その絶対値は次第に大きくなります。すなわち，無限等比数列 $\{r^n\}$ は発散します。



しかし，考えている極限は，無限数列 $\left\{\frac{1}{1+r^n}\right\}$ の極限 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+r^n}$ ですから，これは分母に r^n があり，$\lim_{n\to\infty} r^n=+\infty$ のときも $\lim_{n\to\infty} r^n=-\infty$ のときも，極限としては，$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+r^n}=0$ となります。



このような問題も，無限等比数列の極限を考えればできてしまいます。では，トレーニングの問題です。

トレーニング

11　次のような一般項をもつ数列の極限を求めなさい。

$$a_n=\frac{r^n}{1+r^n},\quad r\neq -1$$

12　次のような一般項をもつ数列の極限を求めなさい。

$$a_n=\frac{r^n}{2+r^n},\quad r\neq -1$$

13 極限 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{a^n-1}{a^n+1}$ を，次の場合に分けて考えなさい。

(1) $|a|<1$

(2) $|a|>1$

(3) $a=1$

(4) $a=-1$

最後に，漸化式で定められる無限等比数列の極限を考えてみることにします。数列の漸化式のことを，覚えていますね。例題をやってみましょう。

例題 4 ―― **漸化式で定められる無限等比数列の極限**

$a_1=3$，$a_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n+1$（$n=1$，2，3，……）で定義される無限数列 $\{a_n\}$ の極限を求めなさい。

考え方 数列 $\{a_n\}$ の極限を求めるには，一般項 a_n を n の式で表さなければなりません。しかし，$a_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n+1$ のままでは，数列 $\{a_n\}$ がどのような数列なのかわからないので，この式を変形して，a_n が n の式で表せるようにします。

解　答 $a_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n+1$ を式変形して $a_{n+1}-2=\dfrac{1}{2}(a_n-2)$

ここで，$b_n=a_n-2$ とおくと $b_{n+1}=\dfrac{1}{2}b_n$

これは数列 $\{b_n\}$ が，初項 $b_1=a_1-2=3-2=1$，公比 $r=\dfrac{1}{2}$ の等比数列であることを示している。

よって，数列 $\{b_n\}$ の一般項は，$b_n=1\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$ である。

これより，数列 $\{a_n\}$ の一般項は，$a_n=b_n+2=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}+2$ である。

ゆえに，$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}+2\right\}=\mathbf{2}$

注　意　$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+1$ の式変形は，$a_{n+1}+\alpha=\frac{1}{2}(a_n+\alpha)$ となるとして，α を定めます。

$a_{n+1}+\alpha=\frac{1}{2}(a_n+\alpha)$ より $a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n-\frac{\alpha}{2}$

$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+1$ と比較して $-\frac{\alpha}{2}=1$

ゆえに $\alpha=-2$

よって $a_{n+1}-2=\frac{1}{2}(a_n-2)$

この例題は，漸化式によって，まず数列の一般項を求め，そして極限を考える問題です。漸化式から一般項を求めるところを思い出してください。

トレーニング

14 次のように定義される数列 $\{a_n\}$ の極限を求めなさい。

(1) $a_1=10$，$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n$ $(n\geqq1)$

(2) $a_1=3$，$a_{n+1}=\frac{1}{5}a_n-3$ $(n\geqq1)$

15 次のように定義される数列 $\{a_n\}$ の極限を求めなさい。

(1) $a_1=0$，$a_{n+1}=1-\frac{1}{2}a_n$ $(n\geqq1)$

(2) $a_1=2$，$a_{n+1}=\frac{a_n}{3}+2$ $(n\geqq1)$

(3) $a_1=3$，$a_{n+1}=-\frac{1}{5}a_n$ $(n\geqq1)$

(4) $a_1=1$，$a_{n+1}=2a_n$ $(n\geqq1)$

16 $a_1=-2$, $7a_{n+1}-5a_n+2=0$ $(n\geqq 1)$ で定義される数列 $\{a_n\}$ の極限を求めなさい。

17 $a_1=100$, $-4a_{n+1}+3a_n-10=0$ $(n\geqq 1)$ で定義される数列 $\{a_n\}$ の極限を求めなさい。

きょうの学習は，これで終わりにしましょう。最後の問題などはかなりむずかしいものでした。よくがんばりましたね。次の日は，これまでの復習です。

第 5 日	数列の極限の復習 学習日 月 日

第5日 数列の極限の復習

学習日　　月　　日

きょうは，第1日から第4日まで学習してきた数列の極限について復習します。
無限数列の収束，発散の意味，極限を求めるときの計算，無限等比数列の収束条件などはわかっていますね。では，さっそく問題をしていきましょう。

トレーニング

1 一般項が次の式で表される数列の極限を求めなさい。

(1) $(-1)^n 2^{n+1}$

(2) $(-3)^{n+1} n$

(3) $(-2)^n \sqrt{n}$

(4) $(-n)^{n+1}$

2 $\lim_{n\to\infty} a_n = 2$，$\lim_{n\to\infty} b_n = 3$，$\lim_{n\to\infty} c_n = -1$ のとき，次の極限値を求めなさい。

(1) $\lim_{n\to\infty} a_n b_n^2$

(2) $\lim_{n\to\infty} (2a_n^2 b_n - 3a_n b_n^2)$

(3) $\lim_{n\to\infty} (a_n b_n + b_n c_n + c_n a_n)$

(4) $\lim_{n\to\infty} 3a_n b_n c_n$

3 次のような一般項をもつ数列の極限を求めなさい。

(1) $\sqrt{n}(\sqrt{n+5}-\sqrt{n})$　　(2) $\sqrt{n+1}(\sqrt{n+3}-\sqrt{n})$

4 次のような一般項をもつ数列の極限を求めなさい。ただし $a>0$ とします。

(1) $\dfrac{a}{\sqrt{n+a}-\sqrt{n}}$　　(2) $\dfrac{1}{\sqrt{2n^2+n}-n}$

(3) $\dfrac{a}{\sqrt{n^2+an}-n}$　　(4) $\dfrac{1}{\sqrt{a^2n^2+n}-an}$

5 数列 $\left\{\dfrac{1}{n}\sin\dfrac{n\pi}{6}\right\}$ の極限を求めなさい。

6 次のような一般項をもつ数列の極限を求めなさい。

(1) $\left(-\dfrac{2}{5}\right)^n$　　(2) $(-3)\left(-\dfrac{3}{7}\right)^n$

(3) $k\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-1}$

(4) $\left(\dfrac{k^2}{k^2+1}\right)^{n-1}$

7 次のような一般項をもつ数列の極限を求めなさい。

(1) 4^n-5^n

(2) π^n-3^n

(3) $\left(\dfrac{5}{3}\right)^n-\left(\dfrac{4}{3}\right)^n$

(4) $\left(\dfrac{1}{\sin\dfrac{\pi}{3}}\right)^n-\left(\dfrac{1}{\cos\dfrac{\pi}{3}}\right)^n$

8 次のような一般項をもつ数列の極限を求めなさい。

(1) $\dfrac{3^n-2^n}{4^n-1}$

(2) $\dfrac{1+(0.2)^n}{(-0.5)^n}$

9 数列 $\left\{\left(\dfrac{x^2}{2x-1}\right)^n\right\}$ が収束するような x の値の範囲を定め，そのときのその数列の極限を求めなさい。

10 次の極限を求めなさい。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots\cdots+n}{n^2}$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$

11 $a_1=3$, $\dfrac{a_{n+1}}{3}=\dfrac{a_n}{2-a_n}$ $(n\geqq1)$ で定められる数列 $\{a_n\}$ の極限を求めなさい。

12 $a_1=-3$, $a_2=-2$, $a_{n+2}=\dfrac{7a_{n+1}-3a_n}{4}$ $(n\geqq1)$ で定義される数列 $\{a_n\}$ の極限を求めなさい。

第6日

学習日　　月　　日

無限級数

いままでは数列の極限について学習してきましたが，きょうからは，無限級数について学習することにします。

無限級数とはいったいなんでしょうか。では，まず，無限級数の意味からはじめることにしましょう。

●無限級数

無限数列 $\{a_n\}$ が与えられたとき，それらの各項を + の記号で結んだ

$$a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n+\cdots\cdots$$

の形の式を**無限級数**（きゅうすう），あるいは単に**級数**といい，a_1 を無限級数の**初項**，a_n を**第 n 項**といいます。

この無限級数を記号 Σ を用いて，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ と書きます。

《注》 ここで使われている記号 Σ は，基礎解析で学習した和の記号 Σ と同じ記号です。無限級数のときは，項の数が無限個あるので，その意味で記号 Σ の上を ∞ にし，$\sum_{n=1}^{\infty}$ のように表します。

また，無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の初項から第 n 項までの和 S_n，すなわち

$$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n$$

を，無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の**部分和**（ぶぶんわ）といいます。すなわち

$$S_1=a_1$$
$$S_2=a_1+a_2$$
$$S_3=a_1+a_2+a_3$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

この部分和の数列 $\{S_n\}$，すなわち

$S_1,\ S_2,\ S_3,\ \cdots\cdots,\ S_n,\ \cdots\cdots$

が収束して，その極限値が S であるとき，無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は S に**収束する**といい，S をこの**無限級数の和**といいます。このとき，次のように書くことにします。

$$a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n+\cdots\cdots=S \qquad あるいは \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n=S$$

また，部分和の数列 $\{S_n\}$ が発散するとき，無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は**発散する**といいます。発散する無限級数については，その和を考えることはできません。

□ 無限級数の収束・発散 □

無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots\cdots + a_n + \cdots\cdots$ の収束・発散を調べるには，無限級数の第 n 項までの部分和 S_n，すなわち

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots\cdots + a_n$$

の数列 S_1，S_2，S_3，S_4，……，S_n，…… の極限を調べます。

部分和の数列 $\{S_n\}$ が収束するとき，その極限値を無限級数の和といい，発散するとき，無限級数も発散するといいます。

たとえば，無限級数

$$1+3+5+7+\cdots\cdots+(2n-1)+\cdots\cdots$$

の収束・発散を調べてみましょう。

この無限級数の第 n 項までの部分和を S_n とすると

$$S_n = 1+3+5+7+\cdots\cdots+(2n-1) = \sum_{k=1}^{n}(2k-1) = 2\sum_{k=1}^{n}k - \sum_{k=1}^{n}1$$

$$= 2\cdot\frac{n(n+1)}{2} - n = n^2$$

これより，$n \to \infty$ のとき，部分和の数列 $S_n \to +\infty$ で正の無限大に発散しますから，この無限級数は発散するといえます。

《注》 無限級数 $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots\cdots + a_n + \cdots\cdots$ には，表記上加法の記号 $+$ が使われていますが，この $+$ の記号には加法の意味はありません。ですから，実際に a_1 に a_2 を加え，その和に a_3 を加え，a_4 を加えというように続けていくことではありません。

ところが，第 n 項までの部分和 $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots\cdots + a_n$ というのは，実際に a_1 に a_2 を加え，その和に a_3 を加え，a_4 を加えというように，a_n まで加えた数値のことです。

また，無限級数の和というのは，$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots\cdots + a_n + \cdots\cdots$ を計算した結果ではなく，部分和から作られる数列 S_1，S_2，S_3，……，S_n，……が収束するときの，極限値 S のことで，その S を $S = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots\cdots + a_n + \cdots\cdots$ と書くのです。

ですから，$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots\cdots + a_n + \cdots\cdots = S$ と書いてあっても，a_1 に a_2 を加え，その和に a_3 を加えを無限回繰り返してその和が S になるという意味ではありません。無限回繰り返すことができないのです。

無限級数の意味と，無限級数の収束，発散の考え方がわかりましたね。

では，実際に，無限級数の収束，発散を調べる例題をしてみましょう。

基本例題 1 無限級数

次の無限級数の収束・発散を調べなさい。

$$1+2+3+4+\cdots\cdots+n+\cdots\cdots$$

考え方 無限級数の収束・発散を調べるには，まず第 n 項までの部分和 S_n を求め，次に部分和の数列 $\{S_n\}$ の $n \to \infty$ のときの極限を調べます。

与えられた無限級数の各項は，初項 1，公差 1 の等差数列です。

解 答　第 n 項までの部分和を S_n とすると

$S_n=1+2+3+4+\cdots\cdots+n$

これは，初項 1，末項 n，項数 n の等差数列の和であるから

$$S_n=\frac{n(n+1)}{2}$$

ここで，部分和の数列 $\{S_n\}$ の $n\to\infty$ のときの極限を調べると

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2}=+\infty$$

よって，数列 $\{S_n\}$ は発散する。

ゆえに，無限級数 $1+2+3+4+\cdots\cdots+n+\cdots\cdots$ は**発散**する。

第 n 項までの部分和を求めて，収束，発散を調べる方法がわかりましたね。では，例題にならってトレーニングしましょう。

トレーニング

1 次の無限級数の収束，発散を調べなさい。

$2+4+6+\cdots\cdots+2n+\cdots\cdots$

2 次の無限級数の収束，発散を調べなさい。

$(-2)+(-2)+(-2)+\cdots\cdots+(-2)+\cdots\cdots$

3 次の無限級数の収束，発散を調べなさい。

(1) $1+2+3+\cdots\cdots+n+\cdots\cdots$

(2) $1+3+5+\cdots\cdots+(2n-1)+\cdots\cdots$

無限級数の収束，発散がわかったところで，つぎは，無限級数の和を求める問題です。

例題 2 **無限級数（部分分数）**

次の無限級数の和を求めなさい。

$$\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\cdots\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\cdots\cdots$$

考え方 無限級数の和を求めるには，まず第 n 項までの部分和 S_n を求め，次に $n\to\infty$ のときの S_n の極限を考えます。

与えられた無限級数は，このままでは第 n 項までの部分和 S_n を求めることはできないので，各項を式変形して求めます。

各項の分母が 2 つの数の積になっているので，それぞれ 2 つの分数に分けて考えます。

$\dfrac{1}{k(k+1)}=\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}$ であることを使います。

解 答 第 n 項までの部分和を S_n とすると，$\dfrac{1}{k(k+1)}=\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}$ であるから

$$S_n=\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\cdots\cdots+\frac{1}{(n-1)n}+\frac{1}{n(n+1)}$$

$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots\cdots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}$$

よって，求める和を S とすると

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\mathbf{1}$$

注 意 $\dfrac{1}{k(k+1)}=\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}$ のように，もとの分数の分母の因数を新しく分母とするような分数に分けることを，部分分数に分けるといいます。これは，次のように考えます。

$\dfrac{1}{k(k+1)}=\dfrac{a}{k}+\dfrac{b}{k+1}$ （a，b は定数）となるとすると

右辺$=\dfrac{a(k+1)+bk}{k(k+1)}=\dfrac{(a+b)k+a}{k(k+1)}$

よって，$\dfrac{1}{k(k+1)}=\dfrac{(a+b)k+a}{k(k+1)}$ が k についての恒等式となることより

$1=(a+b)k+a$

これより　$a=1$，$b=-1$

ゆえに　$\dfrac{1}{k(k+1)}=\dfrac{1}{k}+\dfrac{-1}{k+1}=\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}$

無限級数の和を求めるには，第 n 項までの和を求めて，n を無限大にしたときの極限を求めればよいのです。例題の部分分数に分ける，という方法はよく使いますから覚えておきましょう。

トレーニング

4 次の無限級数の和を求めなさい。

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}+\cdots\cdots$$

5 次の無限級数の和を求めなさい。

$$\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+\cdots\cdots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}+\cdots\cdots$$

6 次の無限級数について，各項の分母を有理化して部分和を求め，この無限級数は発散することを示しなさい。

$$\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}+\cdots\cdots$$

7 次の無限級数は発散することを示しなさい。

$$\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}+\cdots\cdots$$

8 次の無限級数は発散することを示しなさい。

$$(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\cdots\cdots+(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})+\cdots\cdots$$

きょうは，無限級数というものの意味と，無限級数の和の求め方を学習しました。第 n 項までの和を考えて極限を調べるということがポイントでした。

第 7 日

無限等比級数

学習日　　月　　日

きょうは，無限等比級数について学習します。

第 4 日に，無限等比数列のことを学習しましたね。きょうの無限等比級数は，その無限等比数列と関係があります。

では，無限等比級数の意味からはじめましょう。

● 無限等比級数

初項 a，公比 r の無限等比数列 $\{ar^{n-1}\}$ からつくられる無限級数

$$a+ar+ar^2+\cdots\cdots+ar^{n-1}+\cdots\cdots$$

を**無限等比級数**（むげんとうひきゅうすう），あるいは単に**等比級数**（とうひきゅうすう）といい，記号 Σ を用いて $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ と書きます。また，a をこの無限等比級数の**初項**（しょこう），r を**公比**（こうひ），ar^{n-1} を**第 n 項**といいます。

無限等比級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ の収束・発散を調べてみましょう。

まず，$a=0$ ならば，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ の各項はすべて 0 に等しいので，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ は 0 に収束します。ですから，これからは，$a \neq 0$ と考えることにします。

無限等比級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ の第 n 項までの部分和を S_n とすると

$r \neq 1$ のとき　$S_n=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}=\dfrac{a}{1-r}-\dfrac{ar^n}{1-r}$

$r=1$ のとき　$S_n=a+a+\cdots\cdots+a=na$

となります。

そこで，無限数列 $\{r^n\}$ の極限を考えて，部分和の数列 $\{S_n\}$ の収束・発散を調べてみます。

(i)　$|r|<1$ のとき　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} r^n=0$

　　ゆえに　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n=\frac{a}{1-r}$

(ii)　$r \leqq -1$，$1<r$ のとき，$\{r^n\}$ は発散するから，$\{S_n\}$ は発散する。

(iii)　$r=1$ のとき，$S_n=na\,(a \neq 0)$ より，$\{S_n\}$ は発散する。

以上の結果から，次のようにまとめることができます。

□ 無限等比級数の和 □

$a \neq 0$ のとき，無限等比級数

$$a+ar+ar^2+\cdots\cdots+ar^{n-1}+\cdots\cdots$$

は，$|r|<1$ のときに限って収束して，その和は $\dfrac{a}{1-r}$ に等しい。

《注》 無限等比級数 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ の収束条件と，無限等比数列 $\{r^n\}$ の収束条件は，似ていますが異なります。無限等比級数では，$-1<r<1$ で，無限等比数列では，$-1<r\leqq 1$ で，$r=1$ の場合が異なります。

一般の無限級数の収束・発散は，部分和の数列の極限を調べないとわかりませんが，無限等比級数では，その公比がわかれば，収束するかどうかわかります。

無限等比級数というのは，無限等比数列からつくられる級数のことですね。では，無限等比級数の収束，発散を調べる例題をしましょう。

基本例題 1 　　**無限等比級数**

次の無限等比級数の収束・発散を調べなさい。また，収束するものはその和を求めなさい。

(1) $1+\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}+\cdots\cdots$ (2) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$

考え方 　無限等比級数が収束するのは，$a+ar+ar^2+ar^3+\cdots\cdots+ar^{n-1}+\cdots\cdots$ の形に表したとき，公比 r が $|r|<1$ のときです。また，このとき無限等比級数の和は $\frac{a}{1-r}$ です。

解　答 (1) $1+\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}+\cdots\cdots$

$=1+1\cdot\frac{1}{3}+1\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2+\cdots\cdots+1\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}+\cdots\cdots$

であるから，この級数は初項 1，公比 $\frac{1}{3}$ の無限等比級数である。

また，公比が $\left|\frac{1}{3}\right|<1$ より，この無限等比級数は**収束**し，その和 S は

$$S=\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\boldsymbol{\frac{3}{2}}$$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}=1+\frac{3}{2}+\left(\frac{3}{2}\right)^2+\cdots\cdots+\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}+\cdots\cdots$

$=1+1\cdot\frac{3}{2}+1\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2+\cdots\cdots+1\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}+\cdots\cdots$

であるから，この級数は初項 1，公比 $\frac{3}{2}$ の無限等比級数である。

また，公比が $\frac{3}{2}>1$ より，この無限等比級数は**発散**する。

注　意 　(2)のように，和の記号 Σ を使って表してあっても，収束するとは限りません。

発散する無限級数でも，単に表記上，記号 Σ を使って表します。すなわち，このときの記号 Σ には，基礎解析で学習したように，値を加えるという意味はありません。この点に気をつけて下さい。

また，無限等比数列 $\{r^n\}$ では，$r=1$，$|r|<1$ のときに収束しましたが，無限等比級数 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ では，$r=1$ のときは発散し，$|r|<1$ のときだけが収束します。

無限等比級数が収束する条件，また，収束するときの無限等比級数の和を求める式を使っています。では，トレーニングでたしかめてみましょう。

トレーニング

1 次の無限等比級数の収束・発散を調べ，収束するものはその和を求めなさい。

(1) $\sum_{k=1}^{\infty} 40\left(\frac{1}{5}\right)^{k-1}$

(2) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}$

(3) $\sum_{k=1}^{\infty} (0.5)^{k}$

(4) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^{k}$

2 次の無限等比級数の収束・発散を調べ，収束するものはその和を求めなさい。

(1) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{k+2}$

(2) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2}\cdot(-1)^{k}$

(3) $\sum_{k=1}^{\infty} (0.1)^{k}$

(4) $\sum_{k=1}^{\infty} 1^{k}$

3 次の無限等比級数の収束・発散を調べ，収束するものは和を求めなさい。

(1) $8+4\sqrt{2}+4+\cdots\cdots$

(2) $4+(-2\sqrt{5})+5+\cdots\cdots$

4 次の無限等比級数の収束・発散を調べ，収束するものは和を求めなさい。

(1) $27+9+3+1+\cdots\cdots$

(2) $2-4+8-16+\cdots\cdots$

(3) $1+\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\frac{8}{27}+\cdots\cdots$

(4) $1-\frac{2}{3}+\frac{4}{9}-\frac{8}{27}+\cdots\cdots$

5 初項が 10，第 2 項が -2 である無限等比級数の和を求めなさい。

6 初項が 1，公比が $\frac{1}{5}$ の無限等比級数の和 S と，初項から第 n 項までの和 S_n について，S と S_n の差を 0.01 より小さくするには，n をいくら以上にすればいいですか。

7 次の無限等比級数の収束，発散を調べ，収束する場合はその和を求めなさい。

$2\sin\theta+2^2\sin^2\theta+2^3\sin^3\theta+\cdots\cdots+2^n\sin^n\theta+\cdots\cdots$

ただし，$0\leqq\theta<2\pi$ とします。

つぎに，無限等比級数に関連することで，循環小数をとりあげることにします。循環小数は，くり返して出てくる数字のはじめの数字と終わりの数字の上に点を打って表します。

● 循環小数

無限等比級数の考えを用いることによって，循環小数を分数の形で書くことができます。たとえば

$$
\begin{aligned}
0.3\dot{2}\dot{1} &= 0.3212121\cdots\cdots \\
&= 0.3+0.021+0.00021+0.0000021+\cdots\cdots \\
&= \frac{3}{10}+\frac{21}{10^3}+\frac{21}{10^5}+\frac{21}{10^7}+\cdots\cdots \\
&= \frac{3}{10}+\frac{21}{10^3}+\frac{21}{10^3}\cdot\frac{1}{10^2}+\frac{21}{10^3}\cdot\left(\frac{1}{10^2}\right)^2+\cdots\cdots \\
&= \frac{3}{10}+\frac{\dfrac{21}{1000}}{1-\dfrac{1}{100}}=\frac{3}{10}+\frac{21}{990}=\frac{3\times 99+21}{990}=\frac{3(100-1)+21}{990}=\frac{321-3}{990} \\
&= \frac{318}{990}=\frac{53}{165}
\end{aligned}
$$

上の計算結果は，次のようにすると簡単に得られます。

$$
\begin{aligned}
\mathrm{A}=0.3\dot{2}\dot{1}&=0.3212121\cdots\cdots \\
1000\mathrm{A}&=321.2121\cdots\cdots=321.\dot{2}\dot{1} \\
10\mathrm{A}&=\quad 3.2121\cdots\cdots=\quad 3.\dot{2}\dot{1}
\end{aligned}
$$

これらの小数点以下は一致するから

$$1000\mathrm{A}-10\mathrm{A}=321-3$$

ゆえに　$\mathrm{A}=\dfrac{321-3}{990}=\dfrac{318}{990}=\dfrac{53}{165}$

一般に，循環小数を分数の形で書くと，次のようになります。

(1)　$0.\dot{a}_1 a_2\cdots\cdots \dot{a}_n=\dfrac{a_1 a_2\cdots\cdots a_n}{\underbrace{99\cdots\cdots 9}_{(n\text{ 個})}}$

(2)　$0.b_1 b_2\cdots\cdots b_m \dot{a}_1 a_2\cdots\cdots \dot{a}_n=\dfrac{b_1 b_2\cdots\cdots b_m a_1 a_2\cdots\cdots a_n-b_1 b_2\cdots\cdots b_m}{\underbrace{99\cdots\cdots 9}_{(n\text{ 個})}\,\underbrace{00\cdots\cdots 0}_{(m\text{ 個})}}$

