TRAINING PAPER

DAILY® PROGRAM

高校数学
数 学 B 1

(見本)

ベクトル① 目次

KYOIKUSHA

TRAINING PAPER®

高校数学　数学Ｂ

効果的な使い方

〈1セクションの構成〉

● 1セクション(§1，§2など)の学習は，次のようになっています。
これが，ほぼ1日の学習に相当します。

学習内容の説明

新しい学習内容をわかりやすく説明してあります。また，定理や公式を簡潔にまとめています。
➡よく読んで，しっかりと理解しよう

⇩

基本例題・例題

定理や公式がどのように使われるかを具体的に示してあります。基本例題は基本的な問題，例題は標準的な問題です。
➡考え方や解答のポイントをおさえよう

⇩

トレーニング

例題をふまえて，実際に問題を解く練習です。やさしい問題からむずかしい問題へ，ステップをふんで作られています。
問題番号に ＊がついているのは標準問題，無印は基本問題です。
(ここまでが1セクションに2～3回程度くり返されます。)

⇩

最後に，「もっと力をつけよう」がはいっていることがあります。ここでは，総合問題や，やや程度の高い問題を扱います。

解　　答

巻末に《解答》とくわしい解き方を書いた《詳解》がついています。
問題番号の右の4桁数字は，《問題》，《解答》，《詳解》で共通です。
答え合わせのとき活用してください。
➡答え合わせも学習のうち，1問1問しっかりと

〈効果的な使い方〉

❈ 授業の進度に合わせて学習していこう

学習内容は，標準的な授業進度に合わせて配列されていますから，復習用としておおいに役立ててください。また，新しい学習内容でもていねいな説明がついていますから，予習用，自学自習用として利用することもできます。

時間に余裕のない場合は，よくわからないところにしぼって，重点的に学習しましょう。

❈ 自分なりに使い方を工夫しよう

本文は表の部分のみ印刷してあります。1ページを完全にやり終えたら，はがしてしまうこともできます。裏の部分は解答を書き込んだり，補足を書き込んだりして自由に使ってください。自分なりに使い方を工夫しましょう。

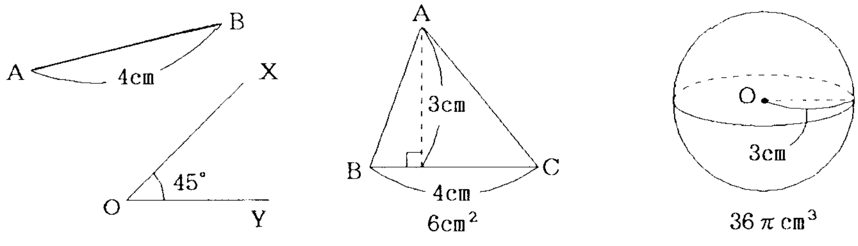
❈ 定期試験の前には，弱点の部分を重点的に復習しよう

ふだんの学習でまちがえたところをチェックし，その問題を全部もう一度解きます。

§0　はじめに

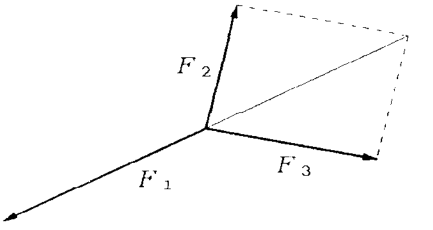
◇「向き」と「大きさ」で表される量

これまで，数学で扱ってきた量は，図形について考えると，線分ＡＢの長さ，∠ＸＯＹの大きさ，△ＡＢＣの面積，球Ｏの体積など，すべて１つの実数で表されました。



ところで，物理学で用いる量，たとえば力という量の場合はどうでしょう。

右の図は，力 F_1，F_2，F_3 がつりあっているところですが，この場合，F_1，F_2，F_3 という力は「大きさ」を考えるだけでは不十分で，「大きさ」のほかに「向き」も考えなくてはいけません。

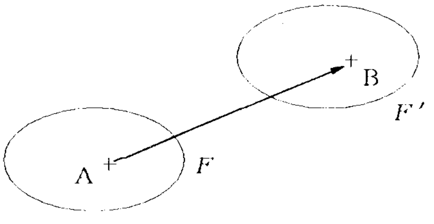


また，風の吹きぐあいを表すときにも，「北東の風 20m/ 秒」（これは，20m/ 秒の風が北東から南西に向かって吹いていることを表している）というように，風の「強さ」と「向き」を考えることが必要です。

このような量は，ほかには，速度や加速度など，いろいろあります。

それでは，数学でこのような「大きさ」と「向き」により，はじめてはっきりきまるものを考えてみましょう。

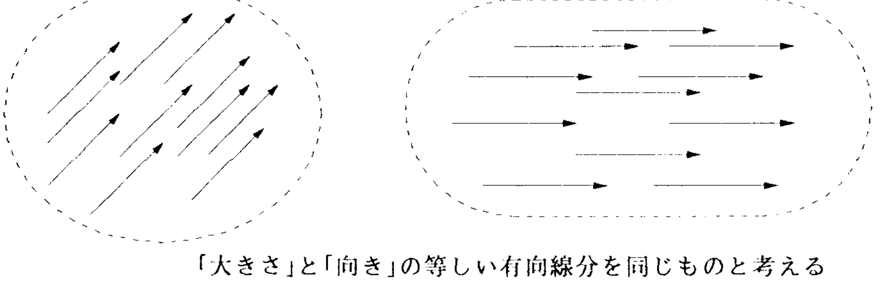
図形的には，平行移動がその代表的なものです。すなわち，点Ａを移動させて点Ｂに移すと，「大きさ」は線分ＡＢの長さであり，「向き」はＡからＢということですね。このように考えると，有向線分ＡＢで平行移動を表すことができるのです。



図形 F の平行移動も，まったく同じように考えて，有向線分ＡＢで表します。

さて，「大きさ」と「向き」の等しい有向線分は同じ平行移動を表します。

そこで，それらを同じものと考えましょう。これがベクトルです。



「大きさ」と「向き」の等しい有向線分を同じものと考える

◇「大きさ」と「向き」をもつ量を実数の組で表す

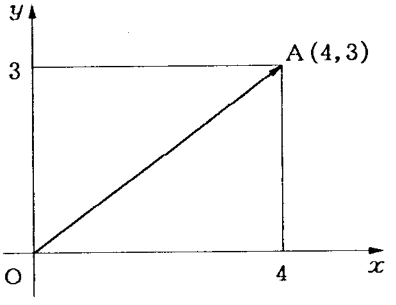
力や速度のように「大きさ」と「向き」という2つの要素できまる量をベクトル量といい，これに対して，1つの数値できまる量をスカラー量といいます。

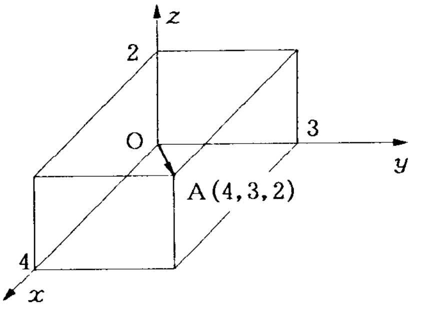
「大きさ」と「向き」の2つの要素をもつベクトル量は，当然1つの実数で表すことはできません。

しかし，座標平面上での有向線分としてのベクトル量は，座標との関連から，2つの実数の組で表すことができます。

たとえば，左下の図の有向線分ＯＡは(4，3)という実数の組で表すというようにです。

このように考えると，3つの実数の組で表されるベクトルは，空間における有向線分に対応するわけです。実数の組でベクトルを表すと，いろいろと便利なことがあります。





では，これからの学習で，ベクトルについて理解していってください。

§1　有向線分とベクトル　有向線分，ベクトルの定義

ベクトルとはいったい，どういうものなのでしょう。

ベクトルは物理学から生まれましたが，数学では図形的に定義します。
まず，「有向線分」を使って理解していきます。

➜では本題にはいりましょう。

〔1〕有向線分

◇平行移動を図示する

右の図のように，点 A が点 B に移るように三角形 G を三角形 G′ に平行移動したとき，この移動は，矢印のついた線分 A B で表すことができます。

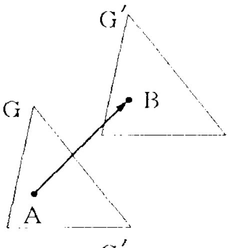
この場合

平行移動の距離……線分 A B の長さ

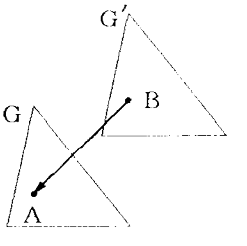
平行移動の向き……矢印のついた直線 A B の向き

で表しています。

このようなとき，矢印のついた線分ＡＢ を有向線分 A B といい，A をその始点，B をその終点といいます。



また，三角形 G′ から三角形 G への平行移動は，有向線分 A B と逆向きの矢印のついた有向線分 B A で表すことができます。



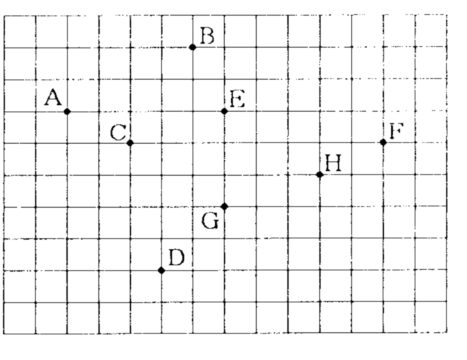
➜有向線分 A B の始点は A，終点は B で，有向線分 B A の始点は B，終点は A です。有向線分の始点と終点に注意して，次のトレーニングをしましょう。

■■■トレーニング■■■

1　(0001)

右の図に，次の有向線分を図示しなさい。

(1) 有向線分 A B
(2) 有向線分 C D
(3) 始点が E で終点が F
(4) 始点が G で終点が H



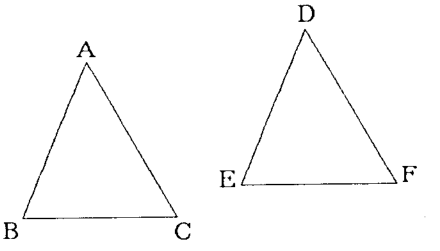
2　(0002)

右の図で，△ＤＥＦは△ＡＢＣを平行移動したものです。これについて，次の問いに答えなさい。

(1)　Ｃを始点としたときの平行移動を表す有向線分を図示しなさい。

(2)　(1)の有向線分の終点は何ですか。

(3)　Ａ，Ｂをそれぞれ始点としたときの平行移動を表す有向線分を図示しなさい。



➔では，本題のベクトルについて学習しましょう。

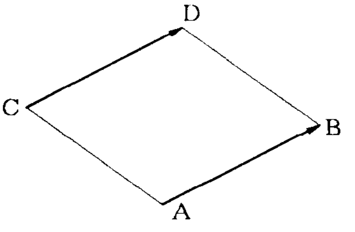
〔2〕有向線分とベクトル

◇同じ向き，同じ長さの有向線分

右の図で，四角形ＡＢＤＣを平行四辺形とすると，有向線分ＡＢと有向線分ＣＤは，向きが同じで，長さが等しくなっています。

このとき，有向線分で，「位置」を考えずに，「向き」と「長さ」だけを考えると，有向線分ＡＢと有向線分ＣＤは同じものと考えることができます。

このように，「向き」と「長さ」だけを考えた有向線分をベクトルといいます。



そして，有向線分ＡＢ，すなわち始点がＡ，終点がＢの有向線分で表されるベクトルを $\overrightarrow{AB}$ と書きます。

また，ベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$，……のように書くこともあります。

➔では，ベクトルの表し方のトレーニングをしましょう。

■■■トレーニング■■■

3　(0003)

次の問いに答えなさい。

(1)　有向線分ＡＢで表されるベクトルを書きなさい。

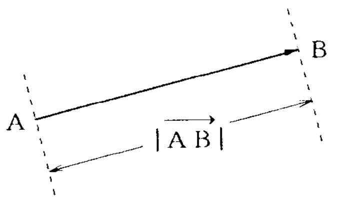
(2)　始点がＣ，終点がＤの有向線分で表されるベクトルを書きなさい。

➔つぎに，ベクトルの大きさについて学習しましょう。

〔3〕ベクトルの大きさと逆ベクトル

◇有向線分の長さがベクトルの大きさ

有向線分ＡＢで表されるベクトルを $\overrightarrow{AB}$ と書きましたね。この有向線分ＡＢの長さを $\overrightarrow{AB}$ の大きさ（または長さ）といい，$|\overrightarrow{AB}|$ で表します。



また，始点と終点が一致する場合にも，大きさが０のベクトル（向きは考えません）と考え，これを零（れい）ベクトルといい，$\vec{0}$ と書きます。

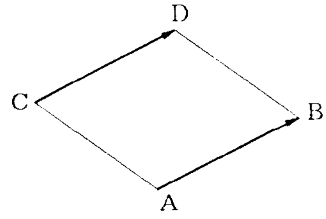
$\overrightarrow{AA}$ は始点と終点がともにＡですから，$\overrightarrow{AA}=\vec{0}$ となります。

➜有向線分では「長さ」といいましたが，ベクトルでは「大きさ」といいます。注意しましょう。また，零ベクトルはゼロベクトルということが多いようです。

◇等しいベクトルと逆のベクトル

２つのベクトルが等しいのは，向きが同じで大きさが等しいときです。

たとえば，右の図の四角形ＡＢＤＣは平行四辺形ですから $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{CD}$ は等しくなります。



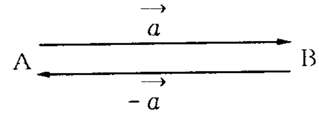
このように，$\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{CD}$ が等しいとき

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$$

と書きます。

つぎに，$\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{BA}$ の関係を考えましょう。

これらは，大きさが等しく，向きが反対になっています。



一般に，$\vec{a}$ に対して，大きさが等しく，向きが反対のベクトルを $\vec{a}$ の逆ベクトルといい，$-\vec{a}$ と書きます。

そうすると，$\overrightarrow{BA}$ は $\overrightarrow{AB}$ の逆ベクトルですから $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ とおくと，$\overrightarrow{BA}=-\vec{a}$ です。つまり

$$\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}$$

です。

$\overleftarrow{AB}$ とは書きません。

➜さあ，これでベクトルの基本的な意味がわかりましたね。では，等しいベクトル，逆ベクトル，ベクトルの大きさについてのトレーニングをしましょう。

■■■トレーニング■■■

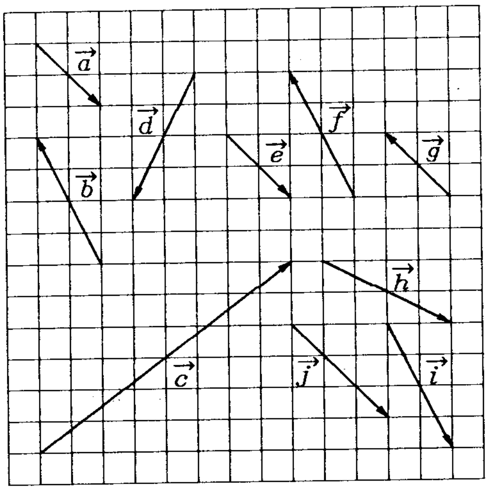
4 (0004)

右の図で，1めもりの大きさは1です。このとき，次の問いに答えなさい。

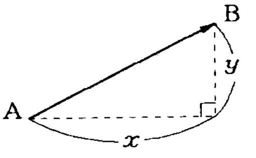
(1) $\overrightarrow{a}$ と等しいベクトルはどれですか。

(2) $\overrightarrow{b}$ の逆ベクトルはどれですか。

(3) $|\overrightarrow{a}|$，$|\overrightarrow{b}|$，$|\overrightarrow{c}|$ を求めなさい。

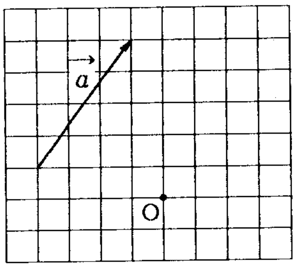


➜ $|\overrightarrow{AB}|$ は，右の図のように，直角三角形を考えれば，三平方の定理，すなわち $AB=\sqrt{x^2+y^2}$ を使って求められますね。



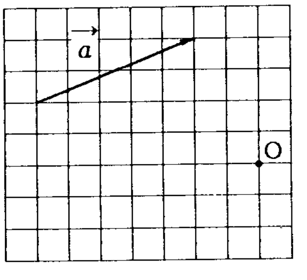
5 (0005)

図において，$\overrightarrow{a}$ を点 O を始点として図示しなさい。



6 (0006)

図において，$\overrightarrow{a}$ の逆ベクトル $-\overrightarrow{a}$ を点 O を始点として図示しなさい。



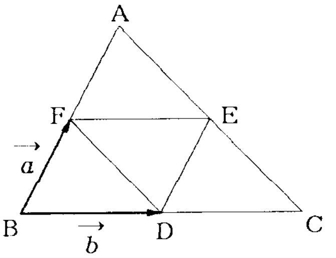
➜それでは，次の基本例題1で，等しいベクトルや逆ベクトルについて，もう少し学習しましょう。

基本例題 1　　等しいベクトルと逆ベクトル

右の図の△ABCで，BC，CA，ABの中点をそれぞれD，E，Fとします。$\overrightarrow{BF}=\vec{a}$，$\overrightarrow{BD}=\vec{b}$とするとき，次のベクトルを$\vec{a}$，$\vec{b}$で表しなさい。

(1)　$\overrightarrow{FB}$　　(2)　$\overrightarrow{DC}$

(3)　$\overrightarrow{EF}$　　(4)　$\overrightarrow{AF}$



◆ 考え方 ◆

(1)　$\overrightarrow{FB}$は$\overrightarrow{BF}$の逆ベクトルです。

(2)　$\overrightarrow{DC}$は$\overrightarrow{BD}$と等しいベクトルです。

(3)　中点連結定理から

$$FE /\!/ BD,\quad FE=\frac{1}{2}BC=BD$$

がいえます。このことから，$\overrightarrow{EF}$は$\overrightarrow{DB}$と等しいベクトル，すなわち$\overrightarrow{BD}$の逆ベクトルであることがわかります。

(4)　$\overrightarrow{AF}$は$\overrightarrow{FB}$と等しいベクトルです。

◆ 解　答 ◆

(1)　$\overrightarrow{FB}=-\overrightarrow{BF}=-\vec{a}$

(2)　$\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{BD}=\vec{b}$

(3)　中点連結定理から　　$FE /\!/ BD$，$FE=BD$

よって　　$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{DB}=-\overrightarrow{BD}=-\vec{b}$

(4)　$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{FB}=-\vec{a}$

➜△ABCで，AB，ACの中点をそれぞれF，Eとするとき

$$FE /\!/ BC,\quad FE=\frac{1}{2}BC$$

が成り立ちます。この定理を中点連結定理といいましたね。

■■■トレーニング■■■

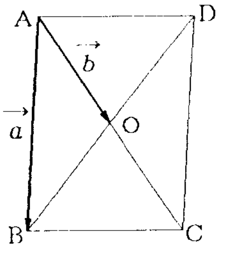
7　(0007)

右の図の平行四辺形ABCDで，対角線の交点をOとします。$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AO}=\vec{b}$とするとき，次のベクトルを$\vec{a}$，$\vec{b}$で表しなさい。

(1)　$\overrightarrow{BA}$

(2)　$\overrightarrow{CD}$

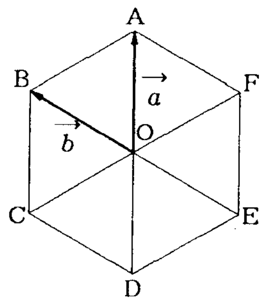
(3)　$\overrightarrow{CO}$



➜では，このセクション最後のトレーニングをしましょう。

8 (0008)

右の図の正六角形ＡＢＣＤＥＦで，対角線の交点をＯとします。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とするとき，次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表しなさい。



(1) $\overrightarrow{EF}$

(2) $\overrightarrow{OD}$

(3) $\overrightarrow{CD}$

➜ベクトルは「向き」と「大きさ」をもっている量であることがわかりましたね。それでは，ここでの学習を終わりにしましょう。

向きが同じで，長さが等しい有向線分はすべて等しいベクトルですね。

まとめておこう！

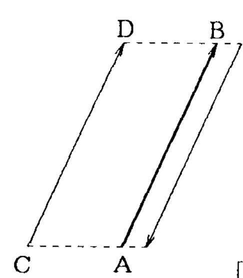
$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$とは，

① ＡＢ＝ＣＤ(大きさが等しい)

② 同じ向きに平行(向きが同じ)

$\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}$(逆ベクトル)とは，

① 大きさが等しく，向きが反対



§2　ベクトルの加法・減法　加法の交換・結合法則，ベクトルの差

ベクトルの和・差はどのように考えるのでしょう。

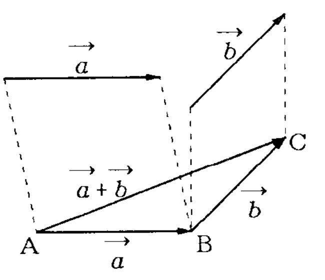
ベクトルにベクトルを加えたり，ひいたりできるのでしょうか。また，その結果はどうなるのかを学習していきましょう。

➜はじめに，ベクトルの和を考えます。

〔1〕ベクトルの加法

◇２つの平行移動を続けて行った結果は……

２つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ があるとき，まず点Ａを定め，$\vec{a}$ の表す平行移動で点Ａが移る点をＢ，さらに $\vec{b}$ の表す平行移動で点Ｂが移る点をＣとします。



このとき，点Ａを点Ｃに移す平行移動を表す $\overrightarrow{AC}$ がきまります。

この $\overrightarrow{AC}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の和といい

$$\vec{a}+\vec{b}$$

と書きます。

また，$\vec{a}$ を $\overrightarrow{AB}$，$\vec{b}$ を $\overrightarrow{BC}$ で表すと

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$$

となります。

〈注意〉

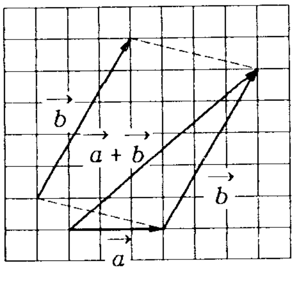
点Ａはどこにとってもかまいません。

■■■トレーニング■■■

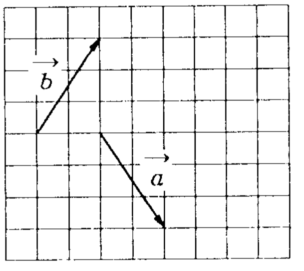
1　(0009)

次の $\vec{a}$，$\vec{b}$ について，$\vec{a}+\vec{b}$ を例にならって図示しなさい。

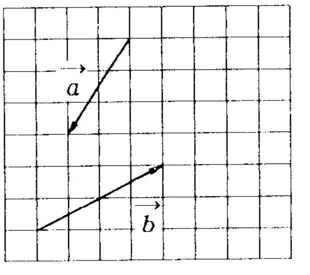
例



(1)



(2)



〔2〕ベクトルの加法の利用

◇平行四辺形を使って，$\vec{a}+\vec{b}$ の作図を！

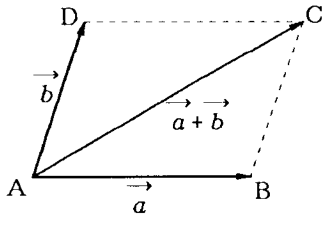
$\vec{a}=\overrightarrow{AB}$，$\vec{b}=\overrightarrow{AD}$ のとき，AB，AD を2辺とする平行四辺形 ABCD を考えると

$\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$

$=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$　➜$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$

$=\overrightarrow{AC}$

となります。



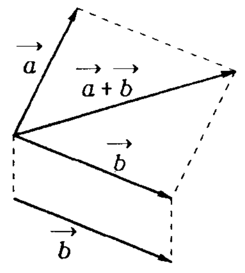
このことから，$\vec{a}+\vec{b}$ は右の図のように作図することもできます。

■■■トレーニング■■■

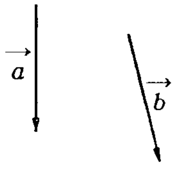
2　(0010)

次の $\vec{a}$，$\vec{b}$ について，$\vec{a}+\vec{b}$ を例にならって図示しなさい。

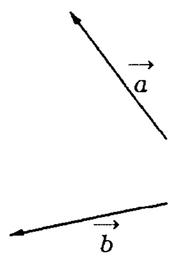
例



(1)



(2)



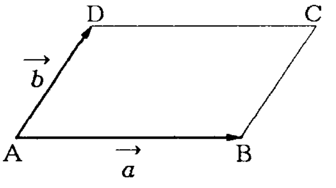
➜ベクトルの和がわかったところで，その性質について考えていきましょう。

基本例題 1　　加法の交換法則

右の図の平行四辺形 ABCD を使って

$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$

が成り立つことを証明しなさい。



◆ 考え方 ◆

平行四辺形の性質

AB＝DC，AD＝BC，AB // DC，AD // BC

を使って，$\vec{a}$，$\vec{b}$ に等しいベクトルを考えます。

また，対角線 AC に注目します。

◆解　答◆

四角形ＡＢＣＤは平行四辺形であるから

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}=\vec{a}$

$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}=\vec{b}$

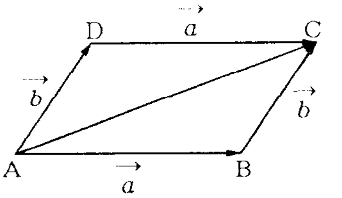
よって　$\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$

$=\overrightarrow{AC}$

$\vec{b}+\vec{a}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}$

$=\overrightarrow{AC}$

したがって　$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$



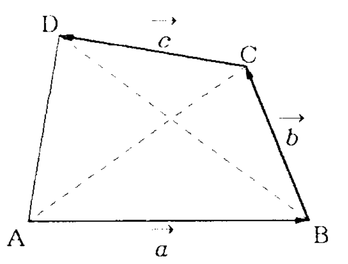
■■■トレーニング■■■

3　(0011)

右の図の四角形ＡＢＣＤを使って

$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$

が成り立つことを，次の□をうめて証明しなさい。



$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=(\overrightarrow{AB}+\boxed{})+\overrightarrow{CD}$

$=\boxed{}+\overrightarrow{CD}$

$=\overrightarrow{AD}$

$\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=\overrightarrow{AB}+(\boxed{}+\overrightarrow{CD})$

$=\overrightarrow{AB}+\boxed{}$

$=\boxed{}$

したがって　$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$

➜ベクトルの加法の交換法則，結合法則が成り立つことがわかりましたね。では，このことをまとめておきましょう。

ベクトルの加法の法則

$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$	交換法則
$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$	結合法則

〈注意〉

$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$ や $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ は，かっこを省略して $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ と書くことができます。

➜つぎに，零ベクトルはどんな性質をもっているか考えてみましょう。

〔3〕零ベクトル

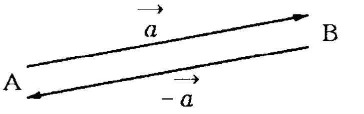
◇零ベクトルは数の０と同じような性質をもつ

$\overrightarrow{AA}$ のように始点と終点が一致する場合，大きさが０のベクトルと考え，これを $\vec{0}$ と書くのでしたね。このことから

$|\vec{0}|=0$

となることがわかります。

ところで，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ に対して，逆ベクトル $-\vec{a}$ を考えると，$-\vec{a}=-\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{BA}}$ ですから



$$\vec{a}+(-\vec{a})=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BA}}$$
$$=\overrightarrow{\mathrm{AA}}$$

となり，$\overrightarrow{\mathrm{AA}}=\vec{0}$ より

$$\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$$

となることがわかりますね。

また，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BB}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{BB}}=\vec{0}$ ですから

$$\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$$

となることもわかります。

では，これらのことをまとめておきましょう。

零ベクトルの性質

$\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$	$(-\vec{a})+\vec{a}=\vec{0}$
$\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$	$\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$

■■■トレーニング■■■

4 (0012)

等式 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}+\overrightarrow{\mathrm{CA}}=\vec{0}$ が成り立つことを証明しなさい。

➜ベクトルの差について考えましょう。

〔4〕ベクトルの減法

◇ $\vec{b}+\vec{x}=\vec{a}$ を満たす $\vec{x}$ は……

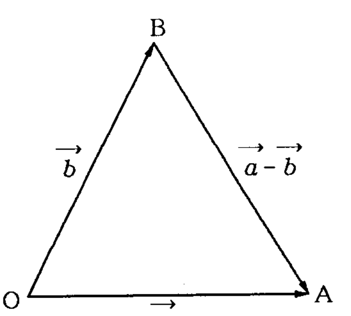
2つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ に対して

$$\vec{b}+\vec{x}=\vec{a}$$

を満たすベクトル $\vec{x}$ を $\vec{a}$ から $\vec{b}$ をひいた差といい

$$\vec{a}-\vec{b}$$

と書きます。



右の図のように，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ となる点 A，B をとると

$$\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{BA}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

ですから，差の定義より

$$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$$
$$=\vec{a}-\vec{b}$$
となります。

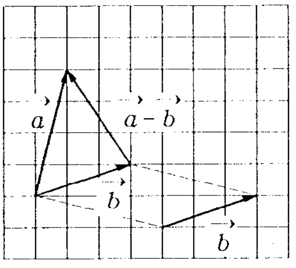
したがって，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の始点を一致させたとき，$\vec{a}-\vec{b}$ は $\vec{b}$ の終点から $\vec{a}$ の終点に向う有向線分で表されます。

■■■トレーニング■■■

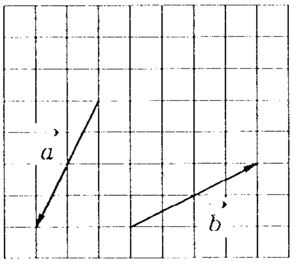
5 (0013)

次の $\vec{a}$，$\vec{b}$ について，$\vec{a}-\vec{b}$ を例にならって図示しなさい。

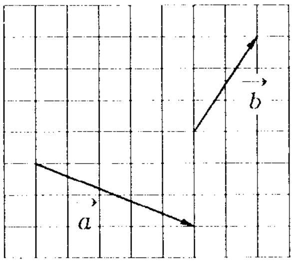
例



(1)



(2)



