TRAINING PAPER 〔特許出願中〕

DAILY® PROGRAM

大学受験デイリープログラム100日

高校3年　数学〔文系〕　《見本》

1

DAILY PROGRAM®

大学受験デイリープログラム　数学
—文系コース—

効果的な使い方

♧数学の受験対策を100日間＋補充演習編で完成

● 「大学受験デイリープログラム—文系 100 日」は，数学の受験範囲が文系の人を対象に，受験に備えて十分な実力をつけることができるように編集された受験用トレーニングペーパーです。

● このトレーニングペーパーは，例題とその類題練習を徹底的におこなうことを，とくに意図してつくられています。

● 第１巻から第５巻までは，各巻20日間，これに補充演習編が１巻あります。
第１巻から第５巻までの 100 日間で，数学 I から代数・幾何，基礎解析，確率・統計のすべての内容が学習できるようにプログラムしてあります。
学習内容は，左ページの学習予定表を参照してください。
この文系用デイリープログラムで扱っている科目は以下の 4 科目です。

数学 I	代数・幾何	基礎解析	確率・統計

● 補充演習編は，より実戦に近いかたちで学習するためのもので，入試問題をとりあげて練習します。

♧１日の学習を効果的に進めるために

● **通常学習日**

通常学習日では，例題とその類題の練習を徹底しておこないます。
１日にとりあげる例題は５題です。１つの例題で５題の類題練習をします。５題のうち，最初の問題は，例題と同じ問題です。例題をもう一度自分で解いて，解法を完全に理解してしまいます。１日のトレーニングの問題数は全部で約25題です。

例　題

受験に備えて，必ずできるようにしておきたい問題を選んであります。ていねいな解答，考え方，注意，問題を解くうえでのポイントが示してあります。例題の解き方をここで把握します。

トレーニング

例題の解法をトレーニングによって身につけます。
最初の問題は例題と同じ問題です。この問題で，例題の解法を再確認します。つづいて，類題練習で，解法に習熟します。トレーニングで，解法を完全に覚えてしまいます。

解　答

解答は別冊になっています。１日ごとに通し番号です。
例題と同じトレーニングの解答は，例題の解答を参照してください。

● 演習問題日

演習問題日

章の最後の日には，演習問題日があります。
ここでは，その章のまとめの問題練習をします。
問題を10題出題してありますから，その章で学習してきた内容をもう一度確認し，やや進んだ問題にもあたって，実力をのばします。

● 補充演習編

補充演習編

補充演習編では，最近の入試問題を解いて，実力を養成することをねらいます。
ここで，実際の入試問題を解いて，入試対策を万全にしましょう。
入試形式の模擬テストもあります。

♧使い方のくふう

この受験用トレーニングペーパーは，例題とその類題練習を主体にして構成されています。第１巻から第５巻までで，とりあげている例題数は約400題，これらの例題にそれぞれ５題ずつ類題がありますから，類題の練習問題は合わせて，2000題程度になります。

全体の問題数がかなり多くなっていますので，とくに，くふうして使うようにしてください。

① 例題を完全に理解することを，まず第一に考えます。
例題だけでも，約400題あります。これらを完全にできるようになるだけでも，相当な力がつきます。
トレーニングの最初に，例題と同じ問題をのせてありますから，自分でもう一度解いて解法を確認します。

② 類題の問題は，問題を見て，完全にできると思えたら，全部をしないで，次の例題に進んでかまいません。残した類題は，ひととおり終えたあとに学習すると，良い復習になります。

③ 自分の学習時間に合わせて，計画的に進めましょう。わからないところは，重点的に練習し，時間をかけてかまいませんが，途中でやめてしまうことのないように，時間の配分と，問題量をくふうして，全部終えることができるように進めるとよいでしょう。

この他に，このトレーニングペーパーでは，いろいろな使い方のくふうができますから，効果的に使うようにしましょう。自分のトレーニングペーパーですから，自分に合った学習方法で，学習を進めることです。

◎ **この大学受験デイリープログラムでは，入試に目標をしぼって，完全な実力が養成できるように，トレーニングしていきます。**
このトレーニングペーパーをやりこなすことによって，あなたは自信をもって受験にのぞめます。十分に活用しながら，最後までやりとおしてください。

数と式

第１巻では，数学Ⅰに関する内容のうち，数と式，方程式・不等式，関数について学習します。数学Ⅰでは，数式の扱いや，数学的な考え方で重要なことがらがたくさんあります。ここでは，基礎をおさえながら，入試に目標をおいて学習を進めていくことにします。
まず，はじめに，数と式をとりあげます。整式の除法，無理数の計算など，確実にできるようにしましょう。例題の解法をよく理解し，トレーニングで問題の解法を練習します。

第 **1** 日	数 と 式　　　　学習日　　月　　日
	整式の整理

きょうから，デイリープログラム100日間を始めます。基本的な例題から応用的な例題まで，１日に５例題ずつ扱っていきます。また，それぞれの例題には，例題の内容が十分身につくようにトレーニングがついています。この100日間で，文系受験のための学習を進めていきましょう。

その第１日として，式の展開，因数分解などの整式の整理から始めます。

例題 1　　　　**整式の整理**

$(3x^2+2x+1)(x^2-x+1)+(3x^2-2x+1)(x^2+x-1)-(3x^2+2x-1)(x^2-x-1)$

を展開し，簡単にしなさい。

考え方　まず，乗法の部分を計算します。つまり，$(3x^2+2x+1)(x^2-x+1)$，$(3x^2-2x+1)(x^2+x-1)$，$(3x^2+2x-1)(x^2-x-1)$ それぞれに分配法則を使ってかっこをはずします。つぎに，同類項をまとめて，降べきの順に並べます。

解　答

$$
\begin{aligned}
\text{与式}&=(3x^4-3x^3+3x^2+2x^3-2x^2+2x+x^2-x+1)\\
&\quad+(3x^4+3x^3-3x^2-2x^3-2x^2+2x+x^2+x-1)\\
&\quad-(3x^4-3x^3-3x^2+2x^3-2x^2-2x-x^2+x+1) \quad \leftarrow\text{分配法則を使う。}\\
&=(3+3-3)x^4+(-3+2+3-2+3-2)x^3+(3-2+1-3-2+1+3+2+1)x^2\\
&\quad+(2-1+2+1+2-1)x+(1-1-1) \quad \leftarrow\text{同類項をまとめる。}\\
&=\boldsymbol{3x^4+x^3+4x^2+5x-1} \quad \leftarrow\text{降べきの順に並べる。}
\end{aligned}
$$

POINT

◆ 乗法と加法・減法の混じっている整式の計算は，乗法 → 加法・減法の順にします。

◆ 乗法は，次の分配法則を使ってかっこをはずすことです。

$\boldsymbol{m(a+b)=ma+mb}$

多項式どうしの乗法は，分配法則をくり返し使います。

$$(a+b)(\overset{①}{\underset{④}{c}}+\overset{②}{\underset{⑤}{d}}+\overset{③}{\underset{⑥}{e}})=\overset{①}{ac}+\overset{②}{ad}+\overset{③}{ae}+\underset{④}{bc}+\underset{⑤}{bd}+\underset{⑥}{be}$$

◆ 加法・減法は，同類項をまとめることです。

◆ 項は，次数の順に並べます。

例題は，このように**考え方**，**解答**，POINT を中心にして解説していきます。それでは，トレーニングです。１問めは，例題と同じ問題をのせてあります。**5** はちょっとくふうが必要です。

トレーニング

1 $(3x^2+2x+1)(x^2-x+1)+(3x^2-2x+1)(x^2+x-1)-(3x^2+2x-1)(x^2-x-1)$
を展開し，簡単にしなさい。

2 $(a^2+3a+5)(2a^3-5a-1)+(a^3+a-3)(3a^2+a+7)$ を展開し，簡単にしなさい。

3 $(x^2-3xy+y^2)(x+y)+(x^2-xy-y^2)(x-y)$ を展開し，簡単にしなさい。

4 $(a+b-c-d)(a+d)-(a-b-c+d)(b-c)$ を展開し，簡単にしなさい。

5 $(1+2x+3x^2+4x^3+5x^4+6x^5+7x^6+8x^7+9x^8)^4$ の定数項，x の係数，x^2 の係数，x^3 の係数をそれぞれ求めなさい。

つぎは，乗法公式についての例題です。

例題 2 　　　　**乗法公式**

乗法公式を使って，次の式を展開しなさい。

(1) $(x+2y-3z)(x-2y+3z)$

(2) $(2x^2+x-1)^2$

(3) $(x+y+5)(2x+2y-5)$

(4) $(x+a)(x-a)(x^2-ax+a^2)(x^2+ax+a^2)$

考え方 (1) $2y-3z=Y$ と考えると，$(x+Y)(x-Y)$ です。

(2) $(a+b+c)^2$ の公式にそのままあてはめます。

(3) $x+y=A$ と考えると $(A-5)(2A-5)$ です。

(4) 順序を変えて $\{(x+a)(x^2-ax+a^2)\}\{(x-a)(x^2+ax+a^2)\}$ と組み合わせるとそれぞれに乗法公式が使えます。

解答 (1) 与式 $=\{x+(2y-3z)\}\{x-(2y-3z)\}$ 　**←公式 $(a+b)(a-b)$ の形**

$=x^2-(2y-3z)^2$

$=x^2-(4y^2-12yz+9z^2)$

$=\boldsymbol{x^2-4y^2+12yz-9z^2}$

(2) 与式 $=4x^4+x^2+1+4x^3-2x-4x^2$ 　**←公式 $(a+b+c)^2$ にあてはめる。**

$=\boldsymbol{4x^4+4x^3-3x^2-2x+1}$

(3) 与式 $=(x+y+5)\{2(x+y)-5\}$ 　**←公式 $(ax+b)(cx+d)$ の形**

$=2(x+y)^2+5(x+y)-25$

$=2(x^2+2xy+y^2)+5x+5y-25$

$=\boldsymbol{2x^2+4xy+2y^2+5x+5y-25}$

(4) 与式 $=\{(x+a)(x^2-ax+a^2)\}\{(x-a)(x^2+ax+a^2)\}$ 　**←順序をくふうする。**

$=(x^3+a^3)(x^3-a^3)$

$=\boldsymbol{x^6-a^6}$ 　**←$(x^3)^2-(a^3)^2$**

POINT ◆ **乗法公式**

$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$

$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$

$(ax+b)(cx+d)=acx^2+(bc+ad)x+bd$

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

$(x\pm a)^3=x^3\pm 3ax^2+3a^2x\pm a^3$

$(x\pm a)(x^2\mp ax+a^2)=x^3\pm a^3$

$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=a^3+b^3+c^3-3abc$

公式がたくさんありますね。次のトレーニングで何回も練習しましょう。1問めは，例題と同じ問題です。

トレーニング

6 乗法公式を使って，次の式を展開しなさい。

(1) $(x+2y-3z)(x-2y+3z)$

(2) $(2x^2+x-1)^2$

(3) $(x+y+5)(2x+2y-5)$

(4) $(x+a)(x-a)(x^2-ax+a^2)(x^2+ax+a^2)$

7 乗法公式を使って，次の式を展開しなさい。

(1) $(x+y-1)(x+y+4)$

(2) $(p^2-q+1)(p^2+q-1)$

(3) $(x^2-x+2)^2$

(4) $(a-b+3)(3a-3b+2)$

8 乗法公式を使って，次の式を展開しなさい。

(1) $(a-1)(a+2)(a-3)(a+4)$

(2) $(ab+1)^2(a^2b^2-ab+1)^2$

(3) $(x+2)^3(x^2-2x+4)^3$

(4) $(a+1)(a-1)(a^2+1)$

9 乗法公式を使って，次の式を展開しなさい。

(1) $(y+1)(y+2)(y^2-y+1)(y^2-2y+4)$

(2) $(a-1)(a+1)(a^4+a^2+1)$

(3) $(x^2+x-3)(x^2+x-5)$

(4) $(x+y-1)(x^2+2xy+y^2+x+y+1)$

10 乗法公式を使って，次の式を展開しなさい。

(1) $(a^2+3a-6)(a^2-3a-6)$

(2) $(x+1)^2(x-1)^2(x^4+x^2+1)^2$

(3) $(a^2+ab+b^2)^2(a^2-ab+b^2)^2$

(4) $(p+1)(p^3-1)(p^2-p+1)$

つぎは，対称式の使い方についての例題です。

例題 3 　　　　　　　　　　　　　　　　　　**対称式**

$S=x^3(y+z)+y^3(z+x)+z^3(x+y)$

$A=x+y+z$，$B=yz+zx+xy$，$C=xyz$

であるとき，S を A，B，C で表しなさい。　（関西大）

考え方　S は x，y，z についての対称式，A，B，C は x，y，z についての基本対称式です。ここでは展開してから組み合わせをくふうして，次の式などを利用して変形します。

$x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)$

解　答

$$
\begin{aligned}
S&=x^3y+zx^3+y^3z+xy^3+z^3x+yz^3\\
&=(x^3y+xy^3)+(y^3z+yz^3)+(z^3x+zx^3) \quad \text{←共通な 2 文字の項の組}\\
&=xy(x^2+y^2)+yz(y^2+z^2)+zx(z^2+x^2)\\
&=xy(x^2+y^2+z^2-z^2)+yz(x^2+y^2+z^2-x^2)\\
&\quad+zx(x^2+y^2+z^2-y^2) \quad \text{←} \boldsymbol{x^2+y^2+z^2} \text{ をつくるくふうをする。}\\
&=(xy+yz+zx)(x^2+y^2+z^2)-xyz^2-x^2yz-xy^2z\\
&=(xy+yz+zx)\{(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)\}-xyz(x+y+z)\\
&=B(A^2-2B)-CA\\
&=\boldsymbol{A^2B-2B^2-CA}
\end{aligned}
$$

POINT

- x，y，z についての式で，x と y，y と z，z と x のどの 2 つを入れ換えても式が変わらないものを**対称式**といいます。
  x，y，z についての対称式の中でもとくに，$\boldsymbol{x+y+z}$，$\boldsymbol{xy+yz+zx}$，$\boldsymbol{xyz}$ を**基本対称式**といいます。
- 対称式は基本対称式だけの式で表すことができます。

対称式の利用は，いろいろなところで出てきます。トレーニングでしっかり身につけましょう。やはり，1 問めは例題と同じ問題です。

トレーニング

11 $S=x^3(y+z)+y^3(z+x)+z^3(x+y)$

$A=x+y+z$，$B=yz+zx+xy$，$C=xyz$

であるとき，S を A，B，C で表しなさい。　（関西大）

12 $S=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$

$A=a+b+c$, $B=ab+bc+ca$, $C=abc$

であるとき，S を A, B, C で表しなさい。

13 $S=(x+y)(y+z)(z+x)+xyz$

$A=x+y+z$, $B=xy+yz+zx$, $C=xyz$

であるとき，S を A, B, C で表しなさい。

14 $S=a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)$

$A=a+b+c$, $B=ab+bc+ca$, $C=abc$

であるとき，S を A, B, C で表しなさい。

15 $S=\dfrac{x^4+y^4+z^4}{x^3+y^3+z^3}$

$A=x+y+z$, $B=xy+yz+zx$, $C=xyz$

であるとき，S を A, B, C で表しなさい。

例題，トレーニングというくり返しにも慣れてきましたか。つぎは，因数分解の基本的な例題です。

例題 4 　　　　**因数分解(1)**

次の式を因数分解しなさい。

(1) $x^2(b+y)+y^2(a+x)+xy(a+b)+ab(x+y)$

(2) $x^2-6y^2-xy+3x+y+2$

考え方　次数の最も低い文字に着目し，整理してから因数分解します。

(1) a や b については1次，x や y については2次ですから，a か b に着目します。

(2) x，y のどちらについても2次ですが，x^2 の係数は1，y^2 の係数は-6 ですから，係数の簡単な x に着目します。

解　答　(1) 与式

$=(y^2+xy+bx+by)a+bx^2+x^2y+xy^2+bxy$　**←a に着目**

$=\{b(x+y)+y(x+y)\}a$

$\quad+bx(x+y)+xy(x+y)$　**←a の係数，定数項で b に着目**

$=(x+y)(b+y)a+x(x+y)(b+y)$　**←a の係数，定数項を因数分解**

$=\boldsymbol{(x+y)(b+y)(a+x)}$　**←共通因数のくくり出し**

(2) 与式

$=x^2+(-y+3)x+(-6y^2+y+2)$　**←x に着目**

$=x^2-(y-3)x-(2y+1)(3y-2)$　**←定数項を因数分解**

$=\{x+(2y+1)\}\{x-(3y-2)\}$　**←和が$-(y-3)$，積が$-(2y+1)(3y-2)$**

$=\boldsymbol{(x+2y+1)(x-3y+2)}$

注　意　因数分解では，因数を書く順序には，とくにきまりはありません。

POINT

◆ 1つの多項式を2つ以上の整式の積の形に表すことを，その式を因数分解するといいます。

◆ 2つ以上の文字を含む多項式の因数分解では，次のようにして，1つの文字に着目する方法が有効であることが多いです。

次数が違うとき　……**次数の最も低い文字に着目**

次数が等しいとき……**係数の簡単な文字に着目**

さあ，トレーニングです。

トレーニング

16 次の式を因数分解しなさい。

(1) $x^2(b+y)+y^2(a+x)+xy(a+b)+ab(x+y)$

(2) $x^2-6y^2-xy+3x+y+2$

17 次の式を因数分解しなさい。

(1) a^2-ac-b^2+bc

(2) ax^3-x^2-ax+1

18 次の式を因数分解しなさい。

(1) $(a^2+b^2-c^2)^2-4a^2b^2$

(2) $x^4-2x^2y^2+y^4-x^2+y^2$

19 次の式を因数分解しなさい。

(1) $2a(x+bx-2ab)-x^2$

(2) $a^2-b^2+bc+ca+3a+b+c+2$

20 次の式を因数分解しなさい。

(1) $x^2(y+z)+y^2(z+x)+z^2(x+y)+2xyz$

(2) $6x^2-y^2-xy+20x+5y+6$

つぎも因数分解の例題です。くふうのしかたを身につけましょう。

例題 5 　　　　**因数分解(2)**

次の式を因数分解しなさい。

(1) $(s+t)(s+t-1)-6$ 　　　(2) $x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)$

考え方 (1) $s+t=X$ とおくと，$X(X-1)-6=X^2-X-6$ となり，公式が使えます。

(2) x，y，z についての交代式ですから，必ず $(x-y)(y-z)(z-x)$ を因数にもちます。そして，3次式ですから，$k(x-y)(y-z)(z-x)$ とおいて，定数 k の値を決めます。

解　答 (1) 与式$=(s+t)\{(s+t)-1\}-6$

$=(s+t)^2-(s+t)-6$ 　　**←$x^2+(a+b)x+ab$ の形**

$=\boldsymbol{(s+t-3)(s+t+2)}$

(2) x，y，z についての3次の交代式であるから，k を定数として，次のようにおける。

$$x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)=k(x-y)(y-z)(z-x)$$

両辺の x^2y の係数を比較すると

$1=-k$ 　　**←右辺の x^2y の項は k，x，y，$-x$ の積**

よって　$k=-1$

したがって　　与式$=\boldsymbol{-(x-y)(y-z)(z-x)}$

注　意 (2)で，$x=y$ を代入すると，式の値が0になりますから，因数定理から $x-y$ を因数にもつことが確かめられます。因数 $y-z$，$z-x$ についても同様です。

また，1つの文字に着目して整理する方法でも因数分解できます。

別　解 (2) 与式

$=(y-z)x^2-(y^2-z^2)x+y^2z-yz^2$ 　　**←x に着目**

$=(y-z)x^2-(y+z)(y-z)x+yz(y-z)$

$=(y-z)\{x^2-(y+z)x+yz\}$

$=(y-z)(x-y)(x-z)$

$=-(x-y)(y-z)(z-x)$ 　　**←$x \to y \to z$ の順**

POINT

- ◆ x，y，z についての式で，x と y，y と z，z と x のどの2つを入れ換えても式の符号だけ変わるものを**交代式**といいます。
- ◆ x，y，z についての**交代式は**，必ず

　3次のとき　$\boldsymbol{k(x-y)(y-z)(z-x)}$

　4次のとき　$\boldsymbol{k(x+y+z)(x-y)(y-z)(z-x)}$

の形に因数分解されます。ただし，k は定数です。

では，きょう最後のトレーニングです。

トレーニング

21 次の式を因数分解しなさい。

(1) $(s+t)(s+t-1)-6$

(2) $x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)$

22 次の式を因数分解しなさい。

(1) $(x^2+2x-6)(x^2+2x-5)-6$

(2) x^6-y^6

23 次の式を因数分解しなさい。

(1) x^4-6x^2+8

(2) x^4-6x^2+25

24 次の式を因数分解しなさい。

(1) $a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)$

(2) $a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$

25 次の式を因数分解しなさい。

(1) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-24$

(2) $(x^2-1)(y^2-1)-4xy$

きょうの学習はこれで終わりです。第2日も，例題，トレーニングのくり返しでどんどん進めていきますよ。
第2日は，剰余の定理・因数定理など整式の除法の学習です。

第2日

数と式　　　　学習日　　月　　日

整式の除法

きょうは，整式の除法について学習していきます。入試にもよく利用される剰余の定理・因数定理の理解が中心です。

では，実際に割り算をしてみる例題から始めましょう。

例題 6　　　　**整式の除法**

x^3-2x^2+mx+n が x^2+3 で割り切れるように，定数 m，n の値を定めなさい。また，このとき，この式を因数分解しなさい。

考え方　実際に x^3-2x^2+mx+n を x^2+3 で割って，商と余りを m，n で表します。割り切れるとは，x の値にかかわらず余りが 0 になることです。

また，x^2+3 で割り切れる整式は，x^2+3 とその商との積で表されます。

解答　x^3-2x^2+mx+n を x^2+3 を割ると

$$
\begin{array}{r@{\,}l}
 & x-2 \\ \cline{2-2}
x^2+3\,\big) & x^3-2x^2+\quad mx+\quad n \\
 & x^3\qquad\;\;+\quad 3x \\ \cline{2-2}
 & \quad -2x^2+(m-3)x+\quad n \\
 & \quad -2x^2\qquad\qquad\;\;-\quad 6 \\ \cline{2-2}
 & \qquad\qquad (m-3)x+n+6
\end{array}
$$