整数または有限小数は，循環小数としても表されます。たとえば

$$3=2.999\cdots\cdots=2.\dot{9},\quad 1.56=1.55999\cdots\cdots=1.55\dot{9}$$

したがって，有理数はすべて循環小数で表されることがわかります。

$$
\text{実数}\begin{cases}\text{有理数}\cdots\cdots\cdots\text{循環小数}\\ \text{無理数}\cdots\cdots\cdots\text{循環しない無限小数}\end{cases}
$$

では，循環小数を分数になおす例題をしてみましょう。

例題 2 　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　**循環小数**

次の循環小数を分数になおしなさい。

(1) 0.0343434…… 　　　　　　　　　　(2) $0.\dot{3}0\dot{3}$

考え方　無限等比級数の形 $a+ar+ar^2+\cdots\cdots+ar^{n-1}+\cdots\cdots$ に表してから，初項 a，公比 r にあたる数をそれぞれ求め，その和が $\dfrac{a}{1-r}$ であることを用いて，分数の形にします。

解　答　(1) 0.0343434……

$$=0.034+0.00034+0.0000034+\cdots\cdots$$

$$=\frac{34}{10^3}+\frac{34}{10^5}+\frac{34}{10^7}+\cdots\cdots$$

$$=\frac{34}{10^3}+\frac{34}{10^3}\cdot\frac{1}{10^2}+\frac{34}{10^3}\cdot\left(\frac{1}{10^2}\right)^2+\cdots\cdots$$

$$=\frac{\dfrac{34}{10^3}}{1-\dfrac{1}{10^2}}=\frac{0.034}{1-0.01}=\frac{34}{990}=\mathbf{\frac{17}{495}}$$

(2) $0.\dot{3}0\dot{3}$

$$=0.303303303\cdots\cdots$$

$$=\frac{303}{10^3}+\frac{303}{10^6}+\frac{303}{10^9}+\cdots\cdots$$

$$=\frac{303}{10^3}+\frac{303}{10^3}\cdot\frac{1}{10^3}+\frac{303}{10^3}\cdot\left(\frac{1}{10^3}\right)^2+\cdots\cdots$$

$$=\frac{\dfrac{303}{10^3}}{1-\dfrac{1}{10^3}}=\frac{0.303}{1-0.001}=\frac{0.303}{0.999}=\mathbf{\frac{101}{333}}$$

注　意　循環小数を無限等比級数の形に表したとき，その公比 r は必ず，$0<r<1$ となり，しかも，$r=\dfrac{1}{10^n}$ (n は自然数)の形になります。その理由は，10 進法の数を使用しているからです。

無限等比級数を使って分数に表していることがよくわかりますね。では，トレーニングです。最後の 2 題は，きょうのしめくくりとして，すこし応用的な問題をとりあげています。求めているものを，きちんと数式で表せば解法が見えてきます。

トレーニング

8 次の循環小数を分数になおしなさい。

(1) $0.\dot{3}$　　(2) $0.1\dot{2}\dot{4}$

9 次の循環小数を分数に直しなさい。

(1) $0.\dot{6}$　　(2) $0.0\dot{3}$

(3) $1.\dot{1}2\dot{5}$　　(4) $1.\dot{1}3\dot{5}$

10 次の式を分数で表して計算し，その結果を循環小数で表しなさい。

(1) $0.\dot{1}\dot{2}+0.\dot{2}\dot{5}$　　(2) $0.\dot{1}0\dot{3}-0.\dot{0}0\dot{3}$

(3) $2.\dot{1}\times0.\dot{2}4\dot{3}$　　(4) $0.\dot{5}\div0.\dot{3}3\dot{0}$

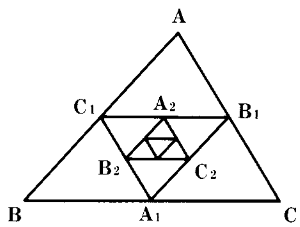
11 数直線上で，動点Pが原点Oから正の方向にaだけ進み，そこから負の方向に$\frac{1}{2}a$，そこから正の方向に$\frac{1}{2^2}a$，そこから負の方向に$\frac{1}{2^3}a$，……と動きます。この運動で，点Pが動く距離の和を求めなさい。

12 周の長さがlの$\triangle ABC$において，各辺の中点を頂点とする$\triangle A_1B_1C_1$をつくり，$\triangle A_1B_1C_1$の各辺の中点を頂点とする$\triangle A_2B_2C_2$をつくります。

このような操作で，次々と

$\triangle A_1B_1C_1$，$\triangle A_2B_2C_2$，$\triangle A_3B_3C_3$，……

を無数につくっていくとき，それらの周の長さの和を求めなさい。



きょうは，無限等比級数をとりあげて学習しました。無限等比級数の収束条件，収束するときの和の公式は重要です。いつも使えるようにしておきましょう。

第 8 日	学習日　　月　　日 **無限級数の復習**

きょうは，第６日と第７日の２日間学習した無限級数の復習をします。

もう１度ふり返って，練習してみましょう。やや応用的な問題もとりあげていますが，自分の力で解いてみてください。いままでの学習がしっかり理解できていれば，できるはずです。では，はじめましょう。

トレーニング

1 次の無限級数の和を求めなさい。

$$\frac{1}{1\cdot5}+\frac{1}{5\cdot9}+\frac{1}{9\cdot13}+\cdots\cdots+\frac{1}{(4n-3)(4n+1)}+\cdots\cdots$$

2 $a_n=\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ のとき，$\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ を求めなさい。また $\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めなさい。

3 次の無限等比級数の収束・発散を調べ，収束するものは和を求めなさい。

(1)　$\sqrt{2}+\sqrt{6}+3\sqrt{2}+\cdots\cdots$

(2)　$\sqrt{3}-\sqrt{6}+2\sqrt{3}-\cdots\cdots$

(3)　$(\sqrt{2}+1)+(\sqrt{2}-1)+(5\sqrt{2}-7)+\cdots\cdots$

(4) $(\sqrt{2}+1)+\dfrac{3+2\sqrt{2}}{2}+\dfrac{7+5\sqrt{2}}{4}+\cdots\cdots$

4 初項が 24，第 3 項が 6 である無限等比級数の和を求めなさい。

5 初項が 1，公比が $\dfrac{1}{3}$ の無限等比級数の和 S と，初項から第 n 項までの和 S_n について，S と S_n の差を 0.005 より小さくするには，n をいくら以上にすればいいですか。

6 公比 $-\dfrac{1}{3}$ の無限等比級数があって，その和は，各項の 2 乗からつくられる無限級数の和の $\dfrac{1}{3}$ であるという。もとの級数の初項と和を求めなさい。

7 次の無限級数の収束，発散を調べ，収束するならば，その和を求めなさい。

(1) $\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}\right)+\left(\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{6}\right)+\left(\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{12}\right)+\cdots\cdots$

(2) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{12}+\cdots\cdots$

8 次の無限級数の収束，発散を調べ，収束するならば，その和を求めなさい。

(1) $\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{2}{3}\right)+\left(\dfrac{2}{3}-\dfrac{3}{4}\right)+\left(\dfrac{3}{4}-\dfrac{4}{5}\right)+\cdots\cdots$

(2) $\dfrac{1}{2}-\dfrac{2}{3}+\dfrac{2}{3}-\dfrac{3}{4}+\dfrac{3}{4}-\dfrac{4}{5}+\cdots\cdots$

9 次の式を分数で表して計算し，その結果を循環小数で表しなさい。

(1) $0.\dot{4}\dot{1}+0.\dot{2}\dot{5}$　　　(2) $0.\dot{1}2\dot{5}\div0.\dot{2}2\dot{5}$

10 無限等比数列 $\{a_n\}$ において，$a_1=0.\dot{4}$，$a_2=-0.\dot{2}$ とするとき，$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ を循環小数で表しなさい。

11 平面上で，動点Pが原点から出発して，x 軸の正の方向に1だけ進み，つぎに y 軸の正の方向に $\frac{1}{2}$ だけ進み，つぎに x 軸の負の方向に $\frac{1}{2^2}$ だけ進み，つぎに y 軸の負の方向に $\frac{1}{2^3}$ だけ進みます。以下，このような運動をかぎりなく続けるとき，点Pの動く距離の和を求めなさい。

第9日

学習日　月　日

いろいろな無限級数 (1)

無限級数の収束・発散を調べるには，無限級数の第 n 項までの部分和を考えて，その部分和の極限を調べました。きょうは，無限級数の第 n 項に注目して，収束・発散を調べることを学習します。

まず，無限級数が収束するとき，第 n 項がどうなるかを考えましょう。

●無限級数の収束・発散

無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$，すなわち

$$\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\frac{1}{4\cdot5}+\cdots\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\cdots\cdots$$

の収束・発散を調べてみましょう。

この無限級数の第 n 項までの部分和を S_n とすると

$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

ですから

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

これより

$$\begin{aligned}S_n&=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\\&=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots\cdots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}\end{aligned}$$

よって，部分和の数列 $\{S_n\}$ の極限は

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$$

ですから，この無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ は 1 に収束することがわかります。

このとき，無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ の各項からなる無限数列 $\left\{\dfrac{1}{n(n+1)}\right\}$ の極限を調べてみると，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n(n+1)}=0$ ですから，無限数列 $\left\{\dfrac{1}{n(n+1)}\right\}$ は 0 に収束しています。

このように，無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ が収束するとき，無限数列 $\{a_n\}$ は 0 に収束 ($\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=0$) します。これは一般に次のように証明できます。

無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ が収束するとき，その和を S，第 n 項までの部分和を S_n とすると

$n \geqq 2$ のとき

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots\cdots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n \qquad \cdots\cdots ①$$

$$S_{n-1} = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots\cdots + a_{n-2} + a_{n-1} \qquad \cdots\cdots ②$$

①−②より

$$S_n - S_{n-1} = a_n \qquad \cdots\cdots ③$$

この無限級数は収束して，その和が S，すなわち，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$ ですから

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S,\ \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S$$

よって，③より

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0$$

以上より，次の定理 [I] が得られます。

□ 収束する無限級数の一般項の極限 □

[I]　無限級数 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots\cdots + a_n + \cdots\cdots$ が収束するならば

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

また，この定理 [I] の対偶として次の定理 [II] が得られます。

□ 0 に収束しない無限数列からなる無限級数 □

[II]　無限数列 $\{ a_n \}$ が 0 に収束しないならば

無限級数 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots\cdots + a_n + \cdots\cdots$ は発散する。

《注》 定理 [II] は，無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が発散することを示すときに使えます。すなわち，部分和の数列 $\{ S_n \}$ を求め，$\{ S_n \}$ が発散することを示さなくても，無限数列 $\{ a_n \}$ が 0 に収束しないことを示せば，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が発散することがいえます。

定理 [I] の逆，すなわち

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \quad \text{ならば} \quad \text{無限級数} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ は収束する}$$

は，一般に，成り立つとは限りません。たとえば

$$\text{無限級数}\ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots\cdots + \frac{1}{n} + \cdots\cdots$$

の一般項を a_n，第 n 項までの部分和を S_n とすると

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \quad \text{であるにもかかわらず} \quad \lim_{n\to\infty} S_n = +\infty$$

となることが知られています。$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ であっても，無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するとは限らないのです。

無限級数が収束するとき，一般項の極限は 0 になります。ただし，一般項の極限が 0 になっても無限級数が収束するとは限りません。このことは，よく注意してください。

基本例題 1 ―――――― **無限級数の収束・発散(1)**

無限級数 $1+\dfrac{2}{3}+\dfrac{3}{5}+\dfrac{4}{7}+\cdots\cdots+\dfrac{n}{2n-1}+\cdots\cdots$ は発散することを示しなさい。

考え方 無限級数が発散することを示すには，部分和の数列が発散することを示すよりも，無限数列が 0 に収束しないので発散するという証明方法がよく用いられます。

というのは，この証明方法では，部分和が容易に求められなくても，発散することを示せるからです。

解　答 無限数列 $1,\ \dfrac{2}{3},\ \dfrac{3}{5},\ \dfrac{4}{7},\ \cdots\cdots,\ \dfrac{n}{2n-1},\ \cdots\cdots$ の極限を調べると

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2-\dfrac{1}{n}}=\frac{1}{2}$$

よって，無限数列 $\left\{\dfrac{n}{2n-1}\right\}$ は 0 に収束しない。

ゆえに，無限級数 $1+\dfrac{2}{3}+\dfrac{3}{5}+\dfrac{4}{7}+\cdots\cdots+\dfrac{n}{2n-1}+\cdots\cdots$ は発散する。

注　意 発散することを証明するには，無限数列が 0 に収束しないことを示せばいいのですが，収束することを証明するには，無限数列が 0 に収束することを示してもダメです。というのは，無限数列が 0 に収束しても，無限級数が収束するとは限らないからです。ですから，部分和の数列を考えて，その部分和の数列が収束することを示すのが一般的です。

発散する，ということをいうために，一般項の極限が 0 にならない，ということから証明しました。これは，定理〔II〕を使った証明方法です。では，トレーニングしてみましょう。

トレーニング

1 無限級数 $\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{3}+\dfrac{3}{4}+\cdots\cdots+\dfrac{n}{n+1}+\cdots\cdots$ は発散することを示しなさい。

2 無限級数 $1+\dfrac{1+2}{4}+\dfrac{1+2+3}{9}+\cdots\cdots+\dfrac{1+2+3+\cdots\cdots+n}{n^2}+\cdots\cdots$ は発散することを示しなさい。

3 無限級数 $\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{3}{4}-\frac{4}{5}+\cdots\cdots+(-1)^{n-1}\frac{n}{n+1}+\cdots\cdots$ は発散することを示しなさい。

4 無限級数 $\sin\frac{1}{2}\pi+\sin\pi+\sin\frac{3}{2}\pi+\cdots\cdots+\sin\frac{n}{2}\pi+\cdots\cdots$ は発散することを示しなさい。

簡単にできましたね。では，つぎは，無限等比級数が収束するための条件を考えて解く問題です。

基本例題 2 ――― **無限等比級数の収束する条件**

無限等比級数 $1+(x-1)+(x-1)^2+(x-1)^3+\cdots\cdots+(x-1)^{n-1}+\cdots\cdots$ が収束するような x の値の範囲とそのときの和を求めなさい。

考え方 初項 a，公比 r の無限等比級数が収束するのは，$|r|<1$ のときであり，その和 S は $S=\frac{a}{1-r}$ ですから，与えられた無限等比級数の初項と公比をまず，求めます。

解　答 $1+(x-1)+(x-1)^2+(x-1)^3+\cdots\cdots+(x-1)^{n-1}+\cdots\cdots$

$=1+1\cdot(x-1)+1\cdot(x-1)^2+1\cdot(x-1)^3+\cdots\cdots+1\cdot(x-1)^{n-1}+\cdots\cdots$

であるから，この無限等比級数の初項 a は $a=1$，公比 r は $r=x-1$ である。

よって，この無限等比級数が収束するのは，$a\neq0$ より，$|r|=|x-1|<1$ のときである。

$|x-1|<1$ より　$-1<x-1<1$

ゆえに　　$\boldsymbol{0<x<2}$

また，このときの無限等比級数の和を S とすると，$S=\frac{a}{1-r}$ であるから

$$S=\frac{1}{1-(x-1)}=\boldsymbol{\frac{1}{-x+2}}$$

無限等比級数が収束する条件がわかっていればできる問題です。
では，トレーニングに進みましょう。

トレーニング

5 次の無限級数は，すべての実数値 x について収束することを示しなさい。また，その和を $f(x)$ として，関数 $f(x)$ のグラフをかきなさい。

$$x^2+\frac{x^2}{1+x^2}+\frac{x^2}{(1+x^2)^2}+\cdots\cdots+\frac{x^2}{(1+x^2)^{n-1}}+\cdots\cdots$$

6 次の無限級数は，すべての実数値 x について収束することを示しなさい。また，その和を $f(x)$ として，関数 $f(x)$ のグラフをかきなさい。

$$\sin x\cos x+\sin^3 x\cos x+\sin^5 x\cos x+\cdots\cdots$$

7 次の無限級数が収束するような x の値の範囲を求めなさい。

(1) $x+x(1-x^2)+x(1-x^2)^2+\cdots\cdots+x(1-x^2)^{n-1}+\cdots\cdots$

(2) $1+(2-x^2)+(2-x^2)^2+\cdots\cdots+(2-x^2)^{n-1}+\cdots\cdots$

8 次の無限級数が収束するような x の値の範囲を求めなさい。

(1) $x+x(1-x)+x(1-x)^2+\cdots\cdots+x(1-x)^{n-1}+\cdots\cdots$

(2) $1+x(1-x)+x^2(1-x)^2+\cdots\cdots+x^{n-1}(1-x)^{n-1}+\cdots\cdots$

9 次の無限級数が収束するような x の値の範囲，およびそのときの和を求めなさい。

(1) $1+\dfrac{x}{2}+\dfrac{x^2}{4}+\cdots\cdots+\left(\dfrac{x}{2}\right)^{n-1}+\cdots\cdots$

(2) $1+(x^2-1)+(x^2-1)^2+\cdots\cdots+(x^2-1)^{n-1}+\cdots\cdots$

10 次の無限級数が収束するような x の値の範囲，およびそのときの和を求めなさい。

(1) $1+\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{x^4}{9}+\cdots\cdots+\left(\dfrac{x^2}{3}\right)^{n-1}+\cdots\cdots$

(2) $1+\dfrac{x+1}{x}+\left(\dfrac{x+1}{x}\right)^2+\cdots\cdots+\left(\dfrac{x+1}{x}\right)^{n-1}+\cdots\cdots$

きょうは，無限級数が発散する条件，無限等比級数が収束する条件などをとりあげて学習してきました。この次も，無限級数の収束，発散をとりあげます。

第 10 日

学習日　　月　　日

いろいろな無限級数 (2)

きょうは，収束する無限級数で成り立つ公式と，くふうして和を求める無限級数の問題について学習します。無限等比級数が収束する条件，収束するときの和の公式はよく出てきますから，しっかりおさえておきましょう。

まず，はじめは，収束する無限級数で成り立つ公式の説明です。

●無限級数の和についての公式

無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{1}{3^{n-1}}\right)$ の和を求めてみましょう。

この無限級数の第 n 項までの部分和を S_n とすると

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2^{k-1}}-\frac{1}{3^{k-1}}\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^{k-1}}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3^{k-1}}=\frac{1-\dfrac{1}{2^n}}{1-\dfrac{1}{2}}-\frac{1-\dfrac{1}{3^n}}{1-\dfrac{1}{3}}$$

$$=2\left(1-\frac{1}{2^n}\right)-\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)$$

ですから，部分和の数列 $\{S_n\}$ の極限は

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left\{2\left(1-\frac{1}{2^n}\right)-\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)\right\}=2-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}$$

よって　　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{1}{3^{n-1}}\right)=\frac{1}{2}$

このとき，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}=2$，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{n-1}}=\frac{3}{2}$，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{1}{3^{n-1}}\right)=\frac{1}{2}$ ですから，次の等式が成り立っていることがわかります。

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{1}{3^{n-1}}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{n-1}}$$　⇦2 つの無限級数の差の計算

一般に，収束する無限級数について，次の公式が成り立ちます。

□ 収束する無限級数の和についての公式 □

2 つの無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ が収束して，その和がそれぞれ S，T であるとき，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}ka_n$，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)$ はいずれも収束して，それぞれの和について，次の公式が成り立つ。

$$\sum_{n=1}^{\infty}ka_n=k\sum_{n=1}^{\infty}a_n=kS\quad(k\text{ は定数})$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n+\sum_{n=1}^{\infty}b_n=S+T$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n-\sum_{n=1}^{\infty}b_n=S-T$$

《注》 これらの公式は，無限級数が２つとも収束するときのみに成り立つのであって，どちらか一方，または，２つとも収束しないときには成り立ちません。

ここでは，２つの無限級数がともに収束するという条件が重要です。ともに収束するときは，それぞれの極限値の和とすることができるというわけです。では，例題に進みましょう。

例題 1 　　**無限級数の和についての公式**

次の無限級数の和を求めなさい。

$$\frac{2+3}{6}+\frac{2^2+3^2}{6^2}+\frac{2^3+3^3}{6^3}+\frac{2^4+3^4}{6^4}+\cdots\cdots+\frac{2^n+3^n}{6^n}+\cdots\cdots$$

考え方 収束する２つの無限級数の一般項の和の形の無限級数は，それ自体も収束し，その和は別々に分けて計算できることを使います。

解　答

$$\frac{2^n+3^n}{6^n}=\frac{2^n}{6^n}+\frac{3^n}{6^n}=\left(\frac{1}{3}\right)^n+\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

ここで，$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n=\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^3+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{3}\right)^n+\cdots\cdots$は，初項$\frac{1}{3}$，公比$\frac{1}{3}$の無限等比級数であるから収束し，その和 S_1 は　$S_1=\dfrac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=\dfrac{1}{2}$

また，$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^n+\cdots\cdots$は，初項$\frac{1}{2}$，公比$\frac{1}{2}$の無限等比級数であるから収束し，その和 S_2 は　$S_2=\dfrac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1$

これより，$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n$，$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ はともに収束する無限等比級数であるから，求める和を S とすると

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+3^n}{6^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^n+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=S_1+S_2=\frac{1}{2}+1$$

$$=\boldsymbol{\frac{3}{2}}$$

別解

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{2^k+3^k}{6^k}=\sum_{k=1}^{n}\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^k+\left(\frac{1}{2}\right)^k\right\}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{3}\right)^k+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k=\frac{\frac{1}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{3}}$$

$$+\frac{\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}+\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n-\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

よって，無限数列 $\{S_n\}$ の極限を考えると，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n=0$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$ より

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}=\frac{3}{2}$$

であるから，与えられた無限級数の和は $\dfrac{3}{2}$ である。

2つに分けたそれぞれの部分が収束していますから，和として計算してよいのです。
では，トレーニングで練習してみましょう。

トレーニング

1 次の無限級数の和を求めなさい。

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{2^n}{3^n}\right)$　　(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n+(-3)^n}{5^n}$

2 次の無限級数の和を求めなさい。

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{1}{3^{n-1}}\right)$　　(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n-3^n}{4^n}$

3 次の無限級数の和を求めなさい。

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2^n}{9^n}+\frac{1}{3^n}\right)$　　(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^n+5^n}{8^n}$

4 次の無限級数の和を求めなさい。

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{3^n}-\frac{1}{4^{n-1}}\right)$　　(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}-3^n-4^{n-1}}{5^n}$

できましたね。こんどの例題では，無限級数が収束することを証明する問題ですが，すこし，くふうをして求める問題です。

例題 2　　**無限級数の収束・発散(2)**

次の無限級数は収束することを示しなさい。ただし，$n!=1\cdot2\cdot3\cdots\cdots n$ とします。

$$\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots\cdots$$

考え方　この無限級数の部分和を直接求めることはできないので，和が求まる無限級数の部分和と比較します。

和が求まる無限級数としては，無限等比級数を選びます。

解　答　$1!=1$，$2!=1\cdot2=2^{2-1}$，$3!=1\cdot2\cdot3>1\cdot2\cdot2=2^{3-1}$，$4!=1\cdot2\cdot3\cdot4>1\cdot2\cdot2\cdot2=2^{4-1}$，$\cdots\cdots$，$n!=1\cdot2\cdot3\cdots\cdots n>1\cdot2\cdot2\cdots\cdots2=2^{n-1}$，$\cdots\cdots$

であるから，与えられた無限級数の第 n 項までの部分和を S_n とすると

$$S_n=\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots\cdots+\frac{1}{n!}$$

$$\leqq 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}$$

ここで，$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}$ は，初項1，公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列の第 n 項までの和であるから，この和を S_n とすると，自然数 n に対して

$$S_n=\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}=2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}<2$$

すなわち　$S_n<2$

また，与えられた無限級数は各項がすべて正の数であるから，無限数列 $\{S_n\}$ の各項は

$$S_1<S_2<S_3<\cdots\cdots<S_n<\cdots\cdots$$

であるから，$S_n<2$ より，無限数列は収束する。

よって，与えられた無限級数も収束する。

注　意　$n!$ は，「n の階乗（かいじょう）」と読み，n 以下の自然数の積 $1\cdot2\cdot3\cdot\cdots\cdots\cdot n$ を表します。

たとえば，10! は，「10 の階乗」と読み，$10!=1\cdot2\cdot3\cdot\cdots\cdots\cdot10=3628800$ です。これは，$2^{10}=1024$ と比べてもいかに大きいかわかりますね。

この例題では，与えられたままでは，部分和が求められませんので，和が求められる数列と比較して求めています。

以下のトレーニングでは，いろいろな無限級数をとりあげて，和や極限を求めてみることにします。第 n 項がどんな形をしているか，注意することにしましょう。

トレーニング

5　次の無限級数の和を求めなさい。

(1)　$\sum_{k=1}^{\infty}k\left(\frac{1}{2}\right)^k$　　　(2)　$\sum_{k=1}^{\infty}(2k-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$

6　次の無限級数の和を求めなさい。

(1)　$\sum_{k=1}^{\infty}k\left(\frac{1}{3}\right)^k$　　　(2)　$\sum_{k=1}^{\infty}(3k+1)\left(\frac{1}{3}\right)^{k+1}$

7 次の無限級数の和を求めなさい。

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^k\cos k\pi$　　(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^k\sin\frac{k\pi}{2}$

8 次の無限級数の和を求めなさい。

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^k\sin\frac{k\pi}{2}$　　(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^k\cos\frac{k\pi}{2}$