➜ベクトルの差について，もう少しくわしく学習していきましょう。

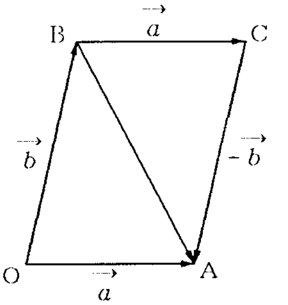
〔5〕ベクトルの減法の利用

◇$\vec{a}+(-\vec{b})$ を考える

右の図のように，平行四辺形 OACB で，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とすると
$$\overrightarrow{BA}=\vec{a}-\vec{b}$$
となるのでしたね。

ところで，$\overrightarrow{BA}$ は
$$\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}$$
と表すことができ，$\overrightarrow{BC}=\vec{a}$，$\overrightarrow{CA}=-\vec{b}$ ですから
$$\overrightarrow{BA}=\vec{a}+(-\vec{b})$$
となります。

このことから
$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$$
が成り立ちます。



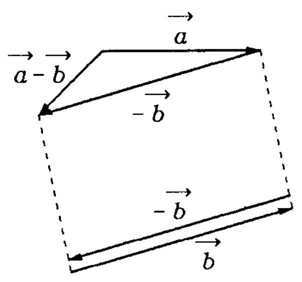
すなわち，ベクトルの減法は加法に直して考えることができます。

■■■トレーニング■■■

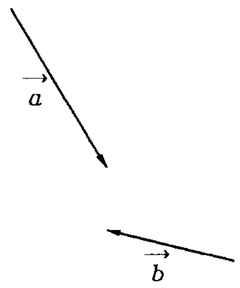
6 (0014)

次の $\vec{a}$，$\vec{b}$ について，$\vec{a}-\vec{b}$ を例にならって図示しなさい。

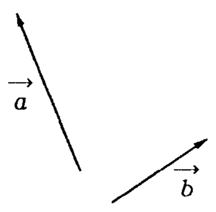
例



(1)



(2)



-------- ● ここで一息 ● --------

「ベクトル (vector) の語源」

vector を辞書でひいてみると

n. (1)〔数〕ベクトル，方向量。(2)〔空〕方向，進路。

(3)〔生物〕保菌生物，病毒媒介こん虫

$v\ t$.（飛行機などを）電波によって誘導する。

などとなっています。また，辞書によっては“運ぶ”のラテン語の vehere に由来すると書いてあるものもあります。

力とか，平行移動とかは，それぞれ物体，図形を“運ぶ”ということにつながりますね。

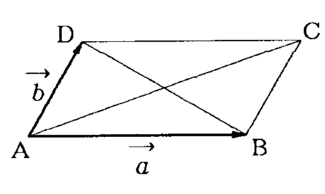
➜ いままでは，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が与えられたときの $\vec{a}+\vec{b}$ や $\vec{a}-\vec{b}$ の作図を中心に学習してきました。ではつぎに，あるベクトルを２つのベクトルの和や差で表すことを考えていきましょう。

基本例題２ ベクトルの和・差

右の図の平行四辺形ＡＢＣＤで，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$ とするとき，次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表しなさい。

(1) $\overrightarrow{AC}$

(2) $\overrightarrow{BD}$



◆ 考え方 ◆

(1) 四角形ＡＢＣＤが平行四辺形であるから，$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}=\vec{b}$ となることと，$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$ であることに注目します。

(2) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}$，すなわち $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}$ であることに注目します。

◆解　答◆

(1) $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$

$=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$

$=\vec{a}+\vec{b}$

(2) $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}$

$=\vec{b}-\vec{a}$

◆別　解◆

(2)は，$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}$ と考えれば，$\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}=-\vec{a}$ となることから

$\overrightarrow{BD}=-\vec{a}+\vec{b}\ (=\vec{b}-\vec{a})$

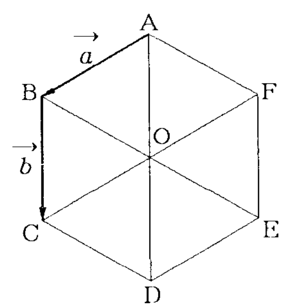
と求めることもできる。

➜それでは，トレーニングに進みましょう。

■■■トレーニング■■■

7 (0015)

右の図の正六角形ＡＢＣＤＥＦで，対角線の交点をＯとします。$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{BC}=\vec{b}$ とするとき，次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表しなさい。



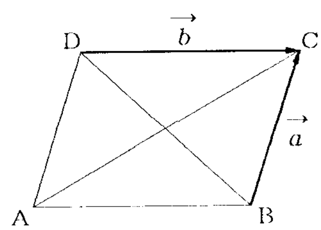
(1) $\overrightarrow{OC}$

(2) $\overrightarrow{OD}$

(3) $\overrightarrow{CD}$

8 (0016)

右の図の平行四辺形ＡＢＣＤで，$\overrightarrow{BC}=\vec{a}$，$\overrightarrow{DC}=\vec{b}$ とするとき，次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表しなさい。



(1) $\overrightarrow{AD}$　　(2) $\overrightarrow{AC}$

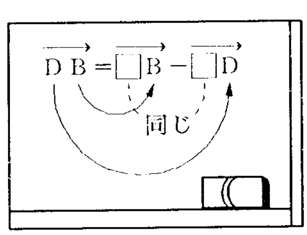
(3) $\overrightarrow{CA}$　　(4) $\overrightarrow{DA}$

(5) $\overrightarrow{DB}$

(5)は，右のように式を変形して考えてもいいですし，

$\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}$

と考えてもかまいません。



➜よくがんばりましたね。ここでの学習はこれでおしまいです。
時間に余裕のある人は，次の『もっと力をつけよう』に進みましょう。

もっと力をつけよう

➜ $\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$ や $\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}$ などの作図をしましょう。

■■■トレーニング■■■

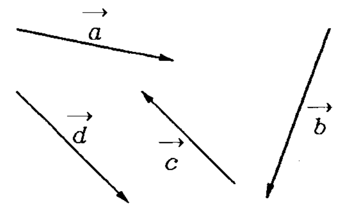
9 (0017)

ベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ が右の図のように与えられているとき，次のベクトルを図示しなさい。

(1) $\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$

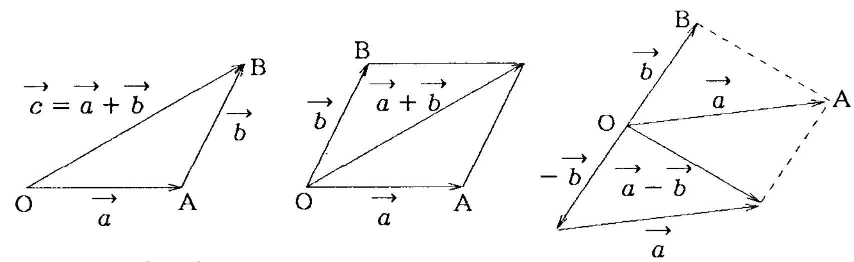
(2) $\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}$

(3) $\vec{b}-\vec{a}+\vec{d}$



➜答え合わせをして，終わりにしましょう。

まとめておこう！



$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$　　交換法則

$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$　　結合法則

§3　ベクトルの実数倍　ベクトルの実数倍の定義，計算法則

ベクトルの実数倍……ベクトルと実数の積です。

ベクトルに実数をかけるということをどのように考えるのでしょうか。また，どんな性質をもつのかを学習しましょう。

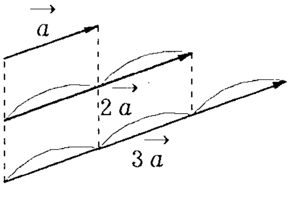
➜では，ここでの本論，ベクトルの実数倍について考えましょう。

〔1〕ベクトルの実数倍

◇ $\vec{a}$ の2倍，3倍は，……

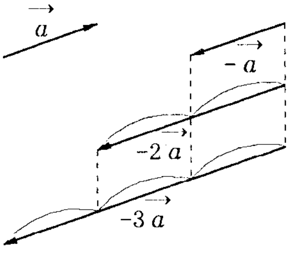
右の図からわかるように，$\vec{a}+\vec{a}$ は $\vec{a}$ と向きが同じで大きさが2倍のベクトルになり，$\vec{a}+\vec{a}+\vec{a}$ は $\vec{a}$ と向きが同じで大きさが3倍のベクトルになりますね。

これらのベクトルを $2\vec{a}$，$3\vec{a}$ と書きます。



また，$(-\vec{a})+(-\vec{a})$ や $(-\vec{a})+(-\vec{a})+(-\vec{a})$ は，$\vec{a}$ と向きが反対で，それぞれ大きさが2倍，3倍のベクトルになりますね。

そこで，これらのベクトルを，$\vec{a}$ の -2 倍のベクトル，-3 倍のベクトル，すなわち $(-2)\vec{a}$，$(-3)\vec{a}$ と考えます。



一般に，ベクトル $\vec{a}$ と実数 k に対して，実数倍 $k\vec{a}$ を次のように定めます。

$k\vec{a}$ の定義

$\vec{a}$ が $\vec{0}$ でないとき

　$k>0$ ならば，$k\vec{a}$ は $\vec{a}$ と向きが同じで大きさが k 倍のベクトル

　$k<0$ ならば，$k\vec{a}$ は $\vec{a}$ と向きが反対で大きさが $|k|$ 倍のベクトル

　$k=0$ ならば，$k\vec{a}$ は $\vec{0}$

$\vec{a}$ が $\vec{0}$ のとき，$k\vec{a}$ は $\vec{0}$

〈注意〉

上の定義から

$$1\cdot\vec{a}=\vec{a}\qquad(-1)\vec{a}=-\vec{a}\qquad 0\cdot\vec{a}=\vec{0}\qquad k\cdot\vec{0}=\vec{0}$$

となります。

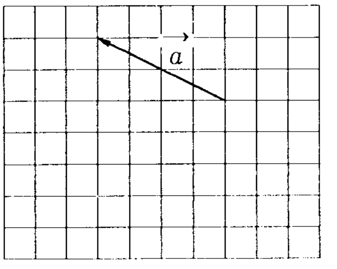
また，$(-2)\vec{a}$，$(-3)\vec{a}$，……は，それぞれ $-2\vec{a}$，$-3\vec{a}$，……と書きます。

■■■トレーニング■■■

1 (0018)

$\vec{a}$ が図のように与えられたとき，次のベクトルを図示しなさい。

$2\vec{a}$,　$-\dfrac{1}{2}\vec{a}$

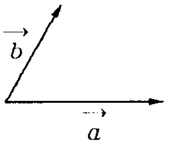


2 (0019)

$\vec{a}$，$\vec{b}$ が図のように与えられたとき，次のベクトルを図示しなさい。

(1) $\vec{a}+2\vec{b}$　　(2) $2\vec{a}-\vec{b}$

(3) $\dfrac{1}{2}\vec{a}+3\vec{b}$　　(4) $2(\vec{a}-\vec{b})$



〔2〕ベクトルの実数倍の計算

◇ $\vec{a}$，$\vec{b}$ は数を表す文字と似ている

右の図からわかるように，$2\vec{a}+2\vec{b}$ は $\vec{a}+\vec{b}$ の2倍になっていますね。

すなわち

$$2(\vec{a}+\vec{b})=2\vec{a}+2\vec{b}$$

が成り立ちます。

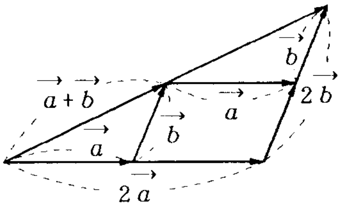
これは，文字式と同じようにかっこをはずすことができるということですね。

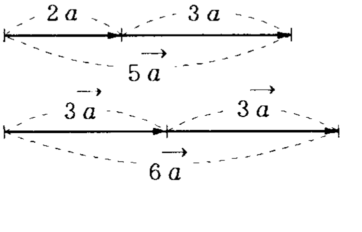
また

$$(2+3)\vec{a}=2\vec{a}+3\vec{a}$$

$$(2\cdot3)\vec{a}=2(3\vec{a})$$

が成り立ちますから，ベクトルの実数倍の計算は文字式と同じようにすることができます。





ベクトルの実数倍の計算法則

$$k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$$
$$(k+l)\vec{a}=k\vec{a}+l\vec{a}$$
} 分配法則

$$(kl)\vec{a}=k(l\vec{a})$$
結合法則

〈注意〉

$(kl)\vec{a}$ や $k(l\vec{a})$ は，かっこを省略して $kl\vec{a}$ と書くことができます。

➜いままで学習してきたことから，ベクトルの和・差や実数倍は文字式と同じように計算できることがわかりましたね。
それでは，ベクトルの計算練習をしましょう。

基本例題 1 ベクトルの計算

$-2(\vec{a}-\vec{b})+3(\vec{a}+4\vec{b})$ を計算しなさい。

◆ 考え方 ◆

ベクトルの和・差や実数倍は，文字式と同じように計算できます。
分配法則を使ってかっこをはずすときは，符号に注意します。

◆ 解　答 ◆

$$\begin{aligned}-2(\vec{a}-\vec{b})+3(\vec{a}+4\vec{b})&=-2\vec{a}+2\vec{b}+3\vec{a}+12\vec{b}\\&=(-2+3)\vec{a}+(2+12)\vec{b}\\&=\vec{a}+14\vec{b}\end{aligned}$$

➜それでは，トレーニングに進みましょう。

■■■トレーニング■■■

3 (0020)

次の計算をしなさい。

(1) $3\vec{a}+4\vec{a}-2\vec{a}$　　(2) $3(4\vec{a})$

➜ベクトルの和・差や実数倍は，文字式と同じように考えて計算できるのですね。
ではもう少し，ベクトルの計算についてトレーニングしましょう。

4 (0021)

次の計算をしなさい。

(1) $2(\vec{a}+3\vec{b})-(2\vec{a}-\vec{b})$　　(2) $-3(\vec{a}+2\vec{b})+2(2\vec{a}+\vec{b})$

(3) $3(\vec{a}+3\vec{b}-\vec{c})-2(2\vec{a}+\vec{b}-5\vec{c})$

➜ベクトルの計算がきちんとできるようになったところで，例題1に進みましょう。

例題 1　　ベクトルの方程式の解法

$3(\vec{a}-\vec{x})=2\vec{x}+\vec{b}$ のとき，$\vec{x}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表しなさい。

◆考え方◆

ベクトルの和・差や実数倍は，文字式と同じように計算できることから，ベクトル $\vec{x}$ についての方程式と考えて解きます。

ここでは，1次方程式と同じように考えて，まず $\vec{x}$ を含む項を左辺に，$\vec{a}$，$\vec{b}$ を含む項を右辺に移項します。

次に，両辺を整理し，$k\vec{x}=l\vec{a}+m\vec{b}$ の形にして，両辺を k でわって，$\vec{x}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表します。

◆解　答◆

$3(\vec{a}-\vec{x})=2\vec{x}+\vec{b}$

$3\vec{a}-3\vec{x}=2\vec{x}+\vec{b}$

$-3\vec{x}-2\vec{x}=\vec{b}-3\vec{a}$　　➜ $2\vec{x}$，$3\vec{a}$ を移項する。

$-5\vec{x}=-3\vec{a}+\vec{b}$

よって　$\vec{x}=\frac{3}{5}\vec{a}-\frac{1}{5}\vec{b}$　　➜両辺を -5 でわる。

➜それでは，トレーニングに進みましょう。

■■■トレーニング■■■

5　(0022)

次の等式を満たす $\vec{x}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表しなさい。

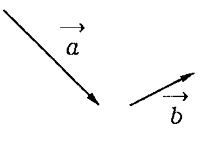
(1)　$4\vec{a}+3\vec{x}=\vec{x}-\vec{a}+2\vec{b}$　　(2)　$5(\vec{x}-2\vec{a})=2(\vec{x}+3\vec{b})-4\vec{a}$

6　(0023)

$\vec{a}$，$\vec{b}$ が図のように与えられたとき

$2\vec{x}+3(\vec{b}-\vec{a})=3\vec{x}-5\vec{a}$

を満たす $\vec{x}$ を図示しなさい。



➜最後に，大きさが1のベクトルについて学習しましょう。

〔3〕単位ベクトル

◇ $\vec{a}$ と向きが同じで，大きさが1のベクトル

大きさが1のベクトルを単位ベクトルといいます。

$\vec{0}$でない任意のベクトル $\vec{a}$ の大きさは $|\vec{a}|$ ですから，$\vec{a}$ の $\dfrac{1}{|\vec{a}|}$ 倍のベクトルの大きさは１ですね。

$|\vec{a}|>0$ ですから，$\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ は $\vec{a}$ と同じ向きの単位ベクトルになります。

➜それでは，ちょっとトレーニングしてみましょうか。

■■■トレーニング■■■

7 (0024)

$|\vec{a}|=2$ のとき，$\vec{a}$ と同じ向きの単位ベクトルを求めなさい。

もっと力をつけよう

■■■トレーニング■■■

8 (0025)

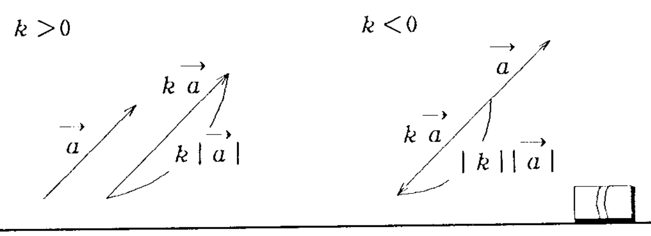
$\vec{a}=2\vec{x}-3\vec{y}$，$\vec{b}=\vec{x}+2\vec{y}$ のとき，$3\vec{a}-2\vec{b}$ を $\vec{x}$，$\vec{y}$ で表しなさい。

9 (0026)

$\vec{x}+3\vec{y}=2\vec{a}$，$\vec{x}-\vec{y}=\vec{b}$ を満たす $\vec{x}$，$\vec{y}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表しなさい。

➜これでおしまい。

まとめておこう！



§4　図形とベクトル　ベクトルの平行条件，図形上のベクトル

図形とベクトル……図形上のベクトルを考える。

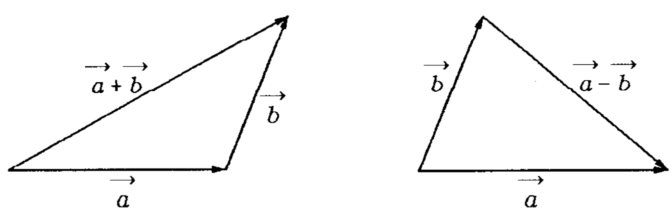
ここで，いろいろな図形上のベクトルを利用して，ベクトルの性質をさらに考えていきましょう。

➜では，ここでの学習を始めましょう。
まず，ベクトルの和・差，実数倍について確認しておきましょう。

〔1〕ベクトルの平行

◇ベクトルの計算のまとめ

2つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ の和 $\vec{a}+\vec{b}$，および差 $\vec{a}-\vec{b}$ は，次の図のように定めましたね。



また，ベクトル $\vec{a}$ と実数 k に対して，実数倍 $k\vec{a}$ は次のように定めましたね。

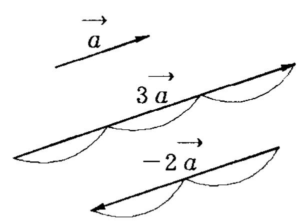
$\vec{a}$ が $\vec{0}$ でないとき

$k>0$ …… $\vec{a}$ と向きが同じで，大きさが k 倍のベクトル

$k<0$ …… $\vec{a}$ と向きが反対で，大きさが $|k|$ 倍のベクトル

$k=0$ …… $\vec{0}$

$\vec{a}$ が $\vec{0}$ のとき　$\vec{0}$



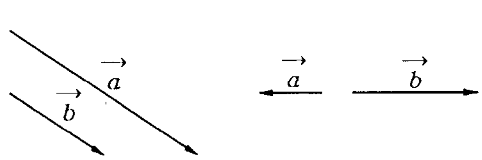
➜ベクトルの和・差，実数倍についてはきちんと理解できていますね。では，ベクトルの平行について学習していきましょう。

◇ベクトルの平行とは？

右の図のように，$\vec{0}$ でない2つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ の向きが同じか反対であるとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は平行であるといい

$$\vec{a} \mathbin{/\!/} \vec{b}$$

と書きます。



ベクトルの平行と実数倍の定義から，次の性質が得られます。

ベクトルの平行条件

$\vec{a} \neq \vec{0}$，$\vec{b} \neq \vec{0}$ のとき

$\vec{a} \parallel \vec{b} \iff \vec{a} = k\vec{b}$　　k は実数

➜では，ベクトルの平行についてのトレーニングをしましょう。

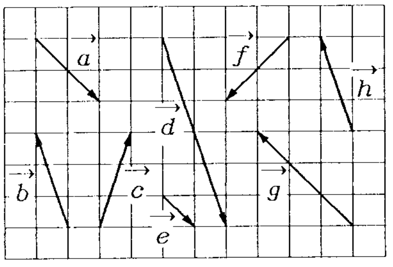
■■■トレーニング■■■

1　(0027)

図について，次の問いに答えなさい。

(1) $\vec{a}$ に平行なベクトルはどれですか。

(2) $\vec{b}$ に平行なベクトルはどれですか。



2　(0028)

$\vec{x}=3\vec{a}-\vec{b}$，$\vec{y}=\vec{a}+\vec{b}$，$\vec{z}=2\vec{a}+\vec{b}$ のとき，$\vec{x}+3\vec{y}$ と $2\vec{z}-\vec{y}$ が平行であることを，次の手順にしたがって証明しなさい。

(1) $\vec{x}+3\vec{y}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表しなさい。

(2) $2\vec{z}-\vec{y}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表しなさい。

(3) (1)，(2)の結果から，$\vec{x}+3\vec{y}$ と $2\vec{z}-\vec{y}$ が平行であることを証明しなさい。

➜ $\vec{x}+3\vec{y}=k(2\vec{z}-\vec{y})$ の形で表せるかどうかを調べます。

3　(0029)

$\vec{x}=4\vec{a}-\vec{b}$，$\vec{y}=\vec{a}+3\vec{b}$，$\vec{z}=-\vec{a}+\vec{b}$ のとき，$\vec{x}+2\vec{z}$ と $5\vec{z}-3\vec{y}$ が平行であることを証明しなさい。

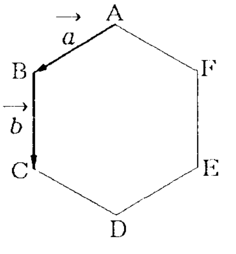
➜それでは，例題 1 に進みましょう。

例題 1　　図形上のベクトル

右の図の正六角形 ABCDEF で，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{BC}=\vec{b}$ とするとき，次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表しなさい。

(1) $\overrightarrow{AC}$　　(2) $\overrightarrow{AD}$

(3) $\overrightarrow{AF}$　　(4) $\overrightarrow{BF}$

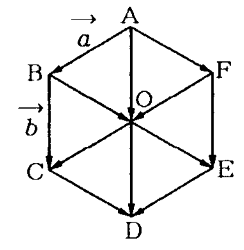


◆ 考え方 ◆

正六角形の中心，すなわち３つの対角線の交点をＯとすると

$$\vec{a}=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{FO}=\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{ED}$$
$$\vec{b}=\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{FE}$$
$$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{AF}$$

となることに注目します。



◆ 解 答 ◆

正六角形の中心をＯとする。

(1) $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\vec{a}+\vec{b}$

(2) $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AO}=2\overrightarrow{BC}=2\vec{b}$

(3) $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}$

(4) $\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AB}=(\vec{b}-\vec{a})-\vec{a}=\vec{b}-2\vec{a}$

➜(3)，(4)では，$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{\square B}-\overrightarrow{\square A}$ の変形を使っています。これは覚えておいても損をしません。

■■■トレーニング■■■

4 (0030)

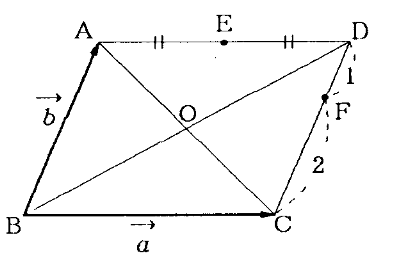
右の図の平行四辺形ＡＢＣＤで，対角線ＡＣ，ＢＤの交点をＯ，ＡＤの中点をＥ，ＣＤを２：１に内分する点をＦとします。$\overrightarrow{BC}=\vec{a}$，$\overrightarrow{BA}=\vec{b}$ とするとき，次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表しなさい。

(1) $\overrightarrow{AO}$　　(2) $\overrightarrow{BO}$

(3) $\overrightarrow{BE}$　　(4) $\overrightarrow{BF}$

(5) $\overrightarrow{FE}$　　(6) $\overrightarrow{OE}$

(7) $\overrightarrow{OF}$



5 (0031)

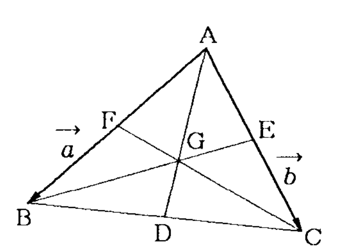
△ＡＢＣの３つの中線をＡＤ，ＢＥ，ＣＦとし，それらの交点をＧとします。

$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{b}$ とするとき，次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表しなさい。

(1) $\overrightarrow{AD}$

(2) $\overrightarrow{AG}$

(3) $\overrightarrow{CG}$



➜ Ｇは重心ですから，$AG=\frac{2}{3}AD$，すなわち $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$ が成り立ちますね。

→それでは，ベクトルの性質を図形を使って示す問題について考えていきましょう。

例題２　ベクトルの性質を図形を使って

$\vec{0}$ でない２つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ について

$$|\vec{a}+\vec{b}| \leqq |\vec{a}|+|\vec{b}|$$

であることを，図をかいて示しなさい。

◆ 考え方 ◆

次の３つの場合に分けて考えます。

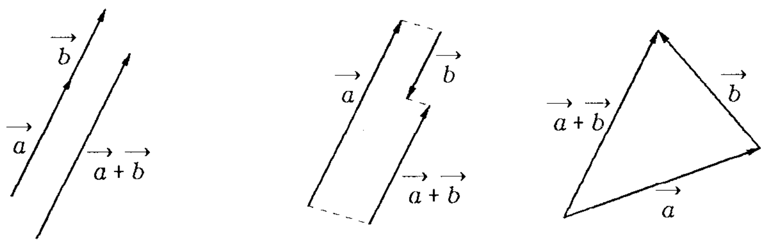
“$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が同じ向き”

“$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が反対向き”

“$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が平行でない”

◆ 解　答 ◆

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が同じ向きの場合，反対向きの場合，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が平行でない場合の $\vec{a}+\vec{b}$ を図示すると，次のようになる。



図から

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が同じ向きの場合は　$|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}|+|\vec{b}|$

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が反対向きの場合は　$|\vec{a}+\vec{b}|<|\vec{a}|+|\vec{b}|$

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が平行でない場合は　$|\vec{a}+\vec{b}|<|\vec{a}|+|\vec{b}|$

→三角形の２辺の和は他の１辺より大きい。

したがって，$\vec{0}$ でない２つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ について

$$|\vec{a}+\vec{b}| \leqq |\vec{a}|+|\vec{b}|$$

等号が成り立つのは，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が同じ向きの場合である。

〈注意〉

$\vec{a}=\vec{0}$ または $\vec{b}=\vec{0}$ の場合は，あきらかに

$$|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}|+|\vec{b}|$$

が成り立ちます。

したがって，一般に，ベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ について

$$|\vec{a}+\vec{b}| \leqq |\vec{a}|+|\vec{b}|$$

が成り立ちます。

→例題２では，図形を使って，ベクトルの和の大きさは，ベクトルの大きさの和より大きくないということを示しました。

では，次のトレーニングで，ベクトルの差の大きさは，ベクトルの大きさの和より大きくないことや，ベクトルの大きさの差より小さくないことを，図形を使って示

しましょう。

■■■トレーニング■■■

6 * (0032)

ベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ について，次の問いに答えなさい。

(1) $\vec{a}=\vec{0}$ または $\vec{b}=\vec{0}$ の場合，$|\vec{b}-\vec{a}|$ と $|\vec{a}|+|\vec{b}|$ の関係式を書きなさい。

(2) $\vec{a}\neq\vec{0}$, $\vec{b}\neq\vec{0}$ で，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が同じ向きの場合，$|\vec{b}-\vec{a}|$ と $|\vec{a}|+|\vec{b}|$ の関係を図をかいて示しなさい。

(3) $\vec{a}\neq\vec{0}$, $\vec{b}\neq\vec{0}$ で，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が反対向きの場合，$|\vec{b}-\vec{a}|$ と $|\vec{a}|+|\vec{b}|$ の関係を図をかいて示しなさい。

(4) $\vec{a}\neq\vec{0}$, $\vec{b}\neq\vec{0}$ で，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が平行でない場合，$|\vec{b}-\vec{a}|$ と $|\vec{a}|+|\vec{b}|$ の関係を図をかいて示しなさい。

➜ここで，次のことを定義しておきます。
"p, q を実数とするとき，$p \sim q$ は $|p-q|$ を表す。"

7 * (0033)

ベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ について

$$|\vec{a}| \sim |\vec{b}| \leqq |\vec{b}-\vec{a}|$$

であることを，図をかいて示しなさい。

➜最後に，次の問題を考えてみましょう。

もっと力をつけよう

■■■トレーニング■■■

8 (0034)

$\vec{e}$ が単位ベクトルのとき，$\vec{e}$ に平行で，大きさが3のベクトルを求めなさい。

➜逆向きのベクトルも忘れないように。
それでは，答え合わせをして，終わりにしましょう。

> まとめておこう！
>
> ベクトルの平行条件は，
> $\vec{a}\neq 0$, $\vec{b}\neq 0$ のとき，
> $\vec{a} \,/\!/\, \vec{b} \Longleftrightarrow \vec{a}=k\vec{b}$ （k は実数）

§5 ベクトルの成分表示 基本ベクトル表示と成分表示，ベクトルの相等条件

成分表示……ベクトルの表し方の1つ

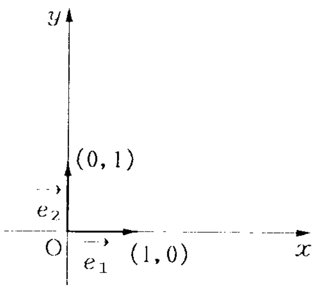
ここでは，成分表示とは，どのようなベクトルの表し方なのか，また，成分表示された2つのベクトルが等しいとき，どのようなことがいえるのかについて学習しましょう。