←商

←$\boldsymbol{x^3}$ と $\boldsymbol{x^2}$ を比べて，$\boldsymbol{x}$

←$\boldsymbol{-2x^2}$ と $\boldsymbol{x^2}$ を比べて，$\boldsymbol{-2}$

←余り

商は $x-2$，余りは $(m-3)x+n+6$

割り切れるから，すべての x に対して

$(m-3)x+n+6=0$　　←余り＝0

よって　$m-3=0$　かつ　$n+6=0$　　←$\boldsymbol{x}$ の係数＝0，定数項＝0

したがって　$\boldsymbol{m=3}$，$\boldsymbol{n=-6}$

また，**因数分解すると**

$x^3-2x^2+3x-6=\boldsymbol{(x^2+3)(x-2)}$　　←割る式×商で表される。

POINT

◆ $ax+b$ が，すべての x に対して 0 ならば　$a=0$ かつ $b=0$ です。

◆ 整式 A が整式 B で割り切れて，その商が Q のとき　$A=BQ$

割り切れるという意味が理解できましたか。では，トレーニングです。1問めでもう一度例題を確認しましょう。

トレーニング

1 x^3-2x^2+mx+n が x^2+3 で割り切れるように，定数 m，n の値を定めなさい。また，このとき，この式を因数分解しなさい。

2 x^3-ax^2+bx+2 が x^2+2 で割り切れるように，定数 a，b の値を定めなさい。また，このとき，この式を因数分解しなさい。

3 $px^3-x^2+23x+q$ が x^2-x+12 で割り切れるように，定数 p，q の値を定めなさい。また，このとき，この式を因数分解しなさい。

4 x^4+x^3-x-1 が x^2+a で割り切れるように，定数 a の値を定めなさい。また，このとき，この式を因数分解しなさい。

5 $2x^3-mx^2-6x+5$ が x^2+nx-5 で割り切れるとき，定数 m，n の値を求めなさい。また，この式を因数分解しなさい。

つぎは，わられる数＝わる数×商＋余り の関係を考える例題です。

例題 7 ― **整式の除法**

x^3+3x^2-x+9 をある整式 P で割ったときの商は $x+3$，余りは $2x+18$ でした。この整式 P を求めなさい。

考え方 わられる式＝わる式×商＋余りですから，$x^3+3x^2-x+9=P\times(x+3)+2x+18$，これを変形して P を求めます。

解 答 $x^3+3x^2-x+9=P\times(x+3)+2x+18$ **←わられる式＝わる式×商＋余り**

よって $P\times(x+3)=x^3+3x^2-x+9-(2x+18)$ **←移項する。**

$=x^3+3x^2-3x-9$

したがって $P=(x^3+3x^2-3x-9)\div(x+3)$ **←$x+3$ で割る。**

$=\boldsymbol{x^2-3}$

これは 2 次式だから題意に適する。

POINT ◆ x についての整式 A を，x についての整式 B で割ったときの商を Q，余りを R とすると，次の関係が成り立ちます。

$\boldsymbol{A=BQ+R}$	ただし R の次数＜B の次数

この例題では，わる式の次数と余りの次数の関係をつかむことがポイントとなります。では，トレーニングです。

トレーニング

6 x^3+3x^2-x+9 をある整式 P で割ったときの商は $x+3$，余りは $2x+18$ でした。この整式 P を求めなさい。

7 整式 $P(x)$ を $x+2$ で割ったときの商は $Q(x)$，余りは 5 です。さらに，$Q(x)$ を x^2+3x+3 で割ったときの商は $x-2$，余りは -1 です。$P(x)$ を求めなさい。

8 $x^4-2x^3+4x^2+4$ を x^2+1 で割ったら，商が $Q(x)$ で余りが $2x+1$ でした。この商 $Q(x)$ を求めなさい。

9 整式 $f(x)$ を整式 $g(x)$ で割ったときの商は $2x-1$，余りは $4x+2$ です。$f(x)$ を $2x-1$ で割ったときの余りを求めなさい。

10 整式 $f(x)$ を $2x-3$ で割った商が $g(x)$，余りが -4 です。また，$g(x)$ を $x+5$ で割った余りも -4 です。$f(x)$ を $(2x-3)(x+5)$ で割ったときの余りを求めなさい。

$A=BQ+R$ の関係は十分つかめましたね。この関係は，あとの剰余の定理・因数定理の基礎となります。

つぎは，完全平方式を扱います。恒等式の考え方の練習です。

例題 8 　　**完全平方式**

$x^4+4x^3-2x^2+ax+b$ が x についての完全平方式になるように，定数 a，b の値を定めなさい。 （明治大）

考え方 　$x^4+4x^3-2x^2+ax+b=(x^2+px+q)^2$ とおいて，右辺を展開して整理してから，両辺の x^3，x^2，x，定数の項の係数をそれぞれ比較して，p，q，a，b の値を決めます。

解 答 　$x^4+4x^3-2x^2+ax+b=(x^2+px+q)^2$ とおく。 **←平方して 4 次式になるのは 2 次式で，最高次の係数が 1 だから**

右辺を展開して整理すると

$x^4+4x^3-2x^2+ax+b=x^4+2px^3+(p^2+2q)x^2+2pqx+q^2$

両辺の同次の項の係数を比較して

$4=2p$，$-2=p^2+2q$，$a=2pq$，$b=q^2$ 　**←x^3，x^2，x の係数，定数項**

よって　$p=2$，$q=-3$，$\boldsymbol{a=-12}$，$\boldsymbol{b=9}$

POINT

◆ 整式 P が整式 F の平方の形に表されるとき，つまり $P=F^2$ のとき，P は**完全平方式**であるといいます。

◆ 等式 $P=Q$ が**恒等式**である。 $\Longleftrightarrow$ P と Q の次数が等しく，整理したときの**同じ次数の項の係数が等しい**。

では，トレーニングです。

トレーニング

11 　$x^4+4x^3-2x^2+ax+b$ が x についての完全平方式になるように，定数 a，b の値を定めなさい。 （明治大）

12 x^4+mx^2+nx+9 が x についての完全平方式になるように，定数 m，n の値を定めなさい。

13 $4a^6+4a^5+a^4-8a^3-4a^2+4$ は a について完全平方式です。このとき，この完全平方式を因数分解しなさい。

14 $x^4+x^3+10x-8$ を x についての整数係数の 2 次式の積で表しなさい。

15 $x^2+2xy-8y^2+2x+14y-3$ を x，y についての 1 次式の積で表しなさい。

つぎは，いよいよ剰余の定理・因数定理です。入試での出題頻度の高い内容ですので，２つの例題にわけて扱います。まずは，基本の例題です。

例題 9 　　　　**剰余の定理・因数定理(1)**

整式 $f(x)$ は $x+1$ で割ると３余り，$2x-3$ で割ると -2 余ります。$f(x)$ を $2x^2-x-3$ で割ったときの余りを求めなさい。

考え方　２次式で割ったときの余りは１次以下の整式ですから，$ax+b$ とおいて，定数 a，b の値を決めます。商を $Q(x)$ とすれば，$f(x)=(2x^2-x-3)Q(x)+ax+b$ で，剰余の定理から，$f(-1)=3$，$f\left(\dfrac{3}{2}\right)=-2$ です。

解　答　$f(x)$ を $2x^2-x-3$ で割ったときの商を $Q(x)$，

余りを $ax+b$ とおくと　　**←割る式は２次式，余りは１次以下**

$f(x)=(2x^2-x-3)Q(x)+ax+b$

$\quad=(x+1)(2x-3)Q(x)+ax+b$　　**←割る式を因数分解する。**

剰余の定理から

$f(-1)=-a+b=3$　………①　　**←$x+1$ で割った余りが３**

$f\left(\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{3}{2}a+b=-2$　………②　　**←$x-\dfrac{3}{2}$ で割った余りが -2**

①，②を連立方程式として解くと

$a=-2$，$b=1$

よって，求める余りは　　$\boldsymbol{-2x+1}$

注　意　a，b を定数とすると，$ax+b$ は，$a\neq0$ のとき x についての１次式，$a=0$ のとき０次式で，１次以下の式を表します。

POINT　◆　**剰余の定理**

$f(x)$ を $x-\alpha$ で割ったときの余りは $f(\alpha)$

$f(x)$ を $ax+b$ で割ったときの余りは $f\left(-\dfrac{b}{a}\right)$

◆　**因数定理**

$f(x)$ が $x-\alpha$ で割り切れるとき $f(\alpha)=0$

$f(x)=(x-\alpha)Q(x)+3$ のとき，$x-\alpha=0$ となる x の値，$x=\alpha$ を $f(x)$ に代入すると，余り３が得られる，つまり，$f(\alpha)=3$ ということです。

では，剰余の定理・因数定理についてトレーニングで練習しましょう。

トレーニング

16 整式 $f(x)$ は $x+1$ で割ると 3 余り，$2x-3$ で割ると -2 余ります。$f(x)$ を $2x^2-x-3$ で割ったときの余りを求めなさい。

17 $2x^3-3x^2+ax+5$ を $2x-1$ で割ると余りが b になり，$x+2$ で割ると余りが $-9b$ になります。このとき，a，b の値を求めなさい。

18 $2x^2-5x-a$ は $x-b$ で割り切れ，$x+b$ で割ると 40 余ります。このとき，a，b の値を求めなさい。

19 整式 $f(x)$ は $3x+4$ で割ると 6 余り，$x-2$ で割ると -4 余ります。$f(x)$ を $3x^2-2x-8$ で割ったときの余りを求めなさい。

20 $f(x)$ を $2x^2-3x-9$ で割った余りは $6x-7$ です。$f(x)$ を $2x+3$，$x-3$ で割った余りを求めなさい。

次の例題では，少し複雑な剰余の定理・因数定理の利用を考えます。

例題 10 　　　　剰余の定理・因数定理(2)

x の整式 $f(x)$ を $(x-b)(x-c)$，$(x-c)(x-a)$，$(x-a)(x-b)$ で割ったときの余りがそれぞれ $3x-1$，$x+1$，$2x+3$ です。

このとき，次の各問いに答えなさい。

(1) 定数 a，b，c の値を求めなさい。

(2) $f(x)$ を $(x-a)(x-b)(x-c)$ で割ったときの余りを求めなさい。

考え方　$f(x)$ を $(x-b)(x-c)$，$(x-c)(x-a)$，$(x-a)(x-b)$ でそれぞれ割ったときの関係から，3通りの式で表します。そして，$f(a)$，$f(b)$，$f(c)$ をその中の2つの式で表して，a，b，c についての方程式をつくって解きます。

また，3次式 $(x-a)(x-b)(x-c)$ で割ったときの余りは2次以下ですから，px^2+qx+r とおき，$f(a)$，$f(b)$，$f(c)$ の値から，p，q，r の値を求めます。

解　答　(1) $f(x)$ を $(x-b)(x-c)$，$(x-c)(x-a)$，$(x-a)(x-b)$ で割ったときの商をそれぞれ $Q_1(x)$，$Q_2(x)$，$Q_3(x)$ とすると

$f(x)=(x-b)(x-c)Q_1(x)+3x-1$ ………①

$f(x)=(x-c)(x-a)Q_2(x)+x+1$ ………②

$f(x)=(x-a)(x-b)Q_3(x)+2x+3$ ………③　　←①，②，③は同じ $f(x)$ を表す。

②，③に $x=a$ を代入すると

$f(a)=a+1=2a+3$　　←②の $f(a)$ と③の $f(a)$ は等しい。

よって　　$\boldsymbol{a=-2}$

したがって　　$f(-2)=-1$ ………④　　← $f(-2)=-2+1$

同様に，①，③に $x=b$ を代入すると

$\boldsymbol{b=4}$，$f(4)=11$ ………⑤

①，②に $x=c$ を代入すると

$\boldsymbol{c=1}$，$f(1)=2$ ………⑥

(2) $f(x)$ を $(x-a)(x-b)(x-c)$ で割ったときの商を $Q(x)$，余りを px^2+qx+r とおくと　　←割る式は3次式，余りは2次以下

$f(x)=(x+2)(x-4)(x-1)Q(x)+px^2+qx+r$

この式に $x=-2$，4，1をそれぞれ代入すると，④，⑤，⑥から

$f(-2)=4p-2q+r=-1$

$f(4)=16p+4q+r=11$

$f(1)=p+q+r=2$

これらを連立方程式として解くと

$p=\dfrac{1}{3}$，$q=\dfrac{4}{3}$，$r=\dfrac{1}{3}$

したがって，求める余りは　　$\boldsymbol{\dfrac{1}{3}x^2+\dfrac{4}{3}x+\dfrac{1}{3}}$

POINT ◆ $f(x)$ を $(x-\alpha)(x-\beta)$ で割ったときの余りを $ax+b$ とすると
$f(x)$ を $x-\alpha$ で割った余りは，$f(\alpha)=a\alpha+b$

少し複雑ですが，考え方は同じですね。では，トレーニングです。

トレーニング

21 x の整式 $f(x)$ を $(x-b)(x-c)$，$(x-c)(x-a)$，$(x-a)(x-b)$ で割ったときの余りがそれぞれ $3x-1$，$x+1$，$2x+3$ です。

このとき，次の各問いに答えなさい。

(1) 定数 a，b，c の値を求めなさい。

(2) $f(x)$ を $(x-a)(x-b)(x-c)$ で割ったときの余りを求めなさい。

22 x の整式 $f(x)$ を x^2-x-12，$2x^2-7x-4$ で割ったときの余りがそれぞれ $-3x-7$，$3x+1$ です。$f(x)$ を $2x^2+7x+3$ で割ったときの余りを求めなさい。

23 x の整式 $f(x)$ を $x+1$，$x+2$，$x+3$ で割ったときの余りがそれぞれ 1，2，3 です。$f(x)$ を $(x+1)(x+2)(x+3)$ で割ったときの余りを求めなさい。

24 x の整式 $(x+p)^n$ を x^2-p^2 で割った余りを求めなさい。ただし，$p>0$，n は自然数とします。

25 x の整式 $f(x)$ を $(x-2)^2$ で割ると $x+1$ 余り，$x+1$ で割ると -9 余ります。$f(x)$ を $(x-2)^2(x+1)$ で割ったときの余りを求めなさい。

きょうの学習はこれで終わりです。第3日は，分数式について学習します。

第 **3** 日	数と式　　　学習日　　月　　日 **分数式**

きょうは，分数式について学習します。基本的な計算から，通分のくふうをするもの，繁分数式などを扱います。
まずは，基本的な分数式の計算から始めましょう。

例題 11　　　分数式の計算(1)

次の分数式を計算しなさい。

(1) $\dfrac{x^2+1}{x-1}+\dfrac{x^2-2}{x-2}-2x-3$　　(2) $\dfrac{x+2}{x+1}-\dfrac{x+3}{x+2}+\dfrac{x+4}{x+3}-\dfrac{x+5}{x+4}$

考え方　$(x^2+1)\div(x-1)$ の商は $x+1$，余りは 2 であるから，$\dfrac{x^2+1}{x-1}=x+1+\dfrac{2}{x-1}$ のように，分子の次数が分母の次数以上である各分数式を，整式と分子の次数が分母の次数より低い分数式との和の形に直します。そして，整式どうし，分数式どうしで計算すると楽にできます。

解答　(1) 与式 $=\left(x+1+\dfrac{2}{x-1}\right)+\left(x+2+\dfrac{2}{x-2}\right)-2x-3$　　←分子の次数を下げる。

$=(x+1+x+2-2x-3)+\left(\dfrac{2}{x-1}+\dfrac{2}{x-2}\right)$　　←整式と分数式に分ける。

$=\dfrac{2(x-2+x-1)}{(x-1)(x-2)}$

$=\boldsymbol{\dfrac{2(2x-3)}{(x-1)(x-2)}}$

(2) 与式 $=\dfrac{x+2}{x+1}-\dfrac{x+3}{x+2}+\dfrac{x+4}{x+3}-\dfrac{x+5}{x+4}$

$=\left(1+\dfrac{1}{x+1}\right)-\left(1+\dfrac{1}{x+2}\right)+\left(1+\dfrac{1}{x+3}\right)-\left(1+\dfrac{1}{x+4}\right)$

$=(1-1+1-1)+\left(\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{1}{x+3}-\dfrac{1}{x+4}\right)$

$=\dfrac{x+2-x-1}{(x+1)(x+2)}+\dfrac{x+4-x-3}{(x+3)(x+4)}$　　←分子が等しくなる組に分ける。

$=\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}+\dfrac{1}{(x+3)(x+4)}$

$=\dfrac{x^2+7x+12+x^2+3x+2}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}$

$=\boldsymbol{\dfrac{2(x^2+5x+7)}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}}$

注　意　分子の次数を低くしておくと，通分したあとの計算が楽になります。

POINT　◆　整式 A を整式 B で割ったときの商を Q，余りを R とすると

$$\frac{A}{B}=Q+\frac{R}{B}\quad（Q\text{ は整式，}R\text{ の次数}<B\text{ の次数}）$$

このことを利用して，分子の次数が分母の次数以上のときは，整式と分子の次数が分母の次数より低い分数式の和に直します。

計算のくふうのしかたはわかりましたね。では，トレーニングで練習しましょう。

トレーニング

1　次の分数式を計算しなさい。

(1) $\dfrac{x^2+1}{x-1}+\dfrac{x^2-2}{x-2}-2x-3$　　(2) $\dfrac{x+2}{x+1}-\dfrac{x+3}{x+2}+\dfrac{x+4}{x+3}-\dfrac{x+5}{x+4}$

2　次の分数式を計算しなさい。

(1) $\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{x+1}{x}-\dfrac{x+2}{x+1}+\dfrac{x+3}{x+2}$

(2) $\dfrac{6x-2}{2x-1}-\dfrac{2x+1}{2x}-\dfrac{10x+6}{2x+1}+\dfrac{6x+7}{2x+2}$

3　次の分数式を計算しなさい。

(1) $\dfrac{3a^2-3a+1}{a-1}-\dfrac{5a^2-10a+1}{a-2}-\dfrac{a^2-3a+1}{a-3}+\dfrac{3a^2-12a+1}{a-4}$

(2) $\dfrac{x^2+x-1}{x-1}+\dfrac{x^2+4x+4}{x+1}-2x-5$

4　次の分数式を計算しなさい。

(1) $\dfrac{x^2-x-1}{x^2-x-2}+\dfrac{x^2+1}{x^2-1}-\dfrac{2x^2-6x+6}{x^2-3x+2}$

(2) $\dfrac{x^3-2x+2}{x^2-1}-\dfrac{x^3+2}{x^2-x+1}+\dfrac{x^3+4}{x^3+1}$

つぎは，部分分数にわけて計算する方法を学習します。

例題 12 　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　**分数式の計算(2)**

次の分数式を計算しなさい。

(1) $\dfrac{b}{a(a+b)}+\dfrac{c}{(a+b)(a+b+c)}+\dfrac{d}{(a+b+c)(a+b+c+d)}+\dfrac{1}{a+b+c+d}$

(2) $\dfrac{1}{x(x+2)}+\dfrac{1}{(x+2)(x+4)}+\dfrac{1}{(x+4)(x+6)}+\dfrac{1}{(x+6)(x+8)}$

考え方　$\dfrac{b}{a(a+b)}=\dfrac{(a+b)-a}{a(a+b)}$ のように，各分数式の分子は，分母の２つの因数の差になっています。そこで，これを $\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{a+b}$ のように，分母の因数を分母とする２つの分数式の差で表してから計算すると楽にできます。

解　答　(1) 与式

$$=\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{a+b}\right)+\left(\frac{1}{a+b}-\frac{1}{a+b+c}\right)+\left(\frac{1}{a+b+c}-\frac{1}{a+b+c+d}\right)$$

$$+\frac{1}{a+b+c+d}$$　**←2つの分数式の差で表す。**

$$=\boldsymbol{\frac{1}{a}}$$

(2) 与式

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+4}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x+6}\right)$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+6}-\frac{1}{x+8}\right)$$　**←$\frac{1}{2}$ でくくると分子が1になる。**

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+8}\right)$$

$$=\frac{x+8-x}{2x(x+8)}=\boldsymbol{\frac{4}{x(x+8)}}$$

POINT　◆ $\dfrac{B-A}{AB}$ の形の分数式，すなわち分母が２つの因数をもち，分子がその因数の差に等しい分数式は，分母の因数 A，B をそれぞれ分母とする２つの分数式 $\dfrac{1}{A}$，$\dfrac{1}{B}$ の差で表すことができます（**部分分数に分解する**といいます）。

$$\boldsymbol{\frac{B-A}{AB}}=\frac{B}{AB}-\frac{A}{AB}=\boldsymbol{\frac{1}{A}-\frac{1}{B}}$$　例　$\dfrac{b}{a(a+b)}=\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{a+b}$

分母の因数の差をとってみることがポイントですね。では，さっそくトレーニングです。

トレーニング

5 次の分数式を計算しなさい。

(1) $\dfrac{b}{a(a+b)}+\dfrac{c}{(a+b)(a+b+c)}+\dfrac{d}{(a+b+c)(a+b+c+d)}+\dfrac{1}{a+b+c+d}$

(2) $\dfrac{1}{x(x+2)}+\dfrac{1}{(x+2)(x+4)}+\dfrac{1}{(x+4)(x+6)}+\dfrac{1}{(x+6)(x+8)}$

6 次の分数式を計算しなさい。

(1) $\dfrac{1}{(a+1)(a+2)}+\dfrac{1}{(a+2)(a+3)}+\dfrac{1}{(a+3)(a+4)}$

(2) $\dfrac{b}{a(a+b)}+\dfrac{c}{(a+b)(a+b+c)}+\dfrac{1}{a+b+c}$

7 次の分数式を計算しなさい。

(1) $\dfrac{1}{(x+1)(x-1)}+\dfrac{1}{(x-1)(x-3)}+\dfrac{1}{(x-3)(x-5)}$

(2) $\dfrac{1}{2b(b-a)}+\dfrac{1}{2a(a-b)}+\dfrac{1}{2a(3a+b)}$

8 次の分数式を計算しなさい。

(1) $\dfrac{2}{x^2-4x+3}+\dfrac{2}{x^2-1}+\dfrac{2}{x^2+4x+3}$

(2) $\dfrac{2}{x^2+4x+3}+\dfrac{x-2}{2x^2+7x+3}+\dfrac{2}{4x^2+8x+3}$

9 次の分数式を計算しなさい。

(1) $\dfrac{2}{(a-3)(a-1)}+\dfrac{2}{(a-2)a}+\dfrac{2}{(a-1)(a+1)}+\dfrac{2}{a(a+2)}$

(2) $\dfrac{1}{25a^2-20a+3}+\dfrac{1}{25a^2-10a}+\dfrac{1}{25a^2-1}+\dfrac{1}{25a^2+10a}$

次の例題の(1)では，1度に通分しないで，順序を変えたり，組をつくったりして計算する方法を扱います。

例題 13 　　**分数式の計算(3)**

次の分数式を計算しなさい。

(1) $\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{2}{x^2+1}-\dfrac{4}{x^4+1}$

(2) $\dfrac{a}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c}{(c-a)(c-b)}$

考え方 (1)は，1度に通分しないで，まず $\dfrac{1}{x-1}$ と $\dfrac{1}{x+1}$ を通分して計算し，その結果と $\dfrac{2}{x^2+1}$，さらにその結果と $\dfrac{4}{x^4+1}$ という順に通分して計算します。

(2)は通分して，分子を整理し因数分解して約分できるときは約分します。

解　答 (1) 与式

$=\dfrac{x+1-x+1}{(x-1)(x+1)}-\dfrac{2}{x^2+1}-\dfrac{4}{x^4+1}$　**←前の2式を通分して計算**

$=\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{2}{x^2+1}-\dfrac{4}{x^4+1}$

$=\dfrac{2(x^2+1-x^2+1)}{(x^2-1)(x^2+1)}-\dfrac{4}{x^4+1}$　**←前の2式を通分して計算**

$=\dfrac{4}{x^4-1}-\dfrac{4}{x^4+1}$

$=\dfrac{4(x^4+1-x^4+1)}{(x^4-1)(x^4+1)}$

$=\boldsymbol{\dfrac{8}{x^8-1}}$

(2) 与式

$=\dfrac{-a(b-c)-b(c-a)-c(a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$　**←1度に通分して計算**

$=\dfrac{-ab+ca-bc+ab-ca+bc}{(a-b)(b-c)(c-a)}$

$=\mathbf{0}$

POINT ◆ いくつかの分数式の和や差を計算するときは，1度に通分しないで，次のように**順序を変えたり，組をつくったりして通分する**と楽にできる場合があります。

① 分母の積が乗法公式にあてはまる。

② それぞれの組を通分して計算すると分子が等しくなる。

分数式の計算では，いろいろなくふうが必要です。次のトレーニングでしっかり練習しましょう。

トレーニング

10 次の分数式を計算しなさい。

(1) $\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{2}{x^2+1}-\dfrac{4}{x^4+1}$

(2) $\dfrac{a}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c}{(c-a)(c-b)}$

11 次の分数式を計算しなさい。

(1) $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+3}-\dfrac{1}{x+5}+\dfrac{1}{x+8}$

(2) $\dfrac{1}{x}-\dfrac{3}{x+2}-\dfrac{5}{x+4}+\dfrac{7}{x+6}$

12 次の分数式を計算しなさい。

(1) $\dfrac{a^2}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^2}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c^2}{(c-a)(c-b)}$