9 次の無限級数は収束することを示しなさい。

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots\cdots$$

きょうは，収束する無限級数のときに成り立つ公式，また，くふうして無限級数の和を求める学習をしました。つぎは，いろいろな無限級数の復習日です。

第 11 日

学習日　　月　　日

いろいろな無限級数の復習

きょうは，いろいろな無限級数についての復習です。

無限級数が収束するときの条件，無限級数の和を求める問題が中心です。すこしむずかしい問題もありますが，がんばってやってみましょう。そうすることによって，本当の力がついていきます。では，はじめることにしましょう。

トレーニング

1 無限級数 $1-2+3-4+\cdots\cdots+(-1)^{n-1}n+\cdots\cdots$ は発散することを示しなさい。

2 無限級数 $\log_{10}1+\log_{10}\dfrac{3}{4}+\log_{10}\dfrac{2}{3}+\cdots\cdots+\log_{10}\dfrac{n+1}{2n}+\cdots\cdots$ は発散することを示しなさい。

3 次の無限級数は，すべての実数値 x について収束することを示しなさい。また，その和を $f(x)$ として，関数 $f(x)$ のグラフをかきなさい。

$$\sin^2 x+\frac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x}+\frac{\sin^2 x}{(1+\sin^2 x)^2}+\cdots\cdots$$

4 次の無限級数が収束するような x の値の範囲を求めなさい。

(1) $1+\dfrac{2x}{1+x}+\left(\dfrac{2x}{1+x}\right)^2+\cdots\cdots+\left(\dfrac{2x}{1+x}\right)^{n-1}+\cdots\cdots$

(2) $1+\left(\dfrac{2x}{1+x}\right)^2+\left(\dfrac{2x}{1+x}\right)^4+\cdots\cdots+\left(\dfrac{2x}{1+x}\right)^{2(n-1)}+\cdots\cdots$

5 次の無限級数が収束するような x の値の範囲，およびそのときの和を求めなさい。

(1) $1-\dfrac{x}{3}+\dfrac{x^2}{9}+\cdots\cdots+\left(-\dfrac{x}{3}\right)^{n-1}+\cdots\cdots$

(2) $2+2(1+x)+2(1+x)^2+\cdots\cdots+2(1+x)^{n-1}+\cdots\cdots$

6 次の無限級数の和を求めなさい。

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4^n}{7^n}+\frac{2^n}{5^n}\right)$

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n+(-2)^n}{7^n}$

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{7^n}{9^n}+\frac{5^n}{7^n}+\frac{3^n}{5^n}\right)$

(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^n+(-2)^n+(-1)^n}{4^n}$

7 次の無限級数の和を求めなさい。

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4^n}{5^n}-\frac{1}{2^n}\right)$

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n-2^n}{3^n}$

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}-\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}\right)$

(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^n+3^n-2^n}{4^n}$

8 次の無限級数の和を求めなさい。

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}kx^{k-1}$ (ただし $|x|<1$)

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(k-1)x^{k-1}$ (ただし $|x|<1$)

9 曲線 $y=x^3$ 上に異なる点の列 P_1, P_2, ……, P_n, ……をとり，点 P_{n+1} における接線が点 P_n ($n=1$, 2, ……) を通るとします。点 P_1 の座標を (a, a^3)，点 P_n の座標を $(x_n, x_n{}^3)$ とするとき，次の問いに答えなさい。

(1) x_n を a と n で表しなさい。

(2) $P_nP_{n+1}{}^2$ を a と n で表しなさい。

(3) $P_1P_2{}^2+P_2P_3{}^2+\cdots\cdots+P_nP_{n+1}{}^2+\cdots\cdots$ を求めなさい。

第 12 日

関数の極限 (1)

学習日　　月　　日

きょうから関数の極限について学習します。関数の極限については，基礎解析でも学習しました。微分・積分の関数の極限では，極限が無限大になるときや，三角関数や指数関数など，基礎解析では扱わなかった関数もとりあげます。

では，関数の極限の基本からはじめることにしましょう。

●関数の極限 $\left(\displaystyle\lim_{x \to a} f(x)=\alpha\right)$

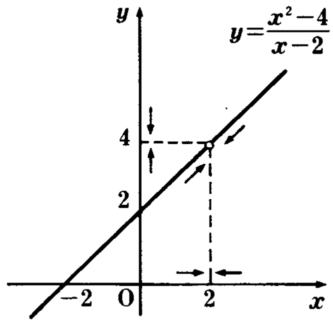
たとえば，関数

$$f(x)=\frac{x^2-4}{x-2}$$

において，x の値を 2 に限りなく近づけたとき，$f(x)$ の値はどうなるでしょうか。この関数は $x=2$ では定義されていませんが，$x \neq 2$ では

$$f(x)=\frac{(x+2)(x-2)}{x-2}=x+2$$

と変形できますから，図のように，$x=2$ に近づくとき $f(x)$ の値は 4 に限りなく近づくことがわかります。



一般に関数の極限について，次のようにいうことにしています。

□ 関数の極限 □

関数 $f(x)$ において，x が 1 つの値 a と異なる値をとりながら，a に限りなく近づくとき，$f(x)$ のとる値が一定の値 b に限りなく近づくならば

　x が a に近づくときの $f(x)$ の**極限値**（あるいは**極限**）は b である。

といい，記号を使って次のように表します。

$$\boldsymbol{x \to a} \quad \textbf{のとき} \quad \boldsymbol{f(x) \to b} \qquad \text{あるいは} \qquad \boldsymbol{\lim_{x \to a} f(x)=b}$$

《注》 ここで，a と異なる値をとりながらと，とくにことわっているのは，a には限りなく近づきますが，a にはならないということです。一般に $x \to a$ のときの関数の極限は，$f(x)$ が $x=a$ において定義されている，いないに関係なく考えられます。

この記号を使って，x が 2 に近づくとき $f(x)$ の値が 4 に限りなく近づくことを表すと

$$x \to 2 \text{ のとき } f(x) \to 4 \qquad \text{または} \qquad \lim_{x \to 2} f(x)=4$$

となります。

とくに，関数 $f(x)$ の値がつねに定数 c に等しい場合は，x を 1 つの値 a に限りなく近づけても，$f(x)$ の値はやはり c に限りなく近づくと考えられます。したがって

$$\lim_{x \to a} c=c$$

と書くことにしています。

なお，一般に，$\lim_{x\to a}f(x)=b$ ということは，$f(a)=b$ という意味ではありません。誤解しないように注意してください。たとえば，関数 $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$ では，$\lim_{x\to 2}f(x)=4$ ですが，$f(2)$ は定義されていませんから $f(2)=4$ とはなりません。

関数の極限を表すときの記号，極限値の意味はわかりましたね。数列の極限のときと同じ記号を使います。では，基礎解析の復習もかねて，次の例題をしてみましょう。

基本例題 1 　　**関数の極限 ($\lim_{x\to a} f(x)=\alpha$)**

次の極限値を求めなさい。

(1) $\lim_{x\to 1}(3x^2-2x+1)$ 　　(2) $\lim_{x\to 6}\sqrt{x-2}$

(3) $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^2+1}{x}$ 　　(4) $\lim_{x\to 3}2$

考え方 　すべて，基礎解析で学習した極限値の計算です。次のようにして求めます。

(i) x についての整関数ならば，x の極限値をそのまま代入する。

(ii) x についての有理関数（分数関数）で，x の極限値を代入して分母が 0 にならなければ，そのまま代入する。

(iii) x についての有理関数で，分母が 0 になるならば，適当な式変形をし分母が 0 にならないようにしてから，代入する。

(iv) x についての無理関数ならば，x の極限値をそのまま代入する。

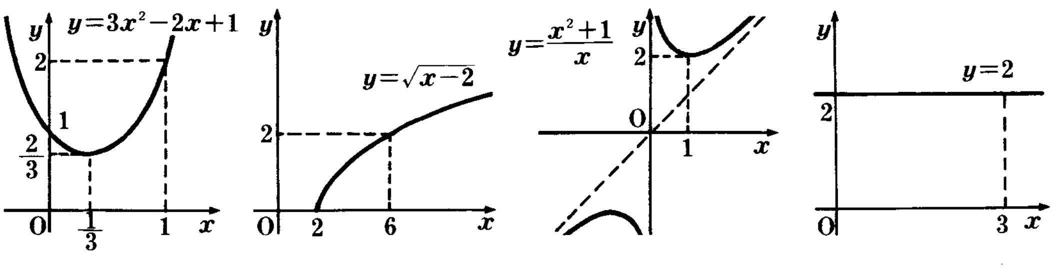
(v) x を含まない定数値の関数ならば，その定数値が極限値である。

解　答 　(1) $\lim_{x\to 1}(3x^2-2x+1)=3\times1^2-2\times1+1=\mathbf{2}$

(2) $\lim_{x\to 6}\sqrt{x-2}=\sqrt{6-2}=\sqrt{4}=\mathbf{2}$

(3) $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^2+1}{x}=\dfrac{1^2+1}{1}=\mathbf{2}$

(4) $\lim_{x\to 3}2=\mathbf{2}$



解き方を読めば，どうするかわかりましたね。では，トレーニングです。

トレーニング

1 次の極限値を求めなさい。

(1) $\lim_{x \to 0} 3$

(2) $\lim_{h \to 1} (-2)$

(3) $\lim_{x \to 1} 3h$

(4) $\lim_{h \to 0} (2x^2+1)$

2 次の極限値を求めなさい。

(1) $\lim_{x \to 1} \frac{x+1}{x}$

(2) $\lim_{x \to 0} \frac{3x^2-x-4}{2x+2}$

(3) $\lim_{t \to 4} \frac{t+2}{t^2+t-18}$

(4) $\lim_{h \to 2} \frac{h^2-2h+5}{h^2+2h-5}$

3 次の極限値を求めなさい。

(1) $\lim_{x \to 2} x(x+1)$

(2) $\lim_{x \to 2} (x^3+1)(x-3)^2$

(3) $\lim_{t \to -1} (t^2-3)(t-2)$

(4) $\lim_{h \to 2} (h^2+1)(h-3)$

4 次の極限値を求めなさい。

(1) $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}\left(\frac{1}{x+1}-1\right)$

(2) $\lim_{x \to 1} \frac{1}{x-1}\left(\frac{x^2}{x+1}-\frac{1}{2}\right)$

つぎは，極限が無限大になる場合です。ここでは，x が1とか -2 のような有限の値に限りなく近づくときの極限を考えています。

● 関数の極限 ($\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$)

(1)　極限が正の無限大になる場合

関数 $f(x)$ において，x が，1つの値 a と異なる値をとりながら，a に限りなく近づくとき，$f(x)$ の値が限りなく大きくなるならば

x が a に限りなく近づくときの $f(x)$ の極限は正の無限大である

あるいは

x が a に限りなく近づくとき，$f(x)$ は正の無限大になる

といい，記号を用いて次のように書きます。

$x \to a$ のとき　$f(x) \to +\infty$　　あるいは　　$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$

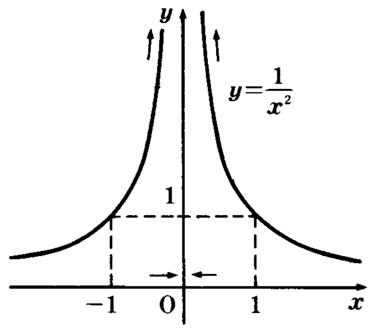
たとえば，関数

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

においては，x が，0と異なる値をとりながら，0に限りなく近づくとき，$f(x)$ の値は限りなく大きくなります。したがって

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

となります。



(2)　極限が負の無限大になる場合

関数 $f(x)$ において，x が，1つの値 a と異なる値をとりながら，a に限りなく近づくとき，$f(x)$ の値が負で，その絶対値が限りなく大きくなるならば

x が a に限りなく近づくときの $f(x)$ の極限は負の無限大である

あるいは

x が a に限りなく近づくとき，$f(x)$ は負の無限大になる

といい，記号を用いて次のように書きます。

$x \to a$ のとき　$f(x) \to -\infty$　　あるいは　　$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$

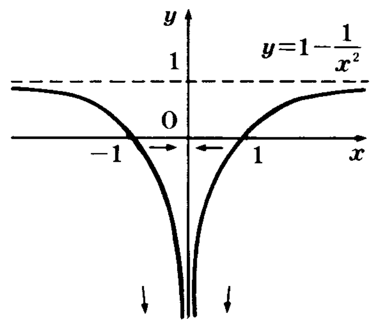
たとえば，関数

$$f(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$$

においては，x が，0と異なる値をとりながら，0に限りなく近づくとき，$f(x)$ の値が負で，その絶対値は限りなく大きくなります。したがって

$$\lim_{x \to 0} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = -\infty$$

となります。



では，例題で，正の無限大になる，負の無限大になるということを実際に見てみることにしましょう。

基本例題 2 　　**関数の極限 $\left(\lim_{x\to a} f(x)=+\infty\right)$**

次の極限を求めなさい。

(1) $\lim_{x\to 0}\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)$ 　　(2) $\lim_{x\to 0}\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)$

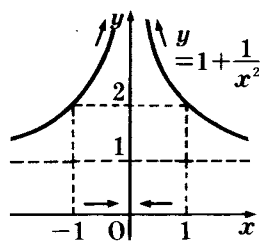
考え方 　x が 0 と異なる値をとりながら，0 に限りなく近づくときの，$\dfrac{1}{x^2}$，$-\dfrac{1}{x^2}$ の値をまず考えます。

次に，その値をもとにして，$1+\dfrac{1}{x^2}$，$1-\dfrac{1}{x^2}$ の値がどうなるか考えます。

関数 $y=1+\dfrac{1}{x^2}$，$y=1-\dfrac{1}{x^2}$ のグラフをかいてみると，変化のようすがよくわかります。

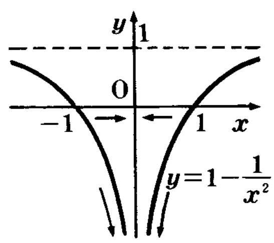
解　答 　(1) 関数 $y=1+\dfrac{1}{x^2}$ において，x が 0 と異なる値をとりながら，0 に限りなく近づくと，$\dfrac{1}{x^2}$ の値は限りなく大きくなるので，y の値も限りなく大きくなる。

よって 　$\lim_{x\to 0}\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)=+\infty$



(2) 関数 $y=1-\dfrac{1}{x^2}$ において，x が 0 と異なる値をとりながら，0 に限りなく近づくと，$-\dfrac{1}{x^2}$ の値は負で，その絶対値は限りなく大きくなるので，y の値も負で，その絶対値は限りなく大きくなる。

よって 　$\lim_{x\to 0}\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)=-\infty$



注　意 　(1)の $+\infty$ を正の無限大，(2)の $-\infty$ を負の無限大と答えてもかまいません。

関数の極限では，a を正の有限な値とするとき，形式的に

$\dfrac{a}{0}=+\infty$，$\dfrac{-a}{0}=-\infty$

が成り立ちます。

例題の(1)は極限が正の無限大になるもの，(2)は負の無限大になるものの例です。トレーニングでたしかめましょう。

トレーニング

5 次の極限を求めなさい。

(1) $\lim_{x \to 0}\frac{1}{x^2}$

(2) $\lim_{x \to 1}\frac{1}{(x-1)^2}$

6 次の極限を求めなさい。

(1) $\lim_{x \to 3}\frac{1}{(x-3)^2}$

(2) $\lim_{x \to 0}\left(2+\frac{2}{x^2}\right)$

(3) $\lim_{x \to 0}\frac{1}{x^4}$

(4) $\lim_{x \to 1}\frac{1}{(x-1)^4}$

7 次の極限を求めなさい。

(1) $\lim_{x \to -1}\frac{-1}{(x+1)^2}$

(2) $\lim_{x \to 0}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{x^2}\right)$

8 次の極限を求めなさい。

(1) $\lim_{x \to 0} \frac{-2}{x^2}$

(2) $\lim_{x \to 2} \frac{-2}{(x-2)^2}$

(3) $\lim_{x \to 0} \left(3 - \frac{3}{x^2} \right)$

(4) $\lim_{x \to 0} \frac{-4}{x^4}$

わかりましたね。ここでの問題は，すべて，x を 0 とか -1 のような，ある有限の値に限りなく近づけたときの極限でした。極限が無限大になることを発散するということもあります。つぎは，近づき方によって関数の極限の極限が異なることがあるという場合です。

●関数の極限（極限がない場合）

関数 $f(x)$ において

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

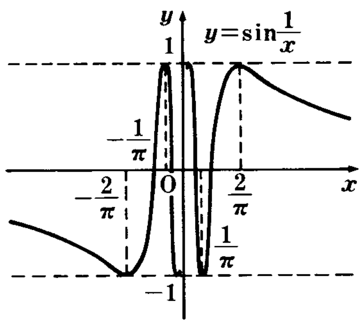
であるということは，x が，a と異なる値をとりながら，a に限りなく近づくとき，どのような近づき方をしても，つねに，$f(x)$ の値は b に限りなく近づくことを意味しています。

これに反して，x が a にどのような近づき方をするかによって，関数の値が異なる値に近づくことがあります。

たとえば，関数

$$f(x) = \sin\frac{1}{x}$$

において，x を 0 に限りなく近づける場合を考えてみましょう。



(1) x が数列

$$\frac{1}{\pi},\ \frac{1}{2\pi},\ \frac{1}{3\pi},\ \cdots\cdots,\ \frac{1}{n\pi},\ \cdots\cdots$$

の値をとりながら，0 に限りなく近づくならば，$f(x)$ の値はつねに 0 に等しくなります。したがって，このときの極限は 0 と考えられます。

(2) x が数列

$$\frac{2}{\pi},\ \frac{2}{5\pi},\ \cdots\cdots,\ \frac{2}{(4n-3)\pi},\ \cdots\cdots$$

の値をとりながら，0 に限りなく近づくならば，$f(x)$ の値はつねに 1 に等しくなります。したがって，このときの極限は 1 と考えられます。

一般に，関数 $f(x)$ において，変数 x が 1 つの値 a に限りなく近づくとき，近づき

方によって $f(x)$ の極限が異なる場合には

$x \to a$ のとき　$f(x)$ の極限はない

ということにします。

ですから，$f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$ では，$x \to 0$ のとき，$f(x)$ の極限はないということになります。

関数 $f(x)$ において，x が a に限りなく近づくときの $f(x)$ の極限についてまとめると，次のようになります。

□ 関数の極限 □

関数 $f(x)$ の極限
- 1つの有限の確定した値　$\lim_{x \to a} f(x)=b$
- 正の無限大　$\lim_{x \to a} f(x)=+\infty$
- 負の無限大　$\lim_{x \to a} f(x)=-\infty$
- ない

数列の極限のときにも，極限が1つの確定した値に決まらないとき，極限はないといいました。関数の極限も，近づき方によって，極限が異なる場合は，極限はないというわけです。では，トレーニングでたしかめます。

トレーニング

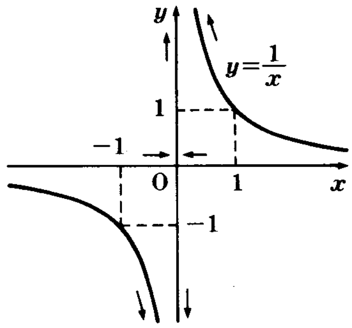
9　関数 $f(x)=\cos\dfrac{1}{x}$ について，$x \to 0$ のときの極限を調べなさい。

10　関数 $f(x)=\tan\dfrac{1}{x}$ について，$x \to 0$ のときの極限を調べなさい。

近づき方によって極限が異なるとき，関数の極限はないといいましたが，つぎは，右側から近づくか左側から近づくかという，近づき方による極限の意味です。

●関数の極限（右の極限・左の極限）

関数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ で，x の値が 0 に限りなく近づくときの極限がどうなるか調べてみましょう。



$f(x)=\dfrac{1}{x}$ は

$x>0$ のとき $\dfrac{1}{x}>0$ $\quad$ $x<0$ のとき $\dfrac{1}{x}<0$

ですから

x が正で 0 に限りなく近づくとき $\dfrac{1}{x}\to+\infty$

x が負で 0 に限りなく近づくとき $\dfrac{1}{x}\to-\infty$

となります。

このように，x が 1 つの値 a に限りなく近づくとき，a より大きいほうから近づく場合と，a より小さいほうから近づく場合を区別して考える必要が出てきます。そこで，近づき方をはっきり表すために

つねに a より大きい値をとりながら近づく場合には $\boldsymbol{x\to a+0}$

つねに a より小さい値をとりながら近づく場合には $\boldsymbol{x\to a-0}$

と書くことにしています。

《注》 a より大きい方から a に近づくとき，a の後に $+0$（プラス・ゼロ）をつけ，a より小さい方から a に近づくとき，a の後に -0（マイナス・ゼロ）をつけます。

とくに，$a=0$ の場合には

$x\to0+0$ を簡単に $\boldsymbol{x\to+0}$ $\quad$ $x\to0-0$ を簡単に $\boldsymbol{x\to-0}$

と書くことにします。$x\to+0$ は，正の側から 0 に近づくこと，$x\to-0$ は負の側から 0 に近づくことを意味しています。

□ 右の極限・左の極限 □

関数 $f(x)$ において

$x\to a+0$ のときの極限　あるいは　$x\to a-0$ のときの極限

をそれぞれ記号を使って次のように書きます。

$$\lim_{x\to a+0} f(x) \qquad \lim_{x\to a-0} f(x)$$

$f(x)=\dfrac{1}{x}$ で x の値が 0 に近づくときの極限を，この記号を使って表すと

$$\lim_{x\to+0}\frac{1}{x}=+\infty \qquad \lim_{x\to-0}\frac{1}{x}=-\infty$$

となります。

《注》 $\displaystyle\lim_{x\to a+0} f(x)$ は，x が右側から a に近づくときの極限ですから，この極限のことを**右の極限**ま

たは**右の極限値**ということがあります。また，$\lim_{x \to a-0} f(x)$ は左側から a に近づくときの極限ですから，**左の極限**または**左の極限値**ということがあります。

右側から近づく，左側から近づくときの極限のことを説明しました。記号の使い方にも注意してください。では，例題で，右の極限，左の極限のことをもう一度確かめておきましょう。

基本例題 3 　　**関数の極限（右の極限，左の極限）**

次の極限を求めなさい。

(1) $\lim_{x \to +0}\left(-\frac{1}{x}\right)$ 　　(2) $\lim_{x \to -0}\left(-\frac{1}{x}\right)$

考え方 　x が 0 と異なる値をとりながら，0 に限りなく近づくときの，$-\frac{1}{x}$ の値を考えますが，(1)では $x \to +0$ ですから，つねに $x>0$ の状態で 0 に限りなく近づき，(2)では $x \to -0$ ですから，つねに $x<0$ の状態で 0 に限りなく近づきます。

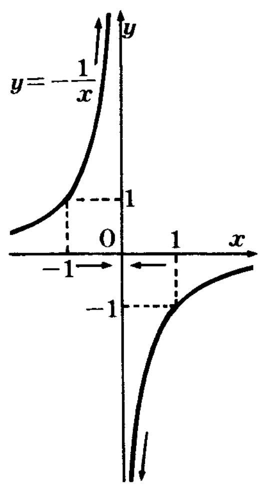
関数 $y=-\frac{1}{x}$ のグラフをかいてみると，変化のようすがよくわかります。

解　答 　(1) 関数 $y=-\frac{1}{x}$ において，つねに $x>0$ で，0 と異なる値をとりながら 0 に限りなく近づくと，$-\frac{1}{x}$ の値は負で，その絶対値は限りなく大きくなる。

よって　$\lim_{x \to +0}\left(-\frac{1}{x}\right)=-\infty$

(2) 関数 $y=-\frac{1}{x}$ において，つねに $x<0$ で，0 と異なる値をとりながら 0 に限りなく近づくと，$-\frac{1}{x}$ の値は限りなく大きくなる。

よって　$\lim_{x \to -0}\left(-\frac{1}{x}\right)=+\infty$



注　意 　(1)では，$x>0$ で y の極限は $-\infty$ ですから，グラフで見ると，y 軸（直線 $x=0$）に右側からいくらでも近づいていきます。

(2)では，$x<0$ で y の極限は $+\infty$ ですから，グラフで見ると，y 軸（直線 $x=0$）に左側からいくらでも近づいていきます。

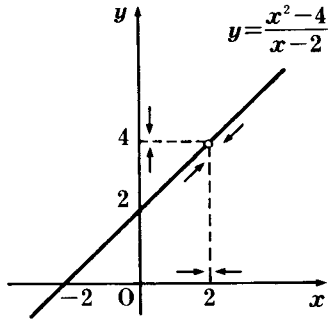
すなわち，$\lim_{x \to +0}\left(-\frac{1}{x}\right)=-\infty$，$\lim_{x \to -0}\left(-\frac{1}{x}\right)=+\infty$ というのは，グラフでみると，直線 $x=0$ が，直角双曲線 $y=-\frac{1}{x}$ の漸近線となっているということです。