➜大きさ1のベクトルを単位ベクトルということは，§3で学習しました。
さて，ここではベクトルの向きと大きさを矢印を使わないで表す学習をします。
まず，そのための準備から始めましょう。

〔1〕基本ベクトル

◇ 基本ベクトルとは……

O を原点とする座標平面上で，各座標軸の正の向きと同じ向きをもつ単位ベクトルを基本ベクトルといい，x 軸方向の基本ベクトルを $\overrightarrow{e_1}$，y 軸方向の基本ベクトルを $\overrightarrow{e_2}$ と表します。



基本ベクトル $\overrightarrow{e_1}$，$\overrightarrow{e_2}$ は単位ベクトルですから

$|\overrightarrow{e_1}|=1$，$|\overrightarrow{e_2}|=1$

また，$\overrightarrow{e_1}$，$\overrightarrow{e_2}$ の始点を原点 O にとれば，終点の座標はそれぞれ

(1, 0)，(0, 1)

となります。

➜任意のベクトルは，この基本ベクトルの実数倍の和として表されます。このことについて学習しましょう。

◇ 基本ベクトルで表すと……

いま，任意のベクトル $\vec{a}$ が与えられたとき，$\vec{a}$ を基本ベクトルで表すことを考えてみましょう。

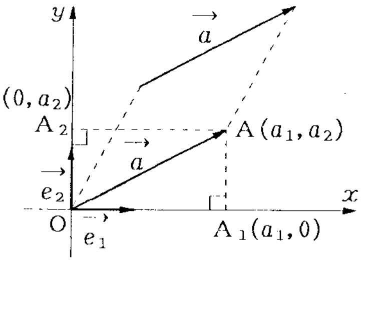
$\vec{a}$ の始点を原点 O にとるとき，その終点が

$A(a_1,\ a_2)$

であれば

$\vec{a}=\overrightarrow{OA}$

となります。



ここで，点 A から x 軸，y 軸にそれぞれ垂線をひき，その交点を A_1，A_2 とすると

$\vec{a}=\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{A_1A}$

$$=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2} \qquad \cdots\cdots\cdots ①$$

で，点 A_1，A_2 の座標はそれぞれ

$$A_1(a_1,\ 0),\ A_2(0,\ a_2)$$

ですね。

したがって

$$\overrightarrow{OA_1}=a_1\overrightarrow{e_1},\ \overrightarrow{OA_2}=a_2\overrightarrow{e_2}$$

となり，これらを①に代入すると

$$\vec{a}=a_1\overrightarrow{e_1}+a_2\overrightarrow{e_2}$$

となります。

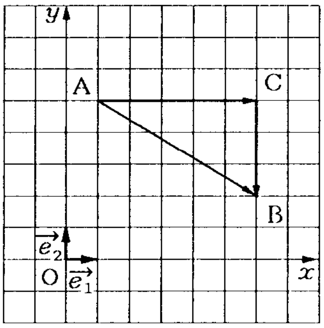
これを $\vec{a}$ の基本ベクトル表示といい，$\overrightarrow{e_1}$ の係数 a_1 を $\vec{a}$ の x 成分，$\overrightarrow{e_2}$ の係数 a_2 を $\vec{a}$ の y 成分といいます。

➜任意のベクトルは，基本ベクトルの実数倍の和で表されることがわかりましたね。
では，ベクトルを基本ベクトルで表すトレーニングをしましょう。

■■■トレーニング■■■

1 (0035)

右の図のベクトル $\overrightarrow{AB}$ を，次の $\boxed{\quad}$ をうめて，基本ベクトル表示しなさい。



$\overrightarrow{AC}$ は x 軸に正の向きと同じ向きをもつ大きさ5のベクトルであるから

$$\overrightarrow{AC}=\boxed{\quad}\ \overrightarrow{e_1}$$

$\overrightarrow{CB}$ は y 軸の正の向きと反対の向きをもつ大きさ $\boxed{\quad}$ のベクトルであるから

$$\overrightarrow{CB}=-3\boxed{\quad}$$

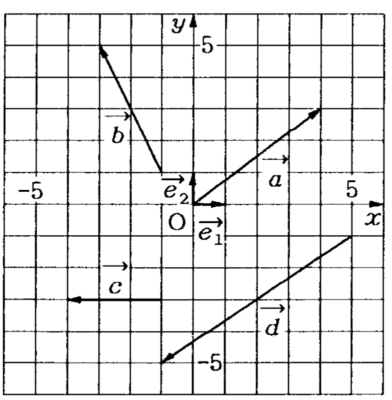
また　$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+\boxed{\quad}$

したがって，$\overrightarrow{AB}$ を基本ベクトルで表すと

$$\overrightarrow{AB}=\boxed{\quad}$$

2 (0036)

図の $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ を基本ベクトル表示しなさい。



➜基本ベクトル表示がわかったところで，これを簡潔にした「成分表示」というベク

トルの表し方について学習しましょう。

〔2〕ベクトルの成分表示

◇ベクトル $\vec{a}$ を成分で表すと

平面上のベクトル $\vec{a}$ を基本ベクトル表示すると

$$\vec{a}=a_1\vec{e_1}+a_2\vec{e_2}$$

となるとき，ベクトル $\vec{a}$ を成分だけを使って

$$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$$

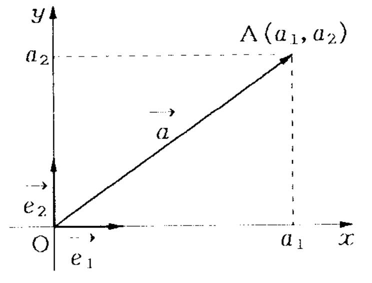
と表すこともあります。

これを $\vec{a}$ の成分表示といいます。

$\vec{0}$，基本ベクトル $\vec{e_1}$，$\vec{e_2}$ を成分表示すると

$$\vec{0}=(0,\ 0),\quad \vec{e_1}=(1,\ 0),\quad \vec{e_2}=(0,\ 1)$$

となります。



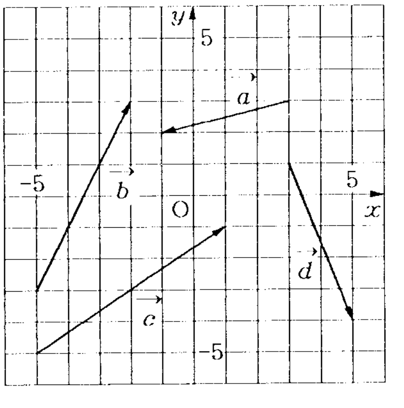
また，右上の図からもわかるように，ベクトルの成分表示は，そのベクトルの始点を原点としたときの終点の座標に一致します。

➜ベクトルを成分表示するトレーニングをしましょう。

■■■トレーニング■■■

3 (0037)

図の $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ を成分表示しなさい。



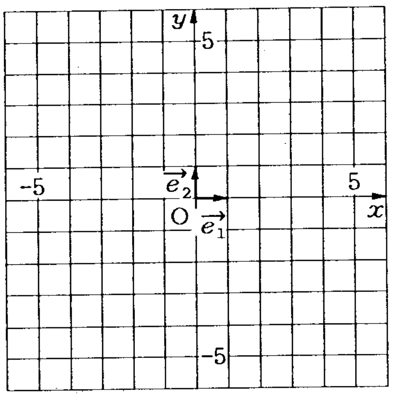
4 (0038)

次のベクトルを原点 O を始点として，図示しなさい。

$\vec{a}=2\vec{e_1}+\vec{e_2}$

$\vec{b}=-3\vec{e_1}-4\vec{e_2}$

$\vec{c}=4\vec{e_1}-5\vec{e_2}$



5 (0039)

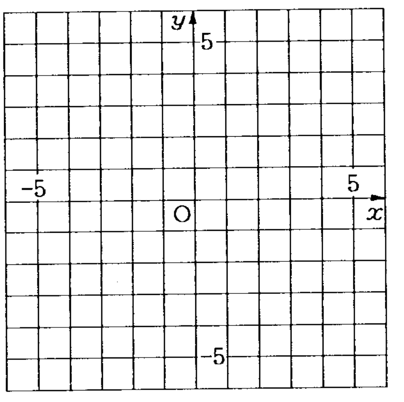
次のベクトルを原点 O を始点として，図示しなさい。

$\vec{a}=(-4,\ -3)$

$\vec{b}=(0,\ 4)$

$\vec{c}=(5,\ -2)$

$\vec{d}=(-5,\ 3)$



〔3〕ベクトルの相等条件

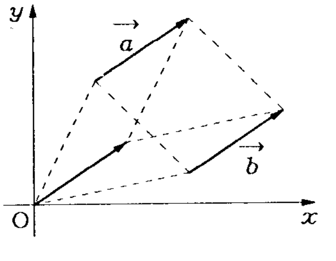
◇ベクトルが等しければ，成分も……

右の図からわかるように

$\vec{a}=\vec{b}$

のとき，$\vec{a}$，$\vec{b}$ の x 成分，y 成分は等しくなりますね。

また，あきらかに x 成分，y 成分が等しい 2 つのベクトルは等しくなりますね。



では，このことをまとめておきましょう。

ベクトルの相等条件

$$(a_1,\ a_2)=(b_1,\ b_2) \Longleftrightarrow a_1=b_1 \text{ かつ } a_2=b_2$$

〈注意〉

基本ベクトルを使ってこのことを示すと

$$a_1\vec{e_1}+a_2\vec{e_2}=b_1\vec{e_1}+b_2\vec{e_2} \Longleftrightarrow a_1=b_1 \text{ かつ } a_2=b_2$$

となります。

➜ベクトルの相等に関する問題を解いていきましょう。

基本例題 1 ベクトルの相等

次のベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ が等しいとき，u，v の値を求めなさい。

(1) $\vec{a}=2\vec{e_1}+u\vec{e_2}$，$\vec{b}=(u-v)\vec{e_1}+3v\vec{e_2}$

(2) $\vec{a}=(u+2v,\ 3u-v)$，$\vec{b}=(-3,\ 5)$

◆ 考え方 ◆

ベクトルの相等条件

$$a_1\vec{e_1}+a_2\vec{e_2}=b_1\vec{e_1}+b_2\vec{e_2} \Longleftrightarrow a_1=b_1,\ a_2=b_2$$

$$(a_1,\ a_2)=(b_1,\ b_2) \Longleftrightarrow a_1=b_1,\ a_2=b_2$$

から，u，v についての連立方程式を導き，それを解いて u，v の値を求める。

◆ 解　答 ◆

(1) $2\vec{e_1}+u\vec{e_2}=(u-v)\vec{e_1}+3v\vec{e_2}$ から

$2=u-v$ ………①

$u=3v$ ………②

①，②を連立方程式として解くと

$u=3$，$v=1$

(2) $(u+2v,\ 3u-v)=(-3,\ 5)$ から

$u+2v=-3$ ………①

$3u-v=5$ ………②

①，②を連立方程式として解くと

$u=1$，$v=-2$

■■■トレーニング■■■

6 (0040)

次のベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ が等しいとき，u，v の値を求めなさい。

(1) $\vec{a}=(u+2v)\vec{e_1}+5\vec{e_2}$，$\vec{b}=3\vec{e_1}+(v-3u)\vec{e_2}$

(2) $\vec{a}=7\vec{e_1}-\vec{e_2}$，$\vec{b}=(2u-v)\vec{e_1}+(u+4v)\vec{e_2}$

7 (0041)

次のベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ が等しいとき，u，v の値を求めなさい。

(1) $\vec{a}=(2u-v,\ u+3v)$，$\vec{b}=(-1,\ -11)$

(2) $\vec{a}=(u+5v,\ 8)$，$\vec{b}=(6,\ 2v-u)$

➜これで，ここでの学習は終わりです。
次のセクションは成分によるベクトルの計算の学習です。お楽しみに！

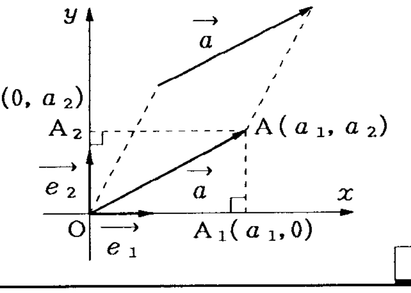
まとめておこう！

成分表示

$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$

基本ベクトル

$\vec{e_1}=(1,0)$, $\vec{e_2}=(0,1)$



§6　成分によるベクトルの計算　ベクトルの計算，ベクトルの分解

成分の計算……ベクトル計算を成分で

ベクトルの和・差，実数倍の計算を，成分によって行うことをここで学習します。

➜ベクトルを成分表示したときの和・差について，一般にどんなことがいえるのか調べていきましょう。

〔1〕成分による計算

◇ 成分表示されたベクトルの和と差

ベクトル$(a_1,\ a_2)$，$(b_1,\ b_2)$を基本ベクトル表示すると

$$(a_1,\ a_2)=a_1\overrightarrow{e_1}+a_2\overrightarrow{e_2}$$
$$(b_1,\ b_2)=b_1\overrightarrow{e_1}+b_2\overrightarrow{e_2}$$

となり，この2つのベクトルの和，差を計算すると

$$\begin{aligned}(a_1,\ a_2)+(b_1,\ b_2)&=(a_1\overrightarrow{e_1}+a_2\overrightarrow{e_2})+(b_1\overrightarrow{e_1}+b_2\overrightarrow{e_2})\\&=(a_1\overrightarrow{e_1}+b_1\overrightarrow{e_1})+(a_2\overrightarrow{e_2}+b_2\overrightarrow{e_2})\\&=(a_1+b_1)\overrightarrow{e_1}+(a_2+b_2)\overrightarrow{e_2}\quad\cdots\cdots①\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(a_1,\ a_2)-(b_1,\ b_2)&=(a_1\overrightarrow{e_1}+a_2\overrightarrow{e_2})-(b_1\overrightarrow{e_1}+b_2\overrightarrow{e_2})\\&=(a_1\overrightarrow{e_1}-b_1\overrightarrow{e_1})+(a_2\overrightarrow{e_2}-b_2\overrightarrow{e_2})\\&=(a_1-b_1)\overrightarrow{e_1}+(a_2-b_2)\overrightarrow{e_2}\quad\cdots\cdots②\end{aligned}$$

①，②をそれぞれ，成分表示すると

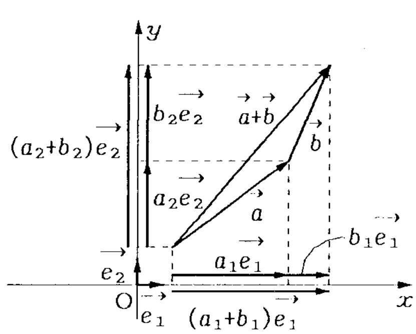
$$(a_1+b_1,\ a_2+b_2),\ (a_1-b_1,\ a_2-b_2)$$

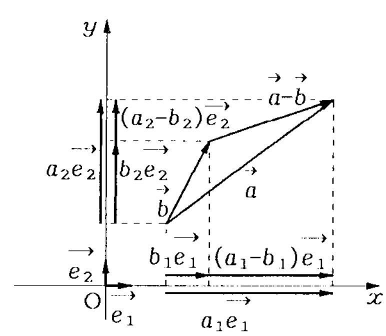
となります。

このことから，ベクトルを成分表示したときの和と差を求める公式

$$(a_1,\ a_2)+(b_1,\ b_2)=(a_1+b_1,\ a_2+b_2)$$
$$(a_1,\ a_2)-(b_1,\ b_2)=(a_1-b_1,\ a_2-b_2)$$

が得られます。





➜ベクトルを成分表示したときの和，差の求め方はわかりましたね。
では，ベクトルの実数倍の求め方を，次のトレーニングで考えていきましょう。

■■■トレーニング■■■

1 (0042)

ベクトル$(a_1,\ a_2)$について，$k(a_1,\ a_2)=(ka_1,\ ka_2)$が成り立つことを証明しなさい。

➜$(a_1,\ a_2)$を$a_1\overrightarrow{e_1}+a_2\overrightarrow{e_2}$と基本ベクトル表示になおして計算しましょう。
ここで，成分による演算についてまとめておきます。

成分による演算

$$(a_1,\ a_2)+(b_1,\ b_2)=(a_1+b_1,\ a_2+b_2)$$
$$(a_1,\ a_2)-(b_1,\ b_2)=(a_1-b_1,\ a_2-b_2)$$
$$k(a_1,\ a_2)=(ka_1,\ ka_2)$$

➜しっかり身につけましょうね。
では，成分によるベクトルの和・差，実数倍の計算練習をしましょう。

和　　前どうし
(○, △)+(●, ▲)=(○+●, △+▲)
実数倍　　後どうし
○ (□, △)= (○×□, ○×△)

2 (0043)

$\overrightarrow{a}=(1,\ -2)$，$\overrightarrow{b}=(4,\ -2)$のとき，次のベクトルを成分表示しなさい。

(1) $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$　　(2) $\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}$

(3) $3\overrightarrow{a}$　　(4) $-\frac{1}{2}\overrightarrow{b}$

3 (0044)

$\overrightarrow{a}=(2,\ 3)$，$\overrightarrow{b}=(-4,\ 1)$のとき，次のベクトルを成分表示しなさい。

(1) $\overrightarrow{a}+3\overrightarrow{b}$　　(2) $2\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}$

(3) $2\overrightarrow{b}-3\overrightarrow{a}$　　(4) $3\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{b}$

➜では，基本例題 1 に進みましょう。

基本例題 1　　　　ベクトルの計算

$\overrightarrow{a}=(1,\ 2)$，$\overrightarrow{b}=(3,\ -5)$のとき，次のベクトルを成分表示しなさい。

$$3(\overrightarrow{a}+3\overrightarrow{b})-2(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b})-7\overrightarrow{b}$$

◆ 考え方 ◆

与えられた式を$m\overrightarrow{a}+n\overrightarrow{b}$の形に整理してから，$\overrightarrow{a}=(1,\ 2)$，$\overrightarrow{b}=(3,\ -5)$を代入し，成分を計算します。

◆解　答◆

$3(\vec{a}+3\vec{b})-2(\vec{a}-\vec{b})-7\vec{b}$

$=3\vec{a}+9\vec{b}-2\vec{a}+2\vec{b}-7\vec{b}$

$=\vec{a}+4\vec{b}$

$=(1,\ 2)+4(3,\ -5)$　➜ $\vec{a}=(1,\ 2)$，$\vec{b}=(3,\ -5)$ を代入。

$=(1+12,\ 2-20)$

$=(13,\ -18)$

■■■トレーニング■■■

4　(0045)

$\vec{a}=(2,\ 3)$，$\vec{b}=(-1,\ 2)$ のとき，次のベクトルを成分表示しなさい。

(1)　$2(\vec{a}+2\vec{b})-3(2\vec{a}+\vec{b})$　　(2)　$-3(\vec{b}-\vec{a})+7\vec{a}$

5　(0046)

$\vec{a}=(1,\ -1)$，$\vec{b}=(3,\ 2)$，$\vec{c}=(4,\ -1)$ のとき，次のベクトルを成分表示しなさい。

(1)　$2(\vec{a}-\vec{b}-\vec{c})+(\vec{a}+\vec{b}+2\vec{c})$

(2)　$-2(\vec{a}+\vec{b})+(2\vec{b}-\vec{c})+4(\vec{c}+\vec{a})$

6　(0047)

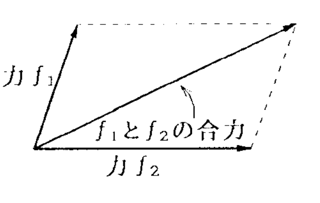
$\vec{a}=(-2,\ 4)$，$\vec{b}=(3,\ 1)$ のとき，次の式を満たす $\vec{x}$ を成分表示しなさい。

(1)　$\vec{x}-\vec{a}=\vec{b}$　　(2)　$2\vec{x}-\vec{b}=\vec{a}+3\vec{b}$

●ここで一息●

「ベクトルの起源」

1600年ごろ，オランダの物理学者ステヴィンが力の平行四辺形の原理を発見したときに，有向線分で力を表したのがベクトルの起源であるといわれています。



例題1　ベクトルの相等

$\vec{a}=(1,\ 3)$，$\vec{b}=(-2,\ 2)$，$\vec{c}=(4,\ 5)$ のとき，$\vec{c}$ を $m\vec{a}+n\vec{b}$ の形で表しなさい。

◆考え方◆

まず，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を成分表示したものを $\vec{c}=m\vec{a}+n\vec{b}$ に代入し，右辺の成分を計算します。

つぎに，ベクトルの相等条件

$$(a_1,\ a_2)=(b_1,\ b_2) \Longleftrightarrow a_1=b_1,\ a_2=b_2$$

を使って，m，n についての連立方程式をつくり，それを解きます。

◆解　答◆

$\vec{a}=(1,\ 3)$，$\vec{b}=(-2,\ 2)$，$\vec{c}=(4,\ 5)$ を $\vec{c}=m\vec{a}+n\vec{b}$ に代入すると

$$(4,\ 5)=m(1,\ 3)+n(-2,\ 2)$$
$$=(m-2n,\ 3m+2n)$$

よって　$m-2n=4$　………①

$3m+2n=5$　………②

①，②を連立方程式として解くと

$$m=\frac{9}{4},\quad n=-\frac{7}{8}$$

したがって　$\vec{c}=\frac{9}{4}\vec{a}-\frac{7}{8}\vec{b}$

■■■トレーニング■■■

7　(0048)

$\vec{a}=(2,\ 1)$，$\vec{b}=(1,\ -3)$，$\vec{c}=(-5,\ 1)$ のとき，$\vec{c}=p\vec{a}+q\vec{b}$ を満たす実数 p，q の値を求めなさい。

〔2〕ベクトルの分解

◇ベクトルを分解すると

平面上の $\vec{0}$ でない2つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ が平行でないとき，平面上の任意のベクトル $\vec{p}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表すことを考えてみましょう。

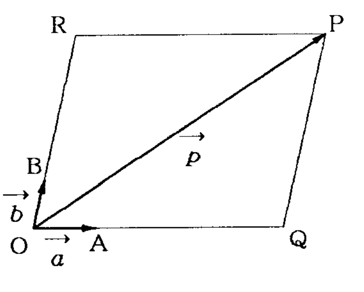
3つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{p}$ の始点を点Ｏにとり，点Ａ，Ｂ，Ｐをそれぞれ

$$\vec{a}=\overrightarrow{OA},\quad \vec{b}=\overrightarrow{OB},\quad \vec{p}=\overrightarrow{OP}$$

となるようにとります。

いま，点Ｐを通り，直線ＯＢ，ＯＡに平行な直線をひき，ＯＡ，ＯＢとの交点をそれぞれＱ，Ｒとすると

$$\vec{p}=\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{QP}\quad \cdots\cdots\text{①}$$



また，$\overrightarrow{OQ}/\!/\vec{a}$，$\overrightarrow{QP}/\!/\vec{b}$ ですから

$$\overrightarrow{OQ}=m\vec{a},\quad \overrightarrow{QP}=n\vec{b}$$

となる実数 m，n があります。

これを①に代入すると，$\vec{p}$ は $\vec{a}$，$\vec{b}$ を使って

$$\vec{p}=m\vec{a}+n\vec{b}\qquad m,\ n\text{ は実数}$$

と表されることがわかります。

〈注意〉

$\vec{a}$，$\vec{b}$ がきまると，任意のベクトル $\vec{p}$ に対して，m，n はただ1通りにきまります。

➜任意のベクトル $\vec{p}$ は $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の2方向に分解して表すことができるのですね。

例題1，トレーニング**7**において，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は平行ではありませんから，$\vec{c}$ を

$m\vec{a}+n\vec{b}$（m，n は実数）の形で表すことができたのですね。
では，ベクトルの分解について，もう少しトレーニングをしましょう。

■■■トレーニング■■■

8　(0049)
$\vec{a}=(4,\ 1)$，$\vec{b}=(-3,\ 2)$，$\vec{c}=(10,\ -3)$ のとき，$\vec{c}$ を $p\vec{a}+q\vec{b}$ の形で表しなさい。

➜よくがんばりましたね。ここでの学習はこれで終わりです。

まとめておこう！

ベクトルの和　$(a_1,\ a_2)+(b_1,\ b_2)=(a_1+b_1,\ a_2+b_2)$
ベクトルの実数倍　$m(a_1,\ a_2)=(ma_1,\ ma_2)$
$m(a_1,\ a_2)+n(b_1,\ b_2)=(ma_1+nb_1,\ ma_2+nb_2)$
$m,\ n$は実数

§7 ベクトルの大きさ

成分表示されたベクトルの大きさ

ベクトルの大きさは，ベクトルを表す有向線分の長さでしたね。ここでは，このことと原点と点との距離の公式から，成分表示されたベクトルの大きさの求め方について考えていきます。

➜さて，ここでの学習は，成分表示されたベクトルの大きさを求めることです。さっそく始めることにしましょう。

〔1〕ベクトルの大きさ

◇ベクトルの大きさを成分で表すこと

成分表示されたベクトルの大きさを求めてみましょう。

$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$ の始点を原点Oにとり，終点をPとすれば，その座標は

$$(a_1,\ a_2)$$

となりますね。

$\vec{a}$ の大きさは，$\vec{a}$ を表す有向線分OPの長さですから

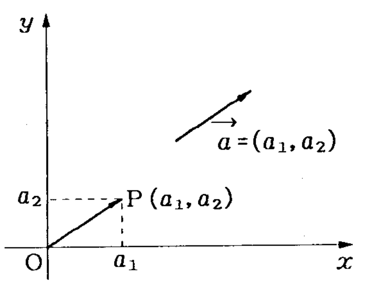
$$|\vec{a}|=\mathrm{OP}$$

です。

したがって，点と原点との距離の公式から

$$|\vec{a}|=\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2}$$

となります。



ベクトルの大きさ

$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$ の大きさは　$|\vec{a}|=\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2}$

➜さっそく，成分を使ってベクトルの大きさを求めてみましょう。

■■■トレーニング■■■

1 (0050)

次のベクトルの大きさを求めなさい。

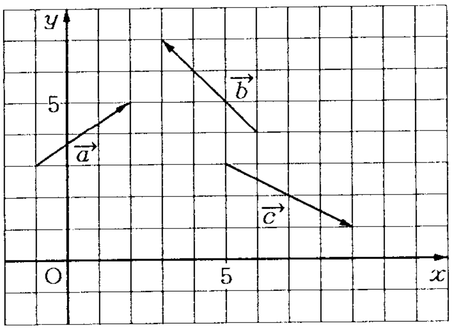
(1) $\vec{a}=(1,\ -4)$　　(2) $\vec{b}=(1+\sqrt{3},\ 1-\sqrt{3})$

2 (0051)

右の図のベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ について，次の問いに答えなさい。

(1) それぞれのベクトルを成分表示しなさい。

(2) それぞれのベクトルの大きさを求めなさい。



➜では，基本例題 1 に進みましょう。

基本例題 1　　ベクトルの大きさ

$\vec{p}=(-3,\ 4)$，$\vec{q}=(1,\ 3)$ のとき，$|3\vec{p}+\vec{q}|$ を求めなさい。

◆ 考え方 ◆

$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$ の大きさは，$|\vec{a}|=\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2}$ です。

ここでは，まず，$3\vec{p}+\vec{q}$ を成分表示してから，上の公式を使って $|3\vec{p}+\vec{q}|$ を求めます。

◆ 解　答 ◆

$$
\begin{aligned}
3\vec{p}+\vec{q} &= 3(-3,\ 4)+(1,\ 3)\\
&=(-9+1,\ 12+3)\\
&=(-8,\ 15)
\end{aligned}
$$

よって　$$
\begin{aligned}
|3\vec{p}+\vec{q}| &= \sqrt{(-8)^2+15^2}\\
&=\sqrt{289}\\
&=17
\end{aligned}
$$

➜わかりますね。トレーニングをしてみましょう。

■■■トレーニング■■■

3 (0052)

$\vec{a}=(1,\ 2)$，$\vec{b}=(2,\ -1)$ のとき，次のベクトルの大きさを求めなさい。

(1) $\vec{a}+3\vec{b}$　　(2) $2(\vec{a}+\vec{b})$

4 (0053)

$\vec{p}=(3,\ 1)$，$\vec{q}=(-1,\ -2)$ のとき，次の値を求めなさい。

(1) $|\vec{p}+3\vec{q}|$　　(2) $|\vec{p}-2\vec{q}|$

➜トレーニング**3**と**4**は問いかけ方が違うだけで，求めるものは同じですね。
では，後半の学習に進みましょう。

例題1　ベクトルの大きさの応用

$\vec{a}=(1,\ 2)$，$\vec{b}=(3,\ -1)$ のとき，$|\vec{a}+t\vec{b}|$ の最小値を求めなさい。また，そのときの t の値を求めなさい。

◆ 考え方 ◆

まず，$\vec{a}+t\vec{b}$ を成分表示し，つぎに，$|\vec{a}+t\vec{b}|$ を t で表します。　このとき，$|\vec{a}+t\vec{b}|$ は $\sqrt{(t\text{ の2次式})}$ になります。

そこで，$|\vec{a}+t\vec{b}|^2$ を最小にする t の値は $|\vec{a}+t\vec{b}|$ を最小にすることに注目し，t の値と $|\vec{a}+t\vec{b}|$ の値を求めます。

◆ 解　答 ◆

$$\vec{a}+t\vec{b}=(1,\ 2)+t(3,\ -1)$$
$$=(1+3t,\ 2-t)$$

よって　$|\vec{a}+t\vec{b}|=\sqrt{(1+3t)^2+(2-t)^2}$

すなわち　$|\vec{a}+t\vec{b}|^2=(1+3t)^2+(2-t)^2$
$$=1+6t+9t^2+4-4t+t^2$$
$$=10t^2+2t+5$$