(2) $\dfrac{b+c}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{c+a}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{a+b}{(c-a)(c-b)}$

13 次の分数式を計算しなさい。

(1) $\dfrac{b^2-(c-a)^2}{a^2-(b+c)^2}+\dfrac{c^2-(a-b)^2}{b^2-(c+a)^2}+\dfrac{a^2-(b-c)^2}{c^2-(a+b)^2}$

(2) $\dfrac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}$

14 次の分数式を計算しなさい。

(1) $\dfrac{1}{2-x}+\dfrac{1}{2+x}+\dfrac{4}{4+x^2}-\dfrac{32}{16+x^4}$

(2) $\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{1-x}{1+x+x^2}+\dfrac{1}{1+x}-\dfrac{1+x}{1-x+x^2}$

これまでの学習で分数式の計算にも，だいぶ慣れたことと思います。

つぎは，条件式が比例式で与えられているときの，分数式の値を求める例題です。

例題 14 　　分数式の値

$\dfrac{c}{a+b}=\dfrac{a}{b+c}=\dfrac{b}{c+a}$ であるとき，この式の値を求めなさい。

考え方 　$\dfrac{c}{a+b}=\dfrac{a}{b+c}=\dfrac{b}{c+a}=k$ とおいて，k を求めます。

解　答 　$\dfrac{c}{a+b}=\dfrac{a}{b+c}=\dfrac{b}{c+a}=k$ とおくと　　←条件式 $=k$ とおく。

$c=k(a+b)$ ………①

$a=k(b+c)$ ………②

$b=k(c+a)$ ………③

①+②+③から

$a+b+c=2k(a+b+c)$

$\boldsymbol{a+b+c \neq 0}$ **のとき**　$k=\dfrac{1}{2}$　　←両辺を $a+b+c$ で割る。

$\boldsymbol{a+b+c=0}$ **のとき**　$k=\dfrac{c}{a+b}=\dfrac{c}{-c}=-1$　　←もとの式にもどる。

POINT 　◆ **条件式が比例式**で与えられたときは，$=k$ とおきます。そして

① k 以外の文字を消去

② 文字式の対称性の性質を利用

のどちらかの方法で k の値を求めます。

---

k とおくことがポイントですね。では，トレーニングです。最初に，例題と同じ問題で考え方を確認しておきましょう。

トレーニング

15 　$\dfrac{c}{a+b}=\dfrac{a}{b+c}=\dfrac{b}{c+a}$ であるとき，この式の値を求めなさい。

16 $\dfrac{a+b}{3}=\dfrac{b+c}{4}=\dfrac{c+a}{5}$ のとき，$\dfrac{a^2-b^2+c^2}{a^2+b^2+c^2}$ の値を求めなさい。

17 $xyz=1$ のとき，$\dfrac{1}{xy+x+1}+\dfrac{1}{yz+y+1}+\dfrac{1}{zx+z+1}$ の値を求めなさい。

18 $a+b+c=0$ のとき，$a\left(\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)+b\left(\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{a}\right)+c\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)$ の値を求めなさい。

19 $\dfrac{d}{a+b+c}=\dfrac{a}{b+c+d}=\dfrac{b}{c+d+a}=\dfrac{c}{d+a+b}$ であるとき，この式の値を求めなさい。

いよいよ，きょう最後の例題です。最後は，繁分数式の計算です。

例題 15 **繁分数式**

次の繁分数式を簡単にしなさい。

(1) $\dfrac{x+1}{x+1+\dfrac{1}{x-1+\dfrac{1}{x+1}}}$　　(2) $\dfrac{\dfrac{1}{b}-\dfrac{a-b}{ab+b^2}}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{a-b}{a^2+ab}}$

考え方　分母・分子に 0 でない同じ整式をかけて整理していきます。

解答　(1) 与式$=\dfrac{x+1}{x+1+\dfrac{x+1}{\left(x-1+\dfrac{1}{x+1}\right)\times(x+1)}}$　　**← $\dfrac{1}{x-1+\dfrac{1}{x+1}}$ を簡単にする。**

$=\dfrac{x+1}{x+1+\dfrac{x+1}{(x-1)(x+1)+1}}=\dfrac{x+1}{x+1+\dfrac{x+1}{x^2}}$

$=\dfrac{(x+1)\times x^2}{\left(x+1+\dfrac{x+1}{x^2}\right)\times x^2}=\dfrac{(x+1)x^2}{(x+1)x^2+x+1}$

$=\dfrac{(x+1)x^2}{(x+1)(x^2+1)}=\boldsymbol{\dfrac{x^2}{x^2+1}}$

(2) 与式$=\dfrac{\left\{\dfrac{1}{b}-\dfrac{a-b}{b(a+b)}\right\}\times ab(a+b)}{\left\{\dfrac{1}{a}+\dfrac{a-b}{a(a+b)}\right\}\times ab(a+b)}$　　**←分母・分子に $ab(a+b)$ をかける。**

$=\dfrac{a(a+b)-a(a-b)}{b(a+b)+b(a-b)}$

$=\dfrac{2ab}{2ab}=\mathbf{1}$

POINT　◆ 繁分数式では，分母・分子に 0 でない**同じ整式をかけても**，分母・分子を 0 でない**同じ整式で割ってももとの繁分数式と等しくなります。**

順に，ていねいに計算していけばよいですね。では，トレーニングしましょう。

トレーニング

20 次の繁分数式を簡単にしなさい。

(1) $$\frac{x+1}{x+1+\dfrac{1}{x-1+\dfrac{1}{x+1}}}$$

(2) $$\frac{\dfrac{1}{b}-\dfrac{a-b}{ab+b^2}}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{a-b}{a^2+ab}}$$

21 次の繁分数式を簡単にしなさい。

(1) $$\frac{\dfrac{1+x}{1-x}-\dfrac{1-x}{1+x}}{\dfrac{1+x}{1-x}+\dfrac{1-x}{1+x}}$$

(2) $$\frac{\dfrac{b+a}{1+ab}-a}{\dfrac{a(b+a)}{1+ab}-1}$$

22 次の繁分数式を簡単にしなさい。

(1) $$\frac{1-x}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-x}}}$$

(2) $$\frac{x-1}{x-1+\dfrac{1}{x+1+\dfrac{1}{x-1}}}$$

23 次の繁分数式を簡単にしなさい。

(1) $$\frac{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x-y}}{\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{x-y}}$$

(2) $$\frac{\dfrac{1}{b}-\dfrac{a+b}{ab-b^2}}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{a+b}{a^2-ab}}$$

24 次の繁分数式を簡単にしなさい。

$$\frac{x-\dfrac{5}{2x-3}}{x+7-\dfrac{15}{2-\dfrac{1}{x-1}}}-\frac{\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{x-1}}{x+3-\dfrac{12}{x-1}}$$

きょうは，分数式についていろいろな計算をしました。分数式の計算は，もうだいじょうぶですね。きょうの学習はこれで終わります。第4日は，無理数についての学習です。

第 4 日	数 と 式　　　　学習日　　月　　日
	平方根，無理数

第4日　平方根，無理数

きょうは，無理数に関するいろいろな問題を扱っていきます。とくに，二重根号についての問題が中心になります。

まず最初は，簡単な分母の有理化から始めましょう。

例題 16　　　　**無理式を含む式の計算**

$x=\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$，$y=\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$ のとき，次の式の値を求めなさい。

(1)　x^2-y^2　　　　(2)　x^3+y^3

考え方　(1)は $(x+y)(x-y)$ としてから計算します。(2)は x，y についての対称式ですから，x，y についての基本対称式 $x+y$，xy だけで表せます。

解 答

$$x+y=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=\frac{(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2+(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2}{5-3}=8$$

$$x-y=\frac{(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2-(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2}{5-3}=2\sqrt{15}$$

$$xy=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=1$$

(1)　与式 $=(x+y)(x-y)$　　　　**←$x+y$，$x-y$ で表す。**

$\quad=8\cdot2\sqrt{15}=\mathbf{16\sqrt{15}}$

(2)　与式 $=(x+y)^3-3xy(x+y)$　　　　**←$x+y$，xy で表す。**

$\quad=8^3-3\cdot1\cdot8=\mathbf{488}$

POINT　◆　分母に根号を含んだ式を，分母に根号を含まない形に変形することを，分母を**有理化**するといいます。

$$\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}=\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b}$$

$$\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}=\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}$$

◆　式の値を求めるとき，式を変形して簡単な形にしてから代入すると楽です。

また，式の特徴，たとえば，x，y についての対称式は基本対称式 $x+y$，xy だけで表され，x，y についての交代式は $x-y$ と基本対称式で表された式の積で表されることなどを利用すると楽です。

考え方をつかんだら，トレーニングで練習です。まずは，例題をもう一度解いてみましょう。

トレーニング

1 $x=\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$，$y=\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$ のとき，次の式の値を求めなさい。

(1) x^2-y^2　　(2) x^3+y^3

2 次の式を簡単にしなさい。

(1) $\dfrac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\dfrac{1-\sqrt{2}-\sqrt{3}}{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

(2) $\left(\dfrac{1}{\sqrt{10}+\sqrt{2}}+\sqrt{3}\right)\left(\dfrac{1}{\sqrt{10}-\sqrt{2}}-\sqrt{3}\right)$

3 $x=3\sqrt{2}+2\sqrt{3}$，$y=3\sqrt{2}-2\sqrt{3}$ のとき，次の式の値を求めなさい。

(1) x^2-y^2+x-y　　(2) $(x^2+1)(y^2+1)$

4 $x=\dfrac{3}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$，$y=\dfrac{3}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ のとき，次の式の値を求めなさい。

(1) x^3-y^3　　(2) $\dfrac{x-y}{y^2}-\dfrac{x-y}{x^2}$

5 $x=\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{6}}$，$y=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{\sqrt{2}-\sqrt{6}}$ のとき，次の式の値を求めなさい。

(1) $\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y^2}+\dfrac{1}{y}$　　(2) $\dfrac{y}{x-1}-\dfrac{x}{y-1}$

次の例題では，絶対値の意味について考えます。いろいろな場面で利用されますので，確実に身につけましょう。

例題 17 　　　　**根号の性質**

$x=a-\dfrac{1}{a}$ のとき，$\sqrt{x^2+4}-x$ を a で表しなさい。ただし，$a\neq 0$ とします。

考え方　$x=a-\dfrac{1}{a}$ を $\sqrt{x^2+4}$ に代入して計算すると $\sqrt{\left(a+\dfrac{1}{a}\right)^2}$ になります。

$a+\dfrac{1}{a}>0$ と $a+\dfrac{1}{a}<0$ に場合分けして計算します。

解答　$\sqrt{x^2+4}=\sqrt{\left(a-\dfrac{1}{a}\right)^2+4}=\sqrt{a^2+2+\dfrac{1}{a^2}}=\sqrt{\left(a+\dfrac{1}{a}\right)^2}=\left|a+\dfrac{1}{a}\right|$

←$\sqrt{A^2}=|A|$

（i）**$a>0$ のとき**　　←$a+\dfrac{1}{a}>0$ のとき

$\left|a+\dfrac{1}{a}\right|=a+\dfrac{1}{a}$　　←$A>0$ のとき　$|A|=A$

よって　　与式$=a+\dfrac{1}{a}-\left(a-\dfrac{1}{a}\right)=\boldsymbol{\dfrac{2}{a}}$

（ii）**$a<0$ のとき**　　←$a+\dfrac{1}{a}<0$ のとき

$\left|a+\dfrac{1}{a}\right|=-\left(a+\dfrac{1}{a}\right)$　　←$A<0$ のとき　$|A|=-A$

よって　　与式$=-\left(a+\dfrac{1}{a}\right)-\left(a-\dfrac{1}{a}\right)=\boldsymbol{-2a}$

POINT
- ◆ $a>0$，$b>0$ のとき
  $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$，$\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}=\sqrt{\dfrac{b}{a}}$
- ◆ $\sqrt{A^2}=|A|$
- ◆ $A\geqq 0$ のとき　　$|A|=A$
  $A<0$ のとき　　$|A|=-A$

根号内は正または 0 ということ，絶対値は場合分けしてはずすことが理解できましたね。では，トレーニングです。

トレーニング

6 $x=a-\dfrac{1}{a}$ のとき，$\sqrt{x^2+4}-x$ を a で表しなさい。ただし，$a\neq 0$ とします。

7 $x+y=3$，$xy=2$，$x<y$ のとき，$\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$ の値を求めなさい。

8 $x=a^2+1$ のとき，$x-\sqrt{x^2+2x+1}$ を a で表しなさい。

9 $x=\dfrac{4a}{a^2+1}$ のとき，$\sqrt{2-x}-\sqrt{2+x}$ を a で表しなさい。ただし，$a>0$ とします。

10 次の数を大きい方から順に並べなさい。

$\sqrt{2}$，$\sqrt[3]{3}$，$\dfrac{\sqrt{5}}{2}$，$\sqrt[5]{6}$

つぎは，二重根号のはずし方についての基本的な例題です。

例題 18 　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　**二重根号(1)**

次の式を簡単にしなさい。

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{7-4\sqrt{3}}}$ 　　　　(2) $\dfrac{\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}}}{\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}}}$

考え方　二重根号をはずしてから，分母を有理化して整理します。

(1)の $\sqrt{7-4\sqrt{3}}$ では，$4\sqrt{3}$ を $2\sqrt{2^2\cdot 3}$ と変形し，(2)の $\sqrt{3\pm\sqrt{5}}$ では，$\sqrt{\dfrac{6\pm 2\sqrt{5}}{2}}$ と変形して，中の $\sqrt{\ }$ の前の数を 2 にしてから，あてはまる数をさがします。

解　答　(1)　与式 $=\dfrac{1}{\sqrt{7-2\sqrt{12}}}$ 　　**←中の $\sqrt{\ }$ の前の数を 2 にする。**

$=\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$ 　　**←和が 7，積が 12 になる 2 正数は 4 と 3**

$=\dfrac{2+\sqrt{3}}{4-3}=\mathbf{2+\sqrt{3}}$

(2)　与式 $=\dfrac{\sqrt{6+2\sqrt{5}}-\sqrt{6-2\sqrt{5}}}{\sqrt{6+2\sqrt{5}}+\sqrt{6-2\sqrt{5}}}$ 　　**←分母・分子に $\sqrt{2}$ をかける。**

$=\dfrac{\sqrt{5}+1-\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+1+\sqrt{5}-1}$ 　　**←和が 6，積が 5 になる 2 正数は 5 と 1**

$=\dfrac{2}{2\sqrt{5}}=\mathbf{\dfrac{\sqrt{5}}{5}}$

POINT

◆　根号の中に二重に根号をもつ $\sqrt{p+\sqrt{q}}$ の形の式を，二重の根号をもたない $\sqrt{s}+\sqrt{t}$ の形に変形することを**二重根号をはずす**といいます。

◆　二重根号のはずし方

$\sqrt{(a+b)+2\sqrt{ab}}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$ 　　ただし　$a>0$，$b>0$

$\sqrt{(a+b)-2\sqrt{ab}}=\sqrt{a}-\sqrt{b}$ 　　ただし　$a>b>0$

---

2 をだすことがポイントですよ。では，トレーニングで練習しましょう。

トレーニング

11 次の式を簡単にしなさい。

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{7-4\sqrt{3}}}$

(2) $\dfrac{\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}}}{\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}}}$

12 次の式を簡単にしなさい。

(1) $\sqrt{11-2\sqrt{30}}$

(2) $\sqrt{9+2\sqrt{14}}$

(3) $\sqrt{12+2\sqrt{27}}$

(4) $\sqrt{16-2\sqrt{15}}$

13 次の式を簡単にしなさい。

(1) $\sqrt{11-4\sqrt{6}}$

(2) $\sqrt{9+\sqrt{32}}$

(3) $\sqrt{5-\sqrt{21}}$

(4) $\sqrt{7+3\sqrt{5}}$

14 次の式を簡単にしなさい。

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{11-4\sqrt{6}}}-\dfrac{1}{\sqrt{6-3\sqrt{3}}}$

(2) $\dfrac{1}{1+\sqrt{5+2\sqrt{6}}}+\dfrac{1}{1+\sqrt{5-2\sqrt{6}}}$

15 次の式を簡単にしなさい。

(1) $\sqrt{\sqrt{8}-\sqrt{3}+\sqrt{12+6\sqrt{3}}}$

(2) $\sqrt{8+\sqrt{5}+\sqrt{9-2\sqrt{20}}}$

二重根号のはずし方は，もうだいじょうぶですね。次の例題では，これを利用して，もうすこし複雑な計算をします。

例題 19 　　　　**二重根号(2)**

$x=12(5+2\sqrt{6})$ のとき，$\dfrac{\sqrt{\sqrt{x}+1}-\sqrt{\sqrt{x}-1}}{\sqrt{\sqrt{x}+1}+\sqrt{\sqrt{x}-1}}$ の値を求めなさい。

考え方　まず，$\sqrt{x}=\sqrt{12(5+2\sqrt{6})}$ の二重根号をはずします。つぎに，その結果を利用して，$\sqrt{\sqrt{x}+1}$，$\sqrt{\sqrt{x}-1}$ の二重根号をはずしてから，与式に代入して計算します。

解　答

$$\sqrt{x}=\sqrt{12(5+2\sqrt{6})}=\sqrt{12}\cdot\sqrt{5+2\sqrt{6}}$$

$$=2\sqrt{3}(\sqrt{3}+\sqrt{2})=6+2\sqrt{6}$$　**←$\sqrt{x}$ の二重根号をはずす。**

よって

$$\sqrt{\sqrt{x}+1}=\sqrt{6+2\sqrt{6}+1}=\sqrt{7+2\sqrt{6}}=\sqrt{6}+1$$　**←$\sqrt{\sqrt{x}+1}$ の二重根号をはずす。**

$$\sqrt{\sqrt{x}-1}=\sqrt{6+2\sqrt{6}-1}=\sqrt{5+2\sqrt{6}}=\sqrt{3}+\sqrt{2}$$　**←$\sqrt{\sqrt{x}-1}$ の二重根号をはずす。**

したがって

$$与式=\frac{(\sqrt{6}+1)-(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{6}+1)+(\sqrt{3}+\sqrt{2})}=\frac{\{(\sqrt{6}+1)-(\sqrt{3}+\sqrt{2})\}^2}{(\sqrt{6}+1)^2-(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}$$

$$=\frac{7+2\sqrt{6}+5+2\sqrt{6}-2(\sqrt{6}+1)(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{7+2\sqrt{6}-5-2\sqrt{6}}$$

$$=6+2\sqrt{6}-3\sqrt{2}-2\sqrt{3}-\sqrt{3}-\sqrt{2}$$

$$=\mathbf{6+2\sqrt{6}-3\sqrt{3}-4\sqrt{2}}$$

POINT　◆ 複雑な式の値を求めるときは，
何度も出てくる同じ式，ひとつのまとまりになっている式
で**部分に分け**，それぞれの部分を順序よく計算します。

では，トレーニングしましょう。

トレーニング

16　$x=12(5+2\sqrt{6})$ のとき，$\dfrac{\sqrt{\sqrt{x}+1}-\sqrt{\sqrt{x}-1}}{\sqrt{\sqrt{x}+1}+\sqrt{\sqrt{x}-1}}$ の値を求めなさい。

17 $x=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$ のとき，$\dfrac{1}{1+\sqrt{2+x}}+\dfrac{1}{1-\sqrt{2-x}}$ の値を求めなさい。

18 $x=19+4\sqrt{15}$ のとき，$\dfrac{\sqrt{6+\sqrt{x}}}{\sqrt{2+\sqrt{x}}}$ の値を求めなさい。

19 $x=4(5^2+2^2\sqrt{6})$ のとき，$\dfrac{\sqrt{12+\sqrt{x}}+\sqrt{12-\sqrt{x}}}{\sqrt{12-\sqrt{x}}-\sqrt{12+\sqrt{x}}}$ の値を求めなさい。

20 $x=\sqrt{\dfrac{4-\sqrt{7}}{4}}$ のとき，$\dfrac{\sqrt{2-x^2}}{x}+\dfrac{x}{\sqrt{2-x^2}}$ の値を求めなさい。

無理数の計算にも，すっかり慣れましたね。きょう最後の例題は，無理数の整数部分を考える問題です。

例題 20 　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　**無理数の整数部分**

$\sqrt{17+\sqrt{288}}$ を正の整数と 1 より小さい正の数 x との和とするとき，次の式の値を求めなさい。

$$P=\sqrt{\frac{x+2+\sqrt{4x+x^2}}{x+2-\sqrt{4x+x^2}}}$$

考え方 　まず x の正確な値を求めます。$\sqrt{17+\sqrt{288}}$ の二重根号をはずして，どの整数とどの整数の間の数か調べます。x は $\sqrt{17+\sqrt{288}}$ から整数部分をひいて得ることができます。

解　答 　$\sqrt{17+\sqrt{288}}=\sqrt{17+2\sqrt{72}}=3+\sqrt{8}=3+2\sqrt{2}$

$5<3+2\sqrt{2}<6$ より　　$x=3+2\sqrt{2}-5=2\sqrt{2}-2$　　**←x の値を求める。**

よって　$\sqrt{4x+x^2}=\sqrt{4(2\sqrt{2}-2)+(2\sqrt{2}-2)^2}=2$

$x+2=2\sqrt{2}$

したがって

$$P=\sqrt{\frac{2\sqrt{2}+2}{2\sqrt{2}-2}}=\sqrt{(\sqrt{2}+1)^2}=\boldsymbol{\sqrt{2}+1}$$

POINT 　◆ 無理数 $\sqrt{P}$ の整数部分を a，小数部分を b とすると

$\boldsymbol{\sqrt{P}=a+b}$，$a^2<P<(a+1)^2$

では，トレーニングです。整数部分と小数部分をしっかり見きわめることが重要です。

トレーニング

21 $\sqrt{17+\sqrt{288}}$ を正の整数と 1 より小さい正の数 x との和とするとき，次の式の値を求めなさい。

$$P=\sqrt{\frac{x+2+\sqrt{4x+x^2}}{x+2-\sqrt{4x+x^2}}}$$

22 $\dfrac{81}{2(\sqrt{10}-1)^2}$ を正の整数と 1 より小さい正の数 x との和とするとき，次の式の値を求めなさい。

$$P=\frac{1+\sqrt{1-x}}{1-\sqrt{1-x}}$$

23 $\sqrt{72-32\sqrt{2}}$ を正の整数と1より小さい正の数 x との和とするとき，次の式の値を求めなさい。

$$\sqrt{\frac{\sqrt{x}}{29x-5x^2}}$$

24 $\sqrt{30-\sqrt{500}}$ を正の整数 a と1より小さい正の数 b との和とするとき，次の式の値を求めなさい。

$$\sqrt{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+2}$$

25 $2\sqrt{2(11-4\sqrt{6})}$ を正の整数 a と1より小さい正の数 b との和とするとき，次の式の値を求めなさい。

$$\frac{5(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{\sqrt{b^2-3ab+a^2-6}}$$

きょうの学習はこれで終わりです。無理数の計算について十分練習できましたね。第5日は，数と集合について学習します。

第 5 日	数と式　学習日　月　日
	数と集合

第5日 数と集合

きょうは，入試問題にもよく見られる整数問題，集合の包含関係などについて学習していきます。密度の濃い内容ですがしっかり取り組み，数の性質について理解を深めましょう。

まず最初は，約数を扱った整数問題から始めましょう。

例題 21　　**数の性質**

次の問いに答えなさい。

(1) 2けたの整数のうち，約数がちょうど10個あるものをすべて求めなさい。

(2) また，そのような整数のそれぞれについて，10個の約数の和を求めなさい。

（中央大一商）

考え方　$2^4 \cdot 3^5$ の約数の個数は $(4+1)(5+1)$ です。このように求める整数を素因数に分解した形を仮定して，その約数の個数が10になるように，素数の累乗の指数を決めていきます。また，2けたかどうかは，$2^7>100$，$3^5>100$を目安に調べます。