右の極限と左の極限の意味がわかりましたから，右の極限と，左の極限を使って関数の極限を考えてみることにしましょう。

●関数の極限（右の極限と左の極限の比較）

関数

$$f(x)=\frac{x^2-4}{x-2} \quad (x \neq 2)$$



において，x が 2 に限りなく近づくとき，

x が 2 より大きい値をとりながら，2 に限りなく近づく

あるいは

x が 2 より小さい値をとりながら，2 に限りなく近づく

のいずれの場合にも，$f(x)$ は 4 に限りなく近づきます。

したがって

$$\lim_{x \to 2+0} f(x)=4 \quad \lim_{x \to 2-0} f(x)=4$$

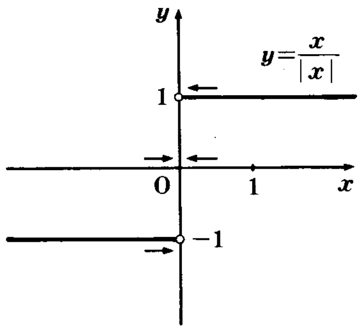
よって，この関数 $f(x)$ については

$$\lim_{x \to 2} f(x)=4$$

が成り立ちます。

これに反して，関数

$$g(x)=\frac{x}{|x|} \quad (x \neq 0)$$



では

$x>0$ ならば $g(x)=\dfrac{x}{x}=1$

$x<0$ ならば $g(x)=\dfrac{x}{-x}=-1$

となるので

$$\lim_{x \to +0} g(x)=1, \quad \lim_{x \to -0} g(x)=-1$$

このように，$x=0$ での右の極限と左の極限は一致していません。

したがって，

$x \to 0$ のときの**関数 $g(x)$ の極限はない**

ということになります。

このことをまとめると次のようになります。

□ 右の極限・左の極限と関数の極限 □

[I] $\lim_{x \to a+0} f(x)=\lim_{x \to a-0} f(x)=b$ ならば $\lim_{x \to a} f(x)=b$

[II] $\lim_{x \to a+0} f(x) \neq \lim_{x \to a-0} f(x)$ ならば $x \to a$ のときの $f(x)$ の極限はない

右の極限と左の極限が一致していれば極限値はありますが，一致していなければ，極限値はありません。次の例題は，ガウス記号を使った関数での極限です。

基本例題 4 ――― **関数の極限（右の極限と左の極限の比較）**

次の極限を求めなさい。ただし，$[x]$ は x をこえない最大の整数を表しています。

(1) $\lim_{x \to 0}[x]$　　　(2) $\lim_{x \to 0.5}[x]$

考え方　記号［　］の定義に従って，それぞれ右の極限と左の極限を調べます。両者が一致するときに，その値が極限値です。ですから，$\lim_{x \to 0}[x]$ では，$x=0$ での右の極限と左の極限を，まず調べます。

解　答　(1)　記号［　］の定義より

$-1 \leqq x < 0$ のとき　$[x]=-1$

$0 \leqq x < 1$ のとき　$[x]=0$

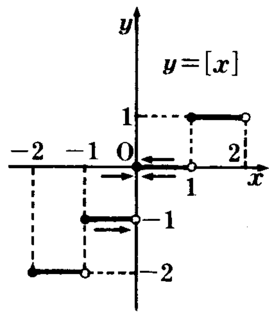
よって

$\lim_{x \to -0}[x]=-1$

$\lim_{x \to +0}[x]=0$

ゆえに　$\lim_{x \to -0}[x] \neq \lim_{x \to +0}[x]$

したがって，$\lim_{x \to 0}[x]$ は**存在しない**。



(2)　記号［　］の定義より

$0 \leqq x < 0.5$ のとき　$[x]=0$

$0.5 \leqq x < 1$ のとき　$[x]=0$

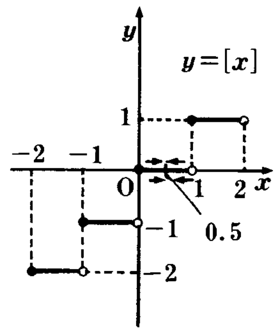
よって

$\lim_{x \to 0.5-0}[x]=0$

$\lim_{x \to 0.5+0}[x]=0$

ゆえに　$\lim_{x \to 0.5-0}[x]=\lim_{x \to 0.5+0}[x]=0$

したがって　$\lim_{x \to 0.5}[x]=\mathbf{0}$



注　意　記号 $[x]$ が，x をこえない最大の整数を表すという意味で用いられるとき，この記号［　］をガウスの記号といいます。

ガウスというのは，19 世紀前半に活躍したドイツの偉大な数学者です。

右側から近づく場合，左側から近づく場合を考えて極限を調べるのです。では，きょうの最後のトレーニングをしましょう。

トレーニング

11 次の極限を求めなさい。

(1) $\lim_{x \to 1} |x-1|$

(2) $\lim_{x \to 2} |x^2-4|$

12 次の極限を求めなさい。

(1) $\lim_{x \to 0} |x|$

(2) $\lim_{x \to -1} |x+1|$

(3) $\lim_{x \to 0}(|2x|+1)$

(4) $\lim_{x \to 1} |x^2-2|$

13 関数 $f(x)=\dfrac{2x}{|x|}$ について，$x \to 0$ のときの極限を調べなさい。

14 関数 $f(x)=\dfrac{x-1}{|x-1|}$ について，$x \to 1$ のときの極限を調べなさい。

きょうは，関数の極限の第１日目として，x が有限の値に限りなく近づくときの極限値を調べてきました。内容がたくさんありましたね。ごくろうさまでした。

第 13 日

関数の極限 (2)

学習日　　月　　日

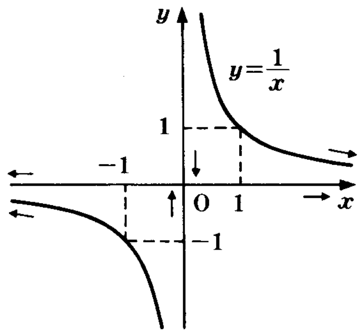
このまえは, x が 0 とか, -1 のような有限の値に限りなく近づくときの極限を調べました。きょうは, x が限りなく大きくなるときの極限について考えてみることにします。

では, まず, x が限りなく大きくなるとき, 極限が有限になる場合からはじめましょう。

● 関数の極限 ($\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\alpha$)

たとえば, 関数

$$f(x)=\frac{1}{x}$$



では, x が限りなく大きくなると, $f(x)$ の値は 0 に限りなく近づくことが, 図からもわかります。

また, x が負で, 絶対値が限りなく大きくなるときにも, $f(x)$ の値は 0 に限りなく近づくことがわかります。

一般に, 変数 x が限りなく大きくなるとき, 関数 $f(x)$ の値が一定の値 b に限りなく近づくならば

x が限りなく大きくなるときの $f(x)$ の極限値 (あるいは極限) は b である

といい, 記号を用いて次のように書きます。

$x\to+\infty$ **のとき** $f(x)\to b$　　あるいは　　$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$

また, 変数 x が負で, 絶対値が限りなく大きくなるとき, 関数 $f(x)$ の値が一定の値 b に限りなく近づくならば

x が負で, その絶対値が限りなく大きくなるときの $f(x)$ の極限値 (あるいは極限) は b である

といい, 記号を用いて次のように書きます。

$x\to-\infty$ **のとき** $f(x)\to b$　　あるいは　　$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=b$

たとえば, 関数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ について, これらの記号を用いると, 次のように書くことができます。

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0,\quad \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$$

---

x が限りなく大きくなるときの極限, 記号の使い方がわかりましたね。では, 例題をしてみましょう。

基本例題 1　関数の極限 ($\lim_{x\to+\infty} f(x)=\alpha$)

次の極限を求めなさい。

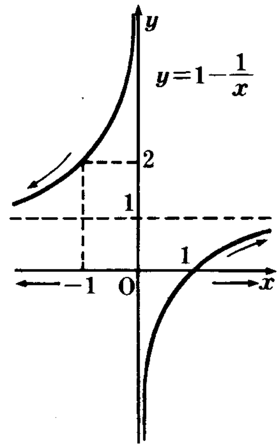
(1)　$\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)$　　(2)　$\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)$

考え方　$\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)$ は，x が限りなく大きくなるときの $1-\frac{1}{x}$ の極限です。また，$\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)$ は，x が負で，その絶対値が限りなく大きくなるときの $1-\frac{1}{x}$ の極限です。ですから，どちらもまず，$-\frac{1}{x}$ の極限から考えます。

関数 $y=1-\frac{1}{x}$ のグラフをかいてみると，変化のようすがよくわかります。

解　答　(1)　関数 $y=1-\frac{1}{x}$ において，x の値が限りなく大きくなると，$-\frac{1}{x}$ の値は 0 に限りなく近づくので，$1-\frac{1}{x}$ は 1 に限りなく近づく。

よって　　$\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)=\mathbf{1}$



(2)　関数 $y=1-\frac{1}{x}$ において，x の値が負でその絶対値が限りなく大きくなると，$-\frac{1}{x}$ の値は 0 に限りなく近づくので，$1-\frac{1}{x}$ は 1 に限りなく近づく。

よって　　$\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)=\mathbf{1}$

注　意　(1)では，$y<1$ で極限値が 1 ですから，グラフで見ると，直線 $y=1$ に下側からいくらでも近づいていきます。

(2)では，$y>1$ で極限値が 1 ですから，グラフで見ると，直線 $y=1$ に上側からいくらでも近づいていきます。

すなわち，$\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)=1$，$\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)=1$ というのは，グラフで見ると，直線 $y=1$ が，直角双曲線 $y=1-\frac{1}{x}$ の漸近線となっているということです。

関数の極限では，α を有限な値とするとき，形式的に

$\alpha+\infty=+\infty$，$\alpha-\infty=-\infty$，$-\alpha+\infty=+\infty$，$-\alpha-\infty=-\infty$

が成り立ちます。

例題にならってトレーニングをしてみましょう。関数がどのようなグラフになるかを考えれば，間違えずにできます。

トレーニング

1 次の極限を求めなさい。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(2+\frac{2}{x}\right)$

2 次の極限を求めなさい。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2x}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(3-\frac{1}{x}\right)$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{x^2}\right)$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(2-\frac{4}{3x^2}\right)$

3 次の極限を求めなさい。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{x}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(2+\frac{2}{x}\right)$

4 次の極限を求めなさい。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{3x}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(3-\frac{2}{3x^2}\right)$

5 次の極限を求めなさい。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{(x+2)^2}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{2}{x^2}\right)$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left\{2+\frac{1}{(x-3)^2}\right\}$

できましたね。こんどは，x を限りなく大きくするとき，極限が無限大になる場合を考えてみます。

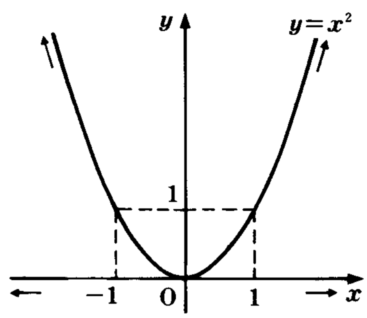
●関数の極限 ($\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$)

たとえば，関数

$$f(x)=x^2$$

において，x が限りなく大きくなると，$f(x)$ の値は限りなく大きくなることが図からもわかります。

また，x が負で，絶対値が限りなく大きくなるときにも，$f(x)$ の値は限りなく大きくなります。



一般に，変数 x が限りなく大きくなるとき，関数 $f(x)$ の値が限りなく大きくなるならば

x が限りなく大きくなるときの $f(x)$ の極限は正の無限大である

あるいは

x が限りなく大きくなるとき，$f(x)$ は正の無限大になる

といい，記号を用いて次のように書きます。

$x\to+\infty$ のとき $f(x)\to+\infty$ あるいは $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

また，変数 x が負で，絶対値が限りなく大きくなるとき，関数 $f(x)$ の値が限りなく大きくなるならば

このときの $f(x)$ の極限は正の無限大である

あるいは

このとき，$f(x)$ は正の無限大になる

といい，記号を用いて次のように書きます。

$\boldsymbol{x \to -\infty}$ **のとき** $\boldsymbol{f(x) \to +\infty}$　　あるいは　$\displaystyle \lim_{x \to -\infty} \boldsymbol{f(x) = +\infty}$

たとえば，関数 $f(x)=x^2$ について，これらの記号を用いると，次のように書くことができます。

$$\lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty, \quad \lim_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$$

また，関数 $f(x)$ の値が負で，その絶対値が限りなく大きくなるときは，$-\infty$ の記号を使って同様に書きます。

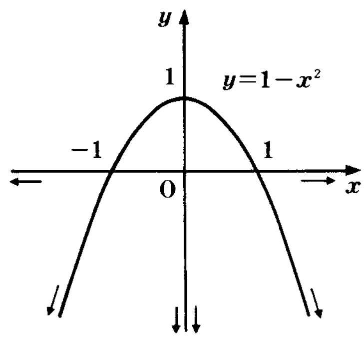
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

たとえば，関数

$f(x)=1-x^2$

について，$x \to +\infty$ と $x \to -\infty$ の極限は次のようになります。

$$\lim_{x \to +\infty} (1-x^2) = -\infty, \quad \lim_{x \to -\infty} (1-x^2) = -\infty$$



説明はむずかしくありませんね。関数がどんなふるまいをするかが大切なところです。無限大の記号は，いままでと同じ記号です。では，例題をしてみましょう。

基本例題 2 ― **関数の極限** $\left(\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty\right)$

次の極限を求めなさい。

(1) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} (x^2-1)$　　　(2) $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} (x^2-1)$

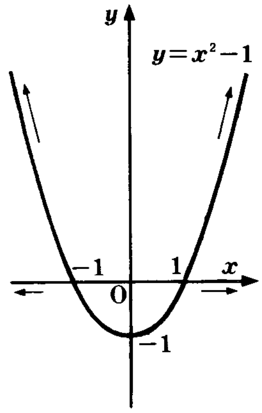
$\boxed{\text{考え方}}$　x が限りなく大きくなるときの x^2-1 と，x が負でその絶対値が限りなく大きくなるときの x^2-1 の極限ですから，まず x^2 の値の変化を考えます。

解答 (1) 関数 $y=x^2-1$ において，x の値が限りなく大きくなると，x^2 の値は限りなく大きくなるので，x^2-1 は限りなく大きくなる。

よって　$\lim_{x\to+\infty}(x^2-1)=+\infty$

(2) 関数 $y=x^2-1$ において，x の値が負でその絶対値が限りなく大きくなると，x^2 の値は限りなく大きくなるので，x^2-1 は限りなく大きくなる。

よって　$\lim_{x\to-\infty}(x^2-1)=+\infty$



注意 関数の極限では，a を有限な値とするとき，形式的に

$+\infty+a=+\infty$，$+\infty-a=+\infty$，$-\infty+a=-\infty$，$-\infty-a=-\infty$

が成り立ちます。

わかりましたね。注意に書いてある式は形式的な式ですから解答には書きません。形式的にこのようになると思っていればよいのです。では，トレーニングをしましょう。

トレーニング

6 次の極限を求めなさい。

(1) $\lim_{x\to+\infty}(x^3+1)$　　(2) $\lim_{x\to-\infty}(x^3+1)$

7 次の極限を求めなさい。

(1) $\lim_{x\to+\infty}x^3$　　(2) $\lim_{x\to-\infty}x^3$

(3) $\lim_{x\to+\infty}(x^2+1)$　　(4) $\lim_{x\to-\infty}(x^2+1)$

8 次の極限を求めなさい。

(1) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty}(x^2-1)$

(2) $\displaystyle\lim_{x \to -\infty}(x^2-1)$

(3) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty}\frac{1}{x^2+1}$

(4) $\displaystyle\lim_{x \to -\infty}\frac{1}{x^2+1}$

9 次の極限を求めなさい。

(1) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty}(x^3-2)$

(2) $\displaystyle\lim_{x \to -\infty}(x^3-2)$

(3) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty}\frac{1}{x^3-1}$

(4) $\displaystyle\lim_{x \to -\infty}\frac{1}{x^3-1}$

きょうは，関数の極限で x を限りなく大きくしたときの極限を学習してきました。わかりましたね。このつぎは，関数の極限の計算です。

第 14 日	関数の極限の計算	学習日　　月　　日

第 14 日　関数の極限の計算

学習日　　月　　日

これまで，x を有限の値に限りなく近づけるとき，x を限りなく大きくするときの極限について学習してきました。

きょうは，これまでのことをもとにして，極限の計算の練習をしてみます。

まず，極限の計算で基本となる公式の説明からはじめることにしましょう。

●関数の極限の計算

関数 $f(x)=x+1$，$g(x)=x^2-2$ について，x の値を 1 に限りなく近づけたときの極限値を求めてみましょう。

$$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}(x+1)=2,\ \lim_{x\to1}g(x)=\lim_{x\to1}(x^2-2)=-1$$

となります。ここで，たとえば $f(x)+g(x)=(x+1)+(x^2-2)$ の極限値を計算してみると

$$\lim_{x\to1}\{f(x)+g(x)\}=\lim_{x\to1}\{(x+1)+(x^2-2)\}=\lim_{x\to1}(x^2+x-1)=1$$

$$\lim_{x\to1}f(x)+\lim_{x\to1}g(x)=2-1=1$$

となり，$f(x)+g(x)$ の極限値は，$f(x)$ と $g(x)$ のそれぞれの極限値の和になっていますね。

一般に，関数が収束するときの極限について，次の公式が成り立ちます。

□ 関数の極限の計算 □

$\lim_{x\to a}f(x)=\alpha$，$\lim_{x\to a}g(x)=\beta$ （α，β は有限な値）であるとき

[I]　$\lim_{x\to a}cf(x)=c\lim_{x\to a}f(x)=c\alpha$　（c は定数）

[II]　$\lim_{x\to a}\{f(x)\pm g(x)\}=\lim_{x\to a}f(x)\pm\lim_{x\to a}g(x)=\alpha\pm\beta$　（複号同順）

[III]　$\lim_{x\to a}f(x)g(x)=\lim_{x\to a}f(x)\cdot\lim_{x\to a}g(x)=\alpha\beta$

[IV]　$\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim_{x\to a}f(x)}{\lim_{x\to a}g(x)}=\dfrac{\alpha}{\beta}$　（$\beta\neq0$）

これらの公式は，$x\to a$ のとき，$f(x)$，$g(x)$ がともに収束するときの式ですが

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\alpha,\ \lim_{x\to+\infty}g(x)=\beta\quad \text{あるいは}\quad \lim_{x\to-\infty}f(x)=\alpha,\ \lim_{x\to-\infty}g(x)=\beta$$

などのように，$x\to+\infty$，$x\to-\infty$ で $f(x)$，$g(x)$ がともに収束する場合についても同様に成り立ちます。

これらの公式は，いろいろな関数の極限を計算するときの基本となるものです。

たとえば，次のように使います。

$$\lim_{x\to2}(x^2-2x+3)=\lim_{x\to2}x^2-2\lim_{x\to2}x+3$$　⇐各項の和・差に分ける。

$$=4-4+3=3$$

$$\lim_{x \to 1}\frac{x^2-2x+3}{3x^2+1}=\frac{\lim\limits_{x \to 1}(x^2-2x+3)}{\lim\limits_{x \to 1}(3x^2+1)}$$ ⇦分母・分子を別々に計算する。

$$=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \to +\infty}\left(2+\frac{1}{x}\right)\left(3-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x \to +\infty}\left(2+\frac{1}{x}\right)\cdot\lim_{x \to +\infty}\left(3-\frac{1}{x}\right)=2\times3=6$$

関数の極限の計算の公式は，数列の極限の計算のときに出てきた公式と似ていますね。数列の極限のときの公式も，数列が収束するときに成り立つ式でした。

では，極限の公式を利用する例題をしてみましょう。

基本例題 1 **関数の極限の計算（定数倍・和・差）**

$\lim\limits_{x \to 2}f(x)=3$，$\lim\limits_{x \to 2}g(x)=2$ のとき，次の極限値を求めなさい。

(1) $\lim\limits_{x \to 2}\left\{3f(x)+\frac{1}{2}g(x)\right\}$　　(2) $\lim\limits_{x \to 2}\frac{2g(x)}{f(x)}$

(3) $\lim\limits_{x \to 2}\{2f(x)g(x)+1\}$　　(4) $\lim\limits_{x \to 2}\{f(x)\}^3$

解答　$\lim\limits_{x \to 2}f(x)=3$，$\lim\limits_{x \to 2}g(x)=2$ であるから，関数の極限の公式を用いて

(1) 与式 $=3\lim\limits_{x \to 2}f(x)+\frac{1}{2}\lim\limits_{x \to 2}g(x)=3\times3+\frac{1}{2}\times2=\mathbf{10}$

(2) 与式 $=\dfrac{2\lim\limits_{x \to 2}g(x)}{\lim\limits_{x \to 2}f(x)}=\dfrac{2\times2}{3}=\mathbf{\dfrac{4}{3}}$

(3) 与式 $=2\lim\limits_{x \to 2}f(x)\lim\limits_{x \to 2}g(x)+1=2\times3\times2+1=\mathbf{13}$

(4) 与式 $=\{\lim\limits_{x \to 2}f(x)\}^3=3^3=\mathbf{27}$

公式にあてはめて解いていますね。では，問題をしてみましょう。

トレーニング

1 $\lim\limits_{x \to a}f(x)=2$，$\lim\limits_{x \to a}g(x)=3$ のとき，次の極限値を求めなさい。

(1) $\lim\limits_{x \to a}\{3f(x)+2g(x)\}$　　(2) $\lim\limits_{x \to a}\{5f(x)-3g(x)\}$

2 $\lim_{x\to a}f(x)=2$, $\lim_{x\to a}g(x)=3$ のとき，次の極限値を求めなさい。

(1) $\lim_{x\to a}\{f(x)\}^2$　　(2) $\lim_{x\to a}4\{f(x)\}^5\{g(x)\}^4$

3 $\lim_{x\to a}f(x)=2$, $\lim_{x\to a}g(x)=3$ のとき，次の極限値を求めなさい。

(1) $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$　　(2) $\lim_{x\to a}\dfrac{g(x)}{2f(x)}$

これから，具体的な関数で極限を求めてみます。まず，簡単に極限が求められるものからはじめます。

基本例題 2　　**関数の極限の計算（積）**

次の極限値を求めなさい。

(1) $\lim_{x\to 1}(x^2+1)(-x+2)$　　(2) $\lim_{x\to +\infty}\left(\dfrac{1}{x}+3\right)\left(\dfrac{1}{x^2}-1\right)$

考え方　因数分解された形の関数の極限ですから，展開して求めることもできます。

しかし，この形のまま，積の極限は極限の積になることを使って計算するほうが，簡単にできます。

解　答　(1) $\lim_{x\to 1}(x^2+1)=2$, $\lim_{x\to 1}(-x+2)=1$ であるから，関数の極限の公式を用いて

$$\lim_{x\to 1}(x^2+1)(-x+2)=\lim_{x\to 1}(x^2+1)\lim_{x\to 1}(-x+2)=2\times1=\mathbf{2}$$

(2) $\lim_{x\to +\infty}\left(\dfrac{1}{x}+3\right)=3$, $\lim_{x\to +\infty}\left(\dfrac{1}{x^2}-1\right)=-1$ であるから，関数の極限の公式を用いて

$$\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{1}{x}+3\right)\left(\frac{1}{x^2}-1\right)=\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{1}{x}+3\right)\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{1}{x^2}-1\right)=3\times(-1)=\mathbf{-3}$$

この形は，基礎解析でも出てきた形です。極限が有限になることをおさえておいて，計算していきます。

トレーニング

4 次の極限値を求めなさい。

(1) $\lim_{x \to 0}(x^2+2)(x+1)$

(2) $\lim_{x \to 2}(2x+1)(x^2+3x-5)$

5 次の極限値を求めなさい。

(1) $\lim_{x \to 2}x^2(2x^2-3x+1)$

(2) $\lim_{x \to -1}(2x+3)(3x^2+5x+1)$

(3) $\lim_{t \to \frac{1}{2}}(t+1)(2t^2-t+2)$

(4) $\lim_{h \to 0}(h^2-h+3)(h+2)$

6 次の極限値を求めなさい。

(1) $\lim_{x \to 1}\dfrac{x^2+2}{x^2}$

(2) $\lim_{x \to 0}\dfrac{x^2+3x+2}{x+1}$

7 次の極限値を求めなさい。

(1) $\lim_{x \to 0}\dfrac{3x+2}{x^2+2x+1}$

(2) $\lim_{x \to 2}\dfrac{2x^3-x^2-3x}{x+1}$

(3) $\lim_{t \to -1} \dfrac{3t^2+2t+3}{4t+1}$　　(4) $\lim_{h \to 0} \dfrac{1+h}{2-3h+h^2}$

こんどは，約分や有理化をして極限を求める問題の例です。

例題 3　　**関数の極限の計算（分母を 0 とする商）**

次の極限を求めなさい。

(1) $\lim_{x \to -1} \dfrac{x^2-1}{x+1}$　　(2) $\lim_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{x-1}-1}{x-2}$

考え方　商の形の関数の極限ですが，それぞれ分母の極限を求めてみると，(1)では，$\lim_{x \to -1}(x+1)=0$，(2)では，$\lim_{x \to 2}(x-2)=0$ で分母の極限が 0 になりますから，商の形の関数の極限の公式 $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$ をそのまま適用することはできません。