これを変形すると

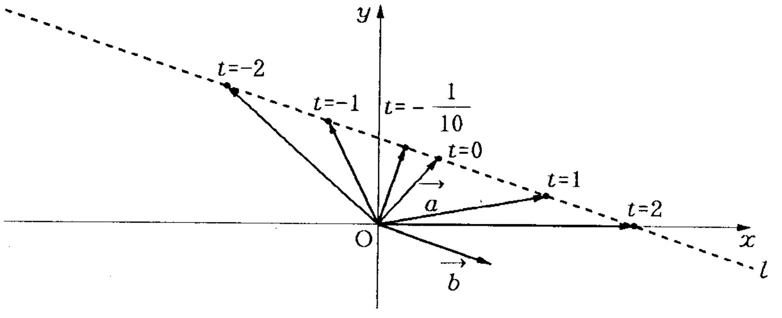
$$|\vec{a}+t\vec{b}|^2=10\left(t+\frac{1}{10}\right)^2+\frac{49}{10}$$

ゆえに，$|\vec{a}+t\vec{b}|^2$ は $t=-\frac{1}{10}$ のとき，最小値 $\frac{49}{10}$ をとる。

したがって，$|\vec{a}+t\vec{b}|$ は $t=-\frac{1}{10}$ のとき，最小値 $\sqrt{\frac{49}{10}}=\frac{7\sqrt{10}}{10}$ をとる。

〈注意〉

原点 O を始点とし，$t=-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2$ のときの $\vec{a}+t\vec{b}$ を図示すると，これらのベクトルの終点は，次のように，$\vec{a}$ の終点を通り，$\vec{b}$ に平行な直線 l 上にあります。



ところで，$\vec{a}+t\vec{b}$ の終点はこの直線 l 上にあるので，$|\vec{a}+t\vec{b}|$ が最小となるとき，$\vec{a}+t\vec{b}$ と直線 l は垂直になり，その最小値は原点と直線 l の距離を表します。

■■■トレーニング■■■

5 ＊ (0054)

$\vec{a}=(3,\ 2)$，$\vec{b}=(-1,\ 2)$ のとき，$|\vec{a}-t\vec{b}|$ の最小値と，そのときの t の値を求めなさい。

6 ＊ (0055)

$\vec{a}=(-4,\ -3)$，$\vec{b}=(2,\ 1)$ のとき，$|\vec{a}+t\vec{b}|=2$ を満たす実数 t の値を求めなさい。

➜ここでの学習はこれで終わりです。時間に余裕のある人は，次の『もっと力をつけよう』の問題を解いてみましょう。

もっと力をつけよう

➜２つのベクトルの和と差の成分表示が与えられたときの２つのベクトルの大きさを求める問題です。

■■■トレーニング■■■

7 (0056)

$\vec{a}+\vec{b}=(1,\ 3)$………①，$\vec{a}-\vec{b}=(5,\ -1)$………②のとき，次の問いに答えなさい。

(1) $\vec{a}$，$\vec{b}$ を成分表示しなさい。

(2) $|\vec{a}|$，$|\vec{b}|$ を求めなさい。

(3) $|2\vec{a}-\vec{b}|$ を求めなさい。

➜そんなに難しくはないですね。
それでは，答え合わせをして終わりにしましょう。

まとめておこう！

$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$の大きさは，$|\vec{a}|=\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2}$

§8　ベクトルの平行条件　成分による平行条件

成分表示されたベクトルの平行条件

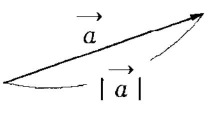
$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が平行である条件は $\vec{a}=k\vec{b}$ であることは，すでに学習しましたね。ここでは，この条件を成分で考えていきます。

➔では，ここでの学習にはいりましょう。まず，単位ベクトルを成分表示したり，平行条件を成分で考えたりしてみましょう。

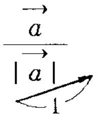
〔1〕平行条件の成分表示

◇ 単位ベクトルを成分表示すると……

大きさが1のベクトルを単位ベクトルといい，$\vec{0}$ でない任意のベクトル $\vec{a}$ と同じ向きの単位ベクトルは $\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ と表せましたね。



たとえば，$\vec{a}$ の大きさが2のとき，$\vec{a}$ と同じ向きの単位ベクトルは $\dfrac{\vec{a}}{2}$ です。



ところで，$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$ のとき，$|\vec{a}|=\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2}$ ですから，$\vec{a}$ と同じ向きの単位ベクトルを成分表示すると

$$\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\left(\frac{a_1}{|\vec{a}|},\ \frac{a_2}{|\vec{a}|}\right)$$
$$=\left(\frac{a_1}{\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2}},\ \frac{a_2}{\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2}}\right)$$

となります。

〈注意〉

$\vec{a}$ と反対向きの単位ベクトルは $-\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ と表されますから，$\vec{a}$ と平行な単位ベクトルといった場合

$$\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|},\qquad -\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$$

の2つが考えられます。

➔つぎに，平行条件を成分で考えてみましょう。

◇ 平行条件を成分で考えると……

$\vec{0}$ でない2つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ について

$$\vec{a} /\!/ \vec{b} \iff \vec{a} = k\vec{b} \qquad k \text{ は実数}$$

が成り立ちましたね。

いま，$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ として，$\vec{a}=k\vec{b}$ を成分を使って表すと

$$(a_1,\ a_2)=k(b_1,\ b_2)$$

すなわち　$a_1=kb_1$，$a_2=kb_2$

となります。

このことをまとめておきましょう。

成分による平行条件

$\vec{0}$ でない2つのベクトル $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ について，k を実数として

$$\vec{a} /\!/ \vec{b} \iff (a_1,\ a_2)=k(b_1,\ b_2)$$
$$\iff a_1=kb_1,\ a_2=kb_2$$

➜では，基本例題1に進みましょう。

基本例題1　　平行な単位ベクトル

$\vec{a}=(3,\ 4)$ のとき，$\vec{a}$ と平行な単位ベクトルを成分表示しなさい。

◆ 考え方 ◆

$\vec{a}$ と平行な単位ベクトルには

同じ向きの単位ベクトル $\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ と反対向きの単位ベクトル $-\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$

の2つがあります。

◆ 解　答 ◆

$\vec{a}$ の大きさは　　$|\vec{a}|=\sqrt{3^2+4^2}$
$$=\sqrt{25}$$
$$=5$$

よって，$\vec{a}$ と平行な単位ベクトルは

$$\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\frac{1}{5}(3,\ 4)$$
$$=\left(\frac{3}{5},\ \frac{4}{5}\right)$$
$$-\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=-\left(\frac{3}{5},\ \frac{4}{5}\right)$$
$$=\left(-\frac{3}{5},\ -\frac{4}{5}\right)$$

◆ 別　解 ◆

$\vec{a}$ と平行な単位ベクトルを $\vec{e}=(a_1,\ a_2)$ とすると，k を実数として

$$(a_1,\ a_2)=k(3,\ 4)$$

よって　　$a_1=3k,\ a_2=4k$

$\overrightarrow{e}$ は単位ベクトルであるから

$$\sqrt{(3k)^2+(4k)^2}=1$$

すなわち　　$(3k)^2+(4k)^2=1$

$$25k^2=1$$

よって　　$k=\pm\dfrac{1}{5}$

$k=\dfrac{1}{5}$ のとき　　$a_1=\dfrac{3}{5},\ a_2=\dfrac{4}{5}$

$k=-\dfrac{1}{5}$ のとき　　$a_1=-\dfrac{3}{5},\ a_2=-\dfrac{4}{5}$

したがって，$\overrightarrow{a}$ と平行な単位ベクトルは

$$\left(\frac{3}{5},\ \frac{4}{5}\right),\ \left(-\frac{3}{5},\ -\frac{4}{5}\right)$$

■■■トレーニング■■■

1　(0057)

次のベクトルと平行な単位ベクトルを求めなさい。

(1)　$\overrightarrow{a}=(8,\ -6)$　　　(2)　$\overrightarrow{b}=(2,\ 1)$

2　(0058)

$\overrightarrow{a}=(3,\ -1)$ のとき，次のベクトルを求めなさい。

(1)　$\overrightarrow{a}$ と同じ向きで，大きさが5のベクトル

(2)　$\overrightarrow{a}$ と反対向きで，大きさが2のベクトル

3　(0059)

$\overrightarrow{a}=(-3,\ 4)$，$\overrightarrow{b}=(1,\ 1)$ のとき，$\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}$ に平行で大きさが10のベクトルを成分表示しなさい。

➜では，後半の学習に進みましょう。

例題1　　平行条件の応用

$\overrightarrow{a}=(x,\ 3)$，$\overrightarrow{b}=(1,\ -1)$，$\overrightarrow{c}=(2,\ 4)$ のとき，$\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$ と $\overrightarrow{a}-\overrightarrow{c}$ が平行になるような x の値を求めなさい。

◆ 考え方 ◆

$\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$ と $\overrightarrow{a}-\overrightarrow{c}$ が平行である条件は，k を実数として

$$\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}=k(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{c})$$

です。

ここでは，$\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{a}-\overrightarrow{c}$ を成分表示し，つぎに，上の式を成分を使って表します。そして，成分で表された平行条件から k の値を求め，x の値を求めます。

◆解　答◆

$$\vec{a}+\vec{b}=(x,\ 3)+(1,\ -1)$$
$$=(x+1,\ 2)$$
$$\vec{a}-\vec{c}=(x,\ 3)-(2,\ 4)$$
$$=(x-2,\ -1)$$

$\vec{a}+\vec{b}$ と $\vec{a}-\vec{c}$ が平行であるから，k を実数として

$$(x+1,\ 2)=k(x-2,\ -1)$$

よって　$x+1=k(x-2)$　………①

$2=-k$　………②

②から　$k=-2$

これを①に代入すると

$$x+1=-2(x-2)$$

よって　$x=1$

➜それでは，トレーニングに進みましょう。

■■■トレーニング■■■

4　(0060)

次の２つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ が平行になるような x の値を求めなさい。

(1)　$\vec{a}=(x,\ 3)$，$\vec{b}=(6,\ x+3)$

(2)　$\vec{a}=(-9,\ x)$，$\vec{b}=(x-3,\ x+1)$

5　(0061)

$\vec{a}=(-3,\ 2)$，$\vec{b}=(1,\ 2)$，$\vec{c}=(2,\ 5)$ とするとき，$\vec{a}+t\vec{b}$ と $\vec{c}$ が平行になるような実数 t の値を求めなさい。

➜最後に，成分表示された２つのベクトルが平行であることを証明するトレーニングをしてみましょう。

6　(0062)

$\vec{a}=(1,\ 2)$，$\vec{b}=(-3,\ 1)$，$\vec{c}=(4,\ -3)$ のとき，$2\vec{a}+3\vec{b}+\vec{c}$ と $7\vec{b}+9\vec{c}$ は平行であることを証明しなさい。

➜２つのベクトルの平行条件をきちんと覚えておきましょう。
次に，『もっと力をつけよう』があります。余裕のある人はやってみましょう。

$\vec{a}\,/\!/\,\vec{b}$

$\Longleftrightarrow (a_1,\ a_2)=k(b_1,\ b_2)$

$\Longleftrightarrow a_1=kb_1,\ \ a_2=kb_2$

もっと力をつけよう

■■■トレーニング■■■

7 (0063)

$\vec{a}=(2,\ 3)$，$\vec{b}=(5,\ 1)$ のとき，$\vec{x}-\vec{b}$ が $\vec{a}$ に平行で，しかも $|\vec{x}+\vec{b}|=13$ となるような $\vec{x}$ を求めなさい。

➜ $\vec{x}=(x,\ y)$として考えてみると……わかりますね。これでおしまい。

まとめておこう！

$\vec{0}$でない２つのベクトル$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$について

kを実数として

$$\vec{a} \,/\!/\, \vec{b} \Longleftrightarrow (a_1,\ a_2)=k(b_1,\ b_2)$$
$$\Longleftrightarrow a_1=kb_1,\quad a_2=kb_2$$

§9　位置ベクトル　位置ベクトル表示，分点を表す位置ベクトル

位置ベクトル……点の位置を示すベクトル

点の位置を示すのに座標がありましたが，ベクトルによっても示すことができます。ここでは，このようなベクトルについて学習します。

➜では，ここでの学習にはいりましょう。

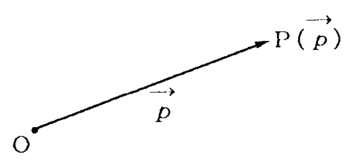
〔1〕位置ベクトル

◇位置を示すベクトル

平面上に定点 O を定めたとき，任意の点 P に対してきまるベクトル $\overrightarrow{OP}=\vec{p}$ を，点 O を基準とする点 P の位置ベクトルといい，点 P の位置ベクトルが $\vec{p}$ であることを

$P(\vec{p})$

と書きます。



定点 O を定めたとき，1つの点 P がきまると，ベクトル $\overrightarrow{OP}=\vec{p}$ がきまりますね。

逆に，ベクトル $\vec{p}$ がきまると，始点を基準の点 O にとることにより，ベクトル $\vec{p}$ の終点として，1つの点 P がきまります。

この意味で，位置ベクトル $\vec{p}$ は点 P の位置を示すベクトルといえます。

➜つぎに，ベクトル $\overrightarrow{AB}$ を点 A，B の位置ベクトルで表すことを考えてみましょう。

◇ $\overrightarrow{AB}$ を点 A，B の位置ベクトルで表すと……

$\overrightarrow{AB}$ を $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ で表すと

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$

となりますね。

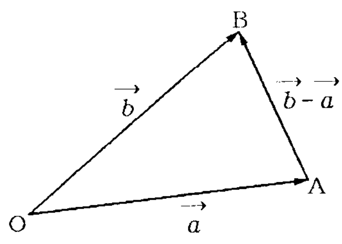
したがって，点 A，B の位置ベクトルをそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$ とすると

$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$

ですから，$\overrightarrow{AB}$ は

$\vec{b}-\vec{a}$

と表されます。



このことをまとめておきましょう。

$\overrightarrow{AB}$の位置ベクトル表示

2点A$(\vec{a})$，B$(\vec{b})$に対して　$\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}$

このことは，右のようにして覚えましょう!!

$\overrightarrow{AB}$＝(終点Bの位置ベクトル)
　　　　　－(始点Aの位置ベクトル)

■■■トレーニング■■■

1　(0064)

3点A，B，Cの位置ベクトルをそれぞれ$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$とするとき，$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{CA}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$で表しなさい。

➜では，つぎに内分点の位置ベクトルについて考えてみましょう。

例題1　　内分点の位置ベクトル

2点A$(\vec{a})$，B$(\vec{b})$に対して，線分ABを$m:n$に内分する点Cの位置ベクトルを$\vec{c}$とすると

$$\vec{c}=\frac{m\vec{b}+n\vec{a}}{m+n}$$

であることを証明しなさい。

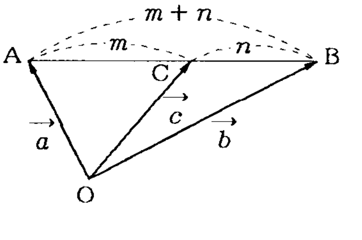
◆考え方◆

右の図からわかるように，点CがABを$m:n$に内分するとき

$$\overrightarrow{AC}=\frac{m}{m+n}\overrightarrow{AB}$$

が成り立ちます。

そこで，上の式の$\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AB}$をそれぞれ位置ベクトルで表し，$\vec{c}$について解きます。



◆解　答◆

点CはABを$m:n$に内分するから

$$\overrightarrow{AC}=\frac{m}{m+n}\overrightarrow{AB}$$

ここで，$\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AB}$をそれぞれ位置ベクトルで表すと

$$\overrightarrow{AC}=\vec{c}-\vec{a},\quad \overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}$$

よって　$$\vec{c}-\vec{a}=\frac{m}{m+n}(\vec{b}-\vec{a})$$

$$\vec{c}=\vec{a}+\frac{m}{m+n}(\vec{b}-\vec{a})$$

したがって　$\vec{c}=\dfrac{m\vec{b}+n\vec{a}}{m+n}$

➜では，外分点の位置ベクトルの公式について考えてみましょう。

■■■トレーニング■■■

2　(0065)

2点 A$(\vec{a})$，B$(\vec{b})$ を結ぶ線分 AB を $m:n$ に外分する点を D$(\vec{d})$ とすると

$$\vec{d}=\frac{m\vec{b}-n\vec{a}}{m-n}$$

となることを，$m>n>0$ の場合について証明しなさい。

➜トレーニングはできましたね。ところで，このトレーニングの結果は，$n>m>0$ の場合にも成り立ちます。
それでは，内分点，外分点を表す位置ベクトルについてまとめておきましょう。

分点を表す位置ベクトル

> 2点 A$(\vec{a})$，B$(\vec{b})$ に対して，線分 AB を $m:n$ に内分する点の位置ベクトル $\vec{c}$，外分する点の位置ベクトル $\vec{d}$ は，それぞれ
>
> $$\vec{c}=\frac{m\vec{b}+n\vec{a}}{m+n}\qquad \vec{d}=\frac{m\vec{b}-n\vec{a}}{m-n}$$

〈注意〉

線分 AB の中点は AB を 1：1 に内分するので，その位置ベクトル $\vec{m}$ は

$$\vec{m}=\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$$

と表されます。

また，線分 AB を $m:n$ に外分する点の位置ベクトルは

$$\frac{m\vec{b}-n\vec{a}}{m-n}=\frac{m\vec{b}+(-n)\vec{a}}{m+(-n)}$$

ですから，線分 AB を $m:(-n)$ に内分する点の位置ベクトルと考えることができます。

➜では，公式を使って，分点の位置ベクトルを求めるトレーニングをしましょう。

3　(0066)

2点 A$(\vec{a})$，B$(\vec{b})$ を結ぶ線分 AB を，次の比に内分する点の位置ベクトルを求めなさい。

(1)　5：2　　(2)　3：1　　(3)　2：3

4　(0067)

2点 A$(\vec{a})$，B$(\vec{b})$ を結ぶ線分 AB を，次の比に外分する点の位置ベクトルを求めなさい。

(1)　5：2　　(2)　3：2　　(3)　1：4

➜次は図をかいて考えてみよう。

5 (0068)

3点 A，B，C の位置ベクトルをそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ とします。

BC を3：1に外分する点を D，AD を3：2に内分する点を E とするとき，$\overrightarrow{BE}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ で表しなさい。

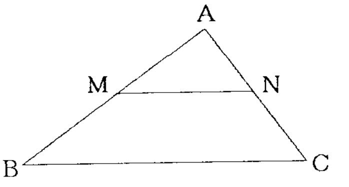
➜つぎに，位置ベクトルを利用して，図形の性質を証明してみましょう。

例題 2 位置ベクトルの図形への応用

右の図の △ABC で，AB，AC の中点をそれぞれ M，N とするとき

$$MN /\!/ BC,\ MN=\frac{1}{2}BC$$

であることを，位置ベクトルを使って証明しなさい。



◆ 考え方 ◆

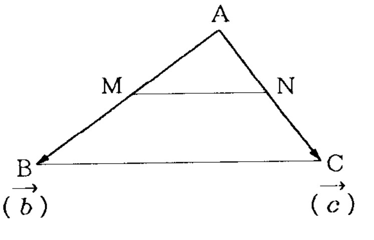
$MN /\!/ BC$，$MN=\frac{1}{2}BC$ となるためには，$\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ となればよい。

ここでは，$\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{MN}$ を点 A を基準とする B，C の位置ベクトルで表し，$\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ を導きます。

◆ 解 答 ◆

点 A を基準とする点 B，C の位置ベクトルをそれぞれ，$\vec{b}$，$\vec{c}$ とすると

$$\overrightarrow{BC}=\vec{c}-\vec{b}$$



また，点 M，N は AB，AC の中点であるから，その位置ベクトルは

$$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\vec{b},\ \overrightarrow{AN}=\frac{1}{2}\vec{c}$$

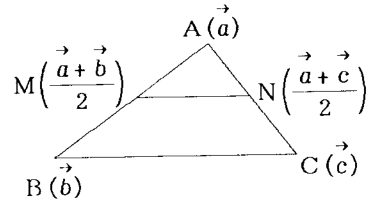
よって
$$\begin{aligned}\overrightarrow{MN}&=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}\\&=\frac{1}{2}\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{b}\\&=\frac{1}{2}(\vec{c}-\vec{b})\end{aligned}$$

ゆえに $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

したがって $MN /\!/ BC$，$MN=\frac{1}{2}BC$

➜例題2は，中点連結定理を位置ベクトルを使って証明したのですね。
ベクトルを利用すると，あっさり証明できます。

ところで，例題２では，点 A を基準とする点 B，C の位置ベクトルをそれぞれ $\vec{b}$，$\vec{c}$ として証明しましたが，3 点 A，B，C の位置ベクトルをそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ とおいて証明してもかまいません。例題２と同じようにして証明できます。



■■■トレーニング■■■

6＊ (0069)

△ABC の辺 BC，CA，AB の中点をそれぞれ D，E，F とするとき，次の等式が成り立つことを証明しなさい。

$$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\vec{0}$$

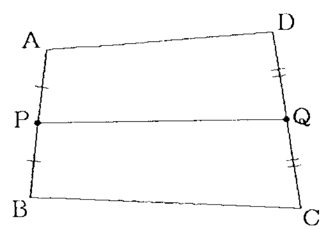
➜次は点Aを基準として，それぞれの位置ベクトルを決めて考えましょう。

7＊ (0070)

右の図の四角形 ABCD で，AB の中点を P，CD の中点を Q とするとき

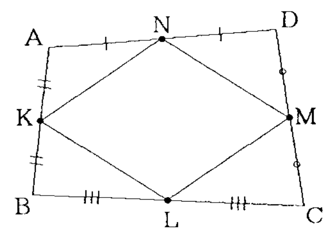
$$\overrightarrow{PQ}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC})$$

であることを証明しなさい。



8＊ (0071)

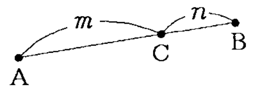
図の四角形 ABCD で，辺 AB，BC，CD，DA の中点をそれぞれ K，L，M，N とするとき，四角形 KLMN が平行四辺形であることを，位置ベクトルを使って証明しなさい。



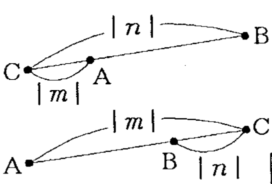
➜四角形 KLMN が平行四辺形であるためには，$\overrightarrow{KN}=\overrightarrow{LM}$ であればよいですね。
この問題は大切ですから，しっかり理解しておきましょう。
次のセクションも，位置ベクトルについて学習します。

まとめておこう！

$mn>0$ 内分



$mn<0$ 外分



§ 10　位置ベクトルと図形　重心の位置ベクトル，3点が1直線上にある条件

ベクトルと図形……位置ベクトルの利用

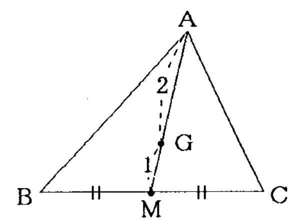
ここでは，重心の位置ベクトルを求めたり，3点が1直線上にあることを，位置ベクトルを使って証明したりします。

➜まず，重心の位置ベクトルについて考えてみましょう。

例題1　重心の位置ベクトル

右の図の△ABCで，BCの中点をM，AMを2：1に内分する点をGとします。

3点A，B，Cの位置ベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ とするとき，点Gの位置ベクトル $\vec{g}$ を求めなさい。



◆ 考え方 ◆

点Gの位置ベクトルは，点AとMの位置ベクトルで表され，点Mの位置ベクトルは点BとCの位置ベクトルで表されることに注目します。

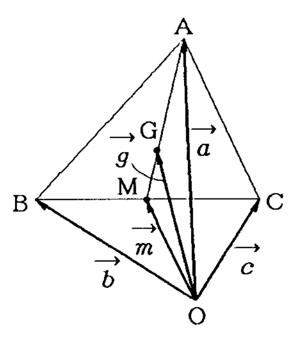
◆ 解　答 ◆

BCの中点Mの位置ベクトルを $\vec{m}$ とすると

$$\vec{m}=\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2} \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

GはAMを2：1に内分する点であるから

$$\vec{g}=\frac{2\vec{m}+\vec{a}}{2+1}=\frac{2\vec{m}+\vec{a}}{3} \quad \cdots\cdots\cdots ②$$



①を②に代入すると

$$\vec{g}=\frac{2\cdot\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}+\vec{a}}{3}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$$

〈注意〉

点BとACの中点を結ぶ線分を2：1に内分する点の位置ベクトルも，点CとABの中点を結ぶ線分を2：1に内分する点の位置ベクトルも，$\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$ と表されることから，三角形の3中線は1点Gで交わることがわかります。

中学校で習ったように，この点Gを△ABCの重心といいます。

➜重心の位置ベクトルについて，まとめておきましょう。

重心の位置ベクトル

3点 A$(\vec{a})$，B$(\vec{b})$，C$(\vec{c})$ に対して，△ABC の重心の位置ベクトル $\vec{g}$ は

$$\vec{g}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$$

➜トレーニングで試してみましょう。

■■■トレーニング■■■

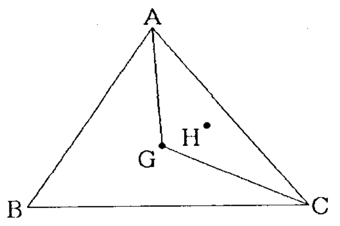
1 (0072)

右の図の △ABC の重心を G，△AGC の重心を H とします。点 A，B，C の位置ベクトルをそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ とするとき，次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ で表しなさい。

(1) 点 G の位置ベクトル

(2) 点 H の位置ベクトル

(3) $\overrightarrow{GH}$

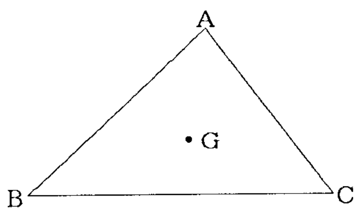


2 (0073)

右の図の △ABC の重心を G とするとき

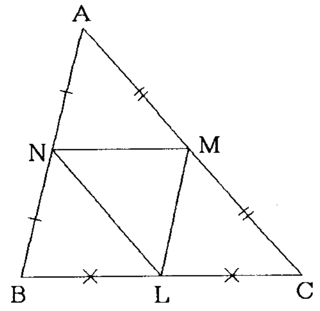
$$\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CG}=\vec{0}$$

が成り立つことを証明しなさい。



3 (0074)

図の△ABC で，BC，CA，AB の中点をそれぞれ L，M，N とするとき，△ABC の重心と△LMN の重心は一致することを証明しなさい。



右のことも
よく使われますから
覚えておきましょう。

(点Gの位置ベクトル)＝(点G′の位置ベクトル)

$\Longleftrightarrow$ G，G′は一致する。

➜ $k\vec{a}$ は $k>0$ のとき，$\vec{a}$ と同じ向きのベクトルで，$k<0$ のとき，反対向きのベクトルですね。また，$\vec{a}$ と同じ向きか,反対向きのベクトルは，$k\vec{a}$ と表されます。このことをしっかり頭に入れて，3点が1直線上にあるための条件を考えてみましょう。

〔1〕3点が1直線上にあるための条件

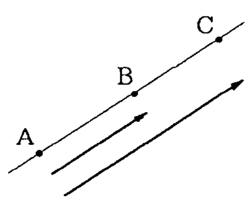
◇1直線上にある3点は……

下の図からわかるように，3点A，B，Cが1直線上にあるとき，$\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ の向きは，同じか反対ですから

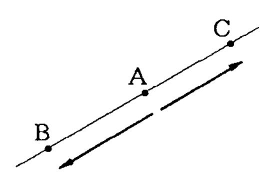
$\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$　　k は実数　　………①

が成り立ちます。

逆に，①が成り立つとき，3点A，B，Cは1直線上にあります。



$\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ の向きは同じ



$\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ の向きは反対

では，このことをまとめておきましょう。

3点が1直線上にあるための条件

3点A，B，Cが1直線上にあるための条件は

$\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$　　k は実数

〈注意〉

点A，B，Cの位置ベクトルを，それぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ とすると

$\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}-\vec{a}$

ですから，3点A，B，Cが1直線上にあるための条件は

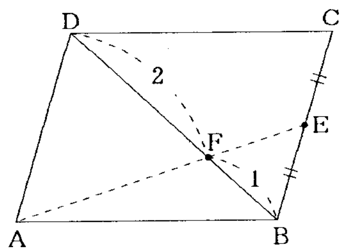
$\vec{b}-\vec{a}=k(\vec{c}-\vec{a})$　　k は実数

と表されます。

➜ 3点A，B，Cが1直線上にあるための条件は，$\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{AC}$ と $\overrightarrow{BC}$ の組み合わせでもかまいません。

例題２　3点が１直線上にあることの証明

右の図の平行四辺形ＡＢＣＤで，ＢＣの中点をＥ，ＢＤを１：２に内分する点をＦとするとき，３点Ａ，Ｅ，Ｆは１直線上にあることを証明しなさい。



◆ 考え方 ◆

３点Ａ，Ｅ，Ｆが１直線上にあるためには

$$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=k\overrightarrow{\mathrm{AF}} \qquad k\text{は実数}$$

となることですね。

ここでは，点Ａを基準とする点Ｂ，Ｄの位置ベクトルで点Ｅの位置ベクトル$\overrightarrow{\mathrm{AE}}$，点Ｆの位置ベクトル$\overrightarrow{\mathrm{AF}}$を表し，$\overrightarrow{\mathrm{AE}}$が$\overrightarrow{\mathrm{AF}}$の実数倍で表されることを示します。

◆ 解　答 ◆

点Ａを基準とする点Ｂ，Ｄの位置ベクトルをそれぞれ$\vec{b}$，$\vec{d}$とすると，点Ｃの位置ベクトルは

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}$$
$$=\vec{b}+\vec{d}$$

ＥはＢＣの中点であるから，その位置ベクトルは

$$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{2}$$
$$=\frac{\vec{b}+(\vec{b}+\vec{d})}{2}$$
$$=\frac{2\vec{b}+\vec{d}}{2} \quad \cdots\cdots\text{①}$$

また，ＦはＢＤを１：２に内分する点であるから，その位置ベクトルは

$$\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\frac{\vec{d}+2\vec{b}}{3}$$
$$=\frac{2\vec{b}+\vec{d}}{3} \quad \cdots\cdots\text{②}$$

①，②から

$$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\frac{3}{2}\left(\frac{2\vec{b}+\vec{d}}{3}\right)$$
$$=\frac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{AF}} \quad \rightarrow \overrightarrow{\mathrm{AE}}=k\overrightarrow{\mathrm{AF}}\text{ となる実数 } k \text{ が存在する。}$$