解　答　(1) 2けたの整数を N として，N を素因数に分解すると

$$N=\mathrm{P}_1{}^{d_1}\mathrm{P}_2{}^{d_2}\mathrm{P}_3{}^{d_3}\cdots\cdots\mathrm{P}_n{}^{d_n}$$

となるとする。

ただし，P_1，P_2，P_3，……，P_n は互いに異なる素数，　←素因数

$d_1 \geqq d_2 \geqq d_3 \geqq \cdots\cdots \geqq d_n \geqq 0$ とする。　←素因数の累乗の指数

このとき，N の約数の個数は　$(d_1+1)(d_2+1)(d_3+1)\cdots\cdots(d_n+1)$

これが10になるのは，$10=5\times2$ であることから

(i) $d_1+1=10$，$d_2+1=d_3+1=\cdots\cdots=d_n+1=1$ のとき

$N=\mathrm{P}_1{}^9$　←$10=10\times1$ の場合

$2^9>100$ であるから，N が2けたの素数になる P_1 はない。

(ii) $d_1+1=5$，$d_2+1=2$，$d_3+1=\cdots\cdots=d_n+1=1$ のとき

$N=\mathrm{P}_1{}^4\mathrm{P}_2$　←$10=5\times2$ の場合

$\mathrm{P}_1=2$ のとき　$N=16\mathrm{P}_2$　　よって　$\mathrm{P}_2=3$，5

$\mathrm{P}_1\geqq3$ のとき　$N\geqq81\mathrm{P}_2$ で，これを満たす素数 P_2 はない。

したがって，求める2けたの整数は

$2^4\cdot3=$**48**，$2^4\cdot5=$**80**

(2) **48の約数の和は**

$(2^0+2^1+2^2+2^3+2^4)(3^0+3^1)=31\cdot4=$**124**　←$2^4\cdot3^1$ の約数の和

80の約数の和は

$(2^0+2^1+2^2+2^3+2^4)(5^0+5^1)=31\cdot6=$**186**　←$2^4\cdot5^1$ の約数の和

注 意　ここでは正の約数だけを考えています。

POINT　◆ 自然数 N を**素因数に分解**したものを

$$N=\mathrm{P}_1{}^{d_1}\mathrm{P}_2{}^{d_2}\mathrm{P}_3{}^{d_3}\cdots\cdots\cdots\mathrm{P}_n{}^{dn}$$

とするとき，N の

約数の個数は　$(d_1+1)(d_2+1)(d_3+1)\cdots\cdots\cdots(d_n+1)$

約数の和は　$(\mathrm{P}_1{}^0+\mathrm{P}_1{}^1+\mathrm{P}_1{}^2+\cdots\cdots+\mathrm{P}_1{}^{d_1})(\mathrm{P}_2{}^0+\mathrm{P}_2{}^1+\mathrm{P}_2{}^2+\cdots\cdots+\mathrm{P}_2{}^{d_2})$

$\cdots\cdots(\mathrm{P}_n{}^0+\mathrm{P}_n{}^1+\mathrm{P}_n{}^2+\cdots\cdots+\mathrm{P}_n{}^{dn})$

では，トレーニングです。**1** で例題を確認しながら，もう一度解いてみましょう。

トレーニング

1 次の問いに答えなさい。

(1) 2けたの整数のうち，約数がちょうど10個あるものをすべて求めなさい。

(2) また，そのような整数のそれぞれについて，10個の約数の和を求めなさい。

（中央大一商）

2 $x^2-y^2=60$ を満たす整数 x，y の組をすべて求めなさい。ただし，$x>y$ で $x>0$，$y>0$ とします。

3 $xy+2x+y-4=0$ を満たす正の整数 x，y の組をすべて求めなさい。

4 次の問いに答えなさい。

(1) 2けたの整数のうち，約数がちょうど9個あるものをすべて求めなさい。

(2) また，そのような整数のそれぞれについて，9個の約数の和を求めなさい。

5 6けたの自然数 M があります。M の下の2けたの数と上の4けたの数を置き換えてできる6けたの自然数を N としたとき，$N=3M$ が成り立つような自然数 M をすべて求めなさい。

こんどは，倍数について考えてみましょう。

例題 22 　　**数の集合の性質**

a が整数ならば，a^2+1 は 3 の倍数にならないことを証明しなさい。　（東北学院大-法）

考え方　a は 3 の倍数か，3 で割ると 1 余るか，3 で割ると 2 余るかのいずれかですから，それぞれの場合について，a^2+1 が 3×(整数) の形にならないことを示します。

解　答　(i)　$a=3m$（m は整数）のとき

$$a^2+1=(3m)^2+1$$
$$=3(3m^2)+1$$

←3 でくくれるものはすべてくくる。

(ii)　$a=3m+1$（m は整数）のとき

$$a^2+1=(3m+1)^2+1=9m^2+6m+2=3(3m^2+2m)+2$$

(iii)　$a=3m+2$（m は整数）のとき

$$a^2+1=(3m+2)^2+1=9m^2+12m+5=3(3m^2+4m+1)+2$$

m は整数であるから，次のものはいずれも整数になる。

$3m^2$，$3m^2+2m$，$3m^2+4m+1$　**←整数の和・差・積は整数になる。**

したがって，(i)，(ii)，(iii)のいずれの場合にも a^2+1 は 3 の倍数にならない。

POINT

- 3 の倍数は，**3×(整数)** の形で表されます。
- 整数は，3 で割った式はその余り 0，1，2 で分類されます。
- **整数の和・差・積は，整数**になります。

倍数の一般的な表し方を理解しましょう。では，トレーニングです。

トレーニング

6　a が整数ならば，a^2+1 は 3 の倍数にならないことを証明しなさい。　（東北学院大-法）

7 a，b，$a-b$ がどれも 3 で割り切れないとき，a^3+b^3 は 9 で割り切れることを証明しなさい。ただし，a，b は整数とします。 (お茶の水女大)

8 n，k を正の整数とするとき，n^{k+4} と n^k の一の位の数字は同じであることを証明しなさい。 (関西学院大)

9 n が奇数であれば，$x^2-y^2=n$ を満たす整数 x，y の組が存在することを証明しなさい。

10 素数 P が 2 つの自然数 a，b の 3 乗の差 a^3-b^3 であるとき，$P-1$ は 6 の倍数であることを証明しなさい。

次の例題では，数の具体的な集合から，その包含関係を考えてみます。

例題 23 　　**数の集合の包含関係**

2 つの集合 $M=\{(x,\ y)\mid 13x-227y=1,\ x$ と y は整数$\}$

$N=\{(x,\ y)\mid x=227k+35,\ y=13k+2,\ k$ は整数$\}$

について，次のことを証明しなさい。

(1) $N\subseteqq M$ 　　　　(2) $M\subseteqq N$

考え方 (1) $(x,\ y)\in N$ のとき，この x，y が，M の条件 $13x-227y=1$ を満たすことを示します。

(2) $(x,\ y)\in M$ とすると，$13x-227y=1$ です。これを変形して $x-35$ と $y-2$ を使った式で表すと，$13(x-35)=227(y-2)$ となります。13 と 227 は互いに素であることから，N の条件を満たすことを示します。

解　答 (1) $(x,\ y)\in N$ とすると

$x=227k+35,\ y=13k+2$ （k は整数） 　**←N の条件**

と表せるから，x，y は整数である。

また

$13x-227y=13(227k+35)-227(13k+2)=1$ 　**←M の条件**

であるから　$(x,\ y)\in M$

したがって　$N\subseteqq M$ 　**←$(x,\ y)\in N$ のとき $(x,\ y)\in M$ から**

(2) $(x,\ y)\in M$ とすると　$13x-227y=1$

よって　$13x=227y+1$

よって　$13(x-35)=13x-455=227y+1-455=227(y-2)$

すなわち　$13(x-35)=227(y-2)$ 　**←$x-35$ と $y-2$ を使って表す。**

ここで，13 と 227 は互いに素であるから

$x-35=227k$（k は整数）とおくと　$y-2=13k$

よって　$(x,\ y)\in N$

したがって　$M\subseteqq N$

POINT

- **$N\subseteqq M$ を示すには，$x\in N$ ならば $x\in M$ を示します。**
- **$M=N$ を示すには，$M\subseteqq N$ かつ $N\subseteqq M$ を示します。**
- A，B が互いに素で，$Ax=By$ のとき，x は B の倍数，y は A の倍数

互いに素

$Ax = By$

↑　↑

B の倍数　A の倍数

では，トレーニング **11** で例題の確認から始めましょう。

トレーニング

11 2つの集合 $M=\{(x,\ y)\mid 13x-227y=1,\ x$ と y は整数$\}$

$N=\{(x,\ y)\mid x=227k+35,\ y=13k+2,\ k$ は整数$\}$

について，次のことを証明しなさい。

(1) $N\subseqq M$　　(2) $M\subseqq N$

12 Z は整数全体の集合とします。

$A=\{5x+7y\mid x\in Z,\ y\in Z\}$

$B=\{2n\mid n\in Z\}$

とするとき，$B\subseqq A$ であることを証明しなさい。

13 $2x+3y$ が 17 で割り切れるような整数の組 $(x,\ y)$ 全体の集合を M，$9x+5y$ が 17 で割り切れるような整数の組 $(x,\ y)$ 全体の集合 N について，次のことを証明しなさい。

(1) $N\subseqq M$　　(2) $M\subseqq N$

14 2つの集合 $M=\{(x,\ y)\mid 103x-29y=6,\ x$ と y は整数$\}$

$N=\{(x,\ y)\mid x=29k+4,\ y=103k+14$ (k は整数)$\}$

について，次のことを証明しなさい。

(1) $N\subseqq M$　　(2) $M\subseqq N$

15 Z は整数全体の集合とします。

$A=\{3x-5y\mid x\in Z,\ y\in Z\}$

とすると，$A=Z$ であることを証明しなさい。

つぎは，集合の定義，性質を使った証明問題です。いろいろな記号の使い方にも慣れましょう。

例題 24 — **集合の性質**

2 つの集合 A，B について

$A \subseteqq B$ のとき，$A \cup B = B$

であることを証明しなさい。

考え方　集合の間の関係を，要素の関係に直して考えます。
$A \subseteqq B$ より，$x \in A$ ならば$x \in B$ ですから，$x \in A \cup B$ である x はすべて B の要素です。逆に，$x \in B$ ならば，定義から$x \in A \cup B$ です。

解　答　(i)　$x \in A \cup B$ とすると　$x \in A$ または $x \in B$　　**←$A \cup B \subseteqq B$ を示す。**

ところで，$A \subseteqq B$ であるから　$x \in A$ のとき $x \in B$

よって，$x \in A$ または $x \in B$ である x はすべて B の要素である。

よって，$x \in A \cup B$ ならば $x \in B$

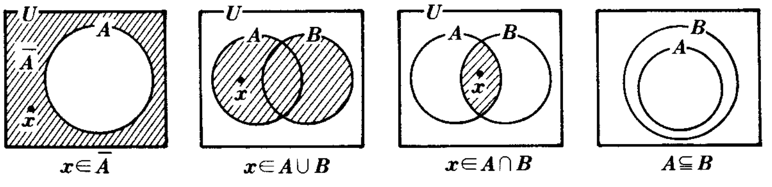
したがって　$A \cup B \subseteqq B$

(ii)　$y \in B$ とすると　$y \in A \cup B$　　**←$A \cup B \supseteqq B$ を示す。**

したがって　$A \cup B \supseteqq B$

(i)，(ii)より　$A \cup B = B$　　**←$A \cup B \subseteqq B$ かつ $A \cup B \supseteqq B$**

POINT
- ◆ $x \notin A$ のとき　$x \in \overline{A}$
- ◆ $x \in A \cup B$ とは，$x \in A$ または $x \in B$(少なくとも一方に属する)
  $x \in A \cap B$ とは，$x \in A$ かつ $x \in B$(両方に属する)
- ◆ $A \subseteqq B$ のとき　$x \in A$ ならば $x \in B$



定義，性質をきちんとおさえておくことがたいせつです。では，トレーニングです。

トレーニング

16　2 つの集合 A，B について

$A \subseteqq B$ のとき，$A \cup B = B$

であることを証明しなさい。

17 2つの集合 A，B について

$$A \subseteqq B \text{ のとき，} A \cap \overline{B} = \phi$$

であることを証明しなさい。

18 2つの集合 A，B について

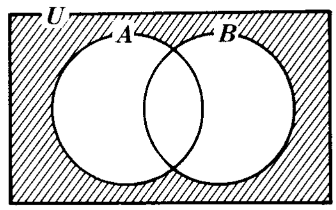
$$A \subseteqq B \text{ のとき，} A \cap B = A$$

であることを証明しなさい。

19 2つの集合 A，B について

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

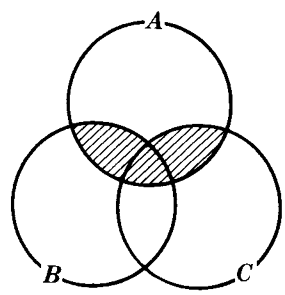
であることを証明しなさい。



20 3つの集合 A，B，C について

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

であることを証明しなさい。



きょう最後の例題は，よく見られる集合の要素の個数を扱った問題です。図をかいて問題を把握するとわかりやすいですよ。

例題 25 　　**集合の要素の個数**

ある高校のある年度の卒業生 453 名について，卒業後 3 年間に毎年 1 回行われた同窓会への出席状況を調べました。卒業後 1 年目の出席者 305 名のうち，80 名が 2 年目には出席しませんでした。2 年目，3 年目の出席者はそれぞれ 259 名，236 名でした。

また，出席回数について調べてみると，1 回の人が 180 名，2 回の人が 133 名でした。

このとき，次の問いに答えなさい。

(1) 3 回とも出席した人および 1 回も出席しなかった人はそれぞれ何名ですか。

(2) 1 年目に出席しなかった人のうち，その後少なくとも 1 回出席した人は何名ですか。

(3) 3 年目にだけ出席した人は何名ですか。

考え方 　図をかいて，各年度の出席者数の関係がわかるようにします。

そして，求めたいものと，わかっているものを図の記号を使って整理し，それらを組み合わせて計算します。

解　答 　右の下の図のように，同窓会に出席した人数を n_1，n_2，n_3，m_1，m_2，m_3，l とおく。

(1) $(n_1+n_2+n_3)+2(m_1+m_2+m_3)+3l$

←1 回の人数 +2×2 回の人数 +3×3 回の人数

$=305+259+236$ 　**←各年の出席者数の和**

$=800$

ここで，$n_1+n_2+n_3=180$，$m_1+m_2+m_3=133$ より

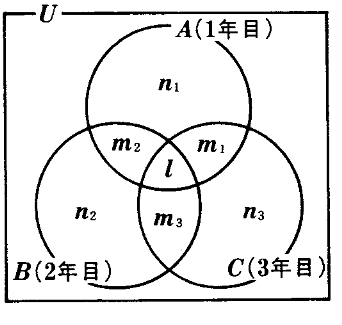
$180+2\cdot 133+3l=800$

よって　$l=\mathbf{118}$**(人)**

1 回も出席しなかった人は　**←総人数－出席者数**

$453-(n_1+n_2+n_3+m_1+m_2+m_3+l)$

$=\mathbf{22}$**(人)**



(2) 求める人数は $n_2+n_3+m_3$ で，これは次の式で求められる。 **←出席者数－1 年目の出席者数**

$(n_1+n_2+n_3+m_1+m_2+m_3+l)$

$-(n_1+m_1+m_2+l)$

$=180+133+118-305=\mathbf{126}$**(人)**

(3) 1 年目，2 年目の両方に出席した人数は

$m_2+l=305-80=225$

よって　$m_2=225-118=107$

よって　$n_3=(n_3+m_1+m_3+l)-(l+m_1+m_3)$

$=(n_3+m_1+m_3+l)-(m_1+m_2+m_3)+m_2-l$

$=236-133+107-118$

$=\mathbf{92}$**(人)**

注 意　(1) 順に118人，22人　　(2) 126人　　(3) 92人

POINT　◆ 集合 A の要素の個数を $n(A)$ で表すと

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$
$$n(\overline{A})=n(U)-n(A)$$
$$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(B\cap C)-n(C\cap A)-n(A\cap B)+n(A\cap B\cap C)$$

では，トレーニングです。

トレーニング

21 ある高校のある年度の卒業生453名について，卒業後3年間に毎年 1 回行われた同窓会への出席状況を調べました。卒業後 1 年目の出席者305名のうち，80名が2年目には出席しませんでした。2年目，3年目の出席者はそれぞれ259名，236名でした。

また，出席回数について調べてみると，1回の人が180名，2回の人が133名でした。

このとき，次の問いに答えなさい。

(1) 3回とも出席した人および1回も出席しなかった人はそれぞれ何名ですか。

(2) 1年目に出席しなかった人のうち，その後少なくとも1回出席した人は何名ですか。

(3) 3年目にだけ出席した人は何名ですか。

22 ある飛行機上に，11人の男のこども，5人の日本人のこども，9人の男のおとな，8人の外国人の男のこども，15人の日本人，6人の日本人の男，7人の外国人の女がいます。飛行機に乗っている人は何人ですか。

23 1から999までの自然数の中で，次のような数はいくつありますか。

(1) 2でも3でも5でも割り切れる数

(2) 2でも3でも割り切れない数

(3) 2で割り切れるが，3でも5でも割り切れない数

24 ある都市の世帯で，A，B，C 3種の新聞が購読されている割合は，A を購読している世帯69％，B を購読している世帯46％，C だけを購読している世帯3％，B，C の両方を購読している世帯21％，A，C の少なくとも一方を購読している世帯88％，B，C の少なくとも一方を購読している世帯50％，A，B，C のどれか1種類だけを購読している世帯61％でした。このとき，次のような世帯の割合を求めなさい。

(1) A，B，C すべてを購読している世帯

(2) A だけを購読している世帯

(3) A，B，C のどれも購読していない世帯

25 T 君のクラスの生徒42人の通学方法を調べたところ，JRを利用する人は23人，私鉄を利用する人は20人，バスを利用する人は18人，3つの交通機関を利用する人は3人，徒歩だけで通学する人は4人でした。このとき，次の問いに答えなさい。

(1) 少なくとも1つの交通機関を利用する人は何人ですか。

(2) 1つの交通機関だけを利用している人は何人ですか。

お疲れさまでした。きょうの学習はこれで終わりです。第6日は，第1日～第5日で学習してきた数と式についての演習問題を扱います。

第 6 日	数 と 式　　　　学習日　　月　　日
	演習問題

きょうは，第１日～第５日で学習してきた数と式についての演習問題をします。全部で10題です。実力だめしのつもりで取り組みましょう。

1 $x+y+z=a$，$yz+zx+xy=b$，$xyz=c$ のとき，次の式を a，b，c で表しなさい。

(1) $x^2+y^2+z^2$　　(2) $x^3+y^3+z^3$

(3) $(y+z)(z+x)(x+y)$

2 次の式を因数分解しなさい。

(1) $x^3+y^3-3xy+1$　　(2) a^4-27a^2+1

(3) x^4+4y^4

3 次の式を因数分解しなさい。

(1) $ab(a-b)+bc(b-c)+ca(c-a)$

(2) $ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)+2abc$

4 次の式を簡単にしなさい。

(1) $\dfrac{2x^2-2x+1}{x-1}-\dfrac{2x^2+4x-1}{x+2}$

(2) $\dfrac{a^3}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^3}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c^3}{(c-a)(c-b)}$

5 x^3+8x^2+5x-m が x^2+3x-n で割り切れるように定数 m, n の値を定めなさい。

6 最大公約数が $x+3$, 最小公倍数が x^3+4x^2+x-6 である 2 つの整式を求めなさい。

7 $x=\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$，$y=\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$ のとき，$x^3+x^2y+xy^2+y^3$ の値を求めなさい。

8 $a>0$ で，$x=\dfrac{a^2+1}{a}$ のとき，$\dfrac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}}$ を計算しなさい。 (早稲田大)

9 x，y は整数で，$2x+y$ が 3 の倍数であるとき，$8x^2-10xy-7y^2$ は 9 の倍数であることを証明しなさい。

10 2 つの整数 a，b について，$a-b$ が 3 で割り切れるとき，$a \approx b$ と書くことにします。このとき，次のことを説明しなさい。

(1) $a \approx b$，$b \approx c$ ならば $a \approx c$

(2) $a \approx a'$，$b \approx b'$ ならば $ab \approx a'b'$

これで，演習問題は終わりです。解けなかった問題は，解答や例題を見て，解けるようにしておきましょう。

memo

方程式・不等式

数学Ｉの２章目として，方程式・不等式をとりあげます。
方程式・不等式の中では，なんといっても２次方程式が基本です。２次方程式の解の判別，解と係数の関係など，完全に理解しておかなくてはなりません。
方程式・不等式の内容は，問題の解法の中でしばしば出てきますから，ここで，完全にしておきましょう。不等式の解法や，不等式の証明も，典型的な解法をおさえておくことです。

第 7 日	方程式・不等式　　学習日　月　日
	2次方程式

　きょうから，方程式・不等式について学習していきます。その第1日として，2次方程式を扱います。解と係数の関係および判別式は，関数，2次曲線など，いろいろなところで利用しますから，十分な理解が必要です。

　では，解の公式の学習から始めましょう。

例題 26　　　　　　　　　　　　　　　　　　**解の公式**

次の2次方程式を解きなさい。

$$(\sqrt{2}-1)x^2+(\sqrt{2}+1)x+2=0$$

考え方　どんな2次方程式でも解の公式にあてはめれば解けます。そのとき，もとの2次方程式で，x^2 の係数が簡単な形のほうが，あとの計算が楽になりますから，この場合は，まず両辺に $\sqrt{2}+1$ をかけて整理します。

解　答　両辺に $\sqrt{2}+1$ をかけると

$$(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)x^2+(\sqrt{2}+1)^2x+2(\sqrt{2}+1)=0$$

←x^2 の係数を有理化

$$x^2+(3+2\sqrt{2})x+2(\sqrt{2}+1)=0$$

解の公式より

$$x=\frac{-(3+2\sqrt{2})\pm\sqrt{(3+2\sqrt{2})^2-4\cdot2(\sqrt{2}+1)}}{2}$$

$$=\frac{-3-2\sqrt{2}\pm\sqrt{9+2\sqrt{8}}}{2}$$

$$=\frac{-3-2\sqrt{2}\pm(2\sqrt{2}+1)}{2}$$

←二重根号をはずす

したがって　　$\boldsymbol{x=-1,\ -2-2\sqrt{2}}$

←±をそれぞれ計算

注　意　$x^2+(3+2\sqrt{2})x+2(\sqrt{2}+1)=(x+1)(x+2+2\sqrt{2})$ と因数分解して解いてもかまいません。

POINT

◆　2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の**解の公式**は

$$\boxed{x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$$

◆　2次方程式の解の公式にあてはめるときは，さきに係数を整理すると計算が楽です。

では，トレーニングで何回も練習しましょう。**1** は例題と同じ問題です。

トレーニング

1 次の2次方程式を解きなさい。

$$(\sqrt{2}-1)x^2+(\sqrt{2}+1)x+2=0$$

2 次の2次方程式を解きなさい。

$$(-\sqrt{5}-1)x^2+2\sqrt{5}x-\sqrt{5}+1=0$$

3 次の問いに答えなさい。

(1) $4\sqrt{2}x^2+6\sqrt{2}x+2$ を係数が無理数の範囲で因数分解しなさい。

(2) x^2+x+4 を係数が複素数の範囲で因数分解しなさい。

4 x についての2次方程式 $k^2x^2+2k^2x-(2k+1)=0$ を解きなさい。ただし，k は実数の定数とします。

5 x についての2次方程式

$$(-a+b+c)x^2+(a-b+c)x+a+b-c=0$$

が，$-a+b+c \fallingdotseq 0$，$a+b+c=0$ をみたすとき，次の問いに答えなさい。

(1) 解の公式により，この方程式を解き，解を a と b で表しなさい。

(2) $a=-\sqrt{3}-1$，$b=1$，$c=\sqrt{3}$ のとき，この方程式を解きなさい。

つぎは，解と係数の関係を利用する例題です。解と係数の関係の意味をしっかりつかみましょう。

例題 27 ―――― **2次方程式の解と係数の関係**

2次方程式 $2x^2+4x-3=0$ の2つの解を α，β とするとき，次の式の値を求めなさい。

(1) $(\alpha-\beta)^2$　　(2) $\alpha^3+\beta^3$

(3) $(\alpha^2-1)(\beta^2-1)$　　(4) $\dfrac{\beta}{\alpha-1}+\dfrac{\alpha}{\beta-1}$