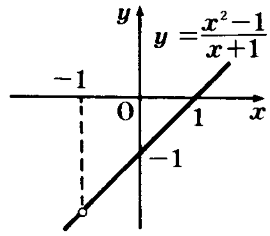
そこで，式変形をして分母が 0 にならないようにしてから極限を求めます。式変形には，次のような方法があります。

(i)　分母・分子を因数分解し，共通因数で約分する。

(ii)　根号を含むときは，共役数を分母・分子にかける。

解　答　(1) $x \neq -1$ のとき，$\dfrac{x^2-1}{x+1} = \dfrac{(x+1)(x-1)}{x+1} = x-1$ であるから

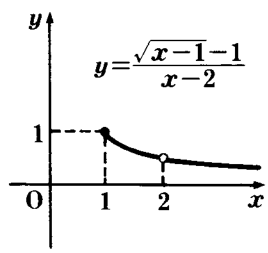
$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2-1}{x+1} = \lim_{x \to -1}(x-1) = \mathbf{-2}$$



(2) $x \neq 2$ のとき，$\dfrac{\sqrt{x-1}-1}{x-2} = \dfrac{(\sqrt{x-1}-1)(\sqrt{x-1}+1)}{(x-2)(\sqrt{x-1}+1)}$

$= \dfrac{x-1-1}{(x-2)(\sqrt{x-1}+1)} = \dfrac{x-2}{(x-2)(\sqrt{x-1}+1)} = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}+1}$ であるから

$$\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x-1}-1}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{1}{\sqrt{x-1}+1} = \mathbf{\frac{1}{2}}$$



与えられた式の形がそのままでは求められませんから，式を変形してから求めています。次のトレーニングで，この解き方も理解してしまいましょう。

トレーニング

8 次の極限を求めなさい。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^2+4x-5}{x^2+x-2}$

9 次の極限を求めなさい。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to -2}\frac{x^2-4}{x+2}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^2+2x-3}{x^2-6x+5}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{2x^2-3x-2}$

10 次の極限を求めなさい。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$

11 次の極限を求めなさい。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$

12 次の極限を求めなさい。

(1) $\displaystyle\lim_{x \to -2}\frac{x+2}{\sqrt{x+6}-2}$

(2) $\displaystyle\lim_{x \to 0}\frac{x}{\sqrt{2-x}-\sqrt{2}}$

13 次の極限を求めなさい。

(1) $\displaystyle\lim_{x \to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}$

(2) $\displaystyle\lim_{x \to 1}\frac{x^2-1}{\sqrt{x+3}-2}$

約分する方法や，根号を含むときは，共役なものをかける方法など，わかりましたね。
こんどは，そのままの形では，分母と分子が無限大になってしまう形のものです。

例題 4 **関数の極限の計算（分母・分子とも ∞ の商）**

次の極限を求めなさい。

(1) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty}\frac{x^2+x-2}{2x^2+1}$

(2) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty}\frac{2x-1}{x^2+2x+1}$

考え方 商の形の関数の極限ですが，それぞれ分母・分子の極限を求めてみると，すべて $+\infty$ になり，これは有限な極限値ではないので，公式をそのまま使うことはできません。

そこで，式変形をして，分母・分子とも極限が有限な値になるようにしてから，もとの関数の極限を求めます。

解　答

(1)　$x \neq 0$ のとき，$\dfrac{x^2+x-2}{2x^2+1}=\dfrac{1+\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}}{2+\dfrac{1}{x^2}}$ であるから

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+x-2}{2x^2+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}}{2+\dfrac{1}{x^2}}$$

ここで，$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)=1$，$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(2+\frac{1}{x^2}\right)=2$ より

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+x-2}{2x^2+1}=\frac{\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}{\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(2+\frac{1}{x^2}\right)}=\boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

(2)　$x \neq 0$ のとき，$\dfrac{2x-1}{x^2+2x+1}=\dfrac{\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x^2}}{1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}}$ であるから

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-1}{x^2+2x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x^2}}{1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}}$$

ここで，$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)=0$，$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)=1$ より

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-1}{x^2+2x+1}=\frac{\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}{\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}=\frac{0}{1}=\mathbf{0}$$

分母と分子が有限な値になるように，最高の次数のもので分母，分子を割っています。この方法も大切です。では，トレーニングしましょう。

トレーニング

14　次の極限を求めなさい。

(1)　$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2+3}{5x^2+x+7}$　　(2)　$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{4x^2+3x+2}{2x^2-5x+9}$

15 次の極限を求めなさい。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2-5x+8}{9x^2+3x-7}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{5x^2-x-3}{x^2+6x}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+1}{3x^2-4x+6}$　　(4) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{7x^2+x-5}{3x+4}$

できましたね。では，こんどは，そのままの形では，無限大と無限大の差の形になっている関数の極限計算です。この場合も，まず，式変形をします。もうひと息ですから，がんばりましょう。

例題 5　　**関数の極限の計算（∞ の差）**

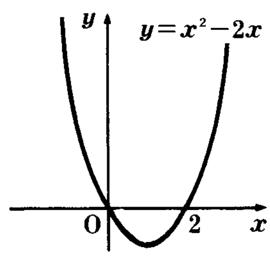
次の極限を求めなさい。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(x^2-2x)$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)$

考え方　差の形の関数の極限ですが，それぞれの項の極限が $+\infty$ になるので，公式をそのまま用いることはできません。

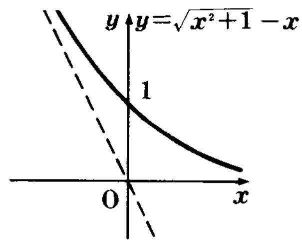
そこで，式変形をしてからもとの関数の極限を求めます。

解　答　(1) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(x^2-2x)=\lim_{x\to+\infty}x^2\left(1-\frac{2}{x}\right)=+\infty$



(2) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x}$

$\displaystyle=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=\mathbf{0}$



最高次数をくくり出す，共役なものをかけてみる，という方法はよく使う方法です。では，トレーニングで解法を理解してしまいましょう。これで，きょうは最後です。

トレーニング

16 次の極限を求めなさい。

(1) $\lim_{x \to +\infty} (x^3 - 3x^2 + 2)$

(2) $\lim_{x \to -\infty} (x^4 - 8x^3)$

(3) $\lim_{x \to -\infty} (4x^3 - 2x + 7)$

(4) $\lim_{x \to +\infty} (3x^2 - 4x + 5)$

17 次の極限を求めなさい。

(1) $\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$

(2) $\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - x)$

18 次の極限を求めなさい。

(1) $\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x+2} - \sqrt{x})$

(2) $\lim_{x \to +\infty} (x - \sqrt{x^2 + 1})$

19 次の極限を求めなさい。

(1) $\lim_{x \to +\infty}(\sqrt{x^2-1}-x)$

(2) $\lim_{x \to +\infty}(\sqrt{2x-1}-\sqrt{x})$

(3) $\lim_{x \to +\infty}(\sqrt{x^2+2x+1}-x)$

(4) $\lim_{x \to +\infty}(\sqrt{4x^2+x-1}-2x)$

きょうは，極限の計算で出てくる問題をパターン別にとりあげて練習してきました。極限の計算で出てくる基本形は，これで全部です。ごくろうさまでした。

第 15 日	学習日　　月　　日 **関数の極限の復習**

第15日　関数の極限の復習

きょうは，第12日，第13日，第14日で学習してきた関数の極限の復習をします。

ここでは，極限の計算が正しく出来ることがねらいです。きょうは，主として計算問題をとりあげて練習することにします。

では，はじめましょう。

トレーニング

1 $\lim_{x \to a} f(x)=\alpha$，$\lim_{x \to a} g(x)=\beta$ のとき，次の極限値を求めなさい。ただし α，β は有限の値とします。

(1) $\lim_{x \to a}\{2f(x)+g(x)\}$　　(2) $\lim_{x \to a}\{3f(x)-5g(x)\}$

2 $\lim_{x \to a} f(x)=\alpha$，$\lim_{x \to a} g(x)=\beta$ のとき，次の極限値を求めなさい。ただし α，β は有限の値とします。

(1) $\lim_{x \to a}\{f(x)g(x)\}$　　(2) $\lim_{x \to a} 2\{f(x)\}^3\{g(x)\}^5$

3 次の極限を求めなさい。

(1) $\lim_{x \to -2}|x+2|$　　(2) $\lim_{x \to 2}(|x-2|+2)$

(3) $\lim_{x \to 3} |x^2-9|$

(4) $\lim_{x \to 0} |x^2-3|$

4 次の極限を求めなさい。

(1) $\lim_{x \to -1} \frac{(x+1)^2}{|x^2-1|}$

(2) $\lim_{x \to 3} \frac{(x-3)^2}{|x^2-9|}$

5 次の極限を求めなさい。

(1) $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2}$

(2) $\lim_{x \to +\infty} \frac{2}{(x+1)^2}$

(3) $\lim_{x \to +\infty} \left(1-\frac{1}{x^2}\right)$

(4) $\lim_{x \to +\infty} \left\{3-\frac{1}{(x-2)^2}\right\}$

6 次の極限値を求めなさい。

(1) $\lim_{x \to 2} x(x+1)$

(2) $\lim_{x \to 2} (x^3+1)(x-3)^2$

(3) $\lim_{t \to -1}(t^2-3)(t-2)$

(4) $\lim_{h \to 2}(h^2+1)(h-3)$

7 次の極限値を求めなさい。

(1) $\lim_{x \to 1}\frac{x+1}{x}$

(2) $\lim_{x \to 0}\frac{3x^2-x-4}{2x+2}$

(3) $\lim_{t \to 4}\frac{t+2}{t^2+t-18}$

(4) $\lim_{h \to 2}\frac{h^2-2h+5}{h^2+2h-5}$

8 次の極限値を求めなさい。

(1) $\lim_{x \to 0}\frac{4x+x^3}{3x-x^2}$

(2) $\lim_{x \to -2}\frac{x^2+x-2}{x^2-3x-10}$

(3) $\lim_{t \to -1}\frac{t+1}{t^2-2t-3}$

(4) $\lim_{h \to 0}\frac{h^3+h}{h}$

9 次の極限を求めなさい。

(1) $\lim_{x \to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$

(2) $\lim_{x \to 1}\frac{\sqrt{x+8}-3}{2(x-1)}$

(3) $\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}$

(4) $\lim_{x \to 2} \frac{2\sqrt{x+2}-4}{3(x-2)}$

10 次の極限を求めなさい。

(1) $\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sqrt{x+1}-1}$

(2) $\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{\sqrt{x+2}-\sqrt{3}}$

(3) $\lim_{x \to 1} \frac{x^2-3x+2}{\sqrt{x+3}-2}$

(4) $\lim_{x \to 2} \frac{x^2+2x-8}{\sqrt{x-1}-1}$

11 次の極限を求めなさい。

(1) $\lim_{x \to +\infty} \frac{4x^2+x}{3x^2+x+4}$

(2) $\lim_{x \to -\infty} \frac{6x^2+2x-3}{2x^2-3x+7}$

12 次の極限を求めなさい。

(1) $\lim_{x \to -\infty} (\sqrt{x^2-2}+x)$

(2) $\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{2x^2+3}-x)$

(3) $\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2+3x}-2x)$

(4) $\lim_{x \to +\infty} (x+1-\sqrt{x^2+x+1})$

第 16 日

学習日　　月　　日

指数関数・対数関数・三角関数の極限

きょうは，指数関数，対数関数，三角関数の極限について学習していきます。

これらの関数の極限を調べるには，まず，関数のグラフの形状をしっかりおさえておくことが大切です。

では，指数関数から順に，極限を考えていくことにしましょう。

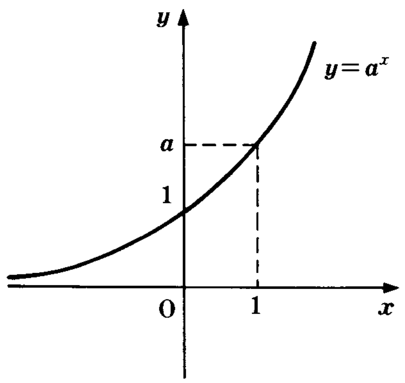
● 指数関数の極限

定数 a を底とする x の指数関数

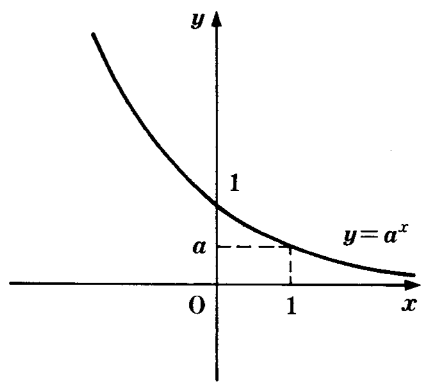
$$f(x)=a^x \qquad (a \neq 1,\ a>0)$$

のグラフは，次のようになります。

$a>1$ の場合



$0<a<1$ の場合



《注》 $a>1$ と $0<a<1$ の場合では，グラフがまったく異なります。

このグラフから，次の式が成り立つことがわかります。

$a>1$ の場合　　$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} a^x=+\infty$，$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} a^x=0$

$0<a<1$ の場合　　$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} a^x=0$，$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} a^x=+\infty$

たとえば，次のようになります。

$$\lim_{x\to+\infty} 2^x=+\infty,\quad \lim_{x\to-\infty} 2^x=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^x=0,\quad \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^x=+\infty$$

指数関数では，まず底の a に注意します。底が 1 より大きいか，小さいかによって，関数のグラフがまったく違ってきます。では，例題をしてみましょう。

基本例題 1 　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　**指数関数の極限**

次の極限を求めなさい。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}3^x$ 　　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 　　　(3) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{2^x+2^{-x}}{2^x-2^{-x}}$

考え方 　基礎解析で学習した指数関数のグラフをしっかり覚えていれば，(1)と(2)は簡単です。指数関数の底を 1 と比較して，1 より大きければ単調に増加し，1 より小さければ単調に減少します。また，どちらも値域は正の数全体です。

(3)は，2^{-x} を負の指数を用いない表し方にし，$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}2^x=+\infty$ であることが使えるように，式変形します。

解　答 (1) 指数関数 $y=3^x$ は，底が $3>1$ であるから，単調に増加し，x の値が限りなく大きくなれば y の値も限りなく大きくなる。

よって　　$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}3^x=+\infty$

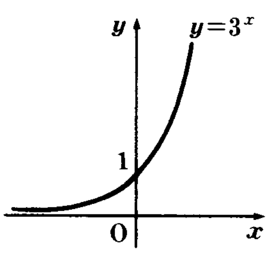
(2) 指数関数 $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ は，底が $0<\dfrac{1}{2}<1$ であるから，単調に減少し，x の値が限りなく大きくなれば y の値は限りなく 0 に近づく。

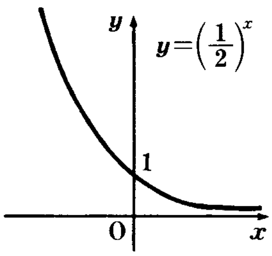
よって　　$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x=\mathbf{0}$

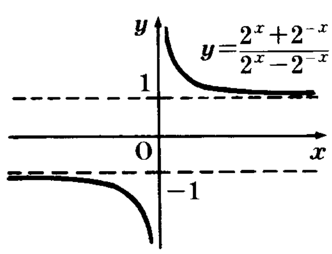
(3) $$\frac{2^x+2^{-x}}{2^x-2^{-x}}=\frac{2^x+\dfrac{1}{2^x}}{2^x-\dfrac{1}{2^x}}=\frac{1+\dfrac{1}{(2^x)^2}}{1-\dfrac{1}{(2^x)^2}}=\frac{1+\dfrac{1}{2^{2x}}}{1-\dfrac{1}{2^{2x}}}$$

ここで，$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2^{2x}}=0$ であるから　$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2^{2x}}\right)=1$，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^{2x}}\right)=1$

よって　　$$与式=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\dfrac{1}{2^{2x}}}{1-\dfrac{1}{2^{2x}}}=\frac{\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2^{2x}}\right)}{\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{2^{2x}}\right)}=\frac{1}{1}=\mathbf{1}$$







わかりましたね。(3)は，そのままでは，分母，分子が無限大になる形ですから，まず式変形しなければなりません。では，トレーニングしましょう。

トレーニング

1 次の極限を求めなさい。

(1) $\lim_{x \to +\infty} 3^x$

(2) $\lim_{x \to +\infty} (0.5)^{-x}$

(3) $\lim_{x \to -\infty} 5^{-x}$

(4) $\lim_{x \to -\infty} 100^x$

2 次の極限を求めなさい。

(1) $\lim_{x \to +\infty} 2^{-x}$

(2) $\lim_{x \to -\infty} 3^x$

(3) $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^x$

(4) $\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^{-x}$

3 次の極限を求めなさい。

(1) $\lim_{x \to +\infty} \frac{2^x + 2^{-x}}{2^x - 2^{-x}}$

(2) $\lim_{x \to +\infty} \frac{2^x + 3^{-x}}{2^x - 3^{-x}}$

4 次の極限を求めなさい。

(1) $\lim_{x \to +\infty} \frac{5^x - 5^{-x}}{5^x + 5^{-x}}$

(2) $\lim_{x \to +\infty} \frac{2^x - 2^{-x}}{3^x + 3^{-x}}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{2^x+5^{-x}}{2^x-5^{-x}}$　　　　(4) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{3^x-5^{-x}}{5^x+3^{-x}}$

5 関数$\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$について，$x\to+0$ と $x\to-0$ のときの極限を求めなさい。

こんどは，対数関数の極限について考えてみましょう。

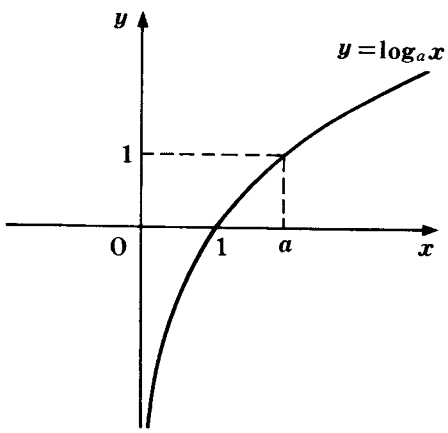
●対数関数の極限

定数 a を底とする x の対数関数

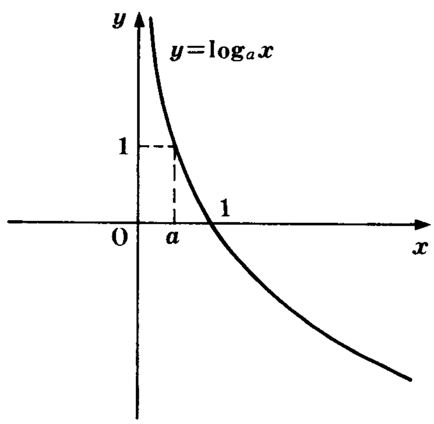
$$f(x)=\log_a x \qquad (a\neq 1,\ a>0)$$

のグラフは，次のようになります。

$a>1$ の場合



$0<a<1$ の場合



《注》 $a>1$ と $0<a<1$ の場合では，グラフがまったく異なります。

このグラフから，次の式が成り立つことがわかります。

$a>1$ の場合　　$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\log_a x=+\infty$，$\displaystyle\lim_{x\to+0}\log_a x=-\infty$

$0<a<1$ の場合　　$\lim_{x\to+\infty}\log_a x=-\infty$，$\lim_{x\to+0}\log_a x=+\infty$

たとえば，次のようになります。

$\lim_{x\to+\infty}\log_2 x=+\infty$，$\lim_{x\to+0}\log_2 x=-\infty$

$\lim_{x\to+\infty}\log_{\frac{1}{3}} x=-\infty$，$\lim_{x\to+0}\log_{\frac{1}{3}} x=+\infty$

対数関数の場合も，底 a が1より大きいか，小さいかでグラフが違ってきます。ですから，底 a の大きさに十分注意する必要があります。

基本例題 2　　**対数関数の極限**

次の極限を求めなさい。

(1) $\lim_{x\to+\infty}\log_{\frac{1}{2}} x$　　(2) $\lim_{x\to+0}\log_3 2x$　　(3) $\lim_{x\to1+0}\{\log_{\frac{1}{2}}(x^2-1)-\log_{\frac{1}{2}}(x+1)\}$

考え方　指数関数の極限と同様に，基礎解析で学習した対数関数のグラフをしっかり覚えていれば，(1)と(2)は簡単です。対数関数の底を1と比較して，1より大きければ単調に増加し，1より小さければ単調に減少します。また，どちらも値域は実数全体です。

(3)は，対数関数の差を商の対数関数に変える公式を用います。

解　答　(1)　対数関数 $y=\log_{\frac{1}{2}}x$ は，底が $0<\dfrac{1}{2}<1$ であるから，単調に減少し，x の値が限りなく大きくなれば y の値は負でその絶対値は限りなく大きくなる。

よって　　$\lim_{x\to+\infty}\log_{\frac{1}{2}} x=-\infty$

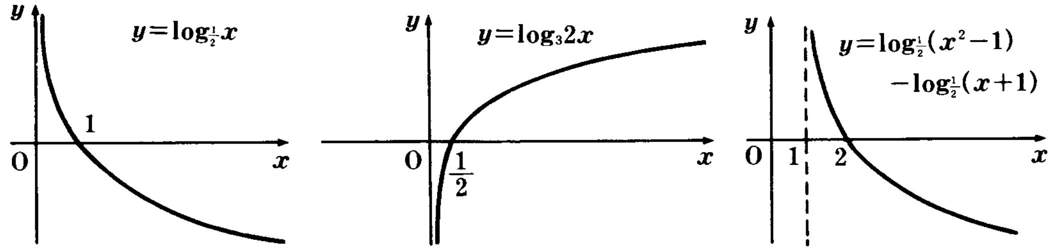
(2)　対数関数 $y=\log_3 2x$ は，底が $3>1$ であるから，単調に増加し，x の値が $x>0$ で限りなく0に近くなれば，$2x$ の値も $2x>0$ で限りなく0に近くなるので，y の値は負でその絶対値は限りなく大きくなる。

よって　　$\lim_{x\to+0}\log_3 2x=-\infty$

(3)　$\log_{\frac{1}{2}}(x^2-1)-\log_{\frac{1}{2}}(x+1)=\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{x^2-1}{x+1}=\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{(x+1)(x-1)}{x+1}=\log_{\frac{1}{2}}(x-1)$

ここで，対数関数 $y=\log_{\frac{1}{2}}(x-1)$ は，底が $0<\dfrac{1}{2}<1$ であるから，x の値が $x>1$ で限りなく1に近くなれば，$x-1$ の値も $x-1>0$ で限りなく0に近くなるので，y の値は限りなく大きくなる。

よって　　$\lim_{x\to1+0}\{\log_{\frac{1}{2}}(x^2-1)-\log_{\frac{1}{2}}(x+1)\}=\lim_{x\to1+0}\log_{\frac{1}{2}}(x-1)=+\infty$



(3)のような場合は，まず，対数の性質を使って変形することです。
では，対数関数の極限の問題を解いてみましょう。

トレーニング

6 次の極限を求めなさい。

(1) $\lim_{x \to \infty} \log_{10}(x+1)$

(2) $\lim_{x \to +0} \log_2(3x)$

(3) $\lim_{x \to \infty} \log_{\frac{1}{2}}(5x)$

(4) $\lim_{x \to +0} \log_{\frac{1}{2}}(2x)$

7 次の極限を求めなさい。

(1) $\lim_{x \to 1+0} \{\log_2(x-1) - \log_2(x^2-1)\}$

(2) $\lim_{x \to +\infty} \{\log_2(4x^2+1) - 2\log_2 x\}$

8 次の極限を求めなさい。

(1) $\lim_{x \to 1+0} \{\log_{\frac{1}{2}}(x^2-1) - \log_{\frac{1}{2}}(x-1)\}$

(2) $\lim_{x \to 1+0} \{\log_3(x-1) - \log_3(x^3-1)\}$

(3) $\lim_{x \to +\infty} \{\log_2(x^3-2x) - 3\log_2 x\}$

(4) $\lim_{x \to +\infty} \{\log_2(2x^2+3x-1) - 2\log_2 2x\}$

9 次の極限を求めなさい。

(1) $\lim_{x \to +\infty} \{ \log_a x - \log_a (x+1) \}$

(2) $\lim_{x \to +\infty} \{ 2\log_b x - \log_b (x^2+2) \}$

10 次の極限を求めなさい。

(1) $\lim_{x \to +\infty} \{ \log_a (x^2+x+1) - 2\log_a (x+2) \}$

(2) $\lim_{x \to +\infty} \{ 3\log_a (x+1) - \log_a (x^3+2x) \}$

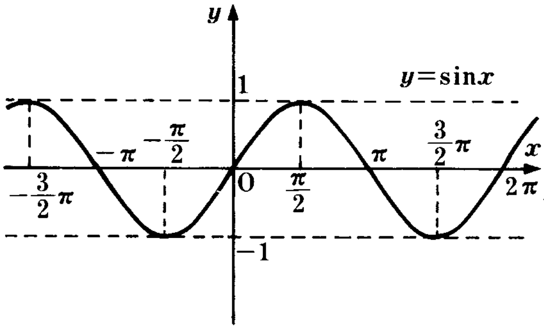
(3) $\lim_{x \to +\infty} \{ 3\log_a x - 2\log_a (x+1) \}$