したがって，３点Ａ，Ｅ，Ｆは１直線上にある。

■■■トレーニング■■■

4 ＊ (0075)

点Ａ，Ｂ，Ｃの位置ベクトルがそれぞれ$\vec{a}$，$\vec{b}$，$4\vec{b}-3\vec{a}$のとき，次の問いに答えなさい。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$で表しなさい。

(2) 3点A，B，Cが1直線上にあることを証明しなさい。

5＊ (0076)

3点 A($\vec{a}$)，B($\vec{b}$)，C($\vec{c}$) を頂点とする△ABCで，ABを5：2に外分する点をP($\vec{p}$)，ACを1：2に内分する点をQ($\vec{q}$)，BCを1：5に内分する点をR($\vec{r}$)とするとき，$\vec{q}-\vec{p}=2(\vec{r}-\vec{p})$ であることを示し，3点P，Q，Rが1直線上にあることを証明しなさい。

➜ここでの学習はこれで終わりです。次の『もっと力をつけよう』にも取り組んで，このタイプの問題に慣れておきましょう。

もっと力をつけよう

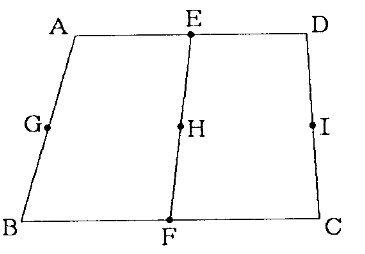
➜3点が1直線上にあることの証明問題を考えましょう。

■■■トレーニング■■■

6 (0077)

右の図の四角形ABCDで，AD，BCの中点をそれぞれE，Fとし，AB，EF，DCの中点をそれぞれ，G，H，Iとします。

このとき，3点G，H，Iは1直線上にあることを証明しなさい。



➜まず，点Aを基準とする点B，C，Dの位置ベクトルをそれぞれ $\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ とし，点G，H，Iの位置ベクトルを求めます。つぎに，$\overrightarrow{GH}$ と $\overrightarrow{GI}$ を求め，その関係を調べます。

最後に，少し難しいかもしれませんが，次の問題を考えてみましょう。

7 (0078)

△ABCに対して，$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+2\overrightarrow{PC}=\vec{0}$ を満たす点Pはどのような位置にありますか。

➜おつかれさま。答え合わせをしてみましょう。

まとめておこう！

3点A，B，Cが1直線にあるための条件

$\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$

§ 11　位置ベクトルと座標　座標の成分表示，分点の座標と成分表示

ベクトルと座標……座標平面上の点の位置ベクトル

点の位置を表す「位置ベクトル」と「座標」の間にある密接な関係について考えてみましょう。

➜では，ここでの本題にはいりましょう。

〔1〕座標と成分表示

◇ 成分と座標が一致する！

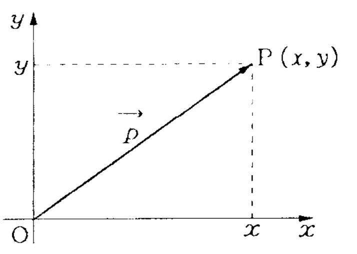
座標軸が与えられている場合は，ふつう原点 O を基準の点にとり，位置ベクトルを考えます。

いま，P$(x,\ y)$ ならば，原点 O を基準とする点 P の位置ベクトル $\vec{p}$ は

$$\vec{p}=(x,\ y)$$

と表されます。

このことから，点 P の座標は原点 O を基準とする点 P の位置ベクトルの成分表示と一致することがわかります。

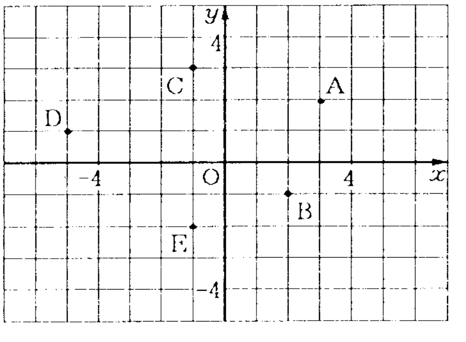


➜それでは，ある点の位置ベクトルを成分表示するトレーニングをしましょう。

■■■トレーニング■■■

1　(0079)

右の座標平面上で，原点 O を基準とする点 A，B，C，D，E の位置ベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$，$\vec{e}$ とするとき，このベクトルを成分表示しなさい。



➜座標平面上のベクトルの成分と座標の関係をもう少し考えてみましょう。

〔2〕ベクトルの成分

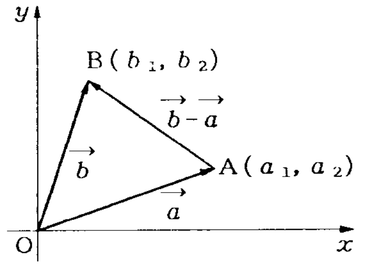
◇ ベクトル $\overrightarrow{AB}$ の成分表示

2点 $A(\vec{a})$, $B(\vec{b})$ に対して，$\overrightarrow{AB}$ は

$$\vec{b}-\vec{a}$$

と表されましたね。

いま，A，B の座標が，それぞれ $(a_1,\ a_2)$，$(b_1,\ b_2)$ ならば



$$\vec{a}=(a_1,\ a_2),\ \vec{b}=(b_1,\ b_2)$$

ですから，$\overrightarrow{AB}$ を成分表示すると

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}&=\vec{b}-\vec{a}\\&=(b_1,\ b_2)-(a_1,\ a_2)\\&=(b_1-a_1,\ b_2-a_2)\end{aligned}$$

となります。

では，このことをまとめておきましょう。

$\overrightarrow{AB}$ の成分表示

2点 $A(a_1,\ a_2)$，$B(b_1,\ b_2)$ に対して

$$\overrightarrow{AB}=(b_1-a_1,\ b_2-a_2)$$

〈注意〉

$\overrightarrow{AB}$ の大きさは

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}$$

となります。

ところで，$\overrightarrow{AB}$ の大きさは線分 AB の長さを表しますから，この式は2点 $A(a_1,\ a_2)$，$B(b_1,\ b_2)$ 間の距離の公式でもあります。

■■■トレーニング■■■

2 (0080)

次の2点について，$\overrightarrow{AB}$ を成分表示しなさい。また，その大きさを求めなさい。

(1) A(2, 5)，B(−2, 8)　　(2) A(−4, 7)，B(−8, 1)

➔つぎに，AB // CD を $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{CD}$ の成分表示から証明してみましょう。

基本例題 1　　点の座標とベクトル

4点 A(1, 0)，B(3, 6)，C(−2, −1)，D(−1, 2) について，AB // CD であることを証明しなさい。

◆ 考え方 ◆

AB // CD であるためには

$$\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{CD} \quad k は実数$$

となることですね。

ここでは，2点 A$(a_1,\ a_2)$，B$(b_1,\ b_2)$ に対して

$$\overrightarrow{AB}=(b_1-a_1,\ b_2-a_2)$$

であることを使って，$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{CD}$ を成分表示し，$\overrightarrow{AB}$ が $\overrightarrow{CD}$ の実数倍で表されることを示します。

◆解　答◆

$\overrightarrow{AB}=(3-1,\ 6-0)$

$\quad=(2,\ 6)$

$\overrightarrow{CD}=(-1-(-2),\ 2-(-1))$

$\quad=(1,\ 3)$

よって　$\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{CD}$　➜ $(2,\ 6)=2(1,\ 3)$

したがって　AB // CD

➜では，トレーニングに進みましょう。

■■■トレーニング■■■

3　(0081)

4点 A(1, 2)，B(2, 0)，C(3, −2)，D(6, −8) について，AB // CD であることを証明しなさい。

4　(0082)

4点 A(1, 1)，B(3, −1)，C(4, 2)，D(2, 4) を頂点とする四角形は平行四辺形であることを証明しなさい。

➜四角形 ABCD が平行四辺形 $\Longleftrightarrow$ $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$　ですね。

5　(0083)

3点 A(5, 8)，B(7, 3)，C(9, −2) は1直線上にあることを証明しなさい。

➜3点 A, B, C が1直線上にある $\Longleftrightarrow$ $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$　(k は実数) を利用しましょう。

➜平行四辺形の3つの頂点がきまっているとき，もう1つの頂点の座標をベクトルの成分表示を使って求めてみましょう。

例題1　　点の座標とベクトル

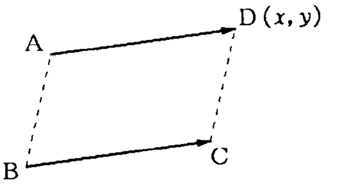
3点 A(3, −5)，B(7, −1)，C(9, 5) について，四角形 ABCD が平行四辺形になるような点 D の座標を求めなさい。

◆ 考え方 ◆

四角形ＡＢＣＤが平行四辺形のとき，$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ であることに注目します。

ここでは，まず，点Ｄの座標を $(x,\ y)$ とし，$\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{BC}$ を成分表示します。

つぎに，対応する成分の等しいことから，x，y の値を求めます。



◆ 解　答 ◆

点Ｄの座標を $(x,\ y)$ とすると

$$\overrightarrow{AD}=(x-3,\ y-(-5))$$
$$=(x-3,\ y+5)$$
$$\overrightarrow{BC}=(9-7,\ 5-(-1))$$
$$=(2,\ 6)$$

四角形ＡＢＣＤが平行四辺形であるから

$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$$

よって　$x-3=2$，$y+5=6$

ゆえに　$x=5$，$y=1$

したがって，点Ｄの座標は　$(5,\ 1)$

➜条件を満たす点の座標を，ベクトルの成分表示を使って求めるトレーニングをしましょう。

■■■トレーニング■■■

6　(0084)

4点 A$(3,\ -5)$，B$(4,\ 3)$，C$(-4,\ 0)$，D$(-2,\ x)$ について，AB//CD となるような x の値を求めなさい。

7　(0085)

3点 A$(3,\ 5)$，B$(9,\ -1)$，C$(-7,\ -5)$ に対して，四角形ＡＢＣＤが平行四辺形になるような点Ｄの座標を求めなさい。

8　(0086)

3点 A$(4,\ -1)$，B$(6,\ -4)$，C$(x,\ -10)$ が1直線上にあるような x の値を求めなさい。

〔3〕分点の位置ベクトル

◇ 分点の座標を位置ベクトルを使って求めると

2点 A$(\vec{a})$，B$(\vec{b})$ に対して，線分ＡＢを $m:n$ に内分する点Ｃの位置ベクトル $\vec{c}$ は

$$\frac{m\vec{b}+n\vec{a}}{m+n}$$

と表されましたね。

いま，点Ａ，Ｂの座標がそれぞれ $(a_1,\ a_2)$，$(b_1,\ b_2)$ ならば

$$\vec{a}=(a_1,\ a_2),\ \vec{b}=(b_1,\ b_2)$$

ですから，$\vec{c}$ を成分表示すると

$$\frac{m(b_1,\ b_2)+n(a_1,\ a_2)}{m+n}=\left(\frac{mb_1+na_1}{m+n},\ \frac{mb_2+na_2}{m+n}\right)$$

となり，点 C の座標は点 C の位置ベクトルの成分表示と一致することから

$$\mathrm{C}\left(\frac{mb_1+na_1}{m+n},\ \frac{mb_2+na_2}{m+n}\right)$$

となることがわかりますね。

このように，内分点の座標は位置ベクトルを使って求めることができます。

外分点の座標，重心の座標も位置ベクトルを使って，同様に求めることができます。

■■■トレーニング■■■

9　(0087)

3 点 A(5, 3)，B(−3, 2)，C(1, 4) に対して，次の点の座標を位置ベクトルを使って求めなさい。

(1)　AB を 3：2 に内分する点

(2)　BC を 3：2 に外分する点

(3)　△ABC の重心

➜よくがんばりましたね。ここでの学習は，これで終わりにしましょう。

まとめておこう！

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$の成分表示

2点A(a_1, a_2)，B(b_1, b_2)に対して

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(b_1-a_1,\ b_2-a_2)$

§12　平行でないベクトルの性質

平行でないベクトルにはどんな性質が……

$\vec{0}$でない2つのベクトル$\vec{a}$，$\vec{b}$が平行でないとき，任意のベクトルは$k\vec{a}+l\vec{b}$のような形で表されましたね。ここでは，その表し方がただ1とおりであることを学習し，それを使って問題を解いていきます。

➜ $k\vec{a}+l\vec{b}=\vec{0}$の場合，$\vec{a}$と$\vec{b}$が平行でないという条件から$k=0$，$l=0$が導かれます。このことを次の説明で理解しましょう。

〔1〕平行でないベクトルの性質

◇ 平行でないベクトルの性質

$\vec{0}$でない2つのベクトル$\vec{a}$，$\vec{b}$が平行でないとき

$$k\vec{a}+l\vec{b}=\vec{0} \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

を満たすk，lの値を調べてみましょう。

いま，$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$として，①を成分で表すと

$$k(a_1,\ a_2)+l(b_1,\ b_2)=(0,\ 0)$$

となりますから

$$ka_1+lb_1=0 \quad \cdots\cdots\cdots ②$$

$$ka_2+lb_2=0 \quad \cdots\cdots\cdots ③$$

ここで，②×b_2－③×b_1，③×a_1－②×a_2から，それぞれ次の式が導かれます。

$$(a_1b_2-a_2b_1)k=0,\ (a_1b_2-a_2b_1)l=0$$

ところで，$\vec{a}$と$\vec{b}$は平行でないから

$$a_1b_2-a_2b_1 \neq 0$$

が成り立ちます。

$$\text{➜}\ \vec{a}\,/\!/\,\vec{b} \iff (a_1,\ a_2)=k(b_1,\ b_2)$$

$$\iff a_1b_2-a_2b_1=0$$

したがって，$k=0$，$l=0$となります。

➜次のトレーニングは，上で示したことを使って解きましょう。

■■■トレーニング■■■

1 ＊ (0088)

$\vec{0}$でない2つのベクトル$\vec{a}$，$\vec{b}$が平行でないとき，次のことを証明しなさい。ただし，k，l，m，nは実数とします。

$$k\vec{a}+l\vec{b}=m\vec{a}+n\vec{b} \quad \text{ならば} \quad k=m,\ l=n$$

➜ $\vec{0}$ でない２つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ が平行でないとき，任意のベクトルは $k\vec{a}+l\vec{b}$ のような形で表されることはすでに学習しましたね。

トレーニング**1**の結果は，その表し方がただ１通りであることを示しています。

ここで，平行でないベクトルの性質についてまとめておきましょう。

平行でないベクトルの性質

$\vec{0}$ でない２つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ が平行でないとき

$k\vec{a}+l\vec{b}=\vec{0}$ ならば $k=l=0$

また $k\vec{a}+l\vec{b}=m\vec{a}+n\vec{b}$ ならば $k=m$, $l=n$

➜では，$\vec{a}\,/\!/\,\vec{b}$ のとき

$k\vec{a}+l\vec{b}=m\vec{a}+n\vec{b}$ ならば $k=m$, $l=n$

が成り立たないことを確かめるトレーニングをしましょう。

2 * (0089)

$\vec{0}$ でない２つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ が平行であるとき，$x\vec{a}+y\vec{b}=2\vec{a}+3\vec{b}$ ならば，$x=2$, $y=3$ といえるかどうかを，次の $\boxed{}$ をうめて確かめなさい。

与えられた式を整理すると

$$(x-\boxed{})\vec{a}+(y-\boxed{})\vec{b}=\vec{0} \quad \cdots\cdots\cdots①$$

$\vec{a}\,/\!/\,\vec{b}$ から，k を実数として　$\vec{a}\boxed{}k\vec{b}$

これを①に代入すると

$$(x-2)k\vec{b}+(y-\boxed{})\vec{b}=\vec{0}$$

$$\{k(x-2)+(y-3)\}\vec{b}=\vec{0}$$

$\vec{b}\neq\vec{0}$ であるから　$k(x-2)+(y-3)=\boxed{} \quad \cdots\cdots\cdots②$

よって，k の値が１つにきまっても，x, y の値は１つにはきまらない。

たとえば，$k=1$ のとき，②を満たす x, y の値の組は

$$(x,\ y)=(2,\ \boxed{}),\ (3,\ \boxed{}),\ (4,\ 1),\ \cdots\cdots$$

などのように無数にある。

したがって，$\vec{0}$ でない２つのベクトルが平行であるとき，$x\vec{a}+y\vec{b}=2\vec{a}+3\vec{b}$ であっても，$x=2$, $y=3$ とは $\boxed{}$。

➜平行でないベクトルの性質を使って，次の例題を解いてみましょう。

例題１　ベクトルの等式の係数比較

$\vec{0}$ でない２つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ が平行でないとき

$$(x+y)\vec{a}+(2x-y)\vec{b}=2\vec{a}-5\vec{b}$$

を満たす x, y の値を求めなさい。

◆ 考え方 ◆

$\vec{a}\neq 0$, $\vec{b}\neq 0$ で，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が平行でないとき

$$k\vec{a}+l\vec{b}=m\vec{a}+n\vec{b} \quad \text{ならば} \quad k=m,\ l=n$$

を使います。つまり，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の係数を比較して x，y の値を求めます。

◆解　答◆

$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ で，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は平行でないから

$x+y=2$ ………①

$2x-y=-5$ ………②

①，②を連立方程式として解くと

$x=-1$，$y=3$

➜では，トレーニングです。

■■■トレーニング■■■

3 (0090)

$\vec{0}$ でない2つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ が平行でないとき，次の式を満たす実数 x，y の値を求めなさい。

(1) $(2x-y)\vec{a}+(x+4y)\vec{b}=8\vec{a}-5\vec{b}$

(2) $(x+2y)\vec{a}+(3x+y-5)\vec{b}=\vec{0}$

4 (0091)

$\vec{0}$ でない2つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ が平行でないとします。$\vec{p}=-\vec{a}+2\vec{b}$，$\vec{q}=3\vec{a}-\vec{b}$ とするとき，次の問いに答えなさい。

(1) $x\vec{p}+y\vec{q}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表しなさい。

(2) $x\vec{p}+y\vec{q}=\vec{0}$ を満たす x，y の値を求めなさい。

5 (0092)

$\vec{0}$ でない2つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ が平行でないとします。

$\vec{p}=-\vec{a}+2\vec{b}$，$\vec{q}=3\vec{a}-\vec{b}$ とするとき，$x\vec{p}+y\vec{q}=4\vec{a}-3\vec{b}$ を満たす実数 x，y の値を求めなさい。

➜平行でないベクトルの性質はわかりましたね。次の例題2にはいる前に，点Ｐが直線ＡＢ上にあるときの $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ の表し方について考えてみましょう。

〔2〕2点を通る直線

◇点Ｐが直線ＡＢ上にあるとき

線分ＡＢを点Ｐが $m:n$ に内分するとき

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{m\overrightarrow{\mathrm{OB}}+n\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{m+n}$$

$$=\frac{n}{m+n}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{m}{m+n}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

でしたね。

このとき，m，n は正の数ですが，m と n のどちらか一方が負の数ならば，P は AB を $|m|:|n|$ に外分する点を表します。

したがって，点 P が直線 AB 上にあるとき

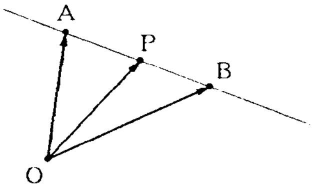
$$\frac{n}{m+n}=k,\quad \frac{m}{m+n}=l$$

とすると

$$\overrightarrow{OP}=k\overrightarrow{OA}+l\overrightarrow{OB},\quad k+l=1$$

すなわち　$\overrightarrow{OP}=(1-l)\overrightarrow{OA}+l\overrightarrow{OB}$

が成り立ちます。



→では，点 P が直線 AB 上にあるとき，s を実数として

$$\overrightarrow{OP}=(1-s)\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{OB}$$

であること，また，$\overrightarrow{OA}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{OB}\neq\vec{0}$ で，$\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ が平行でないとき

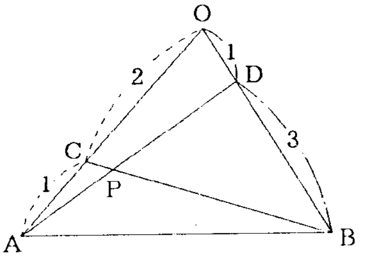
$$k\overrightarrow{OA}+l\overrightarrow{OB}=m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}\quad ならば\quad k=m,\ l=n$$

であることを頭に入れて，例題 2 に進みましょう。

例題 2　　**2 直線の交点の位置ベクトル**

右の図の △OAB で，OA を 2：1 に内分する点を C，OB を 1：3 に内分する点を D，AD と BC の交点を P とします。

点 O を基準とするときの A，B の位置ベクトルをそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$ として，点 P の位置ベクトルを求めなさい。



◆ 考え方 ◆

P は直線 AD 上の点であり，直線 BC 上の点でもあるから，s，t を実数として

$$\overrightarrow{OP}=(1-s)\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{OD}$$
$$\overrightarrow{OP}=(1-t)\overrightarrow{OB}+t\overrightarrow{OC}$$

が成り立ちます。

ここでは，$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OC}$ は $\vec{a}$ で，$\overrightarrow{OD}$，$\overrightarrow{OB}$ は $\vec{b}$ で表されることに注目し，$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ で，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が平行でないとき

$$k\vec{a}+l\vec{b}=m\vec{a}+n\vec{b}\quad ならば\quad k=m,\ l=n$$

を使って，s，t の値を求めます。

あとは，s の値か t の値から $\overrightarrow{OP}$ を求めます。

◆ 解　答 ◆

C は OA を 2：1 に内分する点で，D は OB を 1：3 に内分する点であるから，それぞれの位置ベクトルは

$$\overrightarrow{OC}=\frac{2}{3}\vec{a},\quad \overrightarrow{OD}=\frac{1}{4}\vec{b}$$

Pは直線AD上の点であるから，s を実数として

$$\overrightarrow{OP}=(1-s)\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{OD}$$
$$=(1-s)\vec{a}+s\left(\frac{1}{4}\vec{b}\right) \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

また，Pは直線BC上の点であるから，t を実数として

$$\overrightarrow{OP}=(1-t)\overrightarrow{OB}+t\overrightarrow{OC}$$
$$=(1-t)\vec{b}+t\left(\frac{2}{3}\vec{a}\right) \quad \cdots\cdots\cdots ②$$

①，②から　$(1-s)\vec{a}+\frac{s}{4}\vec{b}=\frac{2t}{3}\vec{a}+(1-t)\vec{b}$

いま，$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ で，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は平行でないから

$$1-s=\frac{2t}{3},\quad \frac{s}{4}=1-t$$

これを連立方程式として解くと

$$s=\frac{2}{5},\quad t=\frac{9}{10}$$

$s=\frac{2}{5}$ を①に代入して，点Pの位置ベクトルを求めると

$$\overrightarrow{OP}=\left(1-\frac{2}{5}\right)\vec{a}+\frac{2}{5}\left(\frac{1}{4}\vec{b}\right)$$
$$=\frac{3}{5}\vec{a}+\frac{1}{10}\vec{b}$$

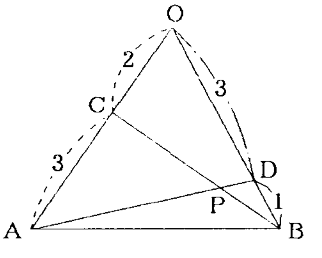
➔難しい例題ですが，がんばって理解しましょう。
それでは，トレーニングです。

■■■トレーニング■■■

6　(0093)

右の図の△OABで，OAを2：3に内分する点をC，OBを3：1に内分する点をD，ADとBCの交点をPとします。

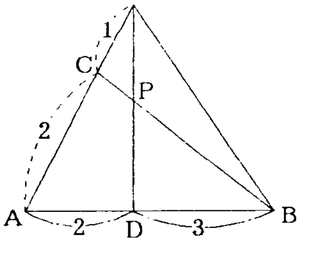
$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とするとき，$\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表しなさい。



7　(0094)

右の図の△OABで，OAを1：2に内分する点をC，ABを2：3に内分する点をD，ODとBCの交点をPとします。

$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とするとき，$\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表しなさい。



➜ここまでできれば十分ですが，入試にもよく狙われる大切なところなので，次の問題にも挑戦してみてください。

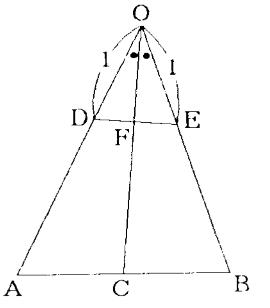
もっと力をつけよう

■■■トレーニング■■■

8 (0095)

右の図のように，∠ＡＯＢの２等分線とＡＢの交点をＣとし，ＯＡ，ＯＢ上にそれぞれ $|\overrightarrow{OD}|=1$，$|\overrightarrow{OE}|=1$ となる点Ｄ，Ｅをとり，ＤＥとＯＣの交点をＦとします。

$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とするとき，次の問いに答えなさい。



(1) $\overrightarrow{OD}$，$\overrightarrow{OE}$ をそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表しなさい。

(2) $\overrightarrow{OF}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表しなさい。

(3) $\overrightarrow{OC}$ は k を実数として

$$\overrightarrow{OC}=k\left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)$$

と表せることを証明しなさい。

(4) $\overrightarrow{OC}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表しなさい。

➜△ＯＤＥは二等辺三角形ですから，ＦはＤＥの中点ですね。
この問題は，∠ＡＯＢの２等分線をベクトルで求めているのです。
それでは，答え合わせをして終わりにしましょう。

まとめておこう！

$\vec{a}$，$\vec{b}$ が平行でないとき

$k\vec{a}+l\vec{b}=\vec{0}$ ならば $k=l=0$

$k\vec{a}+l\vec{b}=m\vec{a}+n\vec{b}$ ならば $k=m$，$l=n$

§ 13　ベクトルの内積　ベクトルの内積の定義，性質，ベクトルの垂直条件

内積とは何でしょう。

ここでは，「内積」という，2つのベクトルに実数を対応させる演算について学習します。

➜ところで，ここで学習する「内積」という演算は，2つのベクトルの大きさとそのなす角で定義されます。
そこで，内積の学習の準備として，2つのベクトルのなす角について定義しておきましょう。

〔1〕ベクトル$\vec{a}$，$\vec{b}$のなす角

◇ベクトルのなす角は始点を一致させて……

$\vec{0}$でない2つのベクトル$\vec{a}$，$\vec{b}$について，点Oを始点とし

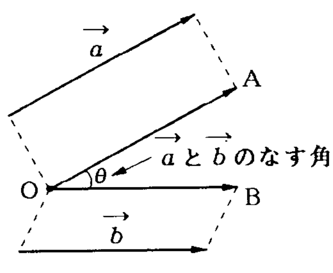
$$\overrightarrow{OA}=\vec{a},\ \overrightarrow{OB}=\vec{b}$$

となるように，点A，Bをとったとき

$$\angle AOB=\theta$$

は，点Oの位置に関係なく一定です。

この角θを$\vec{a}$，$\vec{b}$のなす角といいます。
ただし，θは$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$の範囲で考えます。



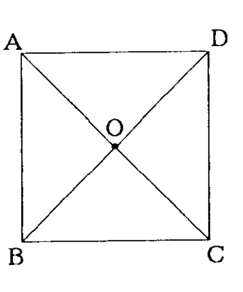
➜2つのベクトルのなす角は，始点を一致させて考えるのですね。では，トレーニングをして，ベクトルのなす角について理解を深めましょう。

■■■トレーニング■■■

1　(0096)
右の図の正方形ABCDの対角線の交点をOとするとき，次の2つのベクトルのなす角を求めなさい。

(1)　$\overrightarrow{AB}$と$\overrightarrow{AD}$　　(2)　$\overrightarrow{AB}$と$\overrightarrow{AC}$

(3)　$\overrightarrow{OA}$と$\overrightarrow{OC}$　　(4)　$\overrightarrow{BO}$と$\overrightarrow{BD}$

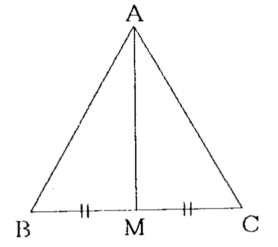


2 (0097)

図の正三角形ＡＢＣで，辺ＢＣの中点をＭとするとき，次の２つのベクトルのなす角を求めなさい。

(1) $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$　　(2) $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{BC}$

(3) $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AM}$　　(4) $\overrightarrow{AM}$ と $\overrightarrow{BC}$



➜ ２つのベクトルの始点が一致しないときは，一方を平行移動し，始点を一致させて，なす角を求めます。

➜ ２つのベクトルのなす角についてはわかりましたね。つぎに，２つのベクトルの大きさとそのなす角で定義される「内積」という演算について学習していきましょう。

〔2〕ベクトルの内積

◇２つのベクトルに実数を対応させる演算

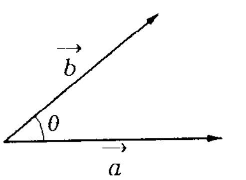
$\vec{0}$ でない２つのベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とするとき

$$|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

を $\vec{a}$，$\vec{b}$ の内積といい

$$\vec{a}\cdot\vec{b} \text{ または } (\vec{a},\ \vec{b})$$

と表します。



いままで学習してきたベクトルの和 $\vec{a}+\vec{b}$，差 $\vec{a}-\vec{b}$，実数倍 $k\vec{a}$ などの演算は，結果もベクトルになります。

しかし，内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ という演算は，結果が実数になります。

すなわち，内積とは，２つのベクトルに実数を対応させる演算といえます。

内積の定義

$\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角を θ とすると　$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$

例　$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=1$ で，$\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角が60°のとき，$\vec{a}$，$\vec{b}$ の内積は

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{b}&=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 60^\circ\\&=2\cdot 1\cdot\frac{1}{2}\\&=1\end{aligned}$$

〈注意〉

$\vec{a}=\vec{0}$ または $\vec{b}=\vec{0}$ のときは，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角は考えられませんから，$|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ は意味がありません。そこで，$\vec{a}=\vec{0}$ または $\vec{b}=\vec{0}$ のときは

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$$

と定めます。

■■■トレーニング■■■

3 (0098)

2つのベクトル $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ の大きさとそのなす角 θ が，次のように与えられているとき，内積 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$ を求めなさい。

(1) $|\overrightarrow{a}|=1$, $|\overrightarrow{b}|=2$, $\theta=60^\circ$　　(2) $|\overrightarrow{a}|=3$, $|\overrightarrow{b}|=4$, $\theta=90^\circ$