考え方　与えられた式は，α，β についての対称式ですから，$\alpha+\beta$，$\alpha\beta$ だけの式で表すことができます。また，2次方程式の解と係数の関係から $\alpha+\beta$，$\alpha\beta$ の値が求められますから，それを代入して計算します。

解　答　解と係数の関係より　$\alpha+\beta=-\dfrac{4}{2}=-2$，$\alpha\beta=-\dfrac{3}{2}$

(1) 与式 $=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$　　**←$\alpha+\beta$ と $\alpha\beta$ で表す。**

$=(-2)^2-4\cdot\left(-\dfrac{3}{2}\right)=\mathbf{10}$　　**←値を代入して計算**

(2) 与式 $=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$　　**←$\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3-(3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2)$**

$=(-2)^3-3\cdot\left(-\dfrac{3}{2}\right)\cdot(-2)=\mathbf{-17}$

(3) 与式 $=\alpha^2\beta^2-\alpha^2-\beta^2+1$

$=(\alpha\beta)^2-(\alpha+\beta)^2+2\alpha\beta+1$

$=\left(-\dfrac{3}{2}\right)^2-(-2)^2+2\cdot\left(-\dfrac{3}{2}\right)+1=\mathbf{-\dfrac{15}{4}}$

(4) 与式 $=\dfrac{\beta^2-\beta+\alpha^2-\alpha}{\alpha\beta-\alpha-\beta+1}$　　**←$\dfrac{\beta(\beta-1)+\alpha(\alpha-1)}{(\alpha-1)(\beta-1)}$**

$=\dfrac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta-(\alpha+\beta)}{\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1}$

$=\dfrac{(-2)^2-2\cdot\left(-\dfrac{3}{2}\right)-(-2)}{\left(-\dfrac{3}{2}\right)-(-2)+1}=\mathbf{6}$

POINT

◆ 2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解を α，β とすると

$$\boxed{\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\ \alpha\beta=\frac{c}{a}}$$

◆ 2次方程式の解 α，β の**対称式は，$\alpha+\beta$，$\alpha\beta$ で表すことができる**から，もとの2次方程式の係数で表すことができます。

では，トレーニングです。

トレーニング

6 2次方程式 $2x^2+4x-3=0$ の2つの解を α，β とするとき，次の式の値を求めなさい。

(1) $(\alpha-\beta)^2$　　(2) $\alpha^3+\beta^3$

(3) $(\alpha^2-1)(\beta^2-1)$　　(4) $\dfrac{\beta}{\alpha-1}+\dfrac{\alpha}{\beta-1}$

7 2次方程式 $3x^2+4x+6=0$ の2つの解を α，β とするとき，次の式の値を求めなさい。

(1) $\alpha^4+\beta^4$　　(2) $(\alpha-3\beta)(3\alpha-\beta)$

(3) $(\alpha^2+\alpha+1)(\beta^2+\beta+1)$　　(4) $\dfrac{\beta^2}{\alpha}+\dfrac{\alpha^2}{\beta}$

8 2次方程式 $2x^2+x-6=0$ の2つの解を α，β，$\alpha>\beta$ とするとき，次の式の値を求めなさい。

(1) $\alpha-\beta$　　(2) $\alpha^2-\beta^2$

9 x の2次方程式 $x^2+2kx+k+3=0$ の解を α，β とするとき，α，β の間の関係式を求めなさい。

10 p，q は整数で，2次方程式 $x^2+nx+p=0$ の解を α，β とし，$x^2+nx+q=0$ の解を γ，δ とするとき

$$P=(\gamma-\alpha)(\delta-\beta)(\gamma-\beta)(\delta-\alpha)$$

は，整数の平方となることを証明しなさい。

解と係数の関係は十分につかめましたか。つぎは，2次方程式でもうひとつの重要な事項，解の判別式についてです。

例題 28 　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　**判別式**

2つの2次方程式 $x^2+ax+b=0$，$x^2+cx+d=0$ がどちらも虚数解をもつとき，2次方程式 $2x^2+(a+c)x+b+d=0$ の解を判別しなさい。

考え方　判別式を使って，$x^2+ax+b=0$ と $x^2+cx+d=0$ が虚数解をもつことを，a，b と c，d の式で表します。そして，この条件のとき，$2x^2+2(a+c)x+b+d=0$ の判別式が正か0か負かを調べます。

解　答　$x^2+ax+b=0$ が虚数解をもつから

$$a^2-4b<0 \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

←判別式<0

$x^2+cx+d=0$ が虚数解をもつから

$$c^2-4d<0 \quad \cdots\cdots\cdots ②$$

$2x^2+(a+c)x+b+d=0$ の判別式を D とすると

$$\begin{aligned} D&=(a+c)^2-4\cdot 2(b+d) \\ &=a^2+2ac+c^2-8b-8d \quad \cdots\cdots\cdots ③ \end{aligned}$$

ここで，①と②より　**←左辺どうし，右辺どうしの和**

$$a^2+c^2-4b-4d<0 \quad \cdots\cdots\cdots ④$$

③，④より

$$\begin{aligned} D&=2(a^2+c^2-4b-4d)-a^2+2ac-c^2 \\ &<-a^2+2ac-c^2 \\ &=-(a-c)^2\leqq 0 \end{aligned}$$

よって　$D<0$　**←等号はつかない。**

したがって，**異なる2つの虚数解**をもつ。

POINT

◆ 2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ で，$\boldsymbol{D=b^2-4ac}$ を**判別式**といいます。
判別式は，解の公式の $\sqrt{\quad}$ の中の式です。

◆ 2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解は，判別式 D で，次のように判別できます。

$$\boxed{\begin{aligned} &D=b^2-4ac>0 \Longleftrightarrow \text{異なる2つの実数解} \\ &D=b^2-4ac=0 \Longleftrightarrow \text{1つの実数解，つまり，重解} \\ &D=b^2-4ac<0 \Longleftrightarrow \text{異なる2つの虚数解} \end{aligned}}$$

では，トレーニングで練習しましょう。

トレーニング

11 2つの2次方程式 $x^2+ax+b=0$，$x^2+cx+d=0$ がどちらも虚数解をもつとき，2次方程式 $2x^2+(a+c)x+b+d=0$ の解を判別しなさい。

12 2つの2次方程式 $x^2+ax+b=0$，$x^2+bx+a=0$ がいずれも実数解をもつとき，2次方程式 $x^2+2(a+b)x+2(a+ab+b)=0$ の解を判別しなさい。ただし，a，b は実数とします。

13 x についての方程式 $px^2+(2p+1)x+p+2=0$ の解を判別しなさい。

14 次の2次方程式をみたす実数 x，y の値を求めなさい。

$$5x^2+6xy+5y^2+2x-2y+1=0$$

15 実係数の2次方程式 $ax^2+2bx+a=0$ ………①，$cx^2+2dx+c=0$ ………②において，$ad+bc=0$，$ac+bd\neq 0$ ならば，①，②はともに実数解をもつか，ともに虚数解をもつかのどちらかであることを証明しなさい。

こんどは，解と係数の関係を利用して，2次方程式をつくる例題です。

例題 29 　　**2次方程式の作成**

2次方程式 $x^2-2x-1=0$ の2つの解を α，β とするとき，$\alpha^2+\beta$，$\alpha+\beta^2$ を2つの解とする x の2次方程式を作りなさい。ただし，その2次方程式の x^2 の係数は1とします。

考え方　$\alpha^2+\beta$ と $\alpha+\beta^2$ の和 $p=(\alpha^2+\beta)+(\alpha+\beta^2)$ と，積 $q=(\alpha^2+\beta)(\alpha+\beta^2)$ を求めると，$x^2-px+q=0$ が求める2次方程式です。p，q はともに α，β の対称式ですから，$\alpha+\beta$，$\alpha\beta$ で表されます。また，$\alpha+\beta$，$\alpha\beta$ は $x^2-2x-1=0$ の解と係数の関係から求められます。

解　答　解と係数の関係より　　$\alpha+\beta=2$，$\alpha\beta=-1$　　**←$x^2-2x-1=0$ で使用**

よって

$$(\alpha^2+\beta)+(\alpha+\beta^2)=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+(\alpha+\beta)$$　**←和 p を求める。**

$$=2^2-2\cdot(-1)+2=8$$

$$(\alpha^2+\beta)(\alpha+\beta^2)=\alpha^3+\alpha^2\beta^2+\alpha\beta+\beta^3$$　**←積 q を求める。**

$$=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)+(\alpha\beta)^2+\alpha\beta$$

$$=2^3-3\cdot(-1)\cdot2+(-1)^2+(-1)=14$$

求める2次方程式の x^2 の係数は1であるから

$$\boldsymbol{x^2-8x+14=0}$$　**←$x^2-px+q=0$**

POINT　◆ 2数 α，β を解とする2次方程式は，$a\neq0$ として

$$\boldsymbol{a\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\}=0}$$

考え方は理解できましたね。では，トレーニングです。

トレーニング

16 2次方程式 $x^2-2x-1=0$ の2つの解を α，β とするとき，$\alpha^2+\beta$，$\alpha+\beta^2$ を2つの解とする x の2次方程式を作りなさい。ただし，その2次方程式の x^2 の係数は1とします。

17 2次方程式 x^2+2x-4 の2つの解を α，β とするとき，$\dfrac{\beta}{\alpha}+\alpha$，$\dfrac{\alpha}{\beta}+\beta$ を2つの解とする x の2次方程式を作りなさい。ただし，その2次方程式の x^2 の係数は1とします。

18 $\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{4}$ を解にもち，係数が最も簡単な整数である x の2次方程式を作りなさい。

19 次の問いに答えなさい。

(1) x の2次方程式 $x^2-mx+m+7=0$ の2つの解の差が2であるとき，定数 m の値を定めなさい。

(2) x の2次方程式 $x^2-3mx+m^2+9=0$ の2つの解の比が $1:2$ であるとき，定数 m の値を定めなさい。

20 2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の2つの解の和と積を2つの解とする2次方程式を作ったら，$ax^2+cx+b=0$ となりました。このとき，もとの2次方程式の解を求めなさい。ただし，$c\neq 0$ とします。

つぎは，きょう最後の例題です。２つの２次方程式の共通解を考えます。

例題 30 **2次方程式の共通解**

異なる２つの２次方程式 $x^2+kx-2=0$，$x^2+2x-k=0$ が共通解をもつのは，k がどんな値のときですか。また，その共通解を求めなさい。

考え方 共通解を α とすると，$\alpha^2+k\alpha-2=0$ かつ $\alpha^2+2\alpha-k=0$ ……Ⓐが成り立ちます。そこで，$(\alpha^2+k\alpha-2)-(\alpha^2+2\alpha-k)=0$ ……Ⓑを作って，k，α についてⒶより簡単な方程式にし，それをみたす k，α の値を求めます。このとき，Ⓐ → Ⓑはつねに成り立ちますが，Ⓑ → Ⓐ は成り立つとは限りませんから，Ⓑ で求めた k，α がⒶをみたすかどうかを調べます。

解 答 共通解を α とすると

$$\alpha^2+k\alpha-2=0 \qquad \cdots\cdots\cdots①$$
$$\alpha^2+2\alpha-k=0 \qquad \cdots\cdots\cdots②$$

①−②より　　**← α^2 の項を消去して簡単にする。**

$$(k-2)\alpha+(k-2)=0$$
$$(k-2)(\alpha+1)=0$$

（ｉ）　$k=2$ のとき，①，②は一致し，題意に適さない。　**←①−②の解を吟味する。**

（ii）　$\alpha=-1$ のとき，①より　　$k=-1$

このとき，②も確かに成り立ち，①，②は異なる。

（ｉ），（ii）より　　**$k=-1$，共通解は -1**

POINT ◆ ２つの２次方程式 $ax^2+bx+c=0$，$lx^2+mx+n=0$ の共通解を α とすると

$$a\alpha^2+b\alpha+c=0 \text{ かつ } l\alpha^2+m\alpha+n=0 \qquad \cdots\cdots\cdots①$$

が成り立ち，α は，次の方程式の解にもなります。

$$l(ax^2+bx+c)-a(lx^2+mx+n)=0 \qquad \cdots\cdots\cdots②$$

ただし，② → ①は必ずしも成り立ちません。

では，トレーニングです。**25** の３つの２次方程式の場合も考え方は同じです。

トレーニング

21 異なる２つの２次方程式 $x^2+kx-2=0$，$x^2+2x-k=0$ が共通解をもつのは，k がどんな値のときですか。また，その共通解を求めなさい。

22 異なる2つの2次方程式 $2x^2+x+4k=0$，$x^2+kx+1=0$ が共通解をもつとき，k の値と共通解を求めなさい。

23 2次方程式 $px^2+qx+1=0$，$x^2+qx+p=0$ がただ1つの共通解をもつとき，共通でない2つの解の積を求めなさい。

24 2つの2次方程式

$$9x^2-(4b^2-5b)x+a^2-7b=0$$

$$9x^2-3b^2x+a^2+b^2-12b=0$$

がただ1つの共通解をもつような，実数 a，b の値を求めなさい。

25 係数が実数の3つの異なる2次方程式

$$ax^2+bx+c=0,\ bx^2+cx+a=0,\ cx^2+ax+b=0$$

について，次の問いに答えなさい。

(1) 共通解をもつための a，b，c の間の関係を求めなさい。

(2) 共通解とそれ以外の解を求めなさい。

きょうは，2次方程式についての重要な基本事項を学習しました。すこしでもつまずくところがあれば，もう一度見直しておきましょう。第8日は，高次方程式の学習です。

第 8 日	方程式・不等式　　学習日　月　日
	高次方程式

きょうは，3次・4次といった高次方程式について学習します。高次方程式の解き方，3次方程式の解と係数の関係などを扱っていきます。

まずは，因数分解，因数定理を利用した高次方程式の解き方から始めましょう。

例題 31　　**高次方程式の解法**

次の方程式を解きなさい。

(1)　$(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+15=0$　　　(2)　$x^4-3x^3+14x-12=0$

考え方　(1)では，$(x+1)(x+7)=x^2+8x+7$，$(x+3)(x+5)=x^2+8x+15$ となることから $x^2+8x=A$ と考えると，$(A+7)(A+15)+15=0$ となり，左辺を A についての2次式として因数分解できます。(2)では，$f(x)=x^4-3x^3+14x-12$ とおいて，定数項 -12 の約数 α の中から，$f(\alpha)=0$ となるものをみつけると，$x-\alpha$ を因数にもちます。

解　答　(1)　$\{(x+1)(x+7)\}\{(x+3)(x+5)\}+15=0$

$\{(x^2+8x)+7\}\{(x^2+8x)+15\}+15=0$

$(x^2+8x)^2+22(x^2+8x)+120=0$　　**←x^2+8x について整理**

$(x^2+8x+12)(x^2+8x+10)=0$　　**←$A^2+22A+120=(A+12)(A+10)$**

$(x+2)(x+6)(x^2+8x+10)=0$

したがって，　$\boldsymbol{x=-2,\ -6,\ -4\pm\sqrt{6}}$　　**←$x^2+8x+10=0$ には解の公式を利用**

(2)　$f(x)=x^4-3x^3+14x-12$ とおくと

$f(1)=0$，$f(-2)=0$　　**←-12 の約数 α の中で $f(\alpha)=0$ となるもの**

よって

$f(x)=(x-1)(x+2)(x^2-4x+6)$　　**←因数定理より $x-1$，$x+2$ が因数**

したがって，$f(x)=0$ の解は

$\boldsymbol{x=1,\ -2,\ 2\pm\sqrt{2}i}$

POINT
◆ 高次方程式は，因数分解して，2次以下の整式 A，B，C の積で $ABC=0$ とし，

$A=0$ または $B=0$ または $C=0$

を解きます。

◆ 因数定理を利用して高次式 $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ を因数分解するときは，次のような α の中で $f(\alpha)=0$ をみたすものをみつけると $x-\alpha$ を因数にもちます。

$$\alpha=\frac{e\text{ の約数}}{a\text{ の約数}}\quad\leftarrow\frac{\text{定数項の約数}}{\text{最高次の係数の約数}}$$

では，トレーニングです。

トレーニング

1 次の方程式を解きなさい。

(1) $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+15=0$

(2) $x^4-3x^3+14x-12=0$

2 次の方程式を解きなさい。

(1) $(x-1)(x+2)(x-4)(x+8)+20x^2=0$

(2) $x^4+5x^2+9=0$

3 次の方程式を解きなさい。

(1) $(2x^2-3x)^2+12x=8x^2+5$

(2) $(x^2-x)^2=x^2+4x+4$

4 次の方程式を解きなさい。

(1) $x^3+3x^2-17x+6=0$

(2) $4x^4+8x^3-7x^2-11x+6=0$

5 次の方程式を解きなさい。

(1) $x^5+x^4+x^3+x^2-2x-2=0$

(2) $x^4-x^3-5x^2+15x-18=0$

こんどは，解き方のくふうをしてみましょう。高次方程式の形に注目する例題です。

例題 32 　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　**相反方程式**

方程式 $6x^4-5x^3-38x^2-5x+6=0$ を解きなさい。

考え方　係数が，まん中の項を中心に左右対称になっていることに着目します。$x=0$ はこの方程式の解になりませんから，両辺を x^2 で割ると，$6x^2-5x-38-\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}=0$ となります。変形すると $6\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-12-5\left(x+\frac{1}{x}\right)-38=0$ という $x+\frac{1}{x}$ についての 2 次方程式になります。

解　答　$x=0$ は，この方程式の解ではない。　　**←$x=0$ のとき，左辺$=6\neq0$**

よって，両辺を x^2 $(\neq 0)$ で割ると

$$6x^2-5x-38-\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}=0$$

$$6\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-5\left(x+\frac{1}{x}\right)-38=0$$　**←ax^n と $\frac{a}{x^n}$ で組を作る。**

$$6\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-5\left(x+\frac{1}{x}\right)-50=0$$　**←$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$**

$$\left\{3\left(x+\frac{1}{x}\right)-10\right\}\left\{2\left(x+\frac{1}{x}\right)+5\right\}=0$$

$$\left(3x-10+\frac{3}{x}\right)\left(2x+5+\frac{2}{x}\right)=0$$

(i)　$3x-10+\frac{3}{x}=0$ のとき　$3x^2-10x+3=0$　**←両辺に x をかける。**

$(3x-1)(x-3)=0$

よって　$x=\frac{1}{3},\ 3$

(ii)　$2x+5+\frac{2}{x}=0$ のとき　$2x^2+5x+2=0$

$(2x+1)(x+2)=0$

よって　$x=-\frac{1}{2},\ -2$

(i)，(ii) より　$\boldsymbol{x=\frac{1}{3},\ 3,\ -\frac{1}{2},\ -2}$

POINT

- ◆ $6x^4-5x^3-38x^2-5x+6=0$ のように，係数がまん中の項を中心に左右対称になっている方程式を**相反方程式**といいます。
- ◆ 3 次，5 次，……など奇数次の相反方程式は，$(\boldsymbol{x+1})\times$(**偶数次の相反方程式**)の形になります。
- ◆ 4 次，6 次，……などの偶数次の相反方程式は，両辺を x^2，x^3，……などで割って $\boldsymbol{x+\frac{1}{x}}$ **についての方程式**を導いて解きます。

実際に問題を与えられたときには，相反方程式かどうかを見きわめることが重要です。

トレーニング

6 方程式 $6x^4-5x^3-38x^2-5x+6=0$ を解きなさい。

7 方程式 $x^4-5x^3-4x^2-5x+1=0$ を解きなさい。

8 方程式 $4x^4-16x^3+23x^2-16x+4=0$ を解きなさい。

9 方程式 $x^5-6x^4+7x^3+7x^2-6x+1=0$ を解きなさい。

10 方程式 $15x^5+41x^4-24x^3-24x^2+41x+15=0$ を解きなさい。

つぎは，3次方程式の解と係数の関係についての例題です。

例題 33 ―― **3次方程式の解と係数の関係**

3次方程式 $x^3-3x^2-5=0$ の3つの解を α，β，γ とするとき，次の式の値を求めなさい。

(1) $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$　　　(2) $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3$

考え方　与えられた式は，α，β，γ についての対称式ですから，基本対称式 $\alpha+\beta+\gamma$，$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$，$\alpha\beta\gamma$ だけの式で表すことができます。また，3次方程式の解と係数の関係から，これらの基本対称式の値が求められますから，それを代入して計算します。

解　答　3次方程式の解と係数の関係より

$$\alpha+\beta+\gamma=3,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=0,\ \alpha\beta\gamma=5$$

(1) 与式 $=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$　　**←基本対称式で表す。**

$=3^2-2\cdot0=\mathbf{9}$　　**←値を代入して計算する。**

(2) 与式 $=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)$

$+3\alpha\beta\gamma$　　**←$\boldsymbol{\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma}$ の因数分解の公式を利用**

$=(\alpha+\beta+\gamma)\{(\alpha+\beta+\gamma)^2-3(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\}+3\alpha\beta\gamma$

$=3\cdot(3^2-3\cdot0)+3\cdot5=\mathbf{42}$

POINT　◆ 3次方程式 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ の3つの解を α，β，γ とすると

$$\boxed{\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a},\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a},\ \alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}}$$

2次方程式の場合と似ていますね。では，トレーニングです。

トレーニング

11 3次方程式 $x^3-3x^2-5=0$ の3つの解を α，β，γ とするとき，次の式の値を求めなさい。

(1) $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$　　　(2) $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3$

12 3次方程式 $2x^3+3x^2+x-2=0$ の3つの解を α, β, γ とするとき，次の式の値を求めなさい。

(1) $(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)$

(2) $\dfrac{\beta\gamma}{\alpha}+\dfrac{\gamma\alpha}{\beta}+\dfrac{\alpha\beta}{\gamma}$

13 $x^3+kx^2+x+1=0$ の解が 1, α, β です。このとき k の値と，解 α, β を求めなさい。

14 $x^3+2px^2-3px-6p^2=0$ の解を α, β, γ とするとき，α, β, γ の関係式を求めなさい。

15 $12x^3-6ax^2+a^2x+12=0$ の実数解が α, β, γ のとき，α, β, γ の値を求めなさい。ただし，a は実数とします。

つぎは，3次方程式の解と係数の関係を利用して，3次方程式を作る例題に取り組みましょう。

例題 34 ―― **3次方程式の作成**

$x^3-2x+1=0$ の3つの解を α，β，γ とするとき，次の3つの数を解とする x の3次方程式を作りなさい。ただし，x^3 の係数は1とします。

(1) $\alpha+\beta$，$\beta+\gamma$，$\gamma+\alpha$　　　(2) $\alpha\beta$，$\beta\gamma$，$\gamma\alpha$

考え方　3次方程式の解と係数の関係の逆の考え方をします。つまり，3つの解の和を p，そのうちの2つずつの積の和を q，3つの積を r とすると，求める3次方程式は $x^3-px^2+qx-r=0$ です。

解　答　3次方程式の解と係数の関係より　　**←$x^3+0\cdot x^2-2x+1=0$ と考える。**

$$\alpha+\beta+\gamma=0,\quad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-2,\quad \alpha\beta\gamma=-1$$