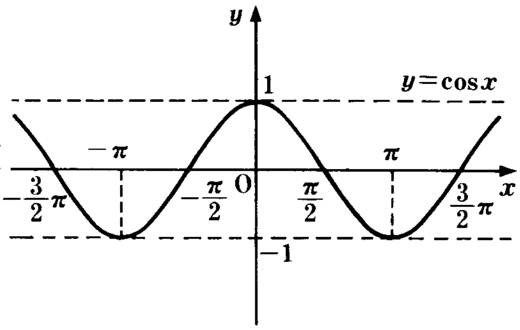
(4) $\lim_{x \to +\infty} \{ 2\log_a (x^2+2) - 3\log_a (x-1) \}$

対数関数の極限はわかりましたね。
つぎは，三角関数の極限について考えます。

●三角関数の極限

三角関数 $\sin x$，$\cos x$，$\tan x$ のグラフは次のようになります。





ここで，$x \to \dfrac{\pi}{2}$ の極限を調べてみましょう。

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \sin x = \sin\frac{\pi}{2} = 1$$

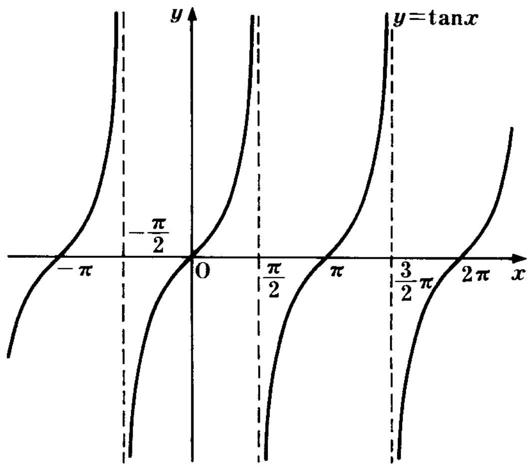
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \cos x = \cos\frac{\pi}{2} = 0$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+0} \tan x = -\infty$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0} \tan x = +\infty$$

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \tan x$ はなし

となります。



また，$x \to +\infty$ あるいは $x \to -\infty$ とするとき，$\sin x$，$\cos x$，$\tan x$ は，一定の値に近づくということがありませんから，このとき，これらの極限は，いずれも存在しません。

三角関数での極限をまとめると次のようになります。

□ 三角関数の極限 □

[I] $\lim\limits_{x\to a} \sin x = \sin a$ （a は定数）

[II] $\lim\limits_{x\to a} \cos x = \cos a$ （a は定数）

[III] $\lim\limits_{x\to a} \tan x = \tan a$ $\left(a \text{ は定数，ただし } a \neq n\pi + \dfrac{\pi}{2}, \ n \text{ は整数} \right)$

$a = n\pi + \dfrac{\pi}{2}$ のとき $\lim\limits_{x\to a+0} \tan x = -\infty$，$\lim\limits_{x\to a-0} \tan x = +\infty$ より

$\lim\limits_{x\to a} \tan x$ はなし。

《注》 $a = n\pi + \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\tan x$ は $x \to a+0$(右から近づく)で $-\infty$ に発散し，$x \to a-0$(左から近づく)で $+\infty$ に発散します。近づき方によって極限が異なりますから，このとき $\tan x$ の極限はありません。

では，この三角関数の極限をもとに，次の例題をしてみましょう。

例題 3 **三角関数の極限**

次の極限を求めなさい。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\cos^2 x}$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1-\tan x}{\cos x-\sin x}$

考え方 与えられた形のまま分母の極限を求めると，(1), (2)とも分母の極限値が 0 になるので，このままでは全体の極限は求められません。

ですから，式変形をしますが，(1)では分母の $\cos^2 x$，(2)では分子の $\tan x$ をそれぞれ，変形します。

解 答 (1) $\cos^2 x=1-\sin^2 x$ より

$$\frac{1-\sin x}{\cos^2 x}=\frac{1-\sin x}{1-\sin^2 x}=\frac{1-\sin x}{(1-\sin x)(1+\sin x)}=\frac{1}{1+\sin x}$$

ここで，$\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\sin x)=1+1=2$ であるから

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\cos^2 x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\sin x}=\boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

(2) $\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$ より

$$\frac{1-\tan x}{\cos x-\sin x}=\frac{1-\dfrac{\sin x}{\cos x}}{\cos x-\sin x}=\frac{\dfrac{\cos x-\sin x}{\cos x}}{\cos x-\sin x}=\frac{1}{\cos x}$$

ここで，$\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\cos x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ であるから

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1-\tan x}{\cos x-\sin x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos x}=\frac{1}{\dfrac{1}{\sqrt{2}}}=\boldsymbol{\sqrt{2}}$$

与えられた式を変形して求めている方法がわかりますね。では，トレーニングで練習しましょう。

トレーニング

11 次の極限を求めなさい。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\sin 2x$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to+0}2\cos\frac{3}{x}$

(3) $\lim_{x \to -\infty} (\sin x + \cos x)$

(4) $\lim_{x \to +0} \left(\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} \right)$

12 次の極限を求めなさい。

(1) $\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{\sin^2 x}$

(2) $\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{1-\tan^2 x}{\cos x - \sin x}$

13 次の極限を求めなさい。

(1) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x}{1-\cos x}$

(2) $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{2\sin x}{(1-\sin x)(1+\tan^2 x)}$

(3) $\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{\tan x - 1}$

(4) $\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{1-2\cos^2 x}{1-\tan x}$

できましたね。きょうは，指数関数，対数関数，三角関数の極限を練習してきました。それぞれのグラフの形が，考えるときの基本です。これで，きょうは終わりです。

第 17 日　不等式と極限値の関係

学習日　　月　　日

この前の日までで，指数関数，対数関数，三角関数の極限を求めるところまで進んできました。

きょうは，不等式と極限値の関係，また，極限値から，関数を決めることを学習します。

はじめに，極限値と不等式の関係からです。まず，説明を理解してから，具体的な応用例を例題で見ることにしましょう。

●不等式と極限値の関係

関数の極限について，次のことが成り立ちます。

□ 不等式と極限値の関係 □

[I] $\lim_{x \to a} f(x)=\alpha$，$\lim_{x \to a} g(x)=\beta$ であって，しかも，$x=a$ の近くで不等式 $f(x) \leqq g(x)$ が成り立つならば $\alpha \leqq \beta$ である。

[II] $\lim_{x \to a} f(x)=\lim_{x \to a} g(x)=\alpha$ であって，しかも，$x=a$ の近くで不等式 $f(x) \leqq h(x) \leqq g(x)$ が成り立つならば $\lim_{x \to a} h(x)=\alpha$ である。

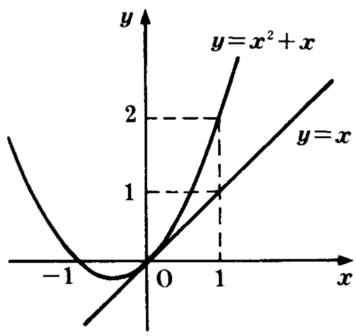
《注》 これらの公式は，$x \to a$ のかわりに $x \to +\infty$，$x \to -\infty$ としても成り立ちます。

[I]において，$x \neq a$ のときつねに $f(x)<g(x)$ であっても，必ずしも $\alpha<\beta$ とはならないことに注意して下さい。

たとえば

$$f(x)=x,\quad g(x)=x^2+x$$

とすると，$x \neq 0$ のとき，つねに $f(x)<g(x)$ となっていますが，図からもわかるように



$$\lim_{x \to 0} f(x)=\lim_{x \to 0} g(x)=0$$

となって，$\lim_{x \to 0} f(x)<\lim_{x \to 0} g(x)$ ではありません。

[II]は，たとえば，極限値 $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sin x}{x}$ を求めるのに役立ちます。すなわち，$x>0$ として，$-1 \leqq \sin x \leqq 1$ の各辺を x で割ると

$$-\frac{1}{x} \leqq \frac{\sin x}{x} \leqq \frac{1}{x}$$

ここで

$$f(x)=-\frac{1}{x},\quad g(x)=\frac{1}{x},\quad h(x)=\frac{\sin x}{x}$$

とおけば，$f(x) \leqq h(x) \leqq g(x)$ であって

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} g(x)=0$$ ⇐$h(x)$をはさむ$f(x)$と$g(x)$がともに0

となります。したがって，[II]を利用すると

$$\lim_{x\to+\infty} h(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x}=0$$

であることがわかります。

説明の内容をよりはっきりさせるために不等式と極限値の関係を実際に使っている例題を解いてみることにしましょう。

例題 1 **不等式と極限値の関係**

次の極限を求めなさい。

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\cos x$$

考え方 $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\cos x=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cos x}{x}$ ですから，ここで，分母と分子のそれぞれの極限を調べてみると，分母の極限は $\lim_{x\to+\infty} x=+\infty$，分子の極限は存在しません。しかし，$-1\leqq\cos x\leqq1$ ですから，形式的に $\frac{a}{+\infty}(-1\leqq a\leqq1)$ となり，これは0になりそうですが，これでは解答の予想でしかありません。

ですから，ここでは，不等式で表される関数の極限の関係

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\alpha$，$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\alpha$（$\alpha$は有限な値）かつ $f(x)\leqq h(x)\leqq g(x)$ ならば

$$\lim_{x\to+\infty} h(x)=\alpha$$

を使います。

そのために，$\frac{1}{x}\cos x$ を x を含む不等式で表すことを考えます。

解　答 $x\to+\infty$ を考えているので，$x>0$ としてよい。

このとき，$-1\leqq\cos x\leqq1$ であるから　$-\frac{1}{x}\leqq\frac{1}{x}\cos x\leqq\frac{1}{x}$

ここで，$-\frac{1}{x}$，$\frac{1}{x}$ の極限を考えると　$\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)=0$，$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$

よって　$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\cos x=\mathbf{0}$

解き方はわかりましたね。0と0ではさまれて，求める極限値が0になることが証明できました。同様の考え方で極限値を求めてみましょう。

トレーニング

1 次の極限を求めなさい。

(1) $\lim_{x\to0} x\sin\frac{1}{x}$　　(2) $\lim_{x\to+\infty} x\cos\frac{1}{x}$

2 次の極限を求めなさい。

(1) $\lim_{x\to\infty}\frac{\cos x}{x}$

(2) $\lim_{x\to\infty}(x+\cos x)$

3 次の極限を求めなさい。

(1) $\lim_{x\to 0}x^2\sin\frac{1}{x^2}$

(2) $\lim_{x\to +\infty}x^2\cos\frac{1}{x^2}$

4 次の極限を求めなさい。

(1) $\lim_{x\to\infty}\frac{\sin^2 x}{x}$

(2) $\lim_{x\to\infty}\frac{\cos x}{2^x}$

(3) $\lim_{x\to\infty}(4x+2+\cos^2 x)$

(4) $\lim_{x\to\infty}\left(x^2+\cos\frac{1}{x}\right)$

こんどは，関数の極限から，関数を決めることを考えてみます。

●関数の極限と係数決定

たとえば，次の等式が成り立つように，定数 a，b の値を求めることを考えてみましょう。

$$\lim_{x\to1}\frac{ax^2+b}{x-1}=1 \qquad (1)$$

まず，$x\to1$ とすると，分母 $x-1\to0$ となることに注目して下さい。このとき，分子 ax^2+b の極限がどうなるかを調べてみましょう。そのために，$x-1\neq0$ として

$$ax^2+b=\frac{ax^2+b}{x-1}\cdot(x-1) \qquad \Leftarrow(1)と同じ形が出るように変形$$

と変形してみます。ここで，(1)が成り立つとすれば，$x\to1$ で $\dfrac{ax^2+b}{x-1}$，$x-1$ はともに収束するので

$$\lim_{x\to1}(ax^2+b)=\lim_{x\to1}\frac{ax^2+b}{x-1}\cdot\lim_{x\to1}(x-1)=1\times0=0$$

となることがわかります。したがって，

$$\lim_{x\to1}(ax^2+b)=a+b=0$$

ゆえに　$b=-a$

よって，(1)より

$$\lim_{x\to1}\frac{ax^2+b}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{ax^2-a}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{a(x+1)(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to1}a(x+1)=2a=1$$

ゆえに　$a=\dfrac{1}{2}$，$b=-\dfrac{1}{2}$

逆に，$a=\dfrac{1}{2}$，$b=-\dfrac{1}{2}$ とすると，たしかに

$$\lim_{x\to1}\frac{ax^2+b}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{2(x-1)}=\lim_{x\to1}\frac{x+1}{2}=1$$

となります。したがって，求める a，b の値は

$$a=\frac{1}{2},\quad b=-\frac{1}{2}$$

であることがわかります。

以上から，関数 $\dfrac{ax^2+b}{x-1}$ において，$\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{ax^2+b}{x-1}=1$，$\displaystyle\lim_{x\to1}(x-1)=0$ ならば，$\displaystyle\lim_{x\to1}(ax^2+b)=0$ となります。

一般に，このことをまとめると，次のようになります。

□ 関数の極限と係数決定 □

関数 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ において

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\alpha,\quad \lim_{x\to a}g(x)=0 \quad ならば \qquad \lim_{x\to a}f(x)=0$$

である。

説明はわかりましたね。では，この考え方を使って，実際に例題を解いてみましょう。

例題 2 **関数の極限と係数決定**

次の等式が成り立つように，定数 a，b の値を定めなさい。

$$\lim_{x\to-1}\frac{ax^2+bx+1}{x+1}=2$$

考え方

$\displaystyle\lim_{x\to-1}\frac{ax^2+bx+1}{x+1}$ において，分母の極限が $\displaystyle\lim_{x\to-1}(x+1)=0$ になるので，$\displaystyle\lim_{x\to-1}\frac{ax^2+bx+1}{x+1}=2$ となるには，分子の極限も $\displaystyle\lim_{x\to-1}(ax^2+bx+1)=0$ でなければなりません。

このことから，a，b の値を求めますが，それでは必要条件を求めたにすぎません。ですから，逆に求めた a，b の値が，確かに等式を成り立たせているという十分条件にもなっていることも示します。

解　答

$\displaystyle\lim_{x\to-1}\frac{ax^2+bx+1}{x+1}=2$ において，分母の極限 $\displaystyle\lim_{x\to-1}(x+1)=0$ であるから $\displaystyle\lim_{x\to-1}(ax^2+bx+1)=0$ でなければならない。

$\displaystyle\lim_{x\to-1}(ax^2+bx+1)=a-b+1$ より　$a-b+1=0$

よって　$b=a+1$　………①

与えられた等式の左辺に代入して

$$\lim_{x\to-1}\frac{ax^2+bx+1}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{ax^2+(a+1)x+1}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(ax+1)}{x+1}=\lim_{x\to-1}(ax+1)$$
$$=-a+1$$

これより，$-a+1=2$ であるから　$a=-1$

①に代入して　$b=-1+1=0$

逆に，$a=-1$，$b=0$ のとき

$$\lim_{x\to-1}\frac{ax^2+bx+1}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{-x^2+1}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{-(x+1)(x-1)}{x+1}=\lim_{x\to-1}\{-(x-1)\}=2$$

で，これは確かに条件をみたしている。

ゆえに　$\boldsymbol{a=-1,\ b=0}$

注　意　　必要条件，十分条件というのは

「p ならば q である」が成り立つとき

q を p であるための　必要条件

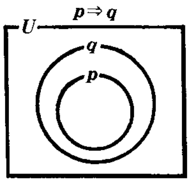
p を q であるための　十分条件

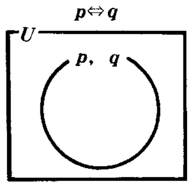
といいます。また，

「p ならば q である」と「q ならば p である」が同時に成り立つとき

q を p であるための　必要十分条件

といいます。





求めた値が，等式を成り立たせているか調べることも，きちんとおさえておきます。

では，トレーニングの問題を解いていきましょう。分母が0となり，かつ極限値が有限であるとすると，分子も0にならなければならないということですね。

トレーニング

5 次の等式が成り立つように，定数 a，b の値を定めなさい。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to-1}\frac{x^2+ax+b}{x+1}=3$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x^2+ax+b}{x}=1$

6 次の式が有限な値をもつように定数 a の値を定め，その極限値を求めなさい。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{4+3x}+a}{x}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to3}\frac{x^3+ax^2-x+3}{x-3}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{1+2x^2}+a}{x-2}$　　(4) $\displaystyle\lim_{x\to-2}\frac{x^3-x^2+ax+4}{x+2}$

7 $f(x)=\dfrac{x^3+ax^2+bx+6}{x^2+5x+6}$ のとき，$\lim_{x\to-2}f(x)$，$\lim_{x\to-3}f(x)$ がともに有限な値となるように a，b の値を定めなさい。また，それぞれの極限値も求めなさい。

8 $\lim_{x\to+\infty}(2x+a-\sqrt{4x^2+3x+1})=0$ となるように定数 a の値を定めなさい。

9 $\lim_{x\to+\infty}(x+2a-\sqrt{x^2+3})=0$ となるように定数 a の値を定めなさい。

きょうは，不等式と極限値の関係と，極限から関数を決定する問題を練習しました。
これで，終わりにします。

第 18 日

三角関数と極限

学習日　　月　　日

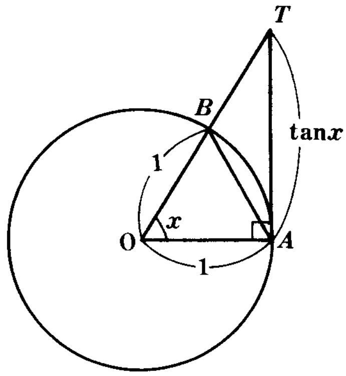
きょうは，関数の極限の最後として，極限を求める計算でしばしば出てくる，三角関数の極限の形を学習し，それを応用する問題を練習することにします。

まず，三角関数で成り立つ極限の関係式の説明からはじめましょう。

●三角関数と極限

三角関数について，基本となる極限について調べてみましょう。これからは，とくに断わらない限り，角の単位は弧度法によるものとします。

$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ として，図のように，半径 1 の円 O の周上に，$\angle \mathrm{AOB}=x$ となるように，2 点 A，B をとります。さらに，点 A における接線と半直線 OB との交点を T とします。



ここで，△OAB，おうぎ形 OAB，△OAT の面積を計算してみると

$$\triangle \mathrm{OAB}=\frac{1}{2}\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}\cdot\sin\angle\mathrm{AOB}$$
$$=\frac{1}{2}\sin x$$

$$\text{おうぎ形 OAB}=\frac{1}{2}\mathrm{OA}^2\cdot\angle\mathrm{AOB}=\frac{1}{2}x$$

$$\triangle\mathrm{OAT}=\frac{1}{2}\mathrm{OA}\cdot\mathrm{AT}=\frac{1}{2}\tan x$$

したがって，△OAB＜おうぎ形OAB＜△OAT であることから

$$\frac{1}{2}\sin x<\frac{1}{2}x<\frac{1}{2}\tan x$$

ゆえに　$\sin x<x<\tan x$

この不等式の各辺を $\sin x(>0)$ で割って，各辺の逆数をとると

$$1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x}$$

ゆえに　$1>\dfrac{\sin x}{x}>\cos x$

ここで，$\lim\limits_{x\to+0}\cos x=1$ であることから，次の等式が得られます。

$$\lim_{x\to+0}\frac{\sin x}{x}=1 \qquad \cdots\cdots\cdots(1)$$

また，$x<0$ の場合には，$x=-x'$ とおくと，$x'>0$ となって

$$\lim_{x\to -0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x'\to +0}\frac{\sin(-x')}{-x'}=\lim_{x'\to +0}\frac{\sin x'}{x'}=1 \qquad \cdots\cdots\cdots(2)$$

となります。

したがって，(1)，(2)を合わせて，次の公式が得られます。

□ 三角関数と極限 □

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

また，上の結果から，x の絶対値が十分に小さい場合には

$$\frac{\sin x}{x}\fallingdotseq 1$$

ゆえに　$\sin x\fallingdotseq x$

と考えてよいことがわかります。ただし，x は弧度法で表した角です。1° のように度を使って表している角は $1^\circ=\dfrac{\pi}{180}$（ラジアン）と弧度法で表してから計算します。

《注》「A≒B」は，「A ニアリィ・イコール B」と読み，「A と B はほぼ等しい」ことを意味しています。

三角関数の極限の公式はわかりましたね。この極限は，よく出てきますから，しっかり理解しておくことです。では，この公式を使って例題を解いてみましょう。

基本例題 1　　　　三角関数と極限(1)

次の極限を求めなさい。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}$　　　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}$

考え方　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ を応用しますが，(1)の $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}$ で，$x\to 0$ のとき $2x\to 0$ だから，$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}=1$ と答えては間違いです。$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ が使えるのは，単に，分母の極限が 0，分子の極限が 0 になればいいのではなく，分子の sin の中と分母がまったく同じで，しかも，ともに極限が 0 にならなければいけないのです。

ですから，まず，sin の中と分母を同じにするくふうをします。

(2)では，分母と分子が逆になっているので，逆数を考えます。

解　答　(1) $\displaystyle\frac{\sin 2x}{x}=2\cdot\frac{\sin 2x}{2x}$ であるから，$X=2x$ とおくと　$x\to 0$ のとき，$X\to 0$

よって　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}=\lim_{x\to 0}2\cdot\frac{\sin 2x}{2x}=2\lim_{X\to 0}\frac{\sin X}{X}=2\times 1=\mathbf{2}$

(2) $\displaystyle\frac{x}{\sin x}=\frac{1}{\frac{\sin x}{x}}$ で，$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ であるから

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{\sin x}{x}}=\frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}}=\frac{1}{1}=\mathbf{1}$$

注意　(1)で，分子を2倍角の公式 $\sin 2x=2\sin x\cos x$ を使って

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x\cos x}{x}=\lim_{x\to 0}2\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\cos x=2\times 1\times 1=2$$

と解くこともできますが，この方法は一般的ではありません。ですから，解答のように分母に $\sin$ の中と同じ $2x$ を導く方法で解きます。

今後，(2)の結果 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1$ も $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ と同様に証明なしで使ってもかまいません。

例題の解き方はわかりますね。sin の中の式と分母の式を同じくするのです。ここが，解法上のポイントです。なお，ここでは，ことわらない限り，角度はすべてラジアンで表したものです。では，トレーニングです。

トレーニング

1 次の極限を求めなさい。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{2x}$

2 次の極限を求めなさい。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 1.4x}{3x}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{3}}$　　(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{3}{7}x}{\frac{7}{2}x}$

3 次の極限を求めなさい。

(1) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin 4x}{\sin 3x}$

(2) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\tan 2x}{x}$

4 次の極限を求めなさい。

(1) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\tan x^4}{\sin^4 x}$

(2) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin x^2}{1-\cos x}$

5 $x \to 0$ のとき，$\dfrac{\sin 2x}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}$ の極限を求めなさい。

6 $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin x^\circ}{x} = \dfrac{\pi}{180}$ であることを証明しなさい。

つぎに，三角関数の極限を使う例題をもう1つしてみましょう。三角関数の式変形を利用して解く問題です。

例題 2 三角関数と極限(2)

次の極限を求めなさい。

$$\lim_{x \to 0}\frac{\cos 2x-\cos x}{x^2}$$

考え方 $\lim_{x \to 0}\frac{\cos 2x-\cos x}{x^2}$ で，分母・分子の極限をそれぞれ求めてみると，$\lim_{x \to 0}x^2=0$，$\lim_{x \to 0}(\cos 2x-\cos x)=0$ で，分母・分子ともに極限値は0になるので，このままでは，極限値は求まりません。

そこで，式変形をするのですが，分子の $\cos 2x-\cos x$ に注目して，基礎解析で学習した三角関数の和を積になおす公式

$$\cos A-\cos B=-2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$

を使います。

解 答 $\cos 2x-\cos x=-2\sin\frac{2x+x}{2}\sin\frac{2x-x}{2}=-2\sin\frac{3x}{2}\sin\frac{x}{2}$ であるから

$$\lim_{x \to 0}\frac{\cos 2x-\cos x}{x^2}=\lim_{x \to 0}\frac{-2\sin\frac{3x}{2}\sin\frac{x}{2}}{x^2}=\lim_{x \to 0}(-2)\cdot\frac{\sin\frac{3x}{2}}{\frac{3x}{2}}\cdot\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cdot\frac{3}{2^2}$$

$$=-2\times 1\times 1\times\frac{3}{2^2}=-\boldsymbol{\frac{3}{2}}$$

注 意 和を積になおす公式を忘れたら，加法定理から導けるようにしておきましょう。

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$ ………①

$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$ ………②

①−②より

$\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)=-2\sin\alpha\sin\beta$

ここで，$\alpha+\beta=A$，$\alpha-\beta=B$ とおくと，$\alpha=\frac{A+B}{2}$，$\beta=\frac{A-B}{2}$ であるから

$$\cos A-\cos B=-2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$

三角関数の式変形を使って，三角関数の極限が使える形にもちこんでいます。

では，がんばってトレーニングしましょう。最後の問題は，やや応用的な問題です。

トレーニング

7 次の極限を求めなさい。

(1) $\lim_{x \to 0}\frac{\cos 3x-\cos x}{x^2}$　　(2) $\lim_{x \to 0}\frac{x(\sin 4x-\sin 2x)}{\cos 5x-\cos 3x}$