(3) $|\overrightarrow{a}|=3$, $|\overrightarrow{b}|=\sqrt{3}$, $\theta=150^\circ$　　(4) $|\overrightarrow{a}|=4$, $|\overrightarrow{b}|=\sqrt{2}$, $\theta=135^\circ$

➜ 2つのベクトルの大きさとそのなす角が与えられたときの内積の求め方はわかりましたね。
では，つぎに内積の性質について調べていきましょう。

例題1　　**内積の性質**

$-|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\leqq\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}\leqq|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|$ を証明しなさい。

◆ 考え方 ◆

$\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ のなす角を θ とすると

$$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos\theta$$

です。ここでは，まず $\cos\theta$ の値の範囲に注目します。

◆ 解　答 ◆

$\overrightarrow{a}\neq\overrightarrow{0}$, $\overrightarrow{b}\neq\overrightarrow{0}$ のとき，$\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ のなす角を θ とすると

$$-1\leqq\cos\theta\leqq1$$

$|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|$ をこの不等式の各辺にかけると

$$-|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\leqq|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos\theta\leqq|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|$$

➜ $|\overrightarrow{a}|>0$, $|\overrightarrow{b}|>0$

よって　$-|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\leqq\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}\leqq|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|$　　➜ $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos\theta$

$\overrightarrow{a}=\overrightarrow{0}$ または $\overrightarrow{b}=\overrightarrow{0}$ のとき，$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=0$ と定めているので，このときも

$$-|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\leqq\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}\leqq|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|$$

は成り立つ。

➜ この例題でもわかるように，内積の性質を調べるときは，$\cos\theta$ の値が重要なポイントになります。$\cos\theta$ の値に注意して，次のトレーニングに進みましょう。

■■■トレーニング■■■

4 * (0099)

$\overrightarrow{0}$ でない2つのベクトル $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ について，次の問いに答えなさい。

(1) $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ のなす角が 0° のとき，$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$ を $|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|$ で表しなさい。

(2) $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ のなす角が 180° のとき，$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$ を $|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|$ で表しなさい。

(3) $\vec{a}\cdot\vec{a}$ を $|\vec{a}|$ で表しなさい。

--------● ここで一息 ●--------

「内積の意味について」

- 内積の式は，$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ で表されましたね。

ここでは，右の図のように内積の図形的意味について「ちょっと一言」いっておきます。

$|\vec{b}|$ は $\overrightarrow{AC}$ の長さであるから，点Cから A B に下ろした垂線の足を H とするとき

$|\vec{b}|\cos\theta$ の長さ＝A H の長さ

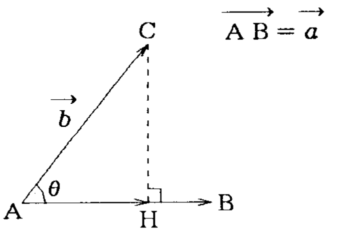
となります。

$\overrightarrow{AH}$ を『$\overrightarrow{AC}$ の $\overrightarrow{AB}$ に沿う正射影』といいます。

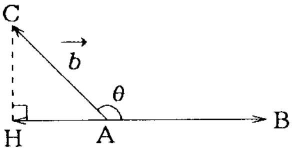
内積は右の図で

$0^\circ\leqq\theta\leqq 90^\circ$　$\vec{a}\cdot\vec{b}=AB\times AH$

$90^\circ<\theta\leqq 180^\circ$　$\vec{a}\cdot\vec{b}=-AB\times AH$



$0^\circ\leqq\theta\leqq 90^\circ$　$\cos\theta\geqq 0$



$90^\circ<\theta\leqq 180^\circ$　$\cos\theta<0$

----

〔3〕内積の性質

◇ トレーニングの結果をまとめると……

$\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角が 0°，180° のとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ はそれぞれ同じ向きか，反対向きですから，このとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は平行です。

したがって，トレーニングの(1)と(2)の結果から

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が平行のとき　$\vec{a}\cdot\vec{b}=\pm|\vec{a}||\vec{b}|$

となることがわかります。

また，(3)の結果から

$\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$

すなわち　$|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$　………①

であることがわかります。

〈注意〉

①は，$\vec{a}=\vec{0}$ のときも成り立ちます。

■■■トレーニング■■■

5 (0100)

$\vec{a}$, $\vec{b}$ のなす角を θ とするとき，$\vec{a}\cdot\vec{b}$ について，次の問いに答えなさい。

(1) $0^\circ \leqq \theta < 90^\circ$ のとき，$\vec{a}\cdot\vec{b}$ の値の範囲を求めなさい。

(2) $\theta = 90^\circ$ のとき，$\vec{a}\cdot\vec{b}$ の値を求めなさい。

(3) $90^\circ < \theta \leqq 180^\circ$ のとき，$\vec{a}\cdot\vec{b}$ の値の範囲を求めなさい。

〔4〕ベクトルの垂直条件

◇２つのベクトルの垂直

$\vec{0}$ でない２つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角 θ が 90° のとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は垂直であるといい

$$\vec{a} \perp \vec{b}$$

とかきます。

ところで，トレーニング**5**の(2)の結果からわかるように

$$\theta = 90^\circ \text{ のとき} \quad \vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta = 0$$

となります。

逆に，$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$ のとき

$$|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta = 0$$

で，$\vec{a} \neq \vec{0}$，$\vec{b} \neq \vec{0}$ ならば，$|\vec{a}| \neq 0$，$|\vec{b}| \neq 0$ ですから

$$\cos\theta = 0$$

したがって，$\theta = 90^\circ$，すなわち $\vec{a}$ と $\vec{b}$ が垂直であることがわかります。

ベクトルの垂直条件

$\vec{0}$ でない２つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ について

$$\vec{a} \perp \vec{b} \iff \vec{a}\cdot\vec{b} = 0$$

〈注意〉

$\vec{a} \neq \vec{0}$，$\vec{b} \neq \vec{0}$ という条件をつけないとき，$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$ となる場合には

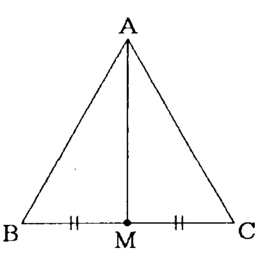
$$\vec{a} = \vec{0} \text{ または } \vec{b} = \vec{0} \text{ または } \vec{a} \perp \vec{b}$$

の３通り考えられます。

➡最後に，具体的な図形上のベクトルについて，内積の計算をしてみましょう。

基本例題１ 図形上の内積の計算

１辺の長さが２の正三角形ＡＢＣで，ＢＣの中点をＭとするとき，次の内積を求めなさい。



(1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$　　(2) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$

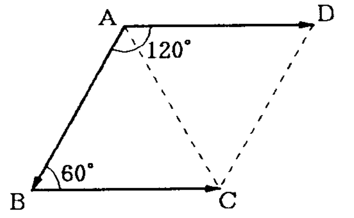
(3) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}$　　(4) $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BC}$

◆ 考え方 ◆

$\vec{a}$, $\vec{b}$ のなす角を θ とすると

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

ということを使って，内積を求めます。



(2)では，右の図のように，$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$ となる点 D をとったとき，$\angle BAD$ は $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ のなす角で，これが $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ のなす角と等しいことに注目します。

(3), (4)では，AM が正三角形 ABC の中線ということに注目します。

◆ 解　答 ◆

(1) $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AC}|=2$ で，$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ のなす角が $60°$ であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}&=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos 60°\\&=2\cdot 2\cdot\frac{1}{2}\\&=2\end{aligned}$$

(2) $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{BC}|=2$ で，$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ のなす角が $120°$ であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}&=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{BC}|\cos 120°\\&=2\cdot 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\\&=-2\end{aligned}$$

(3) AM は正三角形 ABC の中線であるから

$$\angle BAM=30°,\ |\overrightarrow{AM}|=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2=\sqrt{3}$$

よって，$|\overrightarrow{AB}|=2$, $|\overrightarrow{AM}|=\sqrt{3}$ で，$\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AM}$ のなす角は $30°$ である。

ゆえに

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}&=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AM}|\cos 30°\\&=2\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\\&=3\end{aligned}$$

(4) AM は正三角形 ABC の中線であるから

$$\overrightarrow{AM}\perp\overrightarrow{BC}$$

したがって　$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BC}=0$

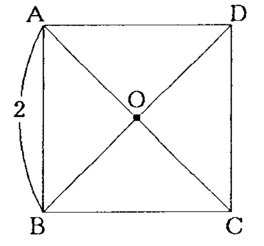
〈注意〉

(2)で，$\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{BC}$ は始点が異なるので，$\angle ABC$ は $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ のなす角ではありません。

■■■トレーニング■■■

6 (0101)

1辺の長さが2の正方形ＡＢＣＤで，対角線の交点をＯとするとき，次の内積を求めなさい。



(1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$

(2) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

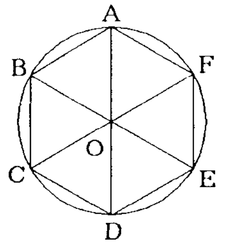
(3) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BO}$

(4) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{OC}$

(5) $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OD}$

7 (0102)

右の図のような半径1の円に内接する正六角形ＡＢＣＤＥＦで，対角線の交点をＯとするとき，次の内積を求めなさい。



(1) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{CF}$

(2) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BF}$

(3) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AF}$

➔ここでの学習はこれで終わりです。内積は入試問題に必ず出題されるといってもいいくらい大切なところですから，次の問題も練習してみましょう。

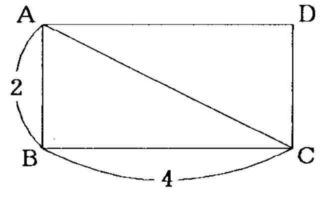
もっと力をつけよう

➔2つのベクトルのなす角がわからないときの内積を求めてみましょう。

■■■トレーニング■■■

8 (0103)

図のような長方形ＡＢＣＤにおいて，次の内積を求めなさい。



(1) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}$　　(2) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

➔$\overrightarrow{AB}$と$\overrightarrow{AC}$のなす角をθとすると

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos\theta$$

ですね。

答え合わせをして，終わりにしましょう。

> まとめておこう！
>
> $\vec{a}$，$\vec{b}$のなす角をθとすると
>
> $$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

§ 14　内積の成分表示

成分表示によるベクトルの内積，垂直条件，内積の計算法則

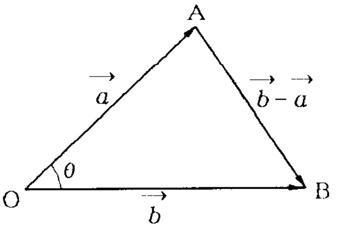
内積を成分で表す学習です。

内積は，2つのベクトルの大きさとそのなす角で求めましたね。ここでは，その内積の定義と余弦定理を使って，成分表示された2つのベクトルの内積の求め方を学習します。

➜では，さっそく本論にはいりましょう。

〔1〕内積の成分表示

◇ 内積を成分で表すと……



$\vec{0}$ でない2つのベクトル $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ の内積を成分で表してみましょう。

ベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ について，点Oを始点とし

$$\overrightarrow{OA}=\vec{a},\quad \overrightarrow{OB}=\vec{b}$$

となるように，点A，Bをとり

$$\angle AOB=\theta$$

とすると，△OABにおいて，余弦定理から

$$AB^2=OA^2+OB^2-2OA\cdot OB\cos\theta$$

すなわち

$$2OA\cdot OB\cos\theta=OA^2+OB^2-AB^2 \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

が成り立ちます。

いま，OA，OB，ABをベクトルで表すと

$$OA=|\overrightarrow{OA}|=|\vec{a}|,\quad OB=|\overrightarrow{OB}|=|\vec{b}|,\quad AB=|\overrightarrow{AB}|=|\vec{b}-\vec{a}|$$

よって，①は

$$2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-|\vec{b}-\vec{a}|^2 \quad \cdots\cdots\cdots ②$$

と表せます。

ここで，内積の定義から

$$|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=\vec{a}\cdot\vec{b}$$

また　$|\vec{a}|^2=a_1{}^2+a_2{}^2$

$|\vec{b}|^2=b_1{}^2+b_2{}^2$

$|\vec{b}-\vec{a}|^2=(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2$　➜ $\vec{b}-\vec{a}=(b_1-a_1,\ b_2-a_2)$

これらを②に代入すれば

$$\begin{aligned}2\vec{a}\cdot\vec{b}&=(a_1{}^2+a_2{}^2)+(b_1{}^2+b_2{}^2)-\{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2\}\\&=a_1{}^2+a_2{}^2+b_1{}^2+b_2{}^2-b_1{}^2+2a_1b_1-a_1{}^2-b_2{}^2+2a_2b_2-a_2{}^2\\&=2a_1b_1+2a_2b_2\end{aligned}$$

よって　$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$

これは，$\vec{a}=0$ または $\vec{b}=0$ のときも成り立ちます。

では，成分表示されたベクトルの内積についてまとめておきましょう。

成分表示されたベクトルの内積

2つのベクトル $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ について

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$$

➜成分表示されたベクトルの内積は，x 成分どうし，y 成分どうしの積をたして求めればよいことがわかりますね。それではトレーニングをしましょう。

■■■トレーニング■■■

1 (0104)

次のベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ の内積を求めなさい。

(1) $\vec{a}=(3,\ -5)$，$\vec{b}=(5,\ 3)$

(2) $\vec{a}=(\sqrt{3},\ -\sqrt{2})$，$\vec{b}=(\sqrt{6},\ 2)$

(3) $\vec{a}=(1-\sqrt{6},\ 3+\sqrt{3})$，$\vec{b}=(1+\sqrt{6},\ 3-\sqrt{3})$

2 (0105)

3点 A(3, 5)，B(2, 1)，C(−3, −1) について，次の内積を求めなさい。

(1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$　　(2) $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}$

〔2〕垂直条件の成分表示

◇ 垂直条件を成分で表すと……

$\vec{0}$ でない2つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ について

$$\vec{a}\perp\vec{b}\iff\vec{a}\cdot\vec{b}=0$$

となることは，すでに学習しましたね。

このことと，$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ について

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$$

であることから，次のことがわかります。

ベクトルの垂直条件

$\vec{0}$ でない2つのベクトル $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ について

$$\vec{a}\perp\vec{b}\iff a_1b_1+a_2b_2=0$$

➜成分による内積の計算の応用として，垂直条件からベクトルの成分を求める問題も解いていきましょう。

基本例題 1 ベクトルの垂直条件

$\vec{a}=(3,\ 1)$，$\vec{b}=(2x,\ 1+x)$ のとき，次の条件を満たす x の値を求めなさい。

(1) $\vec{a}\perp\vec{b}$　　(2) $\vec{a}\perp(\vec{a}+\vec{b})$

◆ 考え方 ◆

$\vec{0}$ でない2つのベクトル $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ について

$$\vec{a}\perp\vec{b} \iff a_1b_1+a_2b_2=0$$

の関係を使って，x についての方程式をつくり，それを解きます。

◆ 解　答 ◆

(1) $\vec{a}\perp\vec{b}$ であるから

$$3\cdot 2x+1\cdot(1+x)=0$$
$$7x+1=0$$

よって　$x=-\dfrac{1}{7}$

このとき　$\vec{b}=\left(-\dfrac{2}{7},\ \dfrac{6}{7}\right)\neq\vec{0}$

(2) $\vec{a}+\vec{b}=(3,\ 1)+(2x,\ 1+x)$

$=(2x+3,\ x+2)$

$\vec{a}\perp(\vec{a}+\vec{b})$ であるから

$$3\cdot(2x+3)+1\cdot(x+2)=0$$
$$7x+11=0$$

よって　$x=-\dfrac{11}{7}$

このとき　$\vec{a}+\vec{b}=\left(-\dfrac{1}{7},\ \dfrac{3}{7}\right)\neq\vec{0}$

■■■トレーニング■■■

3 (0106)

次の2つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ が垂直になるような x の値を求めなさい。

(1) $\vec{a}=(2,\ 1)$，$\vec{b}=(1,\ x)$

(2) $\vec{a}=(2,\ -3)$，$\vec{b}=(2x,\ 1+x)$

4 (0107)

$\vec{a}=(2,\ -3)$，$\vec{b}=(1,\ 2)$ のとき，$\vec{a}$ と $\vec{a}-t\,\vec{b}$ が垂直になるような実数 t の値を求めなさい。

5 (0108)

$\vec{a}=(-1,\ 2)$ に垂直な単位ベクトルを求めなさい。

➜求めるベクトルを $\vec{e}=(x,\ y)$ とし

$\vec{a}\perp\vec{e} \iff \vec{a}\cdot\vec{e}=0$

$\vec{e}$ が単位ベクトル $\iff |\vec{e}|=1$

であることに注目して，x，y についての連立方程式をつくり，それを解きます。

➜つぎに，内積の計算法則について学習していきましょう。

〔3〕内積の計算法則

◇ 内積の計算法則は……

内積については，次のような計算法則が成り立ちます。

内積の計算法則

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$　　交換法則

$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$
$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$　　分配法則

$(m\vec{a})\cdot\vec{b}=m(\vec{a}\cdot\vec{b})$

$\vec{a}\cdot(m\vec{b})=m(\vec{a}\cdot\vec{b})$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$，$(m\vec{a})\cdot\vec{b}=m(\vec{a}\cdot\vec{b})$ が成り立つことを確かめてみましょう。

$\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角を θ とすると，内積の定義から

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{b}&=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta\\&=|\vec{b}||\vec{a}|\cos\theta\\&=\vec{b}\cdot\vec{a}\end{aligned}$$

となります。

したがって

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$$

が成り立ちますね。

また，$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ とすると

$$m\vec{a}=m(a_1,\ a_2)=(ma_1,\ ma_2)$$

ですから

$$\begin{aligned}(m\vec{a})\cdot\vec{b}&=ma_1b_1+ma_2b_2\\&=m(a_1b_1+a_2b_2)\\&=m(\vec{a}\cdot\vec{b})\end{aligned}$$

となります。

したがって

$$(m\vec{a})\cdot\vec{b}=m(\vec{a}\cdot\vec{b})$$

が成り立ちます。

➜ $(m\vec{a})\cdot\vec{b}=m(\vec{a}\cdot\vec{b})$ ですから $(m\vec{a})\cdot\vec{b}$ も $m(\vec{a}\cdot\vec{b})$ も区別しないで $m\vec{a}\cdot\vec{b}$ と書くことにします。
$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$，$(m\vec{a})\cdot\vec{b}=m(\vec{a}\cdot\vec{b})$ が成り立つことがわかりましたね。では，ほかの計算法則が成り立つことをトレーニングや基本例題 2 で確かめていきましょ

う。

■■■トレーニング■■■

6 (0109)

$\vec{a}$, $\vec{b}$ について，$\vec{a}\cdot(m\vec{b})=m(\vec{a}\cdot\vec{b})$ が成り立つことを証明しなさい。

基本例題 2　　　　分配法則

ベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ について

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$$

が成り立つことを証明しなさい。

◆ 考え方 ◆

$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2)$, $\vec{c}=(c_1,\ c_2)$ とし，左辺を成分で計算し，変形して右辺を導きます。

◆ 解　答 ◆

$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2)$, $\vec{c}=(c_1,\ c_2)$ とすると

$$\vec{b}+\vec{c}=(b_1+c_1,\ b_2+c_2)$$

よって　$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=a_1(b_1+c_1)+a_2(b_2+c_2)$

$$=(a_1b_1+a_2b_2)+(a_1c_1+a_2c_2)$$

$$=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$$

■■■トレーニング■■■

7 * (0110)

$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ について

$$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$$

が成り立つことを証明しなさい。

➜内積の計算法則はこれですべて証明できましたね。では，最後に，内積の計算法則を使って，等式を証明するトレーニングをしましょう。

8 * (0111)

次の等式を証明しなさい。

(1) $\vec{a}\cdot(\vec{b}-\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{a}\cdot\vec{c}$

(2) $(\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}-\vec{b}\cdot\vec{c}$

➜これで基礎的なことは終わりました。次の問題にもぜひ取り組んで応用力をつけましょう。

もっと力をつけよう

➜ベクトルの垂直条件についての応用問題を解いてみましょう。

■■■トレーニング■■■

9 (0112)

ベクトル $\vec{a}=(1,\ 2)$，$\vec{b}=(3,\ -1)$ のとき，$\vec{a}+x\vec{b}$ と $x\vec{a}-\vec{b}$ とが垂直となるような x の値を求めなさい。

➜まず，$\vec{a}+x\vec{b}$，$x\vec{a}-\vec{b}$ を成分表示し

$$(\vec{a}+x\vec{b})\perp(x\vec{a}-\vec{b}) \Longleftrightarrow (\vec{a}+x\vec{b})\cdot(x\vec{a}-\vec{b})=0$$

を使って，x の値を求めます。

このとき，$\vec{a}+x\vec{b}$，$x\vec{a}-\vec{b}$ が $\vec{0}$ にならないことも確認しておきます。

それでは，答え合わせをして終わりにしましょう。

まとめておこう！

$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ について

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$$

§ 15　内積の計算　内積の計算，ベクトルの大きさ

内積の計算法則の利用

ここでは，内積の計算法則を使って，内積の計算をしていきます。また，内積の計算に慣れたところで，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の大きさと内積から，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ を使って表されるベクトルの大きさを内積の計算を利用して求めていきます。

➜ところで，内積の計算法則はきちんと覚えていますね。ここでは，まず，内積の計算法則と $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$ を使って，等式を証明しましょう。

$\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}||\vec{a}|\cos 0^\circ$
$\quad=|\vec{a}|^2$
ですね。

基本例題 1　　内積の計算

$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2$ を証明しなさい。

◆ 考え方 ◆

分配法則，交換法則を使う。また，$\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$，$\vec{b}\cdot\vec{b}=|\vec{b}|^2$ を使います。

◆ 解　答 ◆

$$
\begin{aligned}
(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b}) &= (\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{a}-(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{b} && \text{➜分配法則}\\
&= (\vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{a})-(\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{b}) && \text{➜分配法則}\\
&= \vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}\cdot\vec{b} && \text{➜交換法則}\\
&= \vec{a}\cdot\vec{a}-\vec{b}\cdot\vec{b}\\
&= |\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2
\end{aligned}
$$

➜では，内積の計算についてトレーニングしましょう。

■■■トレーニング■■■

1　(0113)

次の内積を $|\vec{a}|$，$|\vec{b}|$，$\vec{a}\cdot\vec{b}$ で表しなさい。

(1)　$(2\vec{a}+3\vec{b})\cdot(2\vec{a}+3\vec{b})$

(2)　$(\vec{a}-2\vec{b})\cdot(3\vec{a}+\vec{b})$

2　(0114)

次の等式を証明しなさい。

(1)　$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

(2)　$(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

3 (0115)

次の等式を証明しなさい。

$$|\vec{a}+\vec{b}|^2+|\vec{a}-\vec{b}|^2=2(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2)$$

➜ $|\vec{a}+\vec{b}|^2=(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})$ というように変形しましょう。

➜ここまではできましたね。では，つぎに，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の大きさと内積から，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ で表されるベクトルの大きさを求めてみましょう。

例題 1 ベクトルの大きさ

$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=3$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=2$ のとき，$|\vec{a}-2\vec{b}|$ の値を求めなさい。

◆ 考え方 ◆

$|\vec{a}-2\vec{b}|^2=(\vec{a}-2\vec{b})\cdot(\vec{a}-2\vec{b})$ であることを使って，$|\vec{a}-2\vec{b}|^2$ を $|\vec{a}|$，$|\vec{b}|$，$\vec{a}\cdot\vec{b}$ で表します。

$|\vec{a}|$，$|\vec{b}|$，$\vec{a}\cdot\vec{b}$ の値をその式に代入し，$|\vec{a}-2\vec{b}|^2$ の値を求め，$|\vec{a}-2\vec{b}|$ の値を導きます。

◆ 解　答 ◆

$$\begin{aligned}|\vec{a}-2\vec{b}|^2&=(\vec{a}-2\vec{b})\cdot(\vec{a}-2\vec{b})\\&=|\vec{a}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2\end{aligned}$$

ここで，$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=3$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=2$ を代入すると

$$\begin{aligned}|\vec{a}-2\vec{b}|^2&=1^2-4\cdot2+4\cdot3^2\\&=29\end{aligned}$$

よって　$|\vec{a}-2\vec{b}|=\sqrt{29}$

■■■トレーニング■■■

4 (0116)

$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=3$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=4$ のとき，次の値を求めなさい。

(1) $(\vec{a}+3\vec{b})\cdot(4\vec{a}-\vec{b})$　　(2) $|\vec{a}+2\vec{b}|$

5 (0117)

$|\vec{a}|=\sqrt{3}$，$|\vec{b}|=2$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=-3$ のとき，次の値を求めなさい。

(1) $(2\vec{a}-\vec{b})\cdot(2\vec{a}+3\vec{b})$　　(2) $|3\vec{a}-\vec{b}|$

6 (0118)

$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=2$ で，$\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角が $60°$ のとき，$|2\vec{a}-\vec{b}|$ の値を求めなさい。

➜ $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ から，$\vec{a}$，$\vec{b}$ の値が求められます。

7 (0119)

$|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$, $|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{7}$ のとき，次の問いに答えなさい。

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}$ の値を求めなさい。

(2) $|\vec{a}+4\vec{b}|$ を求めなさい。

➜ここでの学習はこれで終わりです。次の『もっと力をつけよう』にも挑戦してみましょう。

もっと力をつけよう

➜内積の計算についての応用問題です。

■■■トレーニング■■■

8 (0120)

$\vec{a}\neq\vec{0}$, $\vec{b}\neq\vec{0}$ のとき，$|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$ ならば $\vec{a}\perp\vec{b}$ であることを証明しなさい。

➜ $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}| \iff |\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}-\vec{b}|^2$ です。これをもとにして考えましょう。

まとめておこう！

$$|\vec{a}-2\vec{b}|^2=(\vec{a}-2\vec{b})\cdot(\vec{a}-2\vec{b})$$
$$=|\vec{a}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2$$

§ 16　ベクトルのなす角　ベクトルのなす角，座標平面上の角

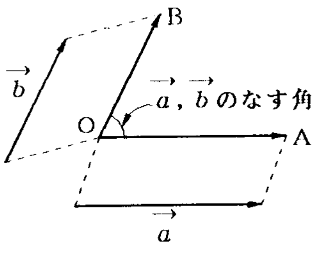
内積を使ってベクトルのなす角を求める

ここでは，内積の定義と内積の成分表示から，2つのベクトルのなす角を求めるトレーニングをします。とても大切なところなので，しっかり学習しましょう。

➜では，さっそく，本論にはいりましょう。

〔1〕ベクトルのなす角を求める

◇ $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ であるから……



$\vec{0}$ でない2つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ について，点Oを始点とし

$$\overrightarrow{OA}=\vec{a},\ \overrightarrow{OB}=\vec{b}$$

となるように，点A，Bをとったとき

$$\angle AOB$$

を $\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角といいましたね。

ところで，$\vec{0}$ でない2つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角を θ $(0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ)$ とすると

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$ ➜内積の定義

ですから　$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}\quad\cdots\cdots①$$

となります。

したがって，$\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角 θ は，$\vec{a}\cdot\vec{b}$，$|\vec{a}|$，$|\vec{b}|$ の値がわかれば求められます。

また，$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ のとき，①に

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$$ ➜内積の成分表示

$$|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2}$$

$$|\vec{b}|=\sqrt{b_1^2+b_2^2}$$

を代入すれば，次の式が得られます。

$$\cos\theta=\frac{a_1b_1+a_2b_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2}}$$

ベクトルのなす角

$\vec{0}$ でない2つのベクトル $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ のなす角を θ とすると

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2}}$$

➜まず, $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$, $\vec{a}\cdot\vec{b}$ の値が与えられたときの $\vec{a}$, $\vec{b}$ のなす角を求めてみましょう。

■■■トレーニング■■■

1 (0121)

2つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ の大きさと内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ が次のように与えられているとき, $\vec{a}$, $\vec{b}$ のなす角 θ を求めなさい。

(1) $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=4$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=-6\sqrt{3}$

(2) $|\vec{a}|=|\vec{b}|=\vec{a}\cdot\vec{b}=2$

➜つぎに, 成分表示された2つのベクトルのなす角を求めてみましょう。

基本例題1 ベクトルのなす角

$\vec{a}=(2,\ -2\sqrt{3})$, $\vec{b}=(\sqrt{3},\ 3)$ のとき, $\vec{a}$, $\vec{b}$ のなす角を求めなさい。

◆ 考え方 ◆

$\vec{a}$, $\vec{b}$ のなす角を θ とすると

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

となります。まず始めに, $\vec{a}\cdot\vec{b}$, $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$ の値を成分から求め, つぎに, その値を上の式に代入し, $\cos\theta$ の値を求めます。

最後に, $0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ に注意して, なす角 θ を求めます。

◆ 解　答 ◆

$\vec{a}=(2,\ -2\sqrt{3})$, $\vec{b}=(\sqrt{3},\ 3)$ であるから

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{b}&=2\sqrt{3}+(-2\sqrt{3})\cdot3\\&=-4\sqrt{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|\vec{a}|&=\sqrt{2^2+(-2\sqrt{3})^2}\\&=\sqrt{16}\\&=4\end{aligned}$$

$$|\vec{b}|=\sqrt{(\sqrt{3})^2+3^2}$$

$=\sqrt{12}$

$=2\sqrt{3}$

よって，$\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角を θ とすると

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

$$=\frac{-4\sqrt{3}}{4\cdot 2\sqrt{3}}$$

$$=-\frac{1}{2}$$

$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ であるから　　$\theta=120^\circ$

■■■トレーニング■■■

2　(0122)

次の2つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角を θ とするとき，$\cos\theta$ の値を求めなさい。

(1)　$\vec{a}=(1,\ -2)$，$\vec{b}=(2,\ 3)$

(2)　$\vec{a}=(4,\ 3)$，$\vec{b}=(2,\ -1)$

(3)　$\vec{a}=(1,\ \sqrt{3})$，$\vec{b}=(4,\ -\sqrt{3})$

3　(0123)