(1) $(\alpha+\beta)+(\beta+\gamma)+(\gamma+\alpha)$　　**←3つの和**

$=2(\alpha+\beta+\gamma)=2\cdot0=0$

$(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)+(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)+(\gamma+\alpha)(\alpha+\beta)$　　**←2つずつの積の和**

$=(-\gamma)\cdot(-\alpha)+(-\alpha)\cdot(-\beta)+(-\beta)\cdot(-\gamma)$

$=\gamma\alpha+\alpha\beta+\beta\gamma=-2$

$(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)$　　**←3つの積**

$=(-\gamma)\cdot(-\alpha)\cdot(-\beta)$

$=-\alpha\beta\gamma=-(-1)=1$

したがって，求める3次方程式は　$\boldsymbol{x^3-2x-1=0}$　　**←$x^3-0\cdot x^2-2x-1=0$**

(2) $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-2$　　**←3つの和**

$\alpha\beta\cdot\beta\gamma+\beta\gamma\cdot\gamma\alpha+\gamma\alpha\cdot\alpha\beta$　　**←2つずつの積の和**

$=\alpha\beta\gamma(\beta+\gamma+\alpha)=-1\cdot0=0$

$\alpha\beta\cdot\beta\gamma\cdot\gamma\alpha$　　**←3つの積**

$=(\alpha\beta\gamma)^2=(-1)^2=1$

したがって，求める3次方程式は　$\boldsymbol{x^3+2x^2-1=0}$　　**←$x^3-(-2)x^2+0\cdot x-1=0$**

POINT　◆ 3数 α，β，γ を解とする3次方程式は，$a\neq0$ とすると

$$a\{x^3-(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x-\alpha\beta\gamma\}=0$$

考え方は，やはり2次方程式のときと同じですね。では，トレーニングしましょう。

トレーニング

16 $x^3-2x+1=0$ の3つの解を α, β, γ とするとき，次の3つの数を解とする x の3次方程式を作りなさい。ただし，x^3 の係数は1とします。

(1) $\alpha+\beta$, $\beta+\gamma$, $\gamma+\alpha$　　(2) $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$

17 $2x^3+4x^2-3x-1=0$ の3つの解を α, β, γ とするとき，$\dfrac{\beta+\gamma}{\alpha}$, $\dfrac{\gamma+\alpha}{\beta}$, $\dfrac{\alpha+\beta}{\gamma}$ を3つの解とする x の3次方程式を作りなさい。ただし，x^3 の係数は1とします。

18 $x^3+ax^2+bx+c=0$ $(c\neq0)$ の3つの解を α, β, γ とし，$\dfrac{1}{\alpha}$, $\dfrac{1}{\beta}$, $\dfrac{1}{\gamma}$ を3つの解にもつ x の3次方程式を作ったら，$3x^3+x^2+4x+1=0$ になりました。もとの方程式を求めなさい。

19 $x^3-5x^2+(k+2)x-3k+12=0$ の3つの解のうち2つが等しいとき，k の値を求めなさい。

20 $x^3+px^2-qx+r=0$ の解を α, β, γ とします。
$x^3+(p+q)x^2+x-q^2+1=0$ の解が 0, $\alpha-1$, $\beta-1$ であるとき，p, q, r の値を求めなさい。

きょう最後の例題です。実数を係数とする高次方程式が1つの複素数 $p+qi$ を解にもつとき，それと共役な複素数 $p-qi$ も解となります。これを利用して解く問題です。

例題 35 高次方程式の解

$1-\sqrt{3}i$ は，実数を係数とする3次方程式 $x^3+ax^2+bx+c=0$ の解です。

この3次方程式と2次方程式 $x^2+ax+2=0$ とが1つの解だけを共有するとき，定数 a，b，c の値を求めなさい。

考え方 $1-\sqrt{3}i$ を解とする2次方程式，3次方程式は，必ずそれと共役な複素数 $1+\sqrt{3}i$ も解とします。ですから，2次方程式と3次方程式が解を1つだけ共有するとき，その共有解は実数です。

解答 $x^3+ax^2+bx+c=0$ ………①，$x^2+ax+2=0$ ………②

①は $x=1-\sqrt{3}i$ を解にもつから，$x=1+\sqrt{3}i$ も解にもつ。 ←共役複素数も解

よって，x^3+ax^2+bx+c は $(x-1+\sqrt{3}i)(x-1-\sqrt{3}i)=x^2-2x+4$ で割り切れる。

実際に割ると　商は　$x+(a+2)$ ………③

余りは　$(b+2a)x+(c-4a-8)$

よって　$b+2a=0$，$c-4a-8=0$ ………④

また，①，②は，1つの解だけを共有するから，その共有解は実数で，③より　$x=-(a+2)$ ………⑤ ←①の虚数でない解

⑤を②に代入すると ←共有解であるから②もみたす。

$$(a+2)^2-a(a+2)+2=0$$

よって　$\boldsymbol{a=-3}$

これを④に代入すると　$\boldsymbol{b=6}$，$\boldsymbol{c=-4}$

POINT
- ◆ 実数係数の高次方程式は，$\boldsymbol{p+qi}$（p，q は実数，$q\neq0$）という解をもつと，それと共役な $\boldsymbol{p-qi}$ も解にもちます。
- ◆ 実数係数の2次方程式と3次方程式は，解を1つだけ共有するとき，その解は**実数**です。

考え方はわかりましたね。では，トレーニングです。

トレーニング

21 $1-\sqrt{3}i$ は，実数を係数とする3次方程式 $x^3+ax^2+bx+c=0$ の解です。

この3次方程式と2次方程式 $x^2+ax+2=0$ とが1つの解だけを共有するとき，定数 a，b，c の値を求めなさい。

22 $1-i$ は，$2x^4-5x^2+10x-2=0$ の解です。残りの解を求めなさい。

23 $x^3+ax^2+x-1=0$ と $x^2+bx-1=0$ が，2つの解を共有するとき，a，b の値を求めなさい。

24 $x^3-px^2+px-p^2=0$ と $x^3-x^2-x+p=0$ $(p>0)$ が，ただ1つの解を共有するとき，p の値を求めなさい。

25 方程式 $2x^3+5px^2+2q(p^2+1)x-p-2q=0$ の解の1つが $1-\sqrt{2}$ のとき，この方程式を求めなさい。ただし，p，q は整数とします。

きょうの学習はこれで終わりです。お疲れさまでした。第9日は，いろいろな方程式について学習します。

方程式・不等式　　学習日　月　日

第9日　いろいろな方程式

きょうは，連立方程式，分数方程式，無理方程式など，いろいろな方程式について学習していきます。解に条件がでてくるので注意します。

では，連立方程式から始めましょう。

例題 36　　連立方程式の解

次の連立方程式を満足する x，y がともに整数になるように，整数 a の値を定めなさい。

$$\begin{cases} (a-1)x+2y=-2 & \cdots\cdots\cdots① \\ x+(a-3)y=-(a+4) & \cdots\cdots\cdots② \end{cases}$$

（成蹊大）

考え方　①，②から，y を消去した $Ax=B$ という形の式と，x を消去した $Cy=D$ という形の式を導きます。そして，x，y が整数であるという条件から，A は B の約数，C は D の約数ですから，それにあてはまるような a の値をさがします。

解答　①×$(a-3)$−②×2 から　　←y を消去する。

$$\{(a-1)(a-3)-2\}x=-2(a-3)+2(a+4)$$

よって　$(a^2-4a+1)x=14$　………③

①−②×$(a-1)$ から　　←x を消去する。

$$\{2-(a-1)(a-3)\}y=-2+(a-1)(a+4)$$

よって　$(a^2-4a+1)y=-(a^2+3a-6)$　………④

x は整数であるから，③から a^2-4a+1 は 14 の約数である。

また，a も整数で，$a^2-4a+1=(a-2)^2-3$ であるから

$$(a-2)^2-3=-14,\ -7,\ -2,\ -1,\ 1,\ 2,\ 7,\ 14$$

の中から，$(a-2)^2$ が整数の平方になるものを選ぶと

$$(a-2)^2=1 \text{ または } (a-2)^2=4$$

よって　$a-2=\pm1$ または $a-2=\pm2$

よって　$a=3,\ 1,\ 4,\ 0$

この値を④に代入すると

$a=3$ のとき　$-2y=-12$　よって　$y=6$，$x=-7$

$a=1$ のとき　$-2y=2$　よって　$y=-1$，$x=-7$

$a=4$ のとき　$y=-22$，$x=14$

$a=0$ のとき　$y=6$，$x=14$

したがって　$\boldsymbol{a=0,\ 1,\ 3,\ 4}$

POINT

- 連立方程式を解くには，代入法または加減法で**1つの文字を消去**します。
- 連立方程式をみたす x，y の値が無数にあるとき，連立方程式は**不定**であるといい，解をもたないとき，連立方程式は**不能**であるといいます。

連立方程式から1文字を消去して，$Ax=B$ の形を導いたとき

$A=0$，$B\neq 0$ のとき　不能

$A=0$，$B=0$ のとき　不定

◆ 連立方程式から1文字を消去して，$Ax=B$ の形を導いたとき

A が B の約数であれば，$Ax=B$ は**整数解**をもちます。

では，トレーニングです。**1** で例題をもう一度確認しましょう。

トレーニング

1 次の連立方程式を満足する x，y がともに整数になるように，整数 a の値を定めなさい。

$$\begin{cases} (a-1)x+2y=-2 & \cdots\cdots\cdots ① \\ x+(a-3)y=-(a+4) & \cdots\cdots\cdots ② \end{cases}$$

（成蹊大）

2 x，y についての連立方程式

$(2a-3)x+3y=a$ ……①　　$3x+(a+2)y=-(a-2)$ ……②

が解をもたないように，a の値を求めなさい。

3 次の連立方程式を満足する x，y がともに整数になるように，a の値を定めなさい。ただし，a は整数とします。

$$\begin{cases} (a+4)x+3y=3 & \cdots\cdots\cdots ① \\ x+(a-3)y=a-2 & \cdots\cdots\cdots ② \end{cases}$$

4 次の連立方程式が実数解をもつときの実数 k の範囲を求めなさい。

$$\begin{cases} x^2+xy+y^2=6 & \cdots\cdots\cdots ① \\ x^2+y^2=k & \cdots\cdots\cdots ② \end{cases}$$

5 次の連立方程式が解をもたないように，実数の定数 a，b の値を定めなさい。

$$\begin{cases} y=ax+b & \cdots\cdots\cdots ① \\ 2x^2+5xy+2y^2+3x+3=0 & \cdots\cdots\cdots ② \end{cases}$$

つぎは，３元連立方程式の解法です。解き方は，２元の連立方程式と同じです。

例題 37 **３元連立方程式**

次の連立方程式を解きなさい。

$$\begin{cases} xy+x+y=5 & \cdots\cdots\cdots ① \\ yz+y+z=11 & \cdots\cdots\cdots ② \\ zx+z+x=7 & \cdots\cdots\cdots ③ \end{cases}$$

考え方　$XY+X+Y+1=(X+1)(Y+1)$ であることに注意して，①，②，③の式を $x+1$，$y+1$，$z+1$ の式に書きなおします。

解　答　与えられた方程式を変形すると

$$\begin{cases} (x+1)(y+1)=6 & \cdots\cdots\cdots ③ & \leftarrow \boldsymbol{xy+x+y+1=6} \\ (y+1)(z+1)=12 & \cdots\cdots\cdots ④ & \leftarrow \boldsymbol{yz+y+z+1=12} \\ (z+1)(x+1)=8 & \cdots\cdots\cdots ⑤ & \leftarrow \boldsymbol{zx+z+x+1=8} \end{cases}$$

③×④×⑤より

$$(x+1)^2(y+1)^2(z+1)^2=2^6\cdot3^2$$

よって　$(x+1)(y+1)(z+1)=\pm2^3\cdot3$　………⑥

⑥÷③より　$z+1=\pm4$

⑥÷④より　$x+1=\pm2$

⑥÷⑤より　$y+1=\pm3$　（複号同順）

したがって　$\boldsymbol{x=1,\ y=2,\ z=3}$

$\boldsymbol{x=-3,\ y=-4,\ z=-5}$　**←複号をはずして計算する。**

POINT　◆ ３元の連立方程式を解くときは

① １つの文字を消去する。

② 与えられた式の形をみて変形をくふうする。

ことに注意します。解法は，２元の連立方程式と変わりません。

ちょっとした変形のくふうがたいせつですね。では，トレーニングです。

トレーニング

6 次の連立方程式を解きなさい。

$$\begin{cases} xy+x+y=5 & \cdots\cdots\cdots ① \\ yz+y+z=11 & \cdots\cdots\cdots ② \\ zx+z+x=7 & \cdots\cdots\cdots ③ \end{cases}$$

7 x, y, z の連立方程式

$$\begin{cases} x+\alpha y-z=\alpha & \cdots\cdots\cdots ① \\ x-\dfrac{1}{\alpha}y+z=\dfrac{1}{\alpha} & \cdots\cdots\cdots ② \\ x-\beta y-z=\beta & \cdots\cdots\cdots ③ \end{cases}$$

の解を求めなさい。ただし，$\alpha+\beta\neq 0$ とします。 (宮城教育大)

8 次の連立方程式を解きなさい。

(1) $\begin{cases} xy=2 & \cdots\cdots\cdots ① \\ yz=6 & \cdots\cdots\cdots ② \\ zx=3 & \cdots\cdots\cdots ③ \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x-y+3z=8 & \cdots\cdots\cdots ① \\ x+y-z=-2 & \cdots\cdots\cdots ② \\ x^2+y^2+z^2=6 & \cdots\cdots\cdots ③ \end{cases}$

9 次の連立方程式を解きなさい。

(1) $\begin{cases} xy-x-y=1 & \cdots\cdots\cdots ① \\ yz-y-z=5 & \cdots\cdots\cdots ② \\ zx-z-x=2 & \cdots\cdots\cdots ③ \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x+2y=5 & \cdots\cdots\cdots ① \\ y+2z=11 & \cdots\cdots\cdots ② \\ z+2x=11 & \cdots\cdots\cdots ③ \end{cases}$

10 次の連立方程式を解きなさい。ただし，$x>y>z$ とします。

$$\begin{cases} x+y+z=-2 & \cdots\cdots\cdots ① \\ x^2+y^2+z^2=6 & \cdots\cdots\cdots ② \\ x^3+y^3+z^3=-8 & \cdots\cdots\cdots ③ \end{cases}$$

つぎは，分数方程式の解法です。分母は 0 でないことに注意します。

例題 38 　　**分数方程式の解法(1)**

次の方程式を解きなさい。

$$\frac{x+3}{x+5}+\frac{x+5}{x+7}=\frac{x+1}{x+3}+\frac{x+7}{x+9}$$

考え方 　まず，分子の次数が，分母の次数と等しいので，分子の次数を下げて整理します。つぎに，分母の最小公倍数 $(x+5)(x+7)(x+3)(x+9)$ をかけて整方程式を作ります。そして，整方程式の解の中から，分母の最小公倍数を 0 にしないものをさがします。

解答

$$\left(1-\frac{2}{x+5}\right)+\left(1-\frac{2}{x+7}\right)=\left(1-\frac{2}{x+3}\right)+\left(1-\frac{2}{x+9}\right)$$ **←分子の次数を下げる。**

$$\frac{2}{x+3}-\frac{2}{x+7}=\frac{2}{x+5}-\frac{2}{x+9}$$ **←$-\frac{2}{x+3}$，$-\frac{2}{x+5}$ を移項**

$$\frac{8}{(x+3)(x+7)}=\frac{8}{(x+5)(x+9)}$$ **←左辺，右辺を通分**

$$8(x+5)(x+9)=8(x+3)(x+7)$$ **←分母の最小公倍数をかける。**

$$4x+24=0$$

よって　$\boldsymbol{x=-6}$

これは，与えられた方程式をみたす。　**←分母の最小公倍数を 0 としない。**

POINT ◆ **分数方程式**は次の順に解きます。

① 両辺に分母の最小公倍数をかけて整方程式を作ります。

② 整方程式を解きます。

③ ②の結果から分母の最小公倍数を 0 にするものを除きます。

分母は 0 でないことを忘れないようにしましょう。では，トレーニングです。

トレーニング

11 次の方程式を解きなさい。

$$\frac{x+3}{x+5}+\frac{x+5}{x+7}=\frac{x+1}{x+3}+\frac{x+7}{x+9}$$

12 次の方程式を解きなさい。

(1) $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x-4}=-\dfrac{1}{6}$ ………①

(2) $\dfrac{1}{x^2-5x+6}+\dfrac{1}{x^2-3x+2}+\dfrac{1}{2(x-1)}=0$ ………②

13 次の方程式を解きなさい。

$$\frac{x^2-2x}{x^2-1}-1+\frac{1}{x-1}=0$$

14 次の方程式を解きなさい。

$$\frac{x+2}{x+1}-\frac{x}{x-1}=\frac{x+6}{x+5}-\frac{x+4}{x+3}$$

15 次の方程式を解きなさい。

$$\frac{1}{x^2+3x+2}-\frac{1}{x+4}=-\frac{1}{x+5}$$

つぎも，分数方程式の例題です。置きかえによる方法を扱います。

例題 39 　　**分数方程式の解法(2)**

方程式 $x^2+\dfrac{100}{x^2}=24\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{5}{x}\right)-7$ ……①について，次の問いに答えなさい。

(1) ①の式で，$x-\dfrac{10}{x}=y$ とおいて，y についての方程式を作りなさい。

(2) (1)で作った方程式を解きなさい。

(3) ①の解を求めなさい。

考え方 両辺に x^2 をかけて，x についての 4 次方程式として解くこともできますが，$x^2+\dfrac{100}{x^2}=\left(x-\dfrac{10}{x}\right)^2+20$，$24\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{5}{x}\right)=12\left(x-\dfrac{10}{x}\right)$ であることに着目すると，$x-\dfrac{10}{x}=y$ についての 2 次方程式として解くことができます。

解 答 (1) $\left(x-\dfrac{10}{x}\right)^2+20=12\left(x-\dfrac{10}{x}\right)-7$ 　**←$x^2+\dfrac{100}{x^2}=\left(x-\dfrac{10}{x}\right)^2+20$**

よって　$y^2+20=12y-7$

したがって　$\boldsymbol{y^2-12y+27=0}$ 　**←y についての 2 次方程式**

(2) $(y-3)(y-9)=0$

よって　$\boldsymbol{y=3,\ 9}$

(3) $y=3$ のとき

$x-\dfrac{10}{x}=3$ より　$x^2-3x-10=0$ 　**←両辺に x をかける。**

$(x+2)(x-5)=0$

よって　$x=-2,\ 5$ ………②

$y=9$ のとき

$x-\dfrac{10}{x}=9$ より　$x^2-9x-10=0$

$(x+1)(x-10)=0$

よって　$x=-1,\ 10$ ………③

②，③は与えられた方程式の分母を 0 にしないので解である。

よって　$\boldsymbol{x=-2,\ -1,\ 5,\ 10}$

POINT ◆ $k\left(x^2+\dfrac{a^2}{x^2}\right)+l\left(x\pm\dfrac{a}{x}\right)+m=0$ の形の分数方程式は，$\boldsymbol{x\pm\dfrac{a}{x}=y}$ とおくことによって，y についての 2 次方程式として解くことができます。

置きかえられる形を見つけることがポイントですね。では，トレーニングです。

トレーニング

16 方程式 $x^2+\dfrac{100}{x^2}=24\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{5}{x}\right)-7$ ……①について，次の問いに答えなさい。

(1) ①の式で，$x-\dfrac{10}{x}=y$ とおいて，y についての方程式を作りなさい。

(2) (1)で作った方程式を解きなさい。

(3) ①の解を求めなさい。

17 方程式 $x^2+\dfrac{1}{x^2}=18\left(\dfrac{x}{3}+\dfrac{1}{3x}\right)-10$ を解きなさい。

18 方程式 $x^2+\dfrac{36}{x^2}-72\left(\dfrac{x}{6}+\dfrac{1}{x}\right)+47=0$ を解きなさい。

19 方程式 $-\dfrac{2x-4}{x^2}-\dfrac{x^2}{2x-4}=\dfrac{5}{2}$ を解きなさい。

20 方程式 $\dfrac{3x+1}{x^2}-\dfrac{8x^2}{3x+1}=2$ を解きなさい。

分数方程式は，もうだいじょうぶですね。きょう最後の例題は，無理方程式の解法です。平方して根号をはずすともとの方程式と同値でなくなることに注意します。

例題 40 ―― **無理方程式の解法**

方程式 $2\sqrt{x+3}-x=0$ を解きなさい。

考え方 平方して根号のつかない方程式になおしてから解きます。そして，その解が，もとの方程式をみたしているかどうかを調べます。

解 答 $2\sqrt{x+3}=x$

両辺を平方すると $4(x+3)=x^2$

$$x^2-4x-12=0$$

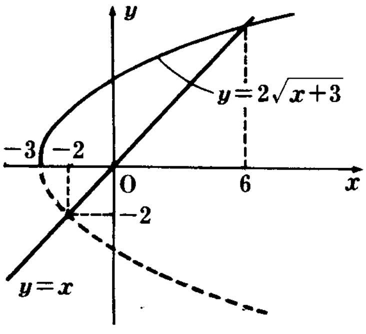
$$(x-6)(x+2)=0$$

よって $x=6,\ -2$

$x=6$ のとき，与えられた方程式をみたす。

$x=-2$ のとき，与えられた方程式をみたさない。

したがって $\boldsymbol{x=6}$



POINT ◆ **無理方程式**は，次の順に解きます。

① 適当に移項して，両辺を平方して整方程式を導きます。

② 整方程式を解きます。

③ ②の解の中から，もとの方程式をみたすものを選びます。

もとの方程式をみたすかどうか調べるのを忘れないようにしましょう。では，トレーニングです。

トレーニング

21 方程式 $2\sqrt{x+3}-x=0$ を解きなさい。

22 次の方程式を解きなさい。

(1) $5\sqrt{x+3}-x-9=0$ (2) $\sqrt{x-1}-x+3=0$

23 次の方程式を解きなさい。

$$\sqrt{x^2-12x}=-x+4$$

24 a を実数の定数とするとき，次の方程式を解きなさい。

$$\sqrt{ax+4}=x+2$$

25 a を実数の定数とするとき，次の方程式を解きなさい。

$$\sqrt{4-x^2}=ax-2$$

きょうの学習はこれで終わりです。第10日は不等式の学習です。

第 10 日

方程式・不等式　　　学習日　　月　　日

不等式の解法

きょうは，いろいろな不等式の解き方を学習します。不等式では，方程式での解き方が前提となります。はりきって進めていきましょう。

まず最初は，絶対値記号を含む不等式の解法から始めましょう。

例題 41　　　　**絶対値記号を含む不等式**

次の不等式を解きなさい。

(1) $|x-1|+|x-2| \geqq x+1$　　　(2) $|x^2-2x-3|<x+1$

考え方　$|\ \ |$の中の式の符号で場合に分けて解きます。(1)のように$|\ \ |$が 2 つあるときは，どちらも正か 0 の場合，一方が正か 0 で他方が負の場合，どちらも負の場合に分かれます。