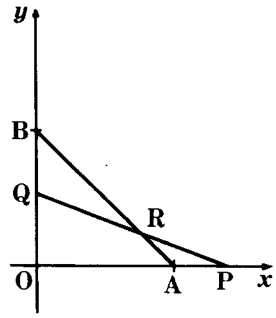
8 次の極限を求めなさい。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{\cos7x+\cos x}{\sin7x+\sin3x}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\cos3x-\cos5x}{\cos x-\cos5x}$

9 定点Aはx軸の正の部分に，定点Bはy軸の正の部分にあり，点Pがx軸上を，点Qがy軸上の正の部分を，$\triangle$OPQ$=\triangle$OABをみたしながら動くとします。

Pが A にかぎりなく近づくとき，PQとABの交点Rはどのような点に近づいていきますか。



きょうは，三角関数の極限ということで，三角関数でしばしば出てくる極限の形を学習しました。このつぎは，関数の極限の復習です。

第 19 日

学習日　　月　　日

指数・対数関数，三角関数の極限の復習

きょうは，第16日から第18日までに学習した指数関数，対数関数，三角関数の極限について復習します。

いままでに学習した内容から精選した問題をとりあげてあります。中には，ややむずかしいものもありますが，がんばって解いてみましょう。では，トレーニングをはじめなさい。

トレーニング

1 次の極限を求めなさい。

(1) $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{5^x + 5^{-x}}{5^x - 5^{-x}}$

(2) $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{4^x + 4^{-x}}{2^x - 2^{-x}}$

(3) $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{3^x - 4^{-x}}{3^x + 4^{-x}}$

(4) $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{5^x - 2^{-x}}{3^x + 4^{-x}}$

2 次の極限を求めなさい。

(1) $\lim_{x \to +\infty} \{ \log_a(x^2+4) - 2\log_a(x+1) \}$

(2) $\lim_{x \to +\infty} \{ \log_b(x-1) - 2\log_b x \}$

3 次の極限を求めなさい。

(1) $\lim_{x \to +0} \tan\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

(2) $\lim_{x \to -0} \tan\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

4 次の極限を求めなさい。

(1) $\lim_{x \to 0} x \cos\frac{1}{x}$

(2) $\lim_{x \to 0} x \tan x$

(3) $\lim_{x \to -\infty} x \cos\frac{1}{x}$

(4) $\lim_{x \to +\infty} x^2 \cos^2 x$

5 $0 < a < 1 < b$ であるとき，極限 $\lim_{x \to +\infty} (a^{2x} + b^x)^{\frac{1}{x}}$ を求めなさい。

6 次の式が有限な値をもつように定数 a の値を定め，その極限値を求めなさい。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to-1}\frac{\sqrt{x^2+1}+a}{x+1}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{x^3-6x^2+ax-6}{x-1}$

7 $f(x)=\dfrac{x^3+ax^2+bx+36}{x^2-x-12}$ のとき，$\displaystyle\lim_{x\to-3}f(x)$，$\displaystyle\lim_{x\to4}f(x)$ がともに有限な値となるように a，b の値を定めなさい。また，それぞれの極限値も求めなさい。

8 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(x+a-\sqrt{x^2+2x+2})=0$ となるように定数 a の値を定めなさい。

9 $f(x)$ が次の 2 つの条件を満足するとき，$f(x)$ を求めなさい。ただし，$f(x)$ は，x の整式とします。

(i) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2+3x+2}=3$

(ii) $\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{2x^2-7x+6}=3$

10 次の極限を求めなさい。

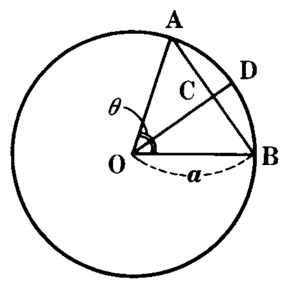
(1) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin 2x}{x}$　　(2) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin 6x}{7x}$

11 $x \to 0$ のとき，$\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sin x^2}$ の極限を求めなさい。

12 半径 a の円 O の周上に，中心角 θ の弧 AB をとり，弦 AB，弧 AB の中点を，それぞれ C，D とする。

弧 AB の長さを $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ で表すとき，次の極限を求めなさい。

(1) $\lim_{\theta \to 0} \dfrac{\overset{\frown}{\mathrm{AB}}}{\mathrm{AB}}$　　(2) $\lim_{\theta \to 0} \dfrac{\mathrm{CD}}{\mathrm{AB}}$



第20日　関数の連続性

学習日　　月　　日

きょうから3日間は，関数の極限に続いて，関数の連続性ということを学習します。説明事項がどうしても多くなりますので，説明をよく理解しながら進めましょう。

まず，はじめは，開区間と閉区間という用語の意味の説明からです。

●開区間・閉区間

次の不等式

$$a<x<b,\quad a\leqq x\leqq b,\quad a<x\leqq b,\quad a\leqq x<b$$

をみたすような x 全体の集合をいずれも**区間**といって，それぞれ記号を用いて

$$(a,\ b),\ [a,\ b],\ (a,\ b],\ [a,\ b)$$

のように表します。とくに，$(a,\ b)$ を**開区間**，$[a,\ b]$ を**閉区間**といいます。また，このほか，次の不等式

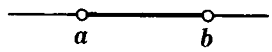
$$a<x,\quad a\leqq x,\quad x<b,\quad x\leqq b$$

をみたすような x 全体の集合も，それぞれ区間といって，それぞれ記号を用いて

$$(a, \infty),\ [a, \infty),\ (-\infty,\ b),\ (-\infty,\ b]$$

のように表します。さらに，実数全体の集合も1つの区間と考えて，記号で $(-\infty, \infty)$ のように表すことにします。

開区間$(a,\ b)$



閉区間$[a,\ b]$

《注》 区間を表すとき，(,)の記号は両端の数を含まず，[,]の記号は両端の数を含んでいます。ですから，区間の両端を含まないとき，その区間を開区間といい，両端とも含むとき，その区間を閉区間というのです。また，∞，$-\infty$ は数ではないので，閉区間の [,] は使えずに，つねに，開区間の (,) を使って表します。

開区間と閉区間の意味，開区間，閉区間を表す記号はわかりましたね。

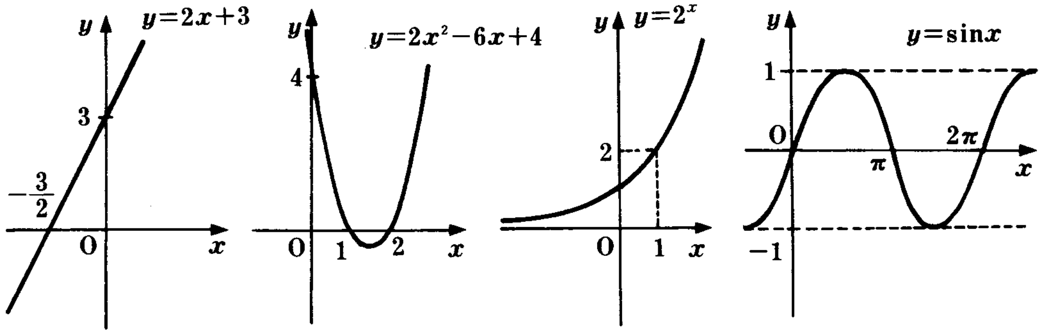
つぎは，関数が連続であることの説明です。グラフが切れ目なくつながっていれば，関数は連続しているわけですが，ここでは，数学的に正しく表現するにはどうするかということを説明しましょう。

●関数の連続性

これまでに扱ってきた関数

$$ax+b,\quad ax^2+bx+c,\quad a^x,\quad \sin x$$

などは，いずれも区間 $(-\infty, \infty)$ で定義されていて，これらの関数のグラフは，どこにも切れ目がなく続いています。また，関数 $\log_a x$ は区間 $(0, \infty)$ で定義されていて，グラフはこの区間で切れ目がなく続いています。



このように，グラフがどこにも切れ目がなく続いているような関数を**連続な関数**といいます。

関数の連続ということを正確にいうと，次のようになります。

□ 関数の連続性 □

[I] 関数 $f(x)$ において，定義域内の $x=a$ に対して，極限値 $\lim_{x\to a} f(x)$ が存在して

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$$

が成り立つとき，$f(x)$ は $x=a$ で連続であるという。

[II] 関数 $f(x)$ において，ある区間内の任意の $x=a$ で連続であるとき，$f(x)$ はその区間で連続であるという。

《注》 [I] は，$x=a$ という1点での連続の定義です。$x=a$ で関数 $f(x)$ が連続であるとは，x がどのように a に近づいても極限値が1つに定まり，その極限値が，$f(x)$ に $x=a$ を代入した $f(a)$ に等しいということです。

[II] は，ある特定の区間での連続の定義です。区間内のすべての点で，[I] の意味において，連続ならば，その区間で連続ということです。

関数，$f(x)$ が連続でないことを**不連続である**といいます。したがって，関数 $f(x)$ が $x=a$ で不連続となるのは，次のような場合です。

① 関数 $f(x)$ において，$x=a$ に対して $f(a)$ が存在しない。

② 関数 $f(x)$ において，極限値 $\lim_{x\to a} f(x)$ が存在しない。

③ 関数 $f(x)$ において，$f(a)$ および，極限値 $\lim_{x\to a} f(x)$ が存在しても $\lim_{x\to a} f(x) \neq f(a)$ となっている。

たとえば，$(-\infty, \infty)$で定義されている関数

$$f(x)=\begin{cases} x & (x \neq 1 \text{のとき}) \\ 0 & (x=1 \text{のとき}) \end{cases}$$

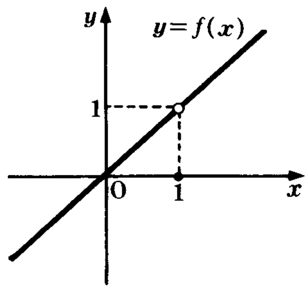
は$x=1$で不連続です。

というのは，関数$f(x)$の定義より　$f(1)=0$

また，$\lim_{x \to 1} f(x)=1$ですから，$f(1)$と$\lim_{x \to 1} f(x)$はいずれも存在します。

しかし，$\lim_{x \to 1} f(x) \neq f(1)$となるので，$f(x)$は$x=1$で不連続です。

これは，③の場合です。



関数の連続を正確にいうと，まとめのような表現になります。では，この表現にのっとって関数が連続かどうかを調べる例題をしてみましょう。

基本例題 1　　**関数の連続性**

次の関数は$x=0$で連続ですか。ただし，$[x]$はxをこえない最大の整数を表します。

(1)　$f(x)=\begin{cases} x+1 & (x \neq 0) \\ 0 & (x=0) \end{cases}$　　　(2)　$f(x)=[x]$

考え方　$x=0$で連続かどうか調べるのですから，次のようにします。

（i）　$x=0$に対して，極限値$\lim_{x \to 0} f(x)$が存在するかどうか調べます。

存在しなければ，$x=0$で不連続

存在するときは，つぎに

（ii）　$f(0)$を求め，$\lim_{x \to 0} f(x)$とくらべます。

$\lim_{x \to 0} f(x)=f(0)$ならば，$x=0$で連続

$\lim_{x \to 0} f(x) \neq f(0)$ならば，$x=0$で不連続

です。

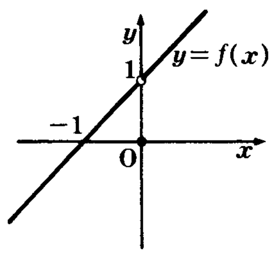
解　答　(1)　$x \neq 0$において，$f(x)=x+1$であるから

$\lim_{x \to 0} f(x)=\lim_{x \to 0}(x+1)=1$

また，定義より　$f(0)=0$

以上より　$\lim_{x \to 0} f(x) \neq f(0)$

よって，関数$f(x)$は$x=0$で**不連続**である。



(2) $[x]$ の定義より

$-1 \leqq x < 0$ のとき　$f(x)=-1$

$0 \leqq x < 1$ のとき　$f(x)=0$

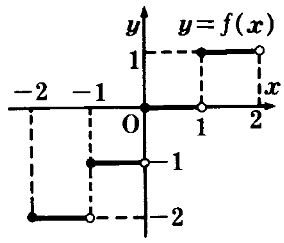
であるから，$\lim_{x \to 0} f(x)$ は

$\lim_{x \to -0} f(x) = \lim_{x \to -0} [x] = -1$

$\lim_{x \to +0} f(x) = \lim_{x \to +0} [x] = 0$

となって存在しない。

よって，関数 $f(x)$ は $x=0$ で**不連続**である。



$x=a$ での連続を調べる方法がわかりましたね。トレーニングで，例題の解き方にならって，問題を解いてみましょう。

トレーニング

1　$x \neq 0$ のとき　$f(x)=x^2+1$

$x=0$ のとき　$f(x)=0$

で定義される関数 $f(x)$ は $x=0$ で連続ですか。

2　$x \neq -1$ のとき　$f(x)=x^3+x^2$

$x=-1$ のとき　$f(x)=0$

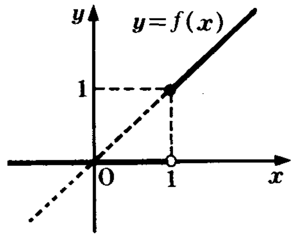
で定義される関数 $f(x)$ は $x=-1$ で連続かどうか調べなさい。

つぎに，関数の連続で，さらに右側連続と，左側連続ということについて説明します。

●関数の左側連続・右側連続

$(-\infty,\infty)$ で定義されている関数

$$f(x)=\begin{cases} x & (x \geqq 1 \text{ のとき}) \\ 0 & (x<1 \text{ のとき}) \end{cases}$$



を考えてみましょう。この関数 $f(x)$ では，$f(1)$ は存在して $f(1)=1$ なのですが

$$\lim_{x \to 1+0} f(x)=1, \quad \lim_{x \to 1-0} f(x)=0$$

となっているので，極限 $\lim_{x \to 1} f(x)$ は存在しません。したがって，この関数 $f(x)$ も $x=1$ で不連続です。

ところで，この状況をよく観察してみると，次の等式が成り立っていることがわかります。

$$\lim_{x \to 1+0} f(x)=f(1)$$

$$\lim_{x \to 1-0} f(x) \neq f(1)$$ ⇦左側から1に近づくとき，$f(1)$ に等しくない。

このことを，$f(x)$ は

$x=1$ で**右側連続**であるが，**左側連続**でない（左側不連続）

といいます。

右側連続と左側連続のことを，次のように定義します。

□ 関数の右側連続・左側連続 □

［I］ 関数 $f(x)$ において，定義域内の $x=a$ に対して，極限値 $\lim_{x \to a+0} f(x)$ が存在して

$$\lim_{x \to a+0} f(x)=f(a)$$

が成り立つとき，$f(x)$ は $x=a$ で右側連続であるという。

［II］ 関数 $f(x)$ において，定義域内の $x=a$ に対して，極限値 $\lim_{x \to a-0} f(x)$ が存在して

$$\lim_{x \to a-0} f(x)=f(a)$$

が成り立つとき，$f(x)$ は $x=a$ で左側連続であるという。

関数 $f(x)$ が，$x=a$ で連続というのは，$x=a$ に対して極限値 $\lim_{x \to a} f(x)$ が存在して，$\lim_{x \to a} f(x)=f(a)$ ということでした。ですから，関数 $f(x)$ が $x=a$ で連続であるというのは

関数 $f(x)$ が $x=a$ で右側連続で，かつ左側連続である

すなわち

$$\lim_{x \to a+0} f(x)=\lim_{x \to a-0} f(x)=f(a)$$

ということと同じであることがわかります。

関数が右側連続である，また，左側連続であるという意味がわかりましたか。$x=a$ で関数が連

続であるということは，$x=a$ で右側連続でかつ左側連続ということです。では，右側連続と左側連続の考えを使って，閉区間での連続の説明をします。

●区間における関数の連続性

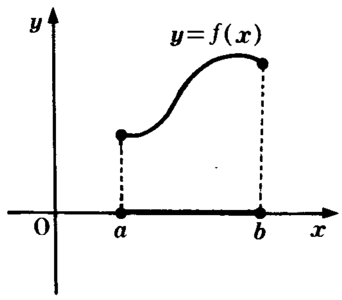
ここで，区間における関数の連続について，もうすこしくわしく説明しておきましょう。関数 $f(x)$ がある区間で連続であるということは

その区間内の任意の点で連続である

ということです。

右側連続，左側連続の考え方を使うと，関数 $f(x)$ が $x=a$ で連続である，ということは，$x=a$ で右側連続でかつ左側連続であるということになります。

さて，関数 $f(x)$ が閉区間 $[a,\ b]$ で定義されていて，この区間内で連続であるとき，端の点 a，b での連続はどうなるでしょうか。



点 a での連続をいうためには，$x=a$ での右の極限値 $\lim_{x\to a+0} f(x)$ と左の極限値 $\lim_{x\to a-0} f(x)$ を考えなければなりません。

しかし，$f(x)$ は $[a,\ b]$ で定義されていますから，$x=a$ での左の極限値を考えるわけにいきません。

同様に，点 b での連続をいうときにも，$x=b$ の右の極限値を使っていうことができません。そこで，閉区間での連続を次のように定義しなおすことにします。

□ 閉区間での連続 □

> 関数 $f(x)$ が閉区間 $[a,\ b]$ で定義されていて，開区間 $(a,\ b)$ に属する任意の点で連続であり，端の点 a，b において
>
> $$\lim_{x\to a+0} f(x)=f(a) \qquad \lim_{x\to b-0} f(x)=f(b)$$
>
> が成り立つとき，関数 $f(x)$ は閉区間 $[a,\ b]$ で連続であるという。

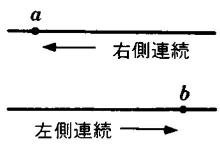
《注》 関数 $f(x)$ が端を含む区間内で連続であるというためには，右側連続，左側連続という考え方でいわなくては正しい表現にならないのです。

一般に，関数 $f(x)$ がある区間で連続であるとき

その区間が左の端を含むときは，その点で右側連続

その区間が右の端を含むときは，その点で左側連続

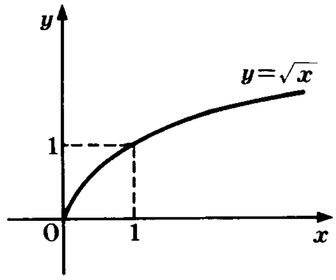
であればよいのです。



たとえば，

$$f(x)=\sqrt{x} \quad (x \geqq 0)$$

は，区間 $(0, \infty)$ で連続であって，$x=0$ で右側連続です。したがって，この関数は $x=0$ の端点を含む $[0, \infty)$ で連続であるということができます。



端点を含む区間，すなわち，閉区間での関数の連続をいうためには，まとめのように，右側連続と左側連続の考えを使って表現します。

では，右側連続と，左側連続の考え方を使う問題をしてみましょう。

トレーニング

3 関数 $f(x)=\sqrt{x}$ の $x=0$ における連続性を調べなさい。ただし，定義域は $x \geqq 0$ です。

4 関数 $f(x)=\sqrt[4]{x+2}$ は $x=-2$ において連続かどうか調べなさい。ただし，定義域は $x \geqq -2$ です。

区間が端点を含むときは，その点で右側連続，あるいは左側連続ということを考えて，その点において連続かどうかを調べるのです。

関数の連続ということで，ちょっとむずかしい話しが出てきましたね。つぎに，連続な関数の性質をとりあげましょう。

●連続な関数の性質

2つの関数 $f(x)$，$g(x)$ がともに $x=a$ で連続であるとすれば

$$\lim_{x\to a}f(x)=f(a),\quad \lim_{x\to a}g(x)=g(a)$$

が成り立ちます。したがって，関数の極限の計算の公式より

$$\lim_{x\to a}cf(x)=c\lim_{x\to a}f(x)=cf(a)\quad (c\text{ は定数})$$

$$\lim_{x\to a}\{f(x)\pm g(x)\}=\lim_{x\to a}f(x)\pm\lim_{x\to a}g(x)=f(a)\pm g(a)\quad (\text{複号同順})$$

$$\lim_{x\to a}f(x)g(x)=\lim_{x\to a}f(x)\cdot\lim_{x\to a}g(x)=f(a)\cdot g(a)$$

さらに，$g(a)\neq 0$　ならば

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to a}f(x)}{\lim_{x\to a}g(x)}=\frac{f(a)}{g(a)}$$

となります。したがって，次のことが成り立つことになります。

□ 連続な関数の性質 □

関数 $f(x)$，$g(x)$ がともに $x=a$ で連続ならば

$$cf(x),\ f(x)+g(x),\ f(x)-g(x),\ f(x)g(x),\ \frac{f(x)}{g(x)}$$

は，いずれも $x=a$ で連続である。ただし　c は定数，$g(a)\neq 0$

関数を定数倍したもの，関数の和，差，積が連続となるという説明でした。では，最後に，具体的な関数で，それらがどんな区間で連続となるかを説明することにします。

●いろいろな関数の連続性

これまで扱ってきたいろいろな関数について，それぞれどのような区間で連続であるかをまとめておきましょう。

関数 $y=x$ は $(-\infty,\infty)$ で連続ですから，連続な関数の性質から，x をいくつかかけ合わせてできる関数

$$x,\ x^2,\ \cdots\cdots,\ x^n$$

はすべて $(-\infty,\infty)$ で連続です。したがって，これらに定数をかけて加えて得られる整関数（x の整式で表される関数）

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n$$

も，$(-\infty,\infty)$ で連続となります。

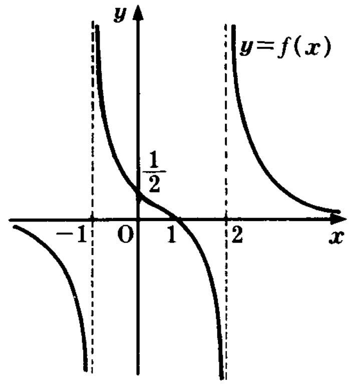
また，x の有理式（分数式）で表される有理関数

$$\frac{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots\cdots+b_{m-1}x+b_m}{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n}$$

は，定義域内のすべての実数値で連続です。

たとえば

$$f(x)=\frac{x-1}{x^2-x-2}$$



の分母を0とする x の値は $x=-1,\ 2$ です。したがって，この関数の定義域は，次の3つの区間からなります。

$$(-\infty,\ -1),\ (-1,\ 2),\ (2,\infty)$$

そして，この関数は，上の3つの区間で連続となっています。参考までに，この関数のグラフの概形は図のようになっています。

同様に

無理関数　$\sqrt{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n}$

三角関数　$\sin x$，$\cos x$，$\tan x$

指数関数　a^x　$(a\neq 1,\ a>0)$

対数関数　$\log_a x$　$(a\neq 1,\ a>0)$

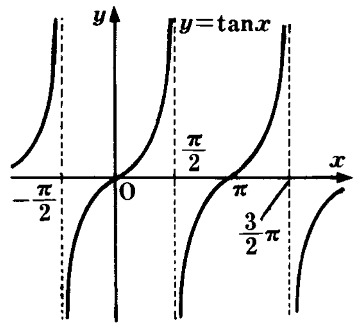
などは，いずれも定義域内のすべての実数値で連続です。

また，それぞれの定義域は次のようです。

$\sin x$，$\cos x$，a^x の定義域は　$(-\infty,\infty)$

$\tan x$ の定義域は　$x\neq n\pi+\dfrac{\pi}{2}$　(n は整数)

$\log_a x$ の定義域は　$(0,\infty)$



なお，$\tan x$ のグラフは，図のようになっていたことを思い出してください。

では，関数がどんな区間で連続となるかという例題をすることにしましょう。

基本例題 2　いろいろな関数の連続性

次の関数が連続となる区間を求めなさい。

(1)　$y=3x^3-x+1$　　(2)　$y=\dfrac{x}{1-x^2}$　　(3)　$y=-\sin x$

(4)　$y=-\sqrt{1-x^2}$　　(5)　$y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-x}$　　(6)　$y=\log_{10}|x|$

考え方　整関数，有理関数（分数関数），無理関数，三角関数，指数関数，対数関数はすべて，それぞれの定義域内の実数値で連続です。

定義域内の実数値というのは

整関数では，すべての実数値

有理関数では，分母を0にしないすべての実数値

無理関数では，根号の中が正または0となるすべての実数値

三角関数では，正弦と余弦がすべての実数値

正接が $n\pi+\dfrac{\pi}{2}$（n は整数）以外のすべての実数値

指数関数では，すべての実数値

対数関数では，真数が正となるすべての実数値

です。ただし，(6)のように絶対値記号を含む関数は注意しなければなりません。

解　答　(1)　関数 $y=3x^3-x+1$ は x についての整関数であるから，すべての実数値で連続である。

よって　$(-\infty,\ +\infty)$

(2)　関数 $y=\dfrac{x}{1-x^2}$ は x についての有理関数であるから，その定義域は $1-x^2\neq 0$ である。これより，$x\neq 1$，$x\neq -1$ のすべての実数値で連続である。

よって　$(-\infty,\ -1)$，$(-1,\ 1)$，$(1,\ +\infty)$

(3)　関数 $y=-\sin x$ は x についての三角関数（正弦）であるから，すべての実数値で連続である。

よって　$(-\infty,\ +\infty)$

(4)　関数 $y=-\sqrt{1-x^2}$ は x についての無理関数であるから，その定義域は $1-x^2\geqq 0$ である。これより，$-1\leqq x\leqq 1$ のすべての実数値で連続である。