次の2つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角 θ を求めなさい。

(1)　$\vec{a}=(-1,\ \sqrt{3})$，$\vec{b}=(-\sqrt{3},\ -3)$

(2)　$\vec{a}=(4,\ 3)$，$\vec{b}=(1,\ 7)$

(3)　$\vec{a}=(3-\sqrt{3},\ 3+\sqrt{3})$，$\vec{b}=(1,\ 1)$

➔ベクトルのなす角の求め方を使って，座標平面上の図形の角の大きさを求めてみましょう。

例題1　　座標平面上の角

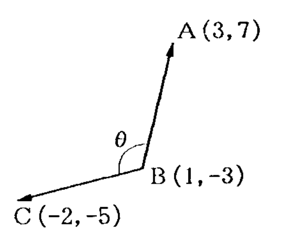
A(3, 7)，B(1, −3)，C(−2, −5) のとき，∠ABC を求めなさい。

◆ 考え方 ◆

∠ABC は，$\overrightarrow{BA}$，$\overrightarrow{BC}$ のなす角で，これを θ $(0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ)$ とすると

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|}$$

となります。ここでは，$\overrightarrow{BA}$，$\overrightarrow{BC}$ を成分表示し，上の式を使って，θ すなわち ∠ABC を求めます。



◆ 解　答 ◆

$\overrightarrow{BA}$，$\overrightarrow{BC}$ を成分表示すると

$$\overrightarrow{BA}=(3-1,\ 7-(-3))$$
$$=(2,\ 10)$$
$$\overrightarrow{BC}=(-2-1,\ -5-(-3))$$
$$=(-3,\ -2)$$

よって

$$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=2\cdot(-3)+10\cdot(-2)$$
$$=-26$$
$$|\overrightarrow{BA}|=\sqrt{2^2+10^2}$$
$$=\sqrt{104}$$
$$=2\sqrt{26}$$
$$|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{(-3)^2+(-2)^2}$$
$$=\sqrt{13}$$

$\angle ABC=\theta$ $(0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ)$ とすると

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|}$$
$$=\frac{-26}{2\sqrt{26}\cdot\sqrt{13}}$$
$$=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

したがって　$\theta=135^\circ$

➜それでは，トレーニングに進みましょう。

■■■トレーニング■■■

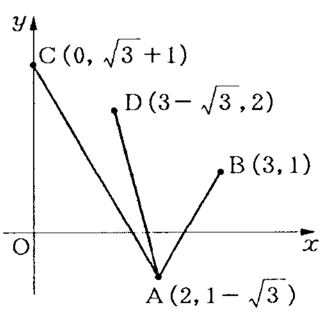
4 (0124)

A$(2,\ 1-\sqrt{3})$，B$(3,\ 1)$，C$(0,\ \sqrt{3}+1)$，D$(3-\sqrt{3},2)$
のとき，次の角を求めなさい。

(1) $\angle BAC$

(2) $\angle BAD$

(3) $\angle CAD$



➜(3)は，(1)，(2)の結果から求められますね。
これで基礎的な学習は終わりです。次の『もっと力をつけよう』の問題も解いてみましょう。

もっと力をつけよう

➜ベクトルのなす角の応用問題を考えてみましょう。

■■■トレーニング■■■

5 ＊ (0125)

$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$，$|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=5$，$|\vec{c}|=7$ のとき，次の問いに答えなさい。

(1) $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{c}|$ を示しなさい。

(2) $\vec{a}\cdot\vec{b}$ の値を求めなさい。

(3) $\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角を求めなさい。

6 ＊ (0126)

次の問いに答えなさい。

(1) 任意のベクトル $\vec{p}$，$\vec{q}$ について

$$|\vec{p}\cdot\vec{q}|\leqq|\vec{p}||\vec{q}|$$

が成り立つことを示しなさい。

(2) $\vec{p}=(a,\ b)$，$\vec{q}=(x,\ y)$ とし，(1)で示した不等式から

$$(ax+by)^2\leqq(a^2+b^2)(x^2+y^2)$$

が成り立つことを導きなさい。

(3) $a^2+b^2=2$，$x^2+y^2=3$ のとき

$$-\sqrt{6}\leqq ax+by\leqq\sqrt{6}$$

が成り立つことを証明しなさい。

➜(1)は，$-|\vec{p}||\vec{q}|\leqq\vec{p}\cdot\vec{q}\leqq|\vec{p}||\vec{q}|$ を示すのですね。内積の定義から考えるとよさそうです。

まとめておこう！

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2}{\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2}\sqrt{b_1{}^2+b_2{}^2}}$$

§ 17　内積の図形への応用　垂直の証明，内積による長さの計算

図形の性質を内積を使って……

２つのベクトルが垂直であるとき，その内積は０でしたね。線分が直交するような場合に，この性質が使われます。また，線分の長さについても内積が利用できます。

➜ここでは内積を使って，図形の性質を調べていきます。

〔1〕内積＝０は垂直

◇ ２線分の垂直を内積で！

$\vec{0}$ でない２つのベクトル $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$ に対して

$$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=0 \iff \overrightarrow{a}\perp\overrightarrow{b}$$

であることは，すでに学習しましたね。

このことは，２線分が垂直であることを証明する場合にも使われます。

たとえば，ＡＢ⊥ＣＤ を証明するときは，$\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{CD}$ がいえればよいのですから

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=0$$

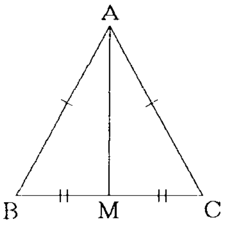
を示せばよいことになりますね。

➜では，次のトレーニングで，ベクトルの内積を使って線分の垂直を証明してみましょう。

■■■トレーニング■■■

1　(0127)

図の△ＡＢＣで，辺ＢＣの中点をＭとします。ＡＢ＝ＡＣ のとき，ＡＭ⊥ＢＣ であることを，ベクトルを使って証明しなさい。

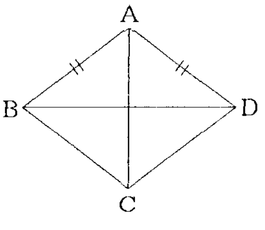


2　(0128)

右の図の平行四辺形ＡＢＣＤで，ＡＢ＝ＡＤ ならば

ＢＤ⊥ＡＣ

であることを，ベクトルを使って証明しなさい。



➜つぎに，内積を線分の長さに応用することを考えてみましょう。

〔2〕位置ベクトルの利用

◇ＡＢの長さをＡ，Ｂの位置ベクトルで表すと

$A(\vec{a})$，$B(\vec{b})$ に対して

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$$
$$=\vec{b}-\vec{a}$$

ですから，ＡＢの長さは

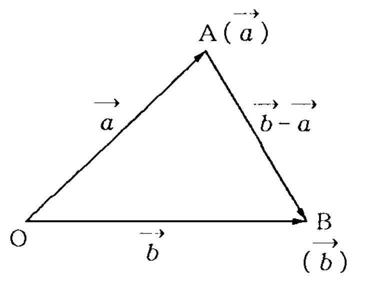
$$AB=|\overrightarrow{AB}|$$
$$=|\vec{b}-\vec{a}|$$

となりますね。

したがって

$$AB^2=|\vec{b}-\vec{a}|^2$$
$$=(\vec{b}-\vec{a})\cdot(\vec{b}-\vec{a})$$
$$=|\vec{b}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{a}|^2$$

となり，AB^2 は $\vec{a}$，$\vec{b}$ の大きさとその内積で表すことができます。



■■■トレーニング■■■

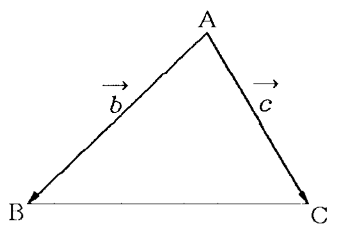
3 (0129)

右の図の △ＡＢＣにおいて，点Ａを基準とする点Ｂ，Ｃの位置ベクトルをそれぞれ $\vec{b}$，$\vec{c}$ とするとき，次の問いに答えなさい。

(1) $\overrightarrow{BC}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$ で表しなさい。

(2) BC^2 を $|\vec{b}|$，$|\vec{c}|$，$\vec{b}\cdot\vec{c}$ で表しなさい。

(3) $\angle A=90^\circ$ のとき，$AB^2+AC^2=BC^2$ であることを確かめなさい。



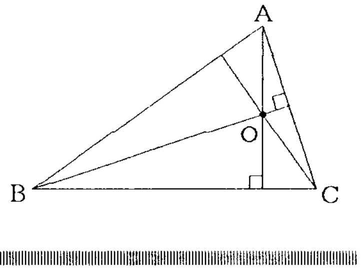
➜ここまでは，できましたね。それでは，例題１に進みましょう。

例題１ 垂直の証明

右の図の三角形で，$OA\perp BC$，$OB\perp CA$ ならば

$OC\perp AB$

であることを，ベクトルを使って証明しなさい。



◆ 考え方 ◆

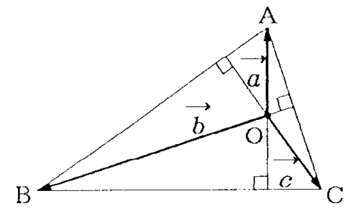
$OA\perp BC$，$OB\perp CA$，すなわち $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{OB}\perp\overrightarrow{CA}$ ですから，ベクトルの

垂直条件より，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BC}=0$，$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{CA}=0$ です。

この2つの式より，$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ を導き，OC⊥AB を示します。

◆解　答◆

点 O を基準とする点 A，B，C の位置ベクトルを，それぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ とすると



$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$$
$$=\vec{b}-\vec{a}$$
$$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}$$
$$=\vec{c}-\vec{b}$$
$$\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC}$$
$$=\vec{a}-\vec{c}$$

OA⊥BC であるから

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BC}=0$$

すなわち　$\vec{a}\cdot(\vec{c}-\vec{b})=0$

ゆえに　$\vec{a}\cdot\vec{c}-\vec{a}\cdot\vec{b}=0$　………①

また，OB⊥CA であるから

$$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{CA}=0$$

すなわち　$\vec{b}\cdot(\vec{a}-\vec{c})=0$

ゆえに　$\vec{b}\cdot\vec{a}-\vec{b}\cdot\vec{c}=0$　………②

①＋②から　$\vec{a}\cdot\vec{c}-\vec{b}\cdot\vec{c}=0$　➜ $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$

$$\vec{c}\cdot(\vec{b}-\vec{a})=0$$

よって　$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{AB}=0$　➜ $\vec{c}=\overrightarrow{OC}$，$\vec{b}-\vec{a}=\overrightarrow{AB}$

ゆえに　$\overrightarrow{OC}\perp\overrightarrow{AB}$

したがって　OC⊥AB

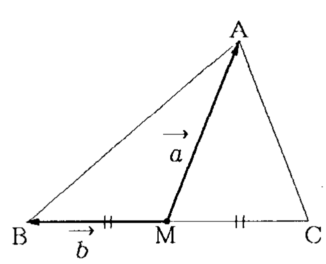
〈注意〉

この問題の結果より，三角形の3つの頂点から対辺にひいた垂線は1点で交わることがわかります。この点を垂心といいます。

■■■トレーニング■■■

4　(0130)

右の図の△ABC で，BC の中点を M，点 M を基準とする点 A，B の位置ベクトルをそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$ とするとき，次の問いに答えなさい。



(1)　$\overrightarrow{MC}$，$\overrightarrow{BA}$，$\overrightarrow{CA}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表しなさい。

(2)　$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CA}$ を $|\vec{a}|$，$|\vec{b}|$ で表しなさい。

(3)　MA＝MB のとき，AB⊥AC であることを示しなさい。

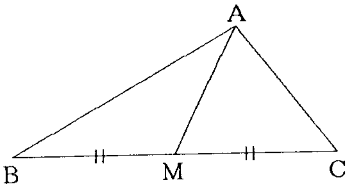
➜では，線分の長さに内積を利用する証明問題を考えてみましょう。

例題2　内積による長さの計算

右の図の△ABCで，BCの中点をMとするとき

$$AB^2+AC^2=2(AM^2+BM^2)$$

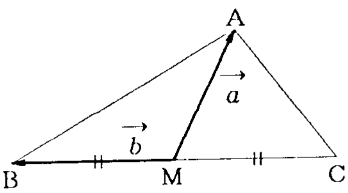
であることを，ベクトルを使って証明しなさい。



◆考え方◆

点Mを基準とする点A，Bの位置ベクトルをそれぞれ$\vec{a}$，$\vec{b}$とし，$\overrightarrow{BA}$，$\overrightarrow{CA}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$で表します。このとき，点Cの位置ベクトルは$-\vec{b}$であることに注意します。

つぎに，AB^2，AC^2を$|\vec{a}|$，$|\vec{b}|$，$\vec{a}\cdot\vec{b}$で表し，その和が$2(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2)$，すなわち$2(AM^2+BM^2)$になることを導きます。



◆解　答◆

点Mを基準とする点A，Bの位置ベクトルをそれぞれ$\vec{a}$，$\vec{b}$とすると

$$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}$$
$$=\vec{a}-\vec{b}$$

また，MはBCの中点であるから

$$\overrightarrow{MC}=-\overrightarrow{MB}$$
$$=-\vec{b}$$

よって　$\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MC}$

$$=\vec{a}-(-\vec{b})$$
$$=\vec{a}+\vec{b}$$

したがって　$AB^2=|\overrightarrow{BA}|^2$

$$=|\vec{a}-\vec{b}|^2$$
$$=(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})$$
$$=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$$

$$AC^2=|\overrightarrow{CA}|^2$$
$$=|\vec{a}+\vec{b}|^2$$
$$=(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})$$
$$=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$$

ゆえに　$AB^2+AC^2=(|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2)+(|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2)$

$$=2(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2)$$
$$=2(AM^2+BM^2)$$

➜例題2の定理を中線定理（またはパップスの定理）といいます。

ここでは，ベクトルを使って証明したわけですね。

■■■トレーニング■■■

5 (0131)

平面上の異なる4点O，A，B，Cについて

$$OB \perp AC \quad ならば \quad OA^2+BC^2=OC^2+AB^2$$

であることを証明しなさい。

➜今度は，トレーニング**5**の逆を証明してみましょう。

6 (0132)

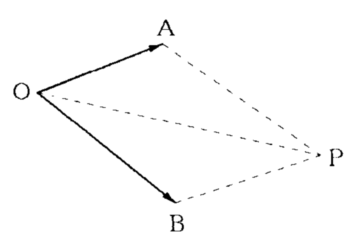
平面上の異なる4点O，A，B，Cについて

$$AC^2+OB^2=AB^2+OC^2 \quad ならば \quad OA \perp BC$$

であることを証明しなさい。

-------- • ここで一息 • --------

A，Bが，右の図のような矢印の向きに，矢印の長さで表される力の大きさでひもをひっぱっているとき，CはOからどの向きにどれだけの力の大きさで，ひもをひっぱればつりあうでしょう。



➜OA，OBを2辺とする平行四辺形の対角線OPを考え，$\overrightarrow{OP}$と向きが反対で，大きさが等しい力でひけばつりあいます。

もっと力をつけよう

➜次の問題は少し難しいかもしれませんが，挑戦してみましょう。

■■■トレーニング■■■

7* (0133)

△ABCの頂点A，B，Cの位置ベクトルをそれぞれ$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$とします。

$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=-1$のとき，この三角形はどんな三角形ですか。

➜$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$を使って，1文字を消去するのがよさそうですね。
それでは，答え合わせをしてみましょう。

まとめておこう！

ＡＢ⊥ＣＤを証明するには，

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=0$　を利用

§ 18　内積と三角形の面積

内積を使って三角形の面積を求める。

これまでに，ベクトルの大きさや内積を使って，図形上の線分の長さや角度を求めてきました。ここでは，それらを使って，三角形の面積を求めてみましょう。

➜では，三角形の面積の求め方について学習する前に，ベクトルの大きさやなす角について復習しておきましょう。

〔1〕ベクトルの成分と大きさ

◇ $\overrightarrow{AB}$ の成分表示，AB の長さ

2点 $A(a_1,\ a_2)$，$B(b_1,\ b_2)$ の原点 O を基準とするときの位置ベクトルをそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$ とすると

$$\vec{a}=(a_1,\ a_2),\quad \vec{b}=(b_1,\ b_2)$$

ですね。

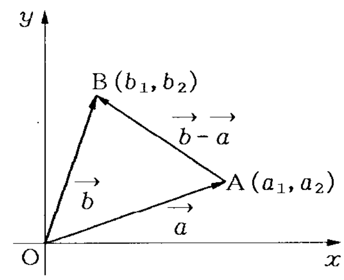
したがって

$$\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}$$
$$=(b_1,\ b_2)-(a_1,\ a_2)$$
$$=(b_1-a_1,\ b_2-a_2)$$

よって，$\overrightarrow{AB}$ の大きさは

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}$$

となります。



■■■トレーニング■■■

1　(0134)

次の2点 A，B に対して，$\overrightarrow{AB}$ を成分表示しなさい。また，$\overrightarrow{AB}$ の大きさを求めなさい。

(1)　A(3, −1)，B(2, −2)　　　(2)　A(0, 0)，B(2, 4)

〔2〕ベクトルのなす角

◇ ベクトルのなす角

$\vec{0}$ でない2つのベクトル $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ のなす角を θ とすると

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$　➜内積の定義

ですから　$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

また，この式を成分で表すと

$$\cos\theta=\frac{a_1b_1+a_2b_2}{\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2}\sqrt{b_1{}^2+b_2{}^2}}$$

となります。

このcos θ の値から $\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角 θ を求めることができます。

■■■トレーニング■■■

2 (0135)

次の2つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角 θ を求めなさい。

(1) $\vec{a}=(\sqrt{3},\ 2)$，$\vec{b}=(3\sqrt{3},\ -1)$

(2) $\vec{a}=(1,\ -2)$，$\vec{b}=(1,\ 3)$

➜それでは，ベクトルの大きさやなす角を使って，三角形の面積を求めてみましょう。

例題1 三角形の面積

3点O(0, 0)，A(−1, −2)，B(3, 1)を頂点とする△OABの面積 S を求めなさい。

◆考え方◆

∠AOB，すなわち $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ のなす角を θ とすると

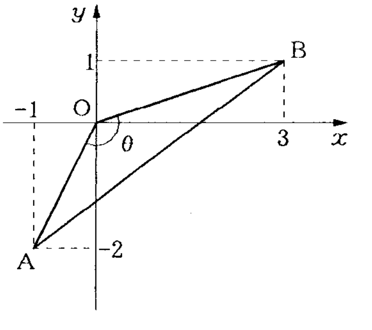
$$S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\sin\theta$$

であるから，θ の値がわかれば，△OABの面積が求めらます。

ここでは

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|}$$

から，θ の値を求めます。



◆解　答◆

$\overrightarrow{OA}=(-1,\ -2)$，$\overrightarrow{OB}=(3,\ 1)$ であるから

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=(-1)\cdot3+(-2)\cdot1=-5$$

$$|\overrightarrow{OA}|=\sqrt{(-1)^2+(-2)^2}=\sqrt{5}$$

$$|\overrightarrow{OB}|=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$$

∠AOB$=\theta$ とすると

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|}=\frac{-5}{\sqrt{5}\sqrt{10}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ より　　$\theta = 135^\circ$

したがって　　$S = \dfrac{1}{2} |\overrightarrow{OA}| |\overrightarrow{OB}| \sin 135^\circ$

$= \dfrac{1}{2} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{10} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$= \dfrac{5}{2}$

➜それでは，トレーニングに進みましょう。

■■■トレーニング■■■

3　(0136)

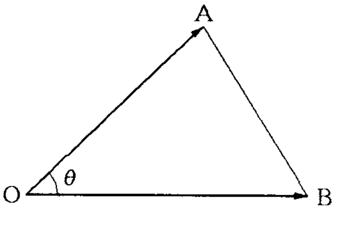
OA$=2$，OB$=\sqrt{3}$，$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 3$ であるとき，△OAB の面積 S を求めなさい。

4　(0137)

3点 A$(1, 1)$，B$(2, 0)$，C$(\sqrt{3}, \sqrt{3}+2)$ を頂点とする△ABC の面積 S を求めなさい。

〔3〕三角比の相互関係の利用

◇$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta}$ を使って，三角形の面積を求める



右の図で，∠AOB$=\theta$ とすると

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}| |\overrightarrow{OB}|}$$

ですね。いままでは，この $\cos\theta$ の値から θ の値を求め，△OAB の面積 S を

$$S = \frac{1}{2} |\overrightarrow{OA}| |\overrightarrow{OB}| \sin\theta \quad \cdots\cdots①$$

で求めてきましたね。

ところで，$\cos\theta$ の値から θ の値を求めることができないときは

$$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$$

の関係を使って，△OAB の面積 S を求めます。

すなわち，$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ では，$\sin\theta \geqq 0$ ですから

$$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta}$$

ですね。

これを①に代入すると

$$S = \frac{1}{2} |\overrightarrow{OA}| |\overrightarrow{OB}| \sqrt{1-\cos^2\theta}$$

となり，θ の値がわからなくても，△OAB の面積 S は求められます。

➜では，$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta}$ の関係を使って，三角形の面積を求めていきましょう。

■■■トレーニング■■■

5　(0138)

OA$=4$，OB$=3$，$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = -3$ であるとき，△OAB の面積 S を求めなさい。

6 (0139)

3点 A(3, 1), B(1, −1), C(−2, 5) を頂点とする△ABC の面積 S を求めなさい。

➜次で最後のトレーニングです。

7 (0140)

次の問いに答えなさい。

(1) △ABC において, $\overrightarrow{AB}=\vec{a}=(a_1,\ a_2)$, $\overrightarrow{AC}=\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ とするとき, この三角形の面積 S を $\vec{a}$, $\vec{b}$ で表しなさい。

また, S を a_1, a_2, b_1, b_2 で表しなさい。

(2) 3点 A(3, 4), B(8, 2), C(−3, −6) を頂点とする三角形 ABC の面積 S を求めなさい。

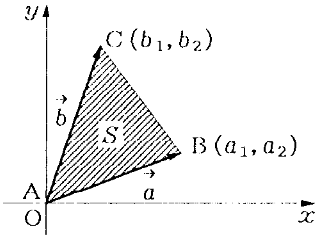
➜トレーニング**7**の(1)の結果を公式としてまとめておきます。

三角形の面積

△ABC において, $\overrightarrow{AB}=\vec{a}=(a_1,\ a_2)$, $\overrightarrow{AC}=\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ とするとき, この三角形の面積 S は

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$$

$$=\frac{1}{2}|a_1b_2-a_2b_1|$$



➜覚えるのではなく, 導き出せるようにしておきましょう。

§19 直線のベクトル方程式

直線のベクトル方程式，
直線の媒介変数表示

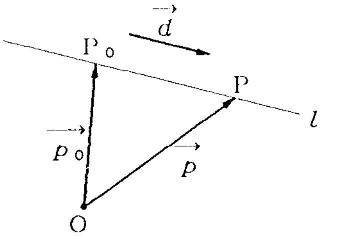
直線上の点の位置ベクトル

ここでは，直線の方程式を，直線上の点の位置ベクトルを使って表したり，それを成分を使って表したりします。

➜では，ベクトルの平行条件を使って，直線をベクトルを使って表すことを考えましょう。

〔1〕直線のベクトル方程式(1)

◇点 P_0 を通り $\vec{d}$ に平行な直線



点 $P_0(\overrightarrow{p_0})$ を通り，$\vec{0}$ でないベクトル $\vec{d}$ に平行な直線 l について考えてみましょう。

直線 l 上の P_0 以外の点を $P(\vec{p})$ とすると，$\overrightarrow{P_0P}$ と $\vec{d}$ は平行ですから，t を実数として

$$\overrightarrow{P_0P}=t\vec{d}$$ ➜ベクトルの平行条件

が成り立ちます。

この式は，点 P が点 P_0 に一致するときも成り立ちます。

いま，$\overrightarrow{P_0P}$ を $\vec{p}$，$\overrightarrow{p_0}$ を使って表すと，$\overrightarrow{P_0P}=\vec{p}-\overrightarrow{p_0}$ ですから

$$\vec{p}-\overrightarrow{p_0}=t\vec{d}$$

すなわち $\vec{p}=\overrightarrow{p_0}+t\vec{d}$ ………①

となります。

①を直線 l のベクトル方程式といい，t を媒介(ばいかい)変数といいます。

また，ベクトル $\vec{d}$ を直線 l の方向ベクトルといいます。

点 P_0 を通り $\vec{d}$ に平行な直線

> 点 $P_0(\overrightarrow{p_0})$ を通り，ベクトル $\vec{d}$ を方向ベクトルとする直線上の任意の点を $P(\vec{p})$ とすると
>
> $$\vec{p}=\overrightarrow{p_0}+t\vec{d} \qquad t \text{ は実数}$$

〈注意〉

$\vec{d}$ が方向ベクトルのとき，$k\neq 0$ ならば，$k\vec{d}$ も方向ベクトルです。

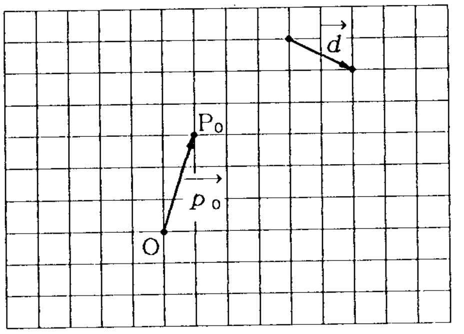
➜それでは，トレーニングに進みましょう。

■■■トレーニング■■■

1 (0141)

点 $\mathrm{P}_0(\overrightarrow{p_0})$ とベクトル $\vec{d}$ が右の図のように与えられています。

t が -2, -1, 1, 2 の値をとるとき，$\vec{p}=\overrightarrow{p_0}+t\vec{d}$ を位置ベクトルとする点を図示しなさい。



➜ $\overrightarrow{p_0}-2\vec{d}$, $\overrightarrow{p_0}-\vec{d}$, $\overrightarrow{p_0}$, $\overrightarrow{p_0}+\vec{d}$, $\overrightarrow{p_0}+2\vec{d}$ を位置ベクトルとする点は，点 $\mathrm{P}_0(\overrightarrow{p_0})$ を通り，$\vec{d}$ に平行な直線，すなわち $\vec{d}$ を方向ベクトルとする直線上にならびましたね。このように，t の値がいろいろな実数値をとったとき，$\overrightarrow{p_0}+t\vec{d}$ を位置ベクトルとする点はこの直線上にあります。

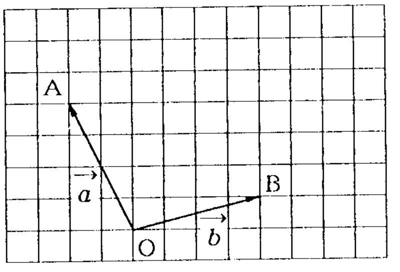
2 (0142)

図のように，1直線上にない3点 O，A，B があり，点 O を基準とする点 A，B の位置ベクトルをそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$ とします。

このとき，次の直線をかき，その直線のベクトル方程式を，媒介変数 t を使って表しなさい。

(1) 点 A を通り，$\vec{b}$ を方向ベクトルとする直線 l

(2) 点 B を通り，$\vec{a}$ を方向ベクトルとする直線 m



➜つぎに，2点を通る直線を2点の位置ベクトルで表してみましょう。

〔2〕直線のベクトル方程式(2)

◇2点 A，B を通る直線

2点 $\mathrm{A}(\vec{a})$，$\mathrm{B}(\vec{b})$ を通る直線は

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}-\vec{a}$$

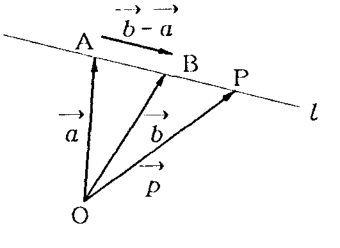
に平行ですから，点 A を通り，$\vec{b}-\vec{a}$ を方向ベクトルとする直線と考えることができます。

この直線のベクトル方程式は，この直線上の任意の点を $\mathrm{P}(\vec{p})$ とすると，t を実数として

$$\vec{p}=\vec{a}+t(\vec{b}-\vec{a})$$

すなわち　$\vec{p}=(1-t)\vec{a}+t\vec{b}$

と表されます。



―― 2点A，Bを通る直線 ――

2点A($\vec{a}$)，B($\vec{b}$)を通る直線上の任意の点をP($\vec{p}$)とすると

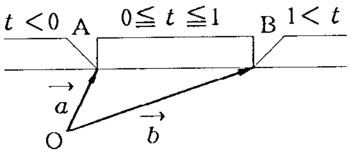
$\vec{p}=(1-t)\vec{a}+t\vec{b}$ 　　t は実数

〈注意〉

$\vec{p}=(1-t)\vec{a}+t\vec{b}$ は

$\vec{p}-\vec{a}=t(\vec{b}-\vec{a})$

と変形でき，$\vec{p}-\vec{a}=\overrightarrow{AP}$，$\vec{b}-\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ ですから



$\overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{AB}$

となります。

この式から，$\vec{p}=(1-t)\vec{a}+t\vec{b}$ は

$t<0$ 　ならば　線分ABのA側の延長（Aは含まない）

$0\leqq t\leqq 1$ 　ならば　線分AB上

$t>1$ 　ならば　線分ABのB側の延長（Bは含まない）

を表すことがわかります。

■■■トレーニング■■■

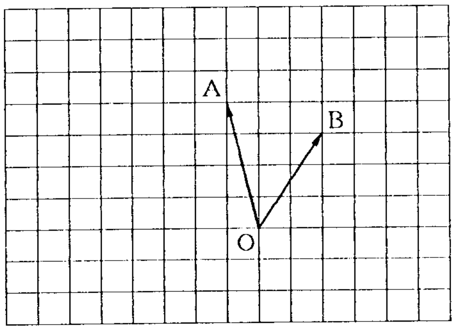
3 (0143)

点A($\vec{a}$)と点B($\vec{b}$)が右の図のように与えられています。

t が -2，-1，0，1，2の値をとるとき

$\vec{p}=(1-t)\vec{a}+t\vec{b}$

を位置ベクトルとする点を図示しなさい。



➜ $(1-t)\vec{a}+t\vec{b}$ を位置ベクトルとする点は，2点A，Bを通る直線上にあることが確かめられましたね。それでは，線分を表すベクトル方程式を考えましょう。