解　答　(1) $x \geqq 2$ のとき　………①

$(x-1)+(x-2) \geqq x+1$　　　**←$|x-1|=x-1$, $|x-2|=x-2$**

よって　$x \geqq 4$

これは①をみたす。

$1 \leqq x<2$ のとき　………②

$(x-1)-(x-2) \geqq x+1$　　　**←$|x-1|=x-1$, $|x-2|=-(x-2)$**

よって　$x \leqq 0$

これは②をみたさない。

$x<1$ のとき　………③

$-(x-1)-(x-2) \geqq x+1$　　　**←$|x-1|=-(x-1)$, $|x-2|=-(x-2)$**

よって　$x \leqq \dfrac{2}{3}$

これは③をみたす。

したがって　$\boldsymbol{x \geqq 4,\ x \leqq \dfrac{2}{3}}$

(2) $x \geqq 3$, $x \leqq -1$ のとき　………①　　　**←$x^2-2x-3 \geqq 0$ のとき**

$x^2-2x-3<x+1$

よって　$-1<x<4$　　　**←$x^2-3x-4<0$の解**

これと①より　$3 \leqq x<4$

$-1<x<3$ のとき　………②　　　**←$x^2-2x-3<0$ のとき**

$-(x^2-2x-3)<x+1$

よって　$x>2$, $x<-1$　　　**←$x^2-x-2>0$ の解**

これと②より　$2<x<3$

したがって　$\boldsymbol{2<x<4}$

POINT ◆ $A \geqq 0$ のとき $|\boldsymbol{A}|=\boldsymbol{A}$, $A<0$ のとき $|\boldsymbol{A}|=-\boldsymbol{A}$

絶対値の場合分けが重要です。トレーニング **1** で，もう一度確認しておきましょう。

トレーニング

1 次の不等式を解きなさい。

(1) $|x-1|+|x-2| \geqq x+1$

(2) $|x^2-2x-3|<x+1$

2 次の不等式を解きなさい。

(1) $|x+1|-|x+2|>3x-2$

(2) $|x-4| \geqq |2x+3|$

(3) $|x-5|<x^2-6x+1$

3 次の不等式を解きなさい。

(1) $|x^2-9| \leqq x+3$

(2) $|x^2+2x-5|>x+1$

4 次の不等式を解きなさい。

$$\left| x^2+3|x|-4 \right| <3x$$

5 次の x についての不等式を解きなさい。

$$|x-a|>3a$$

つぎの例題は連立不等式です。それぞれべつべつに解いて，共通範囲を求めます。

例題 42 　　　　**連立 2 次不等式**

a を定数とするとき，次の 2 つの不等式を同時にみたす x の値の範囲を求めなさい。

$4(x^2-x)<3$，$x^2-ax+a>x$

考え方 　まず，それぞれの不等式を解きます。$x^2-ax+a>x$ のように定数 a を含む不等式は a の値で場合分けして考えます。さらに，2 つの不等式の共通範囲を，a の値と他の解との関係から場合分けします。

解　答 　$4(x^2-x)<3$ より　$4x^2-4x-3<0$

$(2x+1)(2x-3)<0$

よって　$-\dfrac{1}{2}<x<\dfrac{3}{2}$ ………①

$x^2-ax+a>x$ より　$x^2-(a+1)x+a>0$

$(x-1)(x-a)>0$

$a>1$ のとき　$x>a$，$x<1$

$a=1$ のとき　$x\neq 1$ ………②　　$\leftarrow (x-1)^2>0$

$a<1$ のとき　$x>1$，$x<a$

①，②の共通範囲を求めると

$\boldsymbol{a \geqq \dfrac{3}{2}}$ **のとき** $\boldsymbol{-\dfrac{1}{2}<x<1}$　　$\boldsymbol{1 \leqq a<\dfrac{3}{2}}$ **のとき** $\boldsymbol{a<x<\dfrac{3}{2}}$，$\boldsymbol{-\dfrac{1}{2}<x<1}$

$\boldsymbol{-\dfrac{1}{2}<a<1}$ **のとき** $\boldsymbol{-\dfrac{1}{2}<x<a}$，$\boldsymbol{1<x<\dfrac{3}{2}}$　　$\boldsymbol{a \leqq -\dfrac{1}{2}}$ **のとき** $\boldsymbol{1<x<\dfrac{3}{2}}$

POINT

◆ $\alpha<\beta$ のとき

$(x-\alpha)(x-\beta)>0$ の解は　$x<\alpha$，$\beta<x$

$(x-\alpha)(x-\beta)<0$ の解は　$\alpha<x<\beta$

◆ 連立不等式の解は，それぞれの不等式の解の**共通部分**です。

定数 a を含む不等式は，a の値で場合分けするのですね。トレーニング **6** で例題を確認しましょう。

トレーニング

6 　a を定数とするとき，次の 2 つの不等式を同時にみたす x の値の範囲を求めなさい。

$4(x^2-x)<3$，$x^2-ax+a>x$

7 次の連立不等式を解きなさい。ただし，a は実数の定数とします。

$$\begin{cases} |x-2| \leqq 2 \\ x^2+ax+a-1 \geqq 0 \end{cases}$$

8 次の連立不等式を解きなさい。ただし，a は実数の定数とします。

$$\begin{cases} x < 2a-2 \\ x^2-(a^2+4)x+4a^2 > 0 \end{cases}$$

9 次の不等式をみたす実数 x の値の範囲を求めなさい。ただし，a は正の実数の定数とします。

$$\begin{cases} x^2-6 > x \\ x^2-a^2 > 0 \end{cases}$$

10 次の不等式をみたす実数 x の値の範囲を求めなさい。ただし，a は正の実数の定数とします。

$$x-a < x^2-a^2 \leqq x+a$$

（甲南大）

つぎは，連立不等式をみたす整数を求める例題です。解を求めたあと，その範囲にある整数を見つけます。

例題 43 　　**連立不等式の整数解**

次の 2 つの不等式を同時にみたす整数 x を求めなさい。

$x^2-4x-6<0$，$x^2-2x-11>0$

考え方　どちらの 2 次不等式も有理数の範囲の因数分解を使って解くことはできませんから，2 次方程式の解を利用して解きます。

解　答　$x^2-4x-6<0$ から　　　**←$x^2-4x-6=0$ の解は　$x=2\pm\sqrt{10}$**

$2-\sqrt{10}<x<2+\sqrt{10}$　………①

$x^2-2x-11>0$ から　　　**←$x^2-2x-11=0$ の解は　$x=1\pm2\sqrt{3}$**

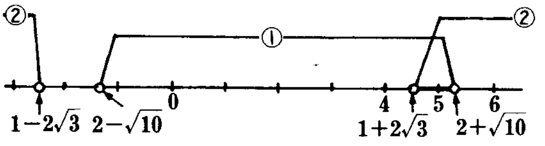
$x>1+2\sqrt{3}$，$x<1-2\sqrt{3}$　………②

①，②の共通範囲を求めると

$1+2\sqrt{3}<x<2+\sqrt{10}$

したがって，求める整数 x は

$\boldsymbol{x=5}$



POINT　◆　$a>0$ で，2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ が異なる 2 つの実数解 α，β をもつとき，$\alpha<\beta$ とすれば

$ax^2+bx+c>0$ の解は　　$\boldsymbol{x<\alpha,\ \beta<x}$

$ax^2+bx+c<0$ の解は　　$\boldsymbol{\alpha<x<\beta}$

では，トレーニングです。

トレーニング

11　次の 2 つの不等式を同時にみたす整数 x を求めなさい。

$x^2-4x-6<0$，$x^2-2x-11>0$

12　次の連立不等式の整数解を求めなさい。

$$\begin{cases} x^2+2x\leqq15 \\ 2x^2-3x-9<0 \end{cases}$$

13 次の連立不等式の整数解を求めなさい。

$$\begin{cases} x^2+3x+1 \geqq 0 \\ x^2+2x-7<0 \end{cases}$$

14 次の連立不等式をみたす x の整数解が -1 だけであるとき，整数 a の値を求めなさい。

$$\begin{cases} 4x^2+a^2x-1>0 \\ x^2-ax-1 \leqq 0 \end{cases}$$

15 次の 2 つの不等式を同時にみたす x の整数値がちょうど 2 つ存在するような a の値の範囲を求めなさい。

$$\begin{cases} x^2-x-6<0 \\ x^2-2(a+1)x+a(a+2) \geqq 0 \end{cases}$$

こんどは，2次不等式の解から逆に不等式を決定する例題に取り組みます。

例題 44 　　**2次不等式の作成**

x についての2次不等式 $ax^2+5x+b>0$ の解が $\frac{1}{3}<x<\frac{1}{2}$ になるように，実数 a，b の値を定めなさい。

考え方　x^2 の係数が1で，その解が $\frac{1}{3}<x<\frac{1}{2}$ である x についての2次不等式は $\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)<0$ です。この両辺に等しい数をかけた不等式が $ax^2+5x+b>0$ であることから，係数を比較します。ここで，不等号の向きが逆ですから，両辺にかける数は負です。

解　答　$k>0$ とすると　$\frac{1}{3}<x<\frac{1}{2}$ を解とする2次不等式は

$$k\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)<0$$

$$kx^2-\frac{5}{6}kx+\frac{1}{6}k<0$$

両辺に -1 をかけると

$$-kx^2+\frac{5}{6}kx-\frac{1}{6}k>0$$

←与えられた不等号と向きをそろえる。

よって，$ax^2+5x+b>0$ と係数を比較すると

$$-k=a,\quad \frac{5}{6}k=5,\quad -\frac{1}{6}k=b$$

したがって　　$k=6$，$\boldsymbol{a=-6}$，$\boldsymbol{b=-1}$

これは題意に適する。

POINT　◆ $a>0$ とすると，解の集合の形によって，もとの**2次不等式**は次のように表されます。

$x<\alpha$，$\beta<x$　………$a(x-\alpha)(x-\beta)>0$

$\alpha<x<\beta$　………$a(x-\alpha)(x-\beta)<0$

α 以外のすべての実数　………$a(x-\alpha)^2>0$

$x=\alpha$　………$a(x-\alpha)^2\leqq 0$

不等号の向きに注意して，トレーニングを進めていきましょう。

トレーニング

16 x についての２次不等式 $ax^2+5x+b>0$ の解が $\frac{1}{3}<x<\frac{1}{2}$ になるように，実数 a，b の値を定めなさい。

17 x についての不等式 $ax^2+bx+6<0$ の解が次のようになるとき，定数 a，b の値を定めなさい。

(1) $x<-2$，$3<x$　　　(2) $1<x<2$

18 x についての不等式 $px^2-4(2p-1)x+q<0$ が $p<x<3$ を解にもつとき，定数 p，q の値を求めなさい。

19 不等式 $x^2-ax-b<0$ の解が $-6<x<-1$ のとき，不等式 $bx^2-ax-1>0$ の解を求めなさい。

20 不等式 $x^2-7x+10\leqq 0$ ……①，$x^2+px+q<0$ ……②を同時にみたす x の値はなく，①または②をみたす x の値の範囲が $2\leqq x<7$ です。このとき，定数 p，q の値を求めなさい。

きょう最後の例題は，高次不等式の解き方です。

例題 45 　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　**高次不等式**

次の不等式を解きなさい。

(1)　$(x+3)(x-6)(x+4)>0$　　　　　　　　(2)　$x^3+2x^2-4x-8<0$

考え方　(1)は，左辺の因数を 0 にする値 -3，6，-4 で x の値を区切り，その範囲で，各因数の符号を調べます。(2)は，まず，左辺を因数分解してから(1)と同様に考えます。

解　答　(1)　各因数の符号の変化を調べると下のようになる。　　**←因数を 0 にする値で区切る。**

x	……	-4	……	-3	……	6	……
$x+3$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-6$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x+4$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
左辺	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

したがって　　$\boldsymbol{-4<x<-3,\ 6<x}$

(2)　左辺を因数分解して　　$(x-2)(x+2)^2<0$

$x=-2$ のとき，この不等式は成立しないから　　$x \neq -2$

このとき，$(x+2)^2>0$ であるから　　$x-2<0$　　よって　　$x<2$

したがって　　$\boldsymbol{x<-2,\ -2<x<2}$

POINT

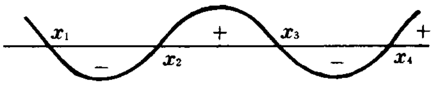
◆　3 次以上の不等式を**高次不等式**といいます。

◆　高次不等式を解くには，次のようにします。

①　すべての項を一方の辺に移して，**因数分解**します。

②　各因数の**符号の変化**を調べます。

このとき，符号の変化の境になる x の値は，各因数を 0 にする値です。



符号の変化をしっかりとらえることがポイントですね。では，トレーニングです。

トレーニング

21　次の不等式を解きなさい。

(1)　$(x+3)(x-6)(x+4)>0$　　　　　　　　(2)　$x^3+2x^2-4x-8<0$

22 次の不等式を解きなさい。

(1) $(x+3)(x-1)(x-5)\leqq 0$

(2) $x(x-2)(x-4)(x-8)>0$

23 次の不等式を解きなさい。

(1) $x^3-x<6(x^2-1)$

(2) $x^2(x^2-1)<2(x-1)(x+1)^2$

24 次の不等式を解きなさい。

(1) $(x+1)(x^3+8)\geqq 0$

(2) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-8\geqq 0$

25 次の不等式を解きなさい。

$$(x+1)(x^2-3ax+2a^2)<0$$

きょうは，いろいな不等式の解法について学習しました。第11日は，不等式の証明について学習します。

第 11 日	方程式・不等式　　学習日　　月　　日
	不等式の証明

きょうは，不等式の証明に関するいろいろな問題に取り組みます。はりきって進めていきましょう。

まずは，単純に差をとって証明する例題から始めましょう。

例題 46　　　　不等式の証明(1)

次の不等式を証明しなさい。

(1)　$a \geqq b$，$x \geqq y$ であるとき　$(a+b)(x+y) \leqq 2(ax+by)$

(2)　$a \geqq b \geqq c$，$x \geqq y \geqq z$ であるとき　$(a+b+c)(x+y+z) \leqq 3(ax+by+cz)$

考え方　右辺－左辺≧0 を示します。

(1)　右辺－左辺を因数分解して，各因数の符号を調べる方法で示します。

(2)　右辺－左辺を，(正)(正)+(正)(正)+(正)(正)の形に導きます。

解　答　(1)　右辺－左辺

$=2(ax+by)-(a+b)(x+y)$

$=2ax+2by-ax-ay-bx-by$

$=ax-ay+by-bx$

$=(a-b)(x-y)$　　←因数分解して各因数の符号を調べる。

ここで，$a \geqq b$，$x \geqq y$ より

右辺－左辺≧0　　←$a-b \geqq 0$，$x-y \geqq 0$

したがって　$(a+b)(x+y) \leqq 2(ax+by)$

等号が成り立つのは，$a=b$ または $x=y$ のときに限る。

(2)　右辺－左辺

$=3(ax+by+cz)-(a+b+c)(x+y+z)$

$=3ax+3by+3cz-ax-ay-az-bx-by-bz-cx-cy-cz$

$=(2a-b-c)x+(2b-c-a)y+(2c-a-b)z$

$=(a-b)x+(a-c)x+(b-c)y+(b-a)y+(c-a)z+(c-b)z$

$=(a-b)(x-y)+(a-c)(x-z)+(b-c)(y-z)$

ここで，$a \geqq b$，　$x \geqq y$ より　$(a-b)(x-y) \geqq 0$

$a \geqq c$，　$x \geqq z$ より　$(a-c)(x-z) \geqq 0$

$b \geqq c$，　$y \geqq z$ より　$(b-c)(y-z) \geqq 0$

よって　右辺－左辺≧0

したがって　$(a+b+c)(x+y+z) \leqq 3(ax+by+cz)$

等号が成り立つのは，$a=b=c$ または $x=y=z$ のときに限る。

POINT

- ◆ 不等式 $A>B$ を証明するには，$\boldsymbol{A-B>0}$ を示します。
- ◆ $A-B$ の符号を調べるのに，次のような方法がよく使われます。
  - ① 因数分解して，各因数の符号を調べる。
  - ② (実数)$^2\geqq 0$ を利用する。
    (実数)$^2+$(実数)$^2+\cdots\cdots+$(実数)^2 の形にして利用する。
  - ③ 条件を利用する。

では，トレーニングです。

トレーニング

1 次の不等式を証明しなさい。

(1) $a\geqq b$，$x\geqq y$ であるとき　$(a+b)(x+y)\leqq 2(ax+by)$

(2) $a\geqq b\geqq c$，$x\geqq y\geqq z$ であるとき　$(a+b+c)(x+y+z)\leqq 3(ax+by+cz)$

2 $x>2$，$y>2$ のとき，次の不等式を証明しなさい。

$xy+4>2(x+y)$

3 a，b，c，d が正で，$\dfrac{a}{b}<\dfrac{c}{d}$ のとき，次の不等式を証明しなさい。

$$\frac{a}{b}<\frac{2a+3c}{2b+3d}<\frac{c}{d}$$

4 $a^2+\dfrac{1}{a^2}\geqq a+\dfrac{1}{a}$ を証明しなさい。

5 $x^2+y^2+z^2+3\geqq 2(x+y+z)$ を証明しなさい。

つぎは，平方して差をとる方法に取り組みましょう。

例題 47 　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　不等式の証明(2)

次の不等式を証明しなさい。

$\sqrt{a}+\sqrt{b} \leqq \sqrt{2(a+b)}$

考え方　左辺$=\sqrt{a}+\sqrt{b} \geqq 0$，右辺$=\sqrt{2(a+b)} \geqq 0$ ですから，$(右辺)^2-(左辺)^2 \geqq 0$ を示すと，右辺－左辺$\geqq 0$ がいえます。

解　答　$(右辺)^2-(左辺)^2$

$=2(a+b)-(a+b+2\sqrt{ab})$

$=a-2\sqrt{ab}+b$ 　　　$\leftarrow (\sqrt{a})^2-2\sqrt{a}\sqrt{b}+(\sqrt{b})^2$

$=(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geqq 0$

右辺$\geqq 0$，左辺$\geqq 0$ より　　右辺－左辺$\geqq 0$

したがって　　$\sqrt{a}+\sqrt{b} \leqq \sqrt{2(a+b)}$

等号が成り立つのは，$a=b$ のときに限る。

POINT　◆ $A>0$，$B>0$ のとき　　$A>B \Longleftrightarrow A^2-B^2>0$

簡単ですね。では，トレーニングに進みましょう。

トレーニング

6 次の不等式を証明しなさい。

$\sqrt{a}+\sqrt{b} \leqq \sqrt{2(a+b)}$

7 次の不等式を証明しなさい。

$|a+b+c| \leqq |a|+|b|+|c|$

8 x，y，z が正の数のとき，次の不等式を証明しなさい。

$$\sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{3}} \geqq \frac{x+y+z}{3}$$

9 a，b が実数で，$|a|<1$ かつ $|b|<1$ ならば

$$|a+b|+|a-b|<2$$

であることを証明しなさい。

10 次の不等式を証明しなさい。

$$|a|+|b| \leqq 2\sqrt{a^2+b^2} \leqq 2(|a|+|b|)$$

つぎは，不等式の証明でよく見られる問題，相加平均・相乗平均およびシュワルツの不等式を利用する例題です。

例題 48 　　**相加平均・相乗平均，シュワルツの不等式**

次の不等式を証明しなさい。

(1) $x>0$，$y>0$，$z>0$ のとき $\dfrac{yz}{x}+\dfrac{zx}{y}+\dfrac{xy}{z} \geqq x+y+z$

(2) x，y，z が実数で，$x+y+z=1$ のとき $3(x^2+y^2+z^2) \geqq 1$

考え方 (1) 各項がすべて正ですから，相加平均≧相乗平均が使えます。

(2) シュワルツの不等式 $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) \geqq (ax+by+cz)^2$ で，$a=b=c=1$ の場合を考えます。

解　答 (1) $x>0$，$y>0$，$z>0$ より

$$\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y} \geqq 2\sqrt{\frac{yz}{x}\cdot\frac{zx}{y}}=2z \quad \cdots\cdots\cdots①$$

←相加平均≧相乗平均

$$\frac{zx}{y}+\frac{xy}{z} \geqq 2\sqrt{\frac{zx}{y}\cdot\frac{xy}{z}}=2x \quad \cdots\cdots\cdots②$$

$$\frac{xy}{z}+\frac{yz}{x} \geqq 2\sqrt{\frac{xy}{z}\cdot\frac{yz}{x}}=2y \quad \cdots\cdots\cdots③$$

①，②，③より　　←①，②，③の左辺どうし，右辺どうしの和

$$2\left(\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}+\frac{xy}{z}\right) \geqq 2(x+y+z)$$

したがって　$\dfrac{yz}{x}+\dfrac{zx}{y}+\dfrac{xy}{z} \geqq x+y+z$

等号が成り立つのは，$x=y=z$ のときに限る。

(2) $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) \geqq (ax+by+cz)^2$ より　　←シュワルツの不等式

$(1^2+1^2+1^2)(x^2+y^2+z^2) \geqq (1\cdot x+1\cdot y+1\cdot z)^2$　　←$a=b=c=1$

$$3(x^2+y^2+z^2) \geqq (x+y+z)^2$$

$x+y+z=1$ より

$$3(x^2+y^2+z^2) \geqq 1$$

等号が成り立つのは，$x=y=z=\dfrac{1}{3}$ のときに限る。

POINT

◆ **相加平均≧相乗平均**

① $a>0$，$b>0$ のとき　$\dfrac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$

(2) $a>0$，$b>0$，$c>0$ のとき　$\dfrac{a+b+c}{3} \geqq \sqrt[3]{abc}$

◆ **シュワルツの不等式**　$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) \geqq (ax+by+cz)^2$

問題の形を見て，すぐ利用のしかたがわかるように，トレーニングで練習していきましょう。

トレーニング

11 次の不等式を証明しなさい。

(1) $x>0$, $y>0$, $z>0$ のとき $\dfrac{yz}{x}+\dfrac{zx}{y}+\dfrac{xy}{z} \geqq x+y+z$

(2) x, y, z が実数で, $x+y+z=1$ のとき $3(x^2+y^2+z^2) \geqq 1$

12 a, b, c が正の数のとき，次の不等式を証明しなさい。

(1) $\left(\dfrac{b}{a}+\dfrac{c}{b}\right)\left(\dfrac{c}{b}+\dfrac{a}{c}\right)\left(\dfrac{a}{c}+\dfrac{b}{a}\right) \geqq 8$

(2) $a\left(\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)+b\left(\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{a}\right)+c\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right) \geqq 6$

13 $(a^2+b^2+c^2)\left(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}\right) \geqq 9$ を証明しなさい。

14 a, b, c が正の数のとき，次の不等式を証明しなさい。

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geqq \frac{2}{a+b}+\frac{2}{b+c}+\frac{2}{c+a}$$

15 $a+b+c=2$ のとき，次の不等式を証明しなさい。

$$a^2+b^2+c^2 \geqq \frac{4}{3}$$

つぎは，式の大小関係を調べる例題です。

例題 49 　**大小比較**

$a>b>c>d>0$ のとき，次の 5 つの数 x，y，z，p，q の大小関係を調べなさい。

$x=ab+cd$，$y=ac+bd$，$z=ad+bc$，$p=\dfrac{a^2+b^2+c^2+d^2}{2}$，$q=2\sqrt{abcd}$

考え方　$a>b>c>d>0$ をみたすように，たとえば $a=4$，$b=3$，$c=2$，$d=1$ ときめます。すると $x=14$，$y=11$，$z=10$，$p=15$，$q=4\sqrt{6}\fallingdotseq 9.8$ となり，$p>x>y>z>q$ と見当がつきますから，$p-x>0$，$x-y>0$，$y-z>0$，$z-q>0$ を証明します。

解答

$$p-x=\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2+d^2)-(ab+cd)$$

$$=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(c-d)^2\}>0$$

$$x-y=ab+cd-ac-bd=(a-d)(b-c)>0$$

$$y-z=ac+bd-ad-bc=(a-b)(c-d)>0$$

$$z-q=ad+bc-2\sqrt{abcd}=(\sqrt{ad}-\sqrt{bc})^2\geqq 0$$ ←等号が成立

したがって　$\boldsymbol{p>x>y>z\geqq q}$

等号が成り立つのは，$\boldsymbol{ad=bc}$ のときに限る。

注意　見当をつけるところは，答える必要ありません。

POINT　◆ 多くの**数の大小を調べる**には，次の順にします。

① 条件をみたす具体的な値を使って，大小の見当をつけます。

② 見当をつけた大小が正しいことを，必要最小な個数の不等式で証明します。

では，トレーニングに進みましょう。例題をもう一度確認することから始めます。

トレーニング

16 $a>b>c>d>0$ のとき，次の 5 つの数 x，y，z，p，q の大小関係を調べなさい。

$x=ab+cd$，$y=ac+bd$，$z=ad+bc$，$p=\dfrac{a^2+b^2+c^2+d^2}{2}$，$q=2\sqrt{abcd}$

17 a，b が異なる正の数のとき，次の式の大小を調べなさい。

a^5+b^5，$a^3b^2+a^2b^3$

18 a, b, c を正の数とするとき，次の式の大小を調べなさい。

$$\frac{a+b+c}{3},\ \sqrt[3]{abc},\ \frac{\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}}{3}$$