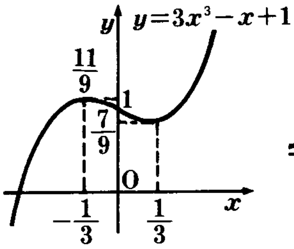
よって　$[-1,\ 1]$

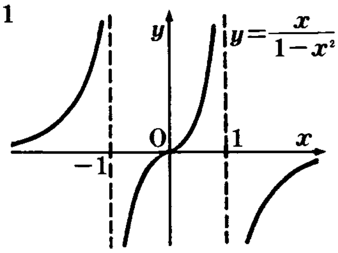
(5)　関数 $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-x}$ は x についての指数関数であるから，すべての実数値で連続である。

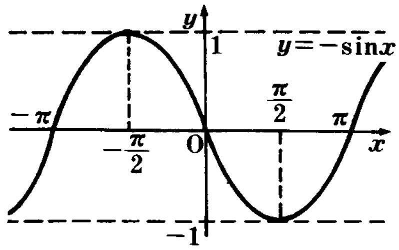
よって　$(-\infty,\ +\infty)$

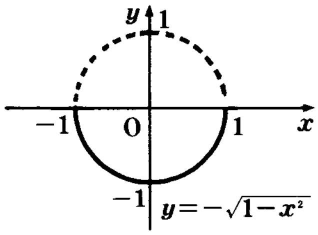
(6)　関数 $y=\log_{10}|x|$ は x についての対数関数であるから，その定義域は $|x|>0$ である。これより，$x\neq 0$ のすべての実数値で連続である。

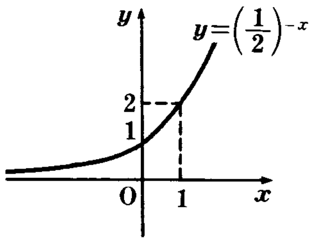
よって　$(-\infty,\ 0)$，$(0,\ +\infty)$

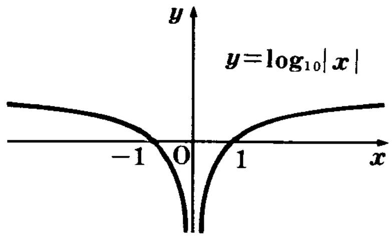












連続となる区間を調べるには，連続な関数の性質を使って調べることになります。では，例題の解き方を参考にして，次の問題を解いてみることにしましょう。これで，きょうは終わりです。

トレーニング

5 関数 $y=3^x-\cos 2x$ は，x のすべての実数値に対して連続ですか。

6 関数 $f(x)=2^x+\tan x$ は，x のすべての実数値に対して連続かどうか調べなさい。

きょうは，たくさん説明があって大変でした。よくがんばりましたね。もしわからないところがあったら，もう一度，説明を読んでおきましょう。

第21日 連続関数の性質（中間値の定理）

学習日　　月　　日

きょうは，関数の連続に続いて，連続な関数の性質について学習します。

まずはじめに，最大値と最小値を求めることに関すること，つぎに，中間値の定理，最後に，逆関数をもつ条件をとりあげます。いずれも，関数の連続ということに，考え方の基礎をおいています。では，最大値，最小値についてはじめましょう。

● 連続関数の最大・最小

開区間や閉区間で定義されている関数の最大値・最小値について考えてみましょう。

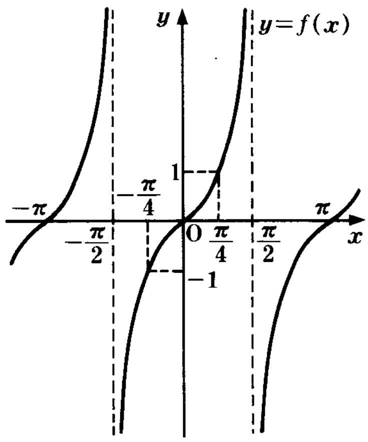
たとえば，関数

$$f(x)=\tan x$$

は，開区間 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ で連続です。このとき

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0} f(x)=+\infty,\quad \lim_{x\to-\frac{\pi}{2}+0} f(x)=-\infty$$

であることが，図からもわかります。したがって，この開区間では，この関数 $f(x)$ の絶対値はいくらでも大きくすることができます。よって，開区間では，$f(x)$ の最大値は存在しません。同様にして，最小値も存在しません。



《注》 ここで，$+\infty$ と $-\infty$ を最大値と最小値ということはできません。$+\infty$ も $-\infty$ も値ではないからです。

ところが，閉区間 $\left[-\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{\pi}{4}\right]$ で考えると，この関数 $f(x)$ の最大値と最小値のいずれも存在して，

$$最大値\ f\left(\frac{\pi}{4}\right)=1,\quad 最小値\ f\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-1$$

となることがグラフからわかります。

一般に，次の定理が成り立ちます。

□ 連続関数の最大・最小 □

> 関数 $f(x)$ が閉区間 $[a,\ b]$ で連続ならば，
>
> $f(x)$ はこの区間でかならず最大値および最小値をとることができる。

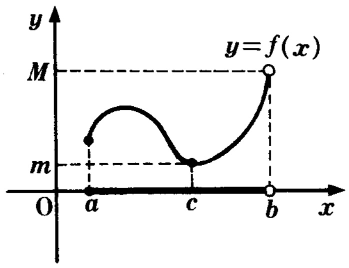
《注》 この定理を「ワイヤストラス (Weierstrass) の定理」といいます。この定理をきちんと証明することは高等学校の数学の範囲内ではできませんので，直観的に認めてお

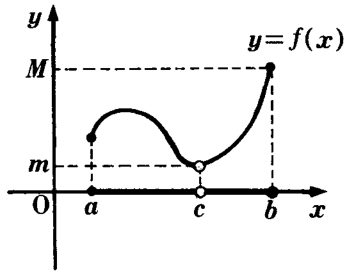
くことにしましょう。

この定理に書かれている

関数 $f(x)$ が"閉区間"で"連続"である

という条件は，きわめて重要です。どちらが欠けても，この定理の結論は成立しません。たとえば，次に示すようなグラフで定義されている関数 $f(x)$ について考えてみましょう。





まず，左側のグラフでは，$f(x)$ は $[a,\ b)$ で連続で，$x=b$ では定義されていません。したがって，この関数 $f(x)$ は，最小値 $f(c)=m$ をとることができますが，$f(b)=\mathrm{M}$ という値をとることができないので，最大値は存在しません。

また，右側のグラフでは，$f(x)$ は $x=c$ で不連続です。したがって，この関数 $f(x)$ は，最大値 $f(b)=\mathrm{M}$ をとることができますが，$f(c)=m$ という値をとることができないので，最小値は存在しません。

説明の中で強調していますが，端点を含むかどうか，ということは，最大値，最小値を考えるうえで，大変重要です。開区間の場合は，端の点の値をとり得ないのです。

基本例題 1 ── **連続関数の最大・最小**

次の関数の最大値・最小値を求めなさい。

(1) $y=x^2+2x+2 \quad (-2 \leqq x \leqq 2)$ (2) $y=\sin 2x \quad \left(-\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$

考え方 閉区間で連続な関数は，かならずその閉区間で最大値と最小値をとります。
このことは，関数のグラフをかいてみるとよくわかります。

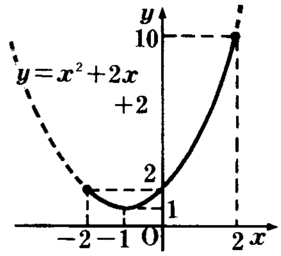
解 答　(1)　$y=x^2+2x+2=(x+1)^2+1$ より，この関数のグラフは，頂点 $(-1,\ 1)$ の下に凸の放物線である。

また　$x=-2$ のとき　$y=(-2)^2+2\times(-2)+2=2$

$x=2$ のとき　$y=2^2+2\times2+2=10$

であるから　**$x=2$ のとき　最大値 10**

$x=-1$ のとき　最小値 1



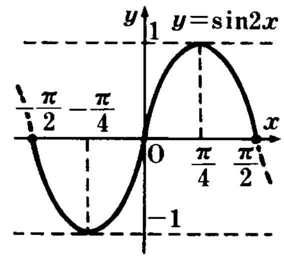
(2)　$y=\sin 2x$ の周期は π であるから，$-\dfrac{\pi}{2}\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ において，$-1\leqq\sin 2x\leqq1$ である。この区間で

$\sin 2x=1$ となるのは　$x=\dfrac{\pi}{4}$

$\sin 2x=-1$ となるのは　$x=-\dfrac{\pi}{4}$

であるから　**$x=\dfrac{\pi}{4}$ のとき　最大値 1**

$x=-\dfrac{\pi}{4}$ のとき　最小値 -1



例題は，ふつうの最大値，最小値の問題と同じです。連続な関数の性質から，閉区間では，かならず，最大値，最小値をもつことが保証されているのです。

トレーニング

1　次の関数の最大値・最小値を求めなさい。

(1)　$y=3x^2\ (-1\leqq x\leqq1)$　　(2)　$y=-2x^2\ (-1\leqq x\leqq1)$

2　次の関数の最大値・最小値を求めなさい。

(1)　$y=x+1\ (-1<x<1)$　　(2)　$y=-x^3+2\ (-1<x<1)$

3 次の関数の最大値・最小値を求めなさい。

(1) $y=\sin x$ $(0<x<2\pi)$　　(2) $y=\cos x$ $(0<x<2\pi)$

できましたね。では，こんどは中間値の定理というものを説明しましょう。

●中間値の定理

閉区間で連続な関数のとる値について考えてみましょう。

たとえば，3 次関数

$$f(x)=x^3-3x+1$$

は，図に示すように，閉区間 $[0,\ 1]$ で連続で，この区間で

$$\text{最大値 } f(0)=1,\ \text{最小値 } f(1)=-1$$

をとります。また，この区間で曲線

$$y=f(x)$$

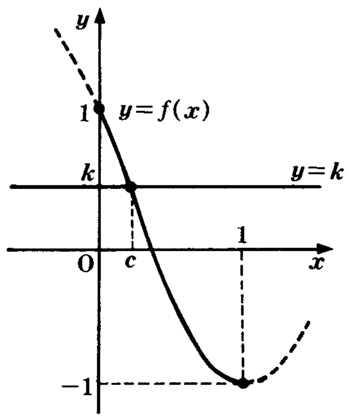
は切れ目なくつながっていますから，この曲線と，x 軸に平行な直線

$$y=k \quad (\text{ただし}\ \ -1<k<1)$$

とは，開区間 $(0,\ 1)$ でかならず交わります。すなわち

$$f(c)=k \quad (\text{ただし}\ \ 0<c<1)$$

となるような実数 c がかならず存在することになります。



一般に，次の定理が成り立ちます。これは，「中間値の定理」といわれるものです。

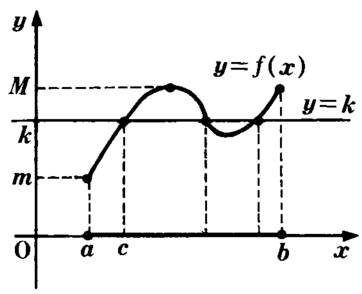
□ 中間値の定理[Ⅰ]□

閉区間 $[a,\ b]$ で連続な関数 $f(x)$ の最大値を M，最小値を m として，k を $m<k<\mathrm{M}$ であるような任意の値とするとき，

$$f(c)=k \quad (\text{ただし}\ \ a<c<b)$$

となるような実数 c が少なくとも 1 つ存在する。

この定理をきちんと証明することは高等学校の数学の範囲ではできません。図を参考にして，直観的に理解しておけば十分です。



また，次の定理も成り立ちます。この定理もやはり「中間値の定理」と呼ばれています。

□ 中間値の定理[II] □

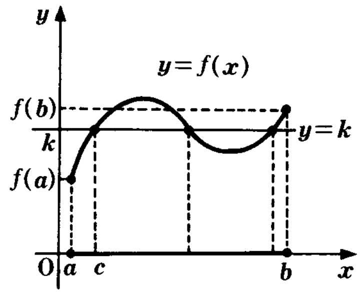
関数 $f(x)$ が閉区間 $[a,\ b]$ で連続であって，$f(a) \neq f(b)$ ならば，$f(a)$ と $f(b)$ との間にあるような任意の値 k に対して

$$f(c)=k \qquad (ただし \quad a<c<b)$$

となるような実数 c が少なくとも 1 つ存在する。

図を参考にすれば，この定理の意味はわかるでしょう。

さらに，この定理の特別な場合として，次のことが成り立ちます。



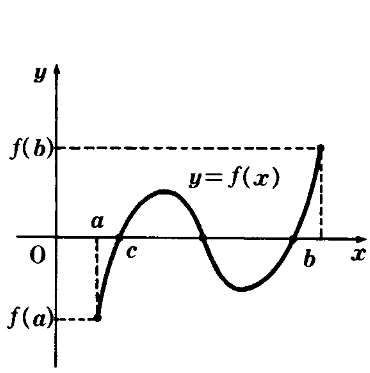
□ 中間値の定理[III] □

関数 $f(x)$ が閉区間 $[a,\ b]$ で連続で，$f(a)$ と $f(b)$ が異符号ならば

$$f(c)=0 \qquad (ただし \quad a<c<b)$$

となるような実数 c が少なくとも 1 つ存在する。

この定理を「中間値の定理」と呼ぶこともあります。また，この形の中間値の定理は，いろいろな方程式の実数解の存在範囲を示すときに，さかんに利用されます。



たとえば，はじめに示した３次関数

$f(x)=x^3-3x+1$

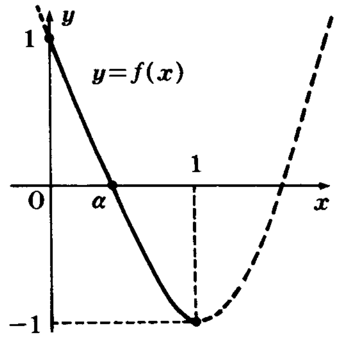
は，閉区間 $[0,\ 1]$ で連続で，

$f(0)=1>0,\ f(1)=-1<0$

ですから，３次方程式

$x^3-3x+1=0$

は開区間 $(0,\ 1)$ の範囲に実数解 α をもっていることが，この定理によって保証されています。



説明が長くなりましたが，わかりましたか。中間値の定理というのは，実数解の存在を示すときによく使われるものです。では，例題で解法をたしかめましょう。

例題 2 **中間値の定理**

次の方程式は，$0<x<1$ の範囲で少なくとも１つの実数解をもつことを示しなさい。

$x^3+2x^2-x-1=0$

考え方 閉区間 $[a,\ b]$ で連続な関数 $f(x)$ の両端 a，b における値 $f(a)$，$f(b)$ が同符号でないならば，方程式 $f(x)=0$ は，$[a,\ b]$ において少なくとも１つの実数解をもつことが保証されています。

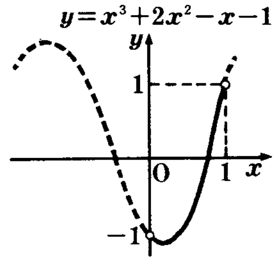
解　答 $f(x)=x^3+2x^2-x-1$ とおくと，関数 $f(x)$ は x についての整関数であるから，$0\leqq x\leqq 1$ において連続である。

また　$f(0)=0^3+2\times 0^2-0-1=-1<0$

$f(1)=1^3+2\times 1^2-1-1=1>0$

であるから，中間値の定理により，$f(\alpha)=0$ をみたす α が，$0<\alpha<1$ の範囲で少なくとも１つ存在する。

よって，方程式 $x^3+2x^2-x-1=0$ は，$0<x<1$ の範囲で少なくとも１つの実数解をもつ。



注　意 方程式 $x^3+2x^2-x-1=0$ の解は，左辺が因数分解できないので実際に求めることはできません。しかし，少なくとも１つの実数解が存在し，しかも，その解は $0<x<1$ であることは示せます。

高校での学習の範囲ではありませんが，３次方程式 $ax^3+bx^2+cx+d=0\ (a\neq 0)$ の解を求める，カルダノの公式と呼ばれる解の公式があります。

わかりましたね。では，例題にならってトレーニングしてみましょう。

トレーニング

4 方程式 $x^4-3x^2+1=0$ は，$0<x<1$ の範囲で少なくとも1つの実数解をもつことを示しなさい。

5 方程式 $x^3-3x^2-x+1=0$ は，$3<x<4$ の範囲で少なくとも1つの実数解をもつことを示しなさい。

6 方程式 $4^x-5x=0$ は，$1<x<2$ の範囲で少なくとも1つの実数解をもつことを示しなさい。

7 方程式 $x+4\cos x=0$ は，$\frac{\pi}{2}<x<\pi$ の範囲で少なくとも 1 つの実数解をもつことを示しなさい。

中間値の定理の利用が終ったところで，最後に，逆関数が存在する条件について説明します。

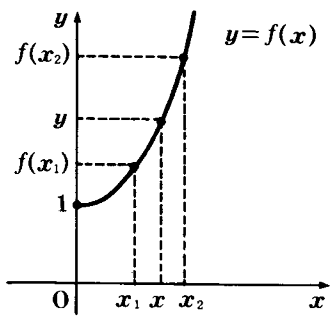
●逆関数の存在

どのような場合に，連続な関数の逆関数が得られるかを考えてみましょう。

たとえば，関数

$$f(x)=x^2+1$$

は区間 $[0,\infty)$ で連続です。さらに，この関数は，右の図に示すように，この区間で増加関数になっています。



したがって

$x_1<x_2$ ならば　$f(x_1)<f(x_2)$

$x_2<x_1$ ならば　$f(x_2)<f(x_1)$

が成り立っています。すなわち

$x_1\neq x_2$ ならば　$f(x_1)\neq f(x_2)$

ということになります。よって，この対偶を考えると

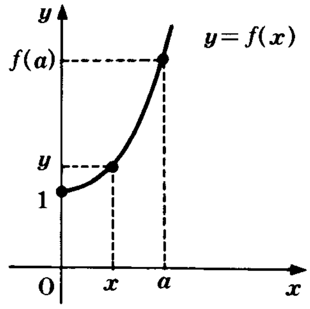
$f(x_1)=f(x_2)$　ならば　$x_1=x_2$

が成り立ちます。つまり，$f(x)$ の値域内にある 1 つの実数値 y に対して

$$f(x)=y$$

となるような実数値 x は，$f(x)$ の定義域内に，ただ 1 つ存在することがわかります。

ここで，この関数 $f(x)$ は閉区間 $[0,\ a]$ で連続ですから，中間値の定理を適用すると，$1<y<f(a)$ であるような実数値 y に対して



$f(x)=y$　　(ただし　$0<x<a$)

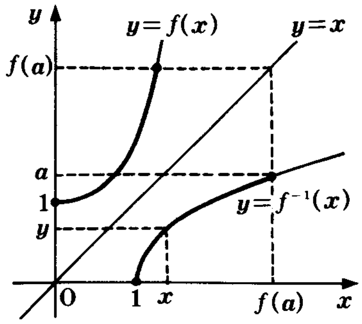
となるような実数値 x がただ 1 つ存在することになります。そこで，文字 x と y を単に入れ変えると

$f(y)=x$　　(ただし　$0<y<a$)

となるような実数値 y がただ 1 つ存在することがわかります。いま，この y を

$y=f^{-1}(x) \qquad (1<x<f(a),\ 0<y<a)$

と書くことにすれば，ここに新しい関数 $f^{-1}(x)$ が得られたことになります。この関数 $f^{-1}(x)$ がはじめの関数 $f(x)$ の逆関数というわけです。



一般に，次のことが成り立ちます。

□ 逆関数の存在条件 □

関数 $f(x)$ がある区間で連続で，増加（減少）関数であるならば，$f(x)$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ が存在する。

《注》 一般に，ある区間で連続な関数 $f(x)$ が増加（減少）関数ならば，逆関数 $f^{-1}(x)$ も増加（減少）関数であることが証明されます。なお，数学Ⅰで学習したように，$y=f(x)$ のグラフと $y=f^{-1}(x)$ のグラフとは，直線 $y=x$ に関して対称になっています。

逆関数が存在する条件は，まとめのようになります。では，逆関数が存在するかどうかの例題をしてみましょう。

基本例題 3 　　　　**逆関数の存在**

次の関数について，逆関数が存在するかどうか調べなさい。

(1) $y=x^2$ 　　(2) $y=\sqrt{x}$ 　　(3) $y=\sin x \quad \left(0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$

考え方 　ある区間で連続な増加関数，または，ある区間で連続な減少関数には逆関数が存在します。ですから，(1)～(3)のそれぞれが，定義域において連続かどうか調べます。ここで(3)は $y=\sin x$ という関数でみれば，定義域はすべての実数ですが，$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ と定義域が指定されている点に注意します。

解　答 　(1) 関数 $y=x^2$ は，x についての整関数であるから，すべての実数値で連続である。ところが，$y=x^2$ は $x\leqq0$ で減少し，$x\geqq0$ で増加するので，逆関数は**存在しない**。

(2) 関数 $y=\sqrt{x}$ は，x についての無理関数であるから，その定義域は $x\geqq0$ で，この区間において連続で増加する。

よって，逆関数は**存在する**。

(3) 関数 $y=\sin x$ は，$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ において連続で増加する。

よって，逆関数は**存在する**。

では，例題にならって，問題を解いてみましょう。

トレーニング

8 次の関数について，逆関数が存在するかどうか調べなさい。

(1) $y=2x-3$

(2) $y=x^2$

(3) $y=-x^2-x+2\ (x\geqq 0)$

(4) $y=2^x+1$

9 次の関数について，逆関数が存在するかどうかを調べなさい。

(1) $y=3^x+2$

(2) $y=\sin x\ (0\leqq x\leqq \pi)$

(3) $y=\cos x\ (0\leqq x\leqq \pi)$

(4) $y=-x^2-2x+3\ (x\geqq 0)$

10 次の関数について，逆関数が存在するかどうかを調べ，存在する場合には求めなさい。

(1) $y=-2x+1$

(2) $y=x^3$

(3) $y=x^2-x+1$ $(x \geqq 0)$

(4) $y=\log_2(x+1)$ $(x>-1)$

きょうは，中間値の定理を中心に学習しました。もう一度，説明の部分を読んで，きょうの学習をふり返っておくのもよいでしょう。このつぎは，復習日です。

第 22 日	関数の連続の復習 学習日　月　日

第22日　関数の連続の復習

学習日　　月　　日

きょうは，第20日と第21日に学習した関数の連続についての復習です。

この部分は，説明が多いところでしたので，きょうは，具体的な問題にあたって，実際の問題を解く力をつけることにしましょう。中には，むずかしいものがあるかもしれません。前の日を復習しながら進めるとよいでしょう。では，はじめましょう。

トレーニング

1 次の関数の最大値・最小値を求めなさい。

(1)　$y=x^2-2x-2\ (-2 \leqq x \leqq 2)$

(2)　$y=-x^2-2x-3\ (-2 \leqq x \leqq 2)$

2 次の関数の最大値・最小値を求めなさい。

(1)　$y=\tan x\ \left(-\dfrac{\pi}{4}<x<\dfrac{\pi}{4}\right)$

(2)　$y=\cos^2 x\ (0<x<2\pi)$

3 関数 $f(x)=[x^2-0.25]$ は，$x=-0.5$ で連続かどうか調べなさい。ただし，記号 $[y]$ とは，$n \leqq a<n+1$（n は整数）のとき，$[a]=n$ を表すものとします。

4 関数 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x+n\cos x}{1+n\cos x}$ は，$x=\frac{\pi}{2}$ で連続ではないことを証明しなさい。

5 関数 $f(x)=[3x]+[x]$ $(0\leqq x\leqq 1)$ は，どのような x の値に対して不連続となるか調べなさい。ただし，$[n]$ は n を越えない最大の整数とします。

6 方程式 $x^3-8x^2+10=0$ は，$-2<x<-1$ の範囲で少なくとも 1 つの実数解をもつことを示しなさい。

7 方程式 $2^x-3^{x+1}=0$ は，$-3<x<-2$ の範囲で少なくとも 1 つの実数解をもつことを示しなさい。

8 方程式 $2^x\cos x=\sin x$ は，$\dfrac{\pi}{4}<x<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲で少なくとも 1 つの実数解をもつことを示しなさい。

9 方程式 $x^2=\sin x$ は，$\dfrac{\pi}{4}<x<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲で少なくとも 1 つの実数解をもつことを示しなさい。

10 次の式で表される関数 $f(x)$ が定義されない x の値，および $f(x)$ が不連続な x の値を求めなさい。

(1) $f(x)=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{x^n+x}{x^n+1}$

(2) $f(x)=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\tan^n x\ \left(0\leqq x<\frac{\pi}{2}\right)$

これで，微分・積分の第 1 巻の学習は終わりです。日数がすこし多かったのですが，最後までよくがんばりましたね。第 2 巻も，この調子で学習を進めていきましょう。
第 2 巻では「微分法」について学習します。

memo

TRAINING PAPER

DAILY PROGRAM

発行人　加藤　譲
発行所　株式会社　キョーイクソフト

高校数学／微分・積分