例題1 　線分を表すベクトル方程式

2点A($\vec{a}$)，B($\vec{b}$)に対して，点P($\vec{p}$)が

$\vec{p}=m\vec{a}+n\vec{b}$，$m+n=1$，$m\geqq 0$，$n\geqq 0$

を満たすとき，点Pはどんな図形上を動きますか。

◆ 考え方 ◆

$m+n=1$，すなわち $m=1-n$ に注目して，与えられたベクトル方程式を変形し

$\overrightarrow{AP}=n\overrightarrow{AB}$

を導きます。

このとき，$m+n=1$，$m\geqq 0$，$n\geqq 0$ から n の値の範囲を求め，点Pがどんな図形

上を動くかを求めます。

◆解　答◆

$m+n=1$ であるから　$m=1-n$　………①

よって　$\vec{p}=(1-n)\vec{a}+n\vec{b}$

$=\vec{a}+n(\vec{b}-\vec{a})$

ゆえに　$\vec{p}-\vec{a}=n(\vec{b}-\vec{a})$

すなわち　$\overrightarrow{AP}=n\overrightarrow{AB}$

また，①と $m\geqq 0$，$n\geqq 0$ から

$0\leqq n\leqq 1$　➜ $m=1-n\geqq 0$ から，$n\leqq 1$

よって，与えられたベクトル方程式は

$\overrightarrow{AP}=n\overrightarrow{AB}$，$0\leqq n\leqq 1$

と変形できる。

したがって，点 P は線分 AB 上を動く。

◆別　解◆

$m+n=1$ であるから　$\vec{p}=m\vec{a}+n\vec{b}$

$=\dfrac{m\vec{a}+n\vec{b}}{m+n}$

よって，$m>0$，$n>0$ のとき，P は線分 AB を $n:m$ に内分する点である。

また，$m=0$ のとき $n=1$ で，点 P は B と一致し，$n=0$ のとき $m=1$ で，点 P は A と一致する。

したがって，$m+n=1$，$m\geqq 0$，$n\geqq 0$ のとき，点 P は線分 AB 上を動く。

➜この例題 1 は重要です。試験にも，よく出題されます。
しっかり理解しておきましょう。

■■■トレーニング■■■

4 * (0144)

2 点 A$(\vec{a})$，B$(\vec{b})$ に対して，点 P$(\vec{p})$ が

$\vec{p}=m\vec{a}+n\vec{b}$，$m+n=1$，$m>0$，$n<0$

を満たすとき，点 P はどんな図形上を動きますか。

〔3〕媒介変数表示

◇ベクトル方程式を成分で表すと

点 $P_0(\vec{p_0})$ を通り，$\vec{0}$ でないベクトル $\vec{d}$ を方向ベクトルとする直線のベクトル方程式は，この直線上の任意の点を P$(\vec{p})$ とすると，次のように表せますね。

$\vec{p}=\vec{p_0}+t\vec{d}$　　t は実数　………①

いま，P_0 の座標を $(x_0,\ y_0)$，P の座標を $(x,\ y)$ とすると

$\vec{p_0}=(x_0,\ y_0)$，$\vec{p}=(x,\ y)$

また，$\vec{d}=(a,\ b)$ として，これらを①に代入すると

$(x,\ y)=(x_0,\ y_0)+t(a,\ b)$

$$=(x_0+at,\ y_0+bt)$$

すなわち $\begin{cases} x=x_0+at & \cdots\cdots\cdots ② \\ y=y_0+bt & \cdots\cdots\cdots ③ \end{cases}$

となります。

この（連立）方程式を，この直線の媒介変数表示といいます。

直線の媒介変数表示

点 $P_0(x_0,\ y_0)$ を通り，ベクトル $\vec{d}=(a,\ b)$ を方向ベクトルとする直線上の任意の点 P の座標を $(x,\ y)$ とすると

$$\begin{cases} x=x_0+at \\ y=y_0+bt \end{cases} \quad t \text{ は実数}$$

$a \neq 0$ のとき，②を t について解くと

$$t=\frac{x-x_0}{a}$$

ですから，③に代入して

$$y=y_0+b\cdot\frac{x-x_0}{a}$$

すなわち　$y-y_0=\dfrac{b}{a}(x-x_0)$

となります。

この方程式は，すでに学習している，点 $(x_0,\ y_0)$ を通り，傾きが $\dfrac{b}{a}$ の直線の方程式と同じです。

また，$a=0$ のときは，y 軸に平行な直線 $x=x_0$ となります。

→ 2点を通る直線を媒介変数表示してみましょう。

基本例題 1　　直線の媒介変数表示

2点 A$(-1,\ 5)$，B$(3,\ -2)$ を通る直線の方程式を，媒介変数 t を使って表しなさい。

また，t を消去して，y を x の式で表しなさい。

◆ 考え方 ◆

点 $P_0(x_0,\ y_0)$ を通り，ベクトル $\vec{d}=(a,\ b)$ を方向ベクトルとする直線の媒介変数表示は，直線上の任意の点 P の座標を $(x,\ y)$ とすると

$$\begin{cases} x=x_0+at \\ y=y_0+bt \end{cases} \quad t \text{ は実数}$$

です。

ここでは，A，B を通る直線は $\overrightarrow{AB}$ と平行，すなわち $\overrightarrow{AB}$ は A，B を通る直線の方向ベクトルであることに注目します。

◆ 解　答 ◆

$\overrightarrow{AB}$ は求める直線の方向ベクトルで

$$\overrightarrow{AB}=(3-(-1),\ -2-5)$$

$=(4,\ -7)$

であるから，求める直線は，A$(-1,\ 5)$を通り，ベクトル$(4,\ -7)$を方向ベクトルとする直線である。

その方程式を，媒介変数 t を使って表すと

$$\begin{cases} x=-1+4t & \cdots\cdots\cdots① \\ y=5-7t & \cdots\cdots\cdots② \end{cases}$$

①から　$t=\dfrac{x+1}{4}$

これを②に代入すると

$$y=5-7\left(\frac{x+1}{4}\right)$$

ゆえに　$y=-\dfrac{7}{4}x+\dfrac{13}{4}$

〈注意〉

2点A，Bを通る直線は，“点Bを通り，$\overrightarrow{AB}$を方向ベクトルとする直線”，“点Aを通り，$\overrightarrow{BA}$を方向ベクトルとする直線”などと考えることができます。

よって，直線ABの方程式は

$$\begin{cases} x=3+4t \\ y=-2-7t \end{cases},\ \begin{cases} x=-1-4t \\ y=5+7t \end{cases}$$

などと表してもよいですね。

しかし，どの式も，t を消去して y を x の式で表すと

$$y=-\frac{7}{4}x+\frac{13}{4}$$

となります。

➜媒介変数による表し方は1通りではありませんね。

■■■トレーニング■■■

5　(0145)

次の点P_0を通り，$\vec{d}$を方向ベクトルとする直線の方程式を，媒介変数 t を使って表しなさい。また，t を消去して，y を x の式で表しなさい。

(1)　$P_0(1,\ 2)$，$\vec{d}=(3,\ 2)$　　　(2)　$P_0(-1,\ 3)$，$\vec{d}=(1,\ -3)$

6　(0146)

次の2点A，Bを通る直線の方程式を，媒介変数 t を使って表しなさい。また，t を消去して，y を x の式で表しなさい。

(1)　A$(3,\ 1)$，B$(2,\ 5)$　　　(2)　A$(-2,\ 4)$，B$(-8,\ 1)$

7　(0147)

3点A$(-1,\ 2)$，B$(0,\ 1)$，C$(3,\ -1)$があります。点Aを通り，直線BCに平行な直線の方程式を，媒介変数 t を使って表しなさい。また，y を x の式で表しなさい。

➜媒介変数を使う問題は入試でもよく出題されます。積極的に次の『もっと力をつけよう』に進んでみましょう。

もっと力をつけよう

■■■トレーニング■■■

8 ＊ (0148)

平面上の１直線上にない３点Ｏ，Ａ，Ｂについて

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}},\quad s+t=2$$

で表される点Ｐはどんな図形上を動きますか。

➜ $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{s}{2}(2\overrightarrow{\mathrm{OA}})+\dfrac{t}{2}(2\overrightarrow{\mathrm{OB}})$ と変形し，$\dfrac{s}{2}=s'$，$\dfrac{t}{2}=t'$ とおいて考えましょう。

9 ＊ (0149)

点 $(3,\ 4)$ を通り，ベクトル $(1,\ 2)$ を方向ベクトルとする直線を l とします。l 上の点Ｐと原点Ｏとの距離が最小となるような点Ｐの座標を求めなさい。

➜ この問題ができれば，だいぶ力がついてきています。間違えたところは必ず復習しておきましょう。

まとめておこう！

①点 $\mathrm{A}(\vec{a})$ を通り方向ベクトル $\vec{d}$ の直線のベクトル方程式は，

$\vec{p}=\vec{a}+t\vec{d}$　　（t は実数）

②２点 $\mathrm{A}(\vec{a})$，$\mathrm{B}(\vec{b})$ を通る直線のベクトル方程式は，

$\vec{p}=(1-t)\vec{a}+t\vec{b}$

$\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}$　　$s+t=1$　　（s，t は実数）

§ 20　内積と直線の方程式　法線ベクトルと直線，点と直線の距離

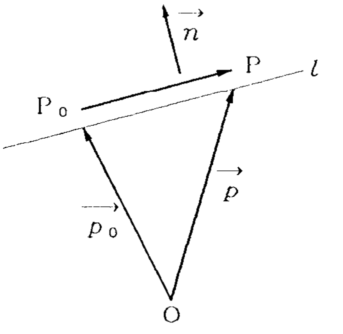
直線と法線ベクトル

ここでは，あるベクトルに垂直な直線の方程式を，内積を使って考えます。さらに，2直線のなす角，点と直線の距離の求め方について学習します。

➜では，あるベクトルに垂直な直線の方程式を内積を使って考えていきましょう。

〔1〕直線のベクトル方程式(3)

◇ 垂直ならば(内積)＝0 を使って



点 $P_0(\vec{p_0})$ を通り，$\vec{0}$ でないベクトル $\vec{n}$ に垂直な直線 l について考えてみましょう。

直線 l 上の P_0 以外の点を $P(\vec{p})$ とすると，$\vec{n}$ と l は垂直ですから，ベクトル $\overrightarrow{P_0P}$ と $\vec{n}$ は垂直で

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{P_0P}=0$$　➜ベクトルの垂直条件

が成り立ちます。

この式は，点 P が点 P_0 に一致するときも成り立ちます。

いま，$\overrightarrow{P_0P}$ を $\vec{p}$，$\vec{p_0}$ を使って表すと，$\overrightarrow{P_0P}=\vec{p}-\vec{p_0}$ ですから

$$\vec{n}\cdot(\vec{p}-\vec{p_0})=0 \quad \cdots\cdots\cdots①$$

となります。

したがって，直線 l は①のようなベクトル方程式で表すことができます。

このとき，ベクトル $\vec{n}$ を直線 l の法線ベクトルといいます。

さて，P，P_0 の座標をそれぞれ $(x,\ y)$，$(x_0,\ y_0)$ とすると，$\vec{p}=(x,\ y)$，$\vec{p_0}=(x_0,\ y_0)$ ですから

$$\vec{p}-\vec{p_0}=(x-x_0,\ y-y_0)$$

となりますね。

ここで，$\vec{n}=(a,\ b)$ とすると

$$\vec{n}\cdot(\vec{p}-\vec{p_0})=a(x-x_0)+b(y-y_0)$$

ですから，①は

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$$

と表せます。

これが，点 $P_0(x_0,\ y_0)$ を通り，ベクトル $\vec{n}=(a,\ b)$ を法線ベクトルとする直線の方程式です。

点 P_0 を通り，$\vec{n}$ に垂直な直線

点 $P_0(x_0,\ y_0)$ を通り，ベクトル $\vec{n}=(a,\ b)$ を法線ベクトルとする直線の方程式は

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$$

〈注意〉

$\vec{n}$ が法線ベクトルのとき，$k \neq 0$ ならば，$k\vec{n}$ も法線ベクトルです。

$a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$ を展開して整理すると

$$ax+by-(ax_0+by_0)=0$$

ここで，$-(ax_0+by_0)=c$ とおけば

$$ax+by+c=0$$

となります。

このことから

直線 $ax+by+c=0$ の法線ベクトルの1つは $(a,\ b)$ である

ことがわかります。

➜それでは，法線ベクトルについてのトレーニングをしましょう。

■■■トレーニング■■■

1 (0150)

次の直線の法線ベクトルをそれぞれ1つずつ求めなさい。

(1) $3x+4y+5=0$　　　(2) $-2x+y=0$

2 (0151)

次の点 P_0 を通り，$\vec{n}$ を法線ベクトルとする直線の方程式を求めなさい。

(1) $P_0(4,\ -5)$，$\vec{n}=(2,\ 1)$　　　(2) $P_0(-1,\ 4)$，$\vec{n}=(2,\ -3)$

3 (0152)

2点 $A(3,\ 6)$，$B(-1,\ 5)$ があります。点Aを通り，$\overrightarrow{AB}$ に垂直な直線の方程式を求めなさい。

➜$\overrightarrow{AB}$ は，求める直線の法線ベクトルですね。

➜つぎに，2直線のなす角について学習しましょう。

ここでは，$\vec{0}$ でない2つのベクトル $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ のなす角 θ が

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2}}$$

の関係から求められることがポイントになります。

〔2〕2直線のなす角

◇ 2直線のなす角は法線ベクトルのなす角で……

法線ベクトルと直線は垂直ですから，2直線 l，m の法線ベクトルを，それぞれ $\vec{n}$，$\vec{n'}$ とすると，l，m のなす角は，$\vec{n}$，$\vec{n'}$ のなす角から求められます。

ところで，2直線のなす角 θ は，$0^\circ \leqq \theta \leqq 90^\circ$ で考えますから，2つの法線ベクトル $\vec{n}$，$\vec{n'}$ のなす角 θ' が

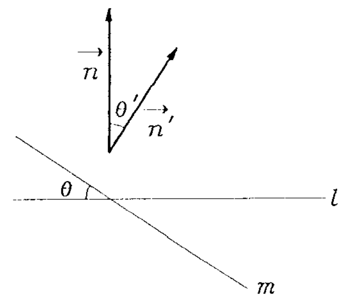
$0^\circ \leqq \theta' \leqq 90^\circ$ のとき

$$\theta = \theta'$$

また，$90^\circ < \theta' \leqq 180^\circ$ のとき

$$\theta = 180^\circ - \theta'$$

となります。



→ 2直線のなす角は，その法線ベクトルのなす角から求められることがわかりましたね。では，例題1で，2直線のなす角を求めてみましょう。

例題1 2直線のなす角

2直線 $3x + \sqrt{3}\,y + 1 = 0$，$x + \sqrt{3}\,y - 2 = 0$ の法線ベクトルをそれぞれ1つずつ求め，この2直線のなす角 θ を求めなさい。

◆ 考え方 ◆

直線 $ax + by + c = 0$ の法線ベクトルの1つは $(a,\ b)$ であることを使って，2直線の法線ベクトルを求め，そのなす角を求めます。

あとは，2つの法線ベクトルのなす角から，2直線のなす角を求めます。

◆ 解　答 ◆

2直線 $3x + \sqrt{3}\,y + 1 = 0$，$x + \sqrt{3}\,y - 2 = 0$ の法線ベクトルの1つは，それぞれ

$$(3,\ \sqrt{3}),\ (1,\ \sqrt{3})$$

この2つのベクトルのなす角を θ' とすると

$$\cos\theta' = \frac{3\cdot 1 + \sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3^2 + (\sqrt{3})^2}\sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2}}$$

$$= \frac{6}{2\sqrt{3}\cdot 2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}$$

よって　$\theta' = 30^\circ$

したがって　$\theta = 30^\circ$　→ $0^\circ \leqq \theta' \leqq 90^\circ$ のとき　$\theta = \theta'$

→ それでは，2直線のなす角についてのトレーニングをしましょう。

■■■トレーニング■■■

4 (0153)

2直線 $3x - 4y + 5 = 0$，$2x - y + 1 = 0$ のなす角を θ とするとき，$\cos\theta$ の値を求めなさい。

→ $\cos\theta' \geqq 0$，すなわち $0^\circ \leqq \theta' \leqq 90^\circ$ のとき

$$\cos\theta = \cos\theta'$$

$\cos\theta' < 0$，すなわち $90^\circ < \theta \leqq 180^\circ$ のとき

$$\cos\theta = \cos(180^\circ - \theta') = -\cos\theta'$$

したがって，$\cos\theta$ の値は

$$\cos\theta = |\cos\theta'|$$

の関係から求められます。

5 (0154)

次の２直線のなす角 θ を求めなさい。

(1) $x-3y-1=0$，$x+2y=0$

(2) $3x+\sqrt{3}y-5=0$，$\sqrt{3}x-y+1=0$

→ ２直線のなす角を求めるのに，法線ベクトルを使いましたが，この法線ベクトルを使って，点と直線の距離の公式を導くことができます。次の例題で，その公式を導いてみましょう。

例題２　　点と直線の距離

点 $\mathrm{P}(x_0,\ y_0)$ と直線 $ax+by+c=0$ の距離は

$$\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

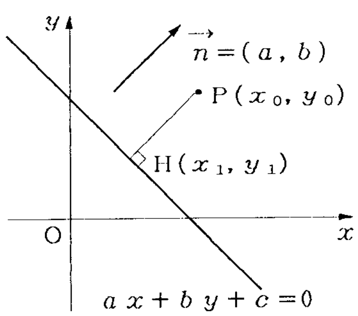
であることを証明しなさい。

◆ 考え方 ◆

点 P から直線 $ax+by+c=0$ に垂線をひき，その交点を H とすると，$|\overrightarrow{\mathrm{PH}}|$ が点 P と直線 $ax+by+c=0$ の距離になります

ここでは，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{PH}}$ と直線の法線ベクトルが平行であることを使って，$|\overrightarrow{\mathrm{PH}}|$ を求めます。

◆ 解　答 ◆



点 $\mathrm{P}(x_0,\ y_0)$ から直線 $ax+by+c=0$ に垂線をひき，その交点を $\mathrm{H}(x_1,\ y_1)$ とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{PH}}=(x_1-x_0,\ y_1-y_0)$$

また，直線 $ax+by+c=0$ の法線ベクトルを $\vec{n}$ とすると

$$\vec{n}=(a,\ b)$$

$\overrightarrow{\mathrm{PH}} /\!/ \vec{n}$ であるから，$\overrightarrow{\mathrm{PH}}$ と $\vec{n}$ のなす角は 0° か 180° である。

よって　$\overrightarrow{\mathrm{PH}}\cdot\vec{n}=\pm|\overrightarrow{\mathrm{PH}}||\vec{n}|$

ゆえに　$|\overrightarrow{\mathrm{PH}}\cdot\vec{n}|=|\overrightarrow{\mathrm{PH}}||\vec{n}|$

したがって　$|\overrightarrow{\mathrm{PH}}|=\dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{PH}}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}$

ここで，$|\overrightarrow{\mathrm{PH}}\cdot\vec{n}|$，$|\vec{n}|$ を成分で表すと

$$|\overrightarrow{\mathrm{PH}}\cdot\vec{n}|=|a(x_1-x_0)+b(y_1-y_0)|$$

$$|\vec{n}|=\sqrt{a^2+b^2}$$

よって　$|\overrightarrow{\mathrm{PH}}|=\dfrac{|a(x_1-x_0)+b(y_1-y_0)|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Hは直線 $ax+by+c=0$ 上の点であるから

$$ax_1+by_1+c=0$$

よって

$$a(x_1-x_0)+b(y_1-y_0)=-ax_0-by_0+ax_1+by_1$$
$$=-ax_0-by_0-c \qquad \rightarrow ax_1+by_1=-c$$

したがって，$|\overrightarrow{\mathrm{PH}}|$，すなわち点 $\mathrm{P}(x_0,\ y_0)$ と直線 $ax+by+c=0$ の距離は

$$\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} \qquad \rightarrow |-ax_0-by_0-c|=|ax_0+by_0+c|$$

➜それでは，点と直線の距離の公式をまとめておきましょう。

点と直線の距離の公式

点 $\mathrm{P}(x_0,\ y_0)$ と直線 $ax+by+c=0$ の距離は

$$\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

➜では，上の公式を使って，点と直線の距離を求めましょう。

■■■トレーニング■■■

6 (0155)

原点と直線 $ax+by+c=0$ の距離を求めなさい。

7 (0156)

次の点と直線との距離を求めなさい。

(1) $(2,\ -1)$，$7x-y+5=0$

(2) $(-3,\ -1)$，$y=3x+3$

➜ここでの学習はこれで終わりです。時間に余裕のある人は『もっと力をつけよう』に進みましょう。

もっと力をつけよう

➜法線ベクトルや点と直線の距離の公式を使って，いろいろな直線の方程式を求めましょう。

■■■トレーニング■■■

8 * (0157)

直線 $3x-4y+2=0$ との距離が1であるような直線の方程式を求めなさい。

➜平行な2直線の法線ベクトルは等しく，垂直な2直線の法線ベクトルは垂直ですね。

9 ＊ (0158)

点 $(3,\ -1)$ を通り，直線 $x+3y-14=0$ とのなす角が 45° となる直線 l の方程式を，次の手順にしたがって求めなさい。

(1) 直線 $x+3y-14=0$ の法線ベクトルを1つ求めなさい。

(2) 直線 l の法線ベクトルを $(a,\ b)$ とすると，$2a^2-3ab-2b^2=0$ が成り立つことを証明しなさい。

(3) 直線 l の方程式を求めなさい。

➔できましたか。それでは，答え合わせをしてみましょう。

まとめておこう！

点 $P_0(x_0,\ y_0)$ を通り，ベクトル $\vec{n}=(a,\ b)$ を法線ベクトルとする直線の方程式は，

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$$

§ 21 円のベクトル方程式

円のベクトル方程式，
接線のベクトル方程式

円をベクトルで表します。

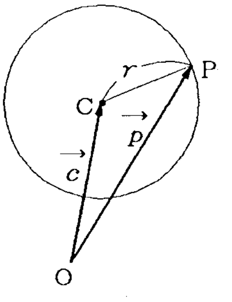
円のベクトル方程式を，内積やベクトルの大きさを使って求めてみましょう。また，接線のベクトル方程式なども求めてみましょう。

➜定点から一定の距離にある点の集合が円ですね。これをベクトルで表してみましょう。

〔1〕円のベクトル方程式

◇ 円をベクトルで表すと

点 C$(\vec{c})$ を中心とする半径 r の円について考えてみましょう。



この円の周上の任意の点を P$(\vec{p})$ とすると，半径が r であることから

$$|\overrightarrow{CP}| = r$$

が成り立ち，$\overrightarrow{CP} = \vec{p} - \vec{c}$ ですから，この式は

$$|\vec{p} - \vec{c}| = r \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

と表せます。

また，①の両辺を平方すると

$$|\vec{p} - \vec{c}|^2 = r^2 \quad \cdots\cdots\cdots ②$$

となり，$|\vec{p} - \vec{c}|^2$ を内積を使って表すと

$$|\vec{p} - \vec{c}|^2 = (\vec{p} - \vec{c}) \cdot (\vec{p} - \vec{c})$$

ですから，②は

$$(\vec{p} - \vec{c}) \cdot (\vec{p} - \vec{c}) = r^2 \quad \cdots\cdots\cdots ③$$

と表せます。

①または③を，点 C$(\vec{c})$ を中心とする半径 r の円のベクトル方程式といいます。

円のベクトル方程式

点 C$(\vec{c})$ を中心とする半径 r の円の周上の任意の点を P$(\vec{p})$ とすると

$$|\vec{p} - \vec{c}| = r$$

すなわち　$(\vec{p} - \vec{c}) \cdot (\vec{p} - \vec{c}) = r^2$

➜では，$(\vec{p} - \vec{c}) \cdot (\vec{p} - \vec{c}) = r^2$ を成分で表すトレーニングをしましょう。

■■■トレーニング■■■

1 (0159)

点 C($\vec{c}$) を中心とする半径 r の円上の任意の点を P($\vec{p}$) とすると，この円は

$$(\vec{p}-\vec{c})\cdot(\vec{p}-\vec{c})=r^2 \quad \cdots\cdots①$$

と表されます。

C(a, b)，P(x, y) として，①を成分を使って表しなさい。

〔2〕中心C，半径 r の円

◇ $(\vec{p}-\vec{c})\cdot(\vec{p}-\vec{c})=r^2$ を成分で表すと

トレーニングの結果からわかるように，$\vec{c}=(a,\ b)$，$\vec{p}=(x,\ y)$ のとき

$$(\vec{p}-\vec{c})\cdot(\vec{p}-\vec{c})=r^2$$

を成分で表すと，点 C(a, b) を中心とする半径 r の円の方程式

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

が得られます。

➜つぎに，直径の両端の点の位置ベクトルがわかっているときの円のベクトル方程式を求めてみましょう。

■■■トレーニング■■■

2 (0160)

2点 A($\vec{a}$)，B($\vec{b}$) を直径の両端とする円のベクトル方程式を求めなさい。

➜A($\vec{a}$)，B($\vec{b}$) を直径の両端とする円のベクトル方程式は

$$(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{b})=0$$

と表されることがわかりましたね。

3 (0161)

2点 A(1, 3)，B(5, 2) を直径の両端とする円の方程式を，ベクトルを使って求めなさい。

➜つぎに，ベクトル方程式がどんな図形を表すかを調べるトレーニングをしましょう。

4 (0162)

点 A($\vec{a}$) を定点とするとき，次のベクトル方程式はどんな図形を表しますか。

(1) $|\vec{p}-\vec{a}|=2$　　(2) $|2\vec{p}-\vec{a}|=2$

➜最後に，円の接線のベクトル方程式を考えてみましょう。

例題 1　　接線のベクトル方程式

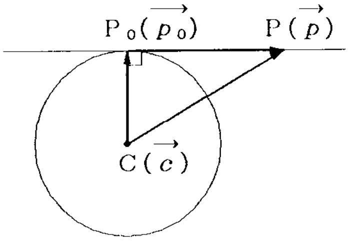
点 C($\vec{c}$) を中心とする半径 r の円の周上の点 $P_0(\vec{p_0})$ における接線上の任意の点を P($\vec{p}$) とすると，接線のベクトル方程式は

$$(\overrightarrow{p_0}-\overrightarrow{c})\cdot(\overrightarrow{p}-\overrightarrow{c})=r^2$$

と表されることを証明しなさい。

◆ 考え方 ◆

円周上の点 P_0 における接線は，$\overrightarrow{CP_0}$ に垂直，すなわち $\overrightarrow{CP_0}\perp\overrightarrow{P_0P}$ ですから，ベクトルの垂直条件より



$$\overrightarrow{CP_0}\cdot\overrightarrow{P_0P}=0$$

が成り立ちます。

そこで

$$\begin{aligned}\overrightarrow{P_0P}&=\overrightarrow{p}-\overrightarrow{p_0}\\&=(\overrightarrow{p}-\overrightarrow{c})-(\overrightarrow{p_0}-\overrightarrow{c})\end{aligned}$$

となることと，P_0 は円周上の点ということから，接線のベクトル方程式を導きます。

◆ 解　答 ◆

$P \neq P_0$ のとき，$\overrightarrow{CP_0}\perp\overrightarrow{P_0P}$ であるから

$$\overrightarrow{CP_0}\cdot\overrightarrow{P_0P}=0$$

この式は，$P=P_0$ のときも成り立つ。

ここで

$$\overrightarrow{CP_0}=\overrightarrow{p_0}-\overrightarrow{c}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{P_0P}&=\overrightarrow{p}-\overrightarrow{p_0}\\&=(\overrightarrow{p}-\overrightarrow{c})-(\overrightarrow{p_0}-\overrightarrow{c})\end{aligned}$$

であるから

$$(\overrightarrow{p_0}-\overrightarrow{c})\cdot\{(\overrightarrow{p}-\overrightarrow{c})-(\overrightarrow{p_0}-\overrightarrow{c})\}=0$$

$$(\overrightarrow{p_0}-\overrightarrow{c})\cdot(\overrightarrow{p}-\overrightarrow{c})-(\overrightarrow{p_0}-\overrightarrow{c})\cdot(\overrightarrow{p_0}-\overrightarrow{c})=0$$

点 P_0 は円周上の点であるから

$$(\overrightarrow{p_0}-\overrightarrow{c})\cdot(\overrightarrow{p_0}-\overrightarrow{c})=r^2$$

したがって，求める接線の方程式は

$$(\overrightarrow{p_0}-\overrightarrow{c})\cdot(\overrightarrow{p}-\overrightarrow{c})=r^2$$

➜接線のベクトル方程式を求めるときも，ベクトルの垂直条件が使われましたね。では，円の接線の方程式を求めるトレーニングをしましょう。

■■■トレーニング■■■

5　(0163)

円 $(x-1)^2+(y-2)^2=25$ 上の点 $(5,\ -1)$ における接線の方程式を求めなさい。

6　(0164)

円 $x^2+y^2-2x+10y-143=0$ 上の点 $(-4,\ 7)$ における接線の方程式を求めなさい。

もっと力をつけよう

■■■トレーニング■■■

7 * (0165)

平面上で，2定点A，Bの位置ベクトルをそれぞれ$\vec{a}$，$\vec{b}$とするとき，次のベクトル方程式はどんな図形を表しますか。

(1) $\vec{p}\cdot\vec{a}=\vec{a}\cdot\vec{b}$　　ただし，$\vec{a}\neq\vec{0}$

(2) $2\vec{p}\cdot\vec{p}=\vec{a}\cdot\vec{p}+\vec{b}\cdot\vec{p}$　　ただし，$\vec{a}\neq\pm\vec{b}$

→(1)は，与式を変形すると

$$\vec{a}\cdot(\vec{p}-\vec{b})=0$$

となります。

ここで，基準となる点をO，$\vec{p}$のきめる点をPとすると，$\vec{p}-\vec{b}=\overrightarrow{BP}$より

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BP}=0$$

となります。

この式を満たすような点Pを考えます。

(2)は，与式を$\vec{p}\cdot\left(\vec{p}-\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\right)=0$と変形して考えましょう。

まとめておこう！

円のベクトル方程式

$|\vec{p}-\vec{c}|=r$　すなわち　$(\vec{p}-\vec{c})\cdot(\vec{p}-\vec{c})=r^2$

TRAINING PAPER

DAILY PROGRAM

高校数学／数学B