19 実数 a, b, c の間に，$b+c=6+6a+3a^2$, $c-b=4+4a+a^2$ が成り立つとき，a, b, c の大小を定めなさい。

20 $a>0$, $b=\dfrac{1}{2}\left(a+\dfrac{1}{a}\right)$, $c=\dfrac{1}{2}\left(b+\dfrac{1}{b}\right)$ のとき，a, b, c の大小を調べなさい。

きょう最後の例題は，背理法を扱った命題と論証の問題です。

例題 50 　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　**命題と論理**

2 次関数 $f(x)=x^2+ax+b$ が $x=1,\ 2,\ 3$ でとる値の絶対値

$|f(1)|,\ |f(2)|,\ |f(3)|$

の中で，少なくとも 1 つの値は，$\dfrac{1}{2}$ より小さくないことを証明しなさい。ただし，a，b は定数とします。（早稲田大）

考え方 　“少なくとも 1 つは $\dfrac{1}{2}$ より小さくない” ことを，直接証明するのはむずかしいので，背理法を使います。命題を否定して “3 つとも $\dfrac{1}{2}$ より小さい” と仮定すると，矛盾することを導きます。

解　答

$|f(1)|=|1+a+b|<\dfrac{1}{2}$ ………①

$|f(2)|=|4+2a+b|<\dfrac{1}{2}$ ………②

$|f(3)|=|9+3a+b|<\dfrac{1}{2}$ ………③

と仮定する。　←命題を否定する。

①より　$-1<2(1+a+b)<1$ ………④

②より　$-1<2(4+2a+b)<1$ ………⑤

③より　$-1<2(9+3a+b)<1$ ………⑥

⑤より　$-2<-4(4+2a+b)<2$ ………⑦

④＋⑥＋⑦より　←辺々を加える。

$-4<4<4$

となって不合理である。　←矛盾を示す。

したがって，$|f(1)|$，$|f(2)|$，$|f(3)|$ の中で，少なくとも 1 つは $\dfrac{1}{2}$ より小さくない。

POINT

◆ 命題 $p \Longrightarrow q$ を直接証明するのがむずかしいときは，**対偶法**や**背理法**を利用します。

① 対偶法……対偶 $\overline{q} \Longrightarrow \overline{p}$ を証明する。

② 背理法……命題の否定 “p であって，q でないものがある” と**仮定すると矛盾する**ことを示す。

トレーニングの **21** で，もう一度例題の問題に取り組み，考え方をつかみましょう。

トレーニング

21 2次関数 $f(x)=x^2+ax+b$ が $x=1,\ 2,\ 3$ でとる値の絶対値

$$|f(1)|,\ |f(2)|,\ |f(3)|$$

の中で，少なくとも1つの値は，$\dfrac{1}{2}$ より小さくないことを証明しなさい。ただし，a，b は定数とします。 （早稲田大）

22 $ab<1$ ならば a，b の少なくとも一方は1より小さいことを証明しなさい。

23 a，b が正の数で，$ab \geqq 1+a+b$ が成り立つとき，

$$a+b \geqq 2(1+\sqrt{2})$$

であることを示しなさい。 （福井大）

24 x，y，z が正の数で，$(x+y)(x-y)=z^2$ ならば，$x+y>z$ であることを証明しなさい。

25 a，b，c，d はすべて正の数で，$ax^3-bx^2+cx-d=0$ の解がすべて実数であるとき，次の不等式が成り立つことを証明しなさい。

$$bc \geqq 9ad$$

きょうの学習はこれで終わりです。お疲れさまでした。第12日は，等式の証明の学習です。

第 12 日	方程式・不等式　　学習日　月　日
	等式の証明

きょうは，いろいろな等式の証明の問題に取り組みます。等式の証明の考え方をしっかり身につけましょう。

では，基本的な等式の証明の例題から始めましょう。

例題 51　　　　等式の証明

$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{a+x}=0$，$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{a+y}=0$，$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=0$ ならば，$a+b+c=0$ であることを証明しなさい。

考え方　結論の式には，x，y が含まれていないことに着目して，与えられた3つの条件から x，y を消去します。

解　答　$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{a+x}=0$ より　$\dfrac{1}{a+x}=-\dfrac{a+b}{ab}$

よって　$a+x=-\dfrac{ab}{a+b}$　　　　**←$a+b \neq 0$**

したがって　$x=-\dfrac{ab}{a+b}-a=-\dfrac{a^2+2ab}{a+b}$　………①

同様に　$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{a+y}=0$ より　$y=-\dfrac{a^2+2ac}{a+c}$　………②

①，②を $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=0$ に代入して，x，y を消去すると

$$\frac{1}{a}-\frac{a+b}{a^2+2ab}-\frac{a+c}{a^2+2ac}=0$$

分母を払って整理すると

$$-a(a+b+c)=0$$

$a \neq 0$ より　$a+b+c=0$

POINT

◆ **等式 $A=B$ を証明**するには，次のような方法があります。
　① A を変形して B を導きます。
　② A，B をそれぞれ変形して，それらが等しいことを示します。
　③ $A-B=0$ を示します。

◆ 条件式が与えられた等式の証明では，次のようにします。
　① 条件を使って，結論の式にない**文字を消去**します。
　② 証明する等式の左辺−右辺を因数分解して，**条件式を代入**し，$=0$ を示します。

基本的な解法はつかめましたか。では，トレーニングで練習しましょう。

トレーニング

1 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{a+x}=0$，$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{a+y}=0$，$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=0$ ならば，$a+b+c=0$ であることを証明しなさい。

2 次の等式を証明しなさい。

$$2(a^4+b^4)=(a^2+b^2)^2+(a-b)^2(a+b)^2$$

3 次の等式を証明しなさい。

$$\left(\frac{1}{x-y}+\frac{1}{y-z}+\frac{1}{z-x}\right)^2=\frac{1}{(x-y)^2}+\frac{1}{(y-z)^2}+\frac{1}{(z-x)^2}$$

4 $a+b+c=0$ のとき，次の等式を証明しなさい。

$$\frac{b^2-c^2}{a}+\frac{c^2-a^2}{b}+\frac{a^2-b^2}{c}=0$$

5 ある x，y について，$x-by=y-ax=bx+ay=1$，$ab\neq 1$ が成り立つとき，$a^2+b^2+ab+a+b=1$ を示しなさい。

つぎは，条件が比例式で与えられたときの等式の証明を考えます。比例式では，$=k$ をとると有効でしたね。

例題 52 　　　**条件が比例式で与えられた等式の証明**

$\dfrac{a+b}{a-b}=\dfrac{b+c}{b-c}=\dfrac{c+a}{c-a}$ であるとき，次の等式を証明しなさい。

(1) $a+b+c=0$ 　　　(2) $a^2+b^2+c^2=0$

(3) $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=0$

考え方 　条件が比例式ですから，$\dfrac{a+b}{a-b}=\dfrac{b+c}{b-c}=\dfrac{c+a}{c-a}=k$ とおいて，$a+b=(a-b)k$，$b+c=(b-c)k$，$c+a=(c-a)k$ として利用します。

解　答 　$\dfrac{a+b}{a-b}=\dfrac{b+c}{b-c}=\dfrac{c+a}{c-a}=k$ とおくと

$a+b=(a-b)k$ ………①

$b+c=(b-c)k$ ………②

$c+a=(c-a)k$ ………③

(1) ①+②+③より　$2(a+b+c)=0$

よって　$a+b+c=0$

(2) (1)の結果から，①，②，③はそれぞれ

$-c=(a-b)k$ ………④ 　**←$a+b=-c$**

$-a=(b-c)k$ ………⑤ 　**←$b+c=-a$**

$-b=(c-a)k$ ………⑥ 　**←$c+a=-b$**

⑤$\times a+$⑥$\times b+$④$\times c$ より

$-(a^2+b^2+c^2)=\{a(b-c)+b(c-a)+c(a-b)\}k=0$

よって　$a^2+b^2+c^2=0$

(3) (1)，(2)の結果から

$(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)=0$

$2(ab+bc+ca)=0$

よって　$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=0$ 　**←$abc\neq0$ で割る。**

POINT 　◆ 条件が比例式 $\dfrac{b}{a}=\dfrac{d}{c}=\dfrac{f}{e}$ で与えられたときは，$=k$ とおいて

$\boldsymbol{b=ak,\ d=ck,\ f=ek}$

の形で利用すると，簡単にすむことが多くあります。

では，トレーニングに進みましょう。

トレーニング

6 $\dfrac{a+b}{a-b}=\dfrac{b+c}{b-c}=\dfrac{c+a}{c-a}$ であるとき，次の等式を証明しなさい。

(1) $a+b+c=0$

(2) $a^2+b^2+c^2=0$

(3) $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=0$

7 $a:b=c:d$ のとき，次の等式を証明しなさい。ただし，a，b，c，d は0でないとします。

(1) $\dfrac{a-3b}{a+3b}=\dfrac{c-3d}{c+3d}$

(2) $\dfrac{ab-cd}{ab+cd}=\dfrac{a^2-c^2}{a^2+c^2}$

8 次の等式を証明しなさい。

(1) $\dfrac{b}{a}=\dfrac{c}{b}$ のとき，$(a+b+c)(a-b+c)=a^2+b^2+c^2$

(2) $\dfrac{b}{a+b}=\dfrac{d}{c+d}$ のとき，$a^2d^2+b^2c^2=2abcd$

9 $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}$ のとき，次の等式を証明しなさい。ただし，a，b，c は正の数とします。

(1) $\dfrac{x+y+z}{a+b+c}=\dfrac{x}{a}$

(2) $\dfrac{x^3+y^3+z^3}{a^3+b^3+c^3}=\dfrac{xyz}{abc}$

10 $a+b+c \neq 0$ で，$\dfrac{c}{a+b}=\dfrac{a}{b+c}=\dfrac{b}{c+a}$ のとき，次の等式を証明しなさい。

$(a+b)(b+c)(c+a)=8abc$

つぎは，等式の証明の応用問題です。条件式をうまく利用することを考えます。

例題 53 　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　**等式の証明**

$a^2+b^2=1$，$c^2+d^2=1$，$ac+bd=0$ のとき，次の等式が成り立つことを証明しなさい。

(1)　$a^2+c^2=1$　　　　　　　　　　(2)　$b^2+d^2=1$

(3)　$ab+cd=0$

考え方　(1)，(2)は，与えられた条件から，結論にない文字を消去して導きます。(3)は，条件 $ac+bd=0$ の b と c を入れ換えた形であることに着目して，まず，b と c の関係を調べます。

解　答　(1)　$a^2+b^2=1$ から　　$b^2=1-a^2$　　………①

$c^2+d^2=1$ から　　$d^2=1-c^2$　　………②

$ac+bd=0$ から　　$bd=-ac$

よって　　$b^2d^2=a^2c^2$　　………③

①，②を③に代入すると

$$(1-a^2)(1-c^2)=a^2c^2$$

$$1-a^2-c^2+a^2c^2=a^2c^2$$

したがって　　$a^2+c^2=1$

(2)　$a^2+b^2=1$，$c^2+d^2=1$ から

$$(a^2+c^2)+(b^2+d^2)=2$$

(1)の結果から　　$a^2+c^2=1$

よって　　$b^2+d^2=1$

(3)　$a^2+b^2=1$，$a^2+c^2=1$ から　　$b^2=c^2$

よって　　$b=\pm c$，$c=\pm b$（複号同順）

よって　　$ab+cd=a\cdot(\pm c)+(\pm b)\cdot d$

$$=\pm(ac+bd)=0$$

POINT　◆　条件式が与えられた等式を証明する方法には次のようなものがあります。

①　条件の式を使って，結論の式にない文字を消去する。

②　結論の式を，条件で与えられた式が使えるように変形する。

③　証明すべきことを式で表現し，その式が成立することをいう。

トレーニング **11** で，もう一度例題と同じ問題に取り組み，考え方を確認しましょう。

トレーニング

11 $a^2+b^2=1$，$c^2+d^2=1$，$ac+bd=0$ のとき，次の等式が成り立つことを証明しなさい。

(1) $a^2+c^2=1$　　(2) $b^2+d^2=1$

(3) $ab+cd=0$

12 $x+y=a$，$y+z=b$，$z+x=c$，$xyz=1$ のとき，次の等式を証明しなさい。

$(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)=8$

13 $x+y+z=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=1$ のとき，x，y，z のうち少なくとも 1 つは 1 に等しいことを示しなさい。

14 $a+b+c\neq 0$，$a^3+b^3+c^3=3abc$ のとき，$a=b=c$ であることを示しなさい。

15 $a+b+c=2$，$a^2+b^2+c^2=\dfrac{4}{3}$ のとき，次の等式を証明しなさい。

$a+2b+3c=4$

つぎは，恒等式についての基本的な例題です。

例題 54 ―― **1つの文字についての恒等式**

次の等式が x についての恒等式になるように，定数 a，b，c の値を定めなさい。

$$x^2+x+1=a(x+2)^2+b(x+2)+c$$

考え方　右辺を展開して，x について整理します。つぎに，両辺の同次の項の係数を比較して a，b，c についての連立方程式を作って解きます。

解　答　右辺を x について整理すると

$$x^2+x+1=ax^2+(4a+b)x+(4a+2b+c)$$

係数を比較して

$$\begin{cases} 1=a & \leftarrow \boldsymbol{x^2}\text{ の係数} \\ 1=4a+b & \leftarrow \boldsymbol{x}\text{ の係数} \\ 1=4a+2b+c & \leftarrow \text{定数項} \end{cases}$$

これを解くと　$\boldsymbol{a=1,\ b=-3,\ c=3}$

別　解　$x=0$ のとき　$1=4a+2b+c$

$x=-1$ のとき　$1=a+b+c$

$x=-2$ のとき　$3=c$

これを解くと　$\boldsymbol{a=1,\ b=-3,\ c=3}$

このとき，右辺$=(x+2)^2-3(x+2)+3=x^2+x+1$

となり，与えられた等式は恒等式になっている。

POINT
- ◆ 等式で，含まれる文字にどんな値をあてはめても成り立つものを，その文字についての**恒等式**といいます。
- ◆ $ax^3+bx^2+cx+d=a'x^3+b'x^2+c'x+d'$ が x についての恒等式ならば

  $a=a'$，$b=b'$，$c=c'$，$d=d'$

  とくに，$ax^3+bx^2+cx+d=0$ のとき，$a=b=c=d=0$

では，トレーニングに進みましょう。

トレーニング

16 次の等式が x についての恒等式になるように，定数 a，b，c の値を定めなさい。

$$x^2+x+1=a(x+2)^2+b(x+2)+c$$

17 次の等式が x についての恒等式になるように，定数 a，b，c，d の値を定めなさい。

(1) $x^3+2x^2+5=ax^3+b(x+1)(x-1)+c$

(2) $ax^3+bx^2+cx+d=(x+1)(x^2+3x+1)$

18 次の等式が x についての恒等式になるように，定数 a，b，c，d の値を定めなさい。

(1) $ax(x-1)(x-2)+b(x-1)(x-2)+c(x-2)+d=x^3$

(2) $x^3-8x^2+23x-26=a(x-2)^3+b(x-2)^2+c(x-2)+d$

19 次の等式が x についての恒等式になるように，定数 a，b，c の値を定めなさい。

(1) $\dfrac{3}{x^3+1}=\dfrac{a}{x+1}+\dfrac{bx+c}{x^2-x+1}$

(2) $\dfrac{4}{x(x-1)(x-2)}=\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{x-1}+\dfrac{c}{x-2}$

20 $(k+1)x+(k-1)y-8=0$ は，k の値によらず，ある x，y の組に対して成り立ちます。このx，y の組を求めなさい。

つぎも，恒等式についての例題です。2つ以上の文字を含むものに取り組みましょう。

例題 55 ―――― **2つ以上の文字についての恒等式**

$x+y+z=2$，$x-y-3z=0$ をみたす x，y，z の任意の値に対して，つねに

$$ax^2+by^2+cz^2=1$$

となるように，定数 a，b，c の値を定めなさい。

考え方　2つの条件式から，x，y をそれぞれ z で表して，$ax^2+by^2+cz^2=1$ に代入し，z についての恒等式を導きます。

解　答

$x+y+z=2$ ………①

$x-y-3z=0$ ………②

①＋②より　$2x-2z=2$

よって　$x=z+1$ ………③

これを①に代入して　$y=-2z+1$ ………④

③，④を，$ax^2+by^2+cz^2=1$ に代入して整理すると　**←x，y を消去する。**

$$(a+4b+c)z^2+2(a-2b)z+a+b-1=0$$

これが z についての恒等式であるから

$$\begin{cases} a+4b+c=0 \\ a-2b=0 \\ a+b-1=0 \end{cases}$$

←右辺が 0 であるから全係数が 0

これを解くと　$\boldsymbol{a=\frac{2}{3}}$，$\boldsymbol{b=\frac{1}{3}}$，$\boldsymbol{c=-2}$

POINT
- ◆ 2つ以上の文字についての恒等式では，両辺の**同類項の係数**を比べます。
- ◆ 条件が与えられた恒等式では，条件式を使って，**文字を減らす**方針で変形します。

ちょっとくふうをすれば，考え方は同じですね。では，きょう最後のトレーニングです。

トレーニング

21 $x+y+z=2$，$x-y-3z=0$ をみたす x，y，z の任意の値に対して，つねに

$$ax^2+by^2+cz^2=1$$

となるように，定数 a，b，c の値を定めなさい。

22 次の等式が x，y についての恒等式になるように，定数 a，b，c，d の値を定めなさい。

(1) $x^2+cy^2=a(x-2y)^2+b(x-y)^2$

(2) $2x^2+axy-3y^2+bx+10y-3=(x+3y+c)(2x+dy+3)$

23 $x+y=1$ のとき，次の等式がつねに成り立つように，定数 a，b，c の値をきめなさい。

$$x^2+axy+y^2+2x+by+c=0$$

24 $x-y+z=0$，$2x-y-z+1=0$ を満足するすべての x，y，z の値に対して，$ax^2+by^2+cz^2=1$ となるように，定数 a，b，c の値を定めなさい。

25 $(l-m)x^2+ly^2+2my-4l=0$ は，l，m の値にかかわらず，ある実数 x，y の組に対して成り立ちます。この x，y の組をすべて求めなさい。

きょうの学習はこれで終わりです。第13日は，式の値についての学習です。

第 13 日

方程式・不等式　　学習日　月　日

式の値

きょうは，いろいろな式の値を求める問題に取り組んでいきます。条件式をいかに使っていくかを練習しましょう。

では，輪環形になっている式の値から始めましょう。

例題 56　　**循環形の式の値**

$x \neq y$ で，$x^2-yz=y^2-zx=1$ ならば，$z^2-xy=1$ であることを証明しなさい。

考え方　条件の式と結論の式の x^2-yz，y^2-zx，z^2-xy は輪環形になっていることに着目します。こういうときは，条件の差，ここでは $x^2-yz-(y^2-zx)=0$ を作って，x，y，z の関係を導きます。そして，この関係を使って，1 つの文字を消去します。

解　答

$$x^2-yz-y^2+zx=0$$　　**←2 つの条件式の差を作る。**

$$(x-y)(x+y+z)=0$$

$x \neq y$ より　$x+y+z=0$　　……①　　**←x，y，z の関係式**

①より，$x^2-yz=1$ から z を消去すると　　**←条件から 1 文字消去**

$$x^2-y(-x-y)=1$$

$$x^2+xy+y^2=1 \quad \cdots\cdots②$$

よって　$z^2-xy-1=(-x-y)^2-xy-1$　　**←結論から 1 文字消去**

$$=x^2+xy+y^2-1$$

$$=0$$

したがって　$z^2-xy=1$

POINT　◆　条件 $A=B=C$ が，x，y，z についての**輪環の形の式**になっている場合は，

$$A-B=0,\ B-C=0$$

などから得られる式を利用する方法が有効です。

では，トレーニングに進みましょう。

トレーニング

1　$x \neq y$ で，$x^2-yz=y^2-zx=1$ ならば，$z^2-xy=1$ であることを証明しなさい。

2 $x+\dfrac{1}{y}=1$，$y+\dfrac{1}{z}=1$ のとき，$xyz+1=0$，$z+\dfrac{1}{x}=1$ であることを示しなさい。

3 $z \neq 1$，$x+yz=-1$，$y+zx=-1$，$xyz=1$ のとき

$$z+xy=-1$$

であることを示しなさい。

4 $abc=-1$，$a \neq -1$，$b \neq -1$，$c \neq -1$ のとき

$$\frac{a+b}{(a+1)(b+1)}+\frac{b+c}{(b+1)(c+1)}+\frac{c+a}{(c+1)(a+1)}=2$$

であることを示しなさい。

5 $abc=1$ のとき，次の式が成り立つことを示しなさい。

$$\frac{a}{ab+a+1}+\frac{b}{bc+b+1}+\frac{c}{ca+c+1}=1$$

つぎは，対称式になっている式の値に関する例題です。対称式では，基本対称式 $x+y$ と xy で表すことを考えます。

例題 57 　　　　**対称式の値**

$x+y=3$，$x^2+y^2=8$ のとき，次の式の値を求めなさい。

(1) xy 　　　　(2) $(x^2+2)(y^2+2)$

(3) x^4y+xy^4

考え方　x，y についての対称式は，基本対称式 $x+y$，xy だけの式で表せますから，条件から，$x+y$，xy の値を求め，それを変形した式に代入します。

解　答　(1) $xy=\dfrac{(x+y)^2-(x^2+y^2)}{2}=\dfrac{3^2-8}{2}=\mathbf{\dfrac{1}{2}}$

(2) 与式 $=x^2y^2+2x^2+2y^2+4$

$=(xy)^2+2(x^2+y^2)+4$

$=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+2\cdot 8+4=\mathbf{\dfrac{81}{4}}$

(3) 与式 $=xy(x^3+y^3)$

$=xy\{(x+y)^3-3xy(x+y)\}$

$=\dfrac{1}{2}\left(3^3-3\cdot\dfrac{1}{2}\cdot 3\right)=\mathbf{\dfrac{45}{4}}$

POINT　◆ x，y についての対称式は，**基本対称式 $x+y$，xy** だけで表せますから，x，y の値はわからなくても，$x+y$，xy さえわかれば，その値を求めることができます。

考え方はつかめましたね。では，トレーニングに進みましょう。

トレーニング

6 $x+y=3$，$x^2+y^2=8$ のとき，次の式の値を求めなさい。

(1) xy 　　　　(2) $(x^2+2)(y^2+2)$

(3) x^4y+xy^4

7 $x+y=2$，$xy=-8$ のとき，次の式の値を求めなさい。

(1) x^2y+xy^2　　(2) $(x-y)^2$

(3) $\dfrac{y}{x+1}+\dfrac{x}{y+1}$

8 $x+y+z=3$，$xy+yz+zx=-1$，$xyz=-3$ のとき，次の式の値を求めなさい。

(1) $x^2+y^2+z^2$　　(2) $x^2yz+xy^2z+xyz^2$

(3) $\dfrac{y+z}{x}+\dfrac{z+x}{y}+\dfrac{x+y}{z}$

9 次の式の値を求めなさい。

(1) $x^2+y^2=7$，$x+y=3$ のとき，x^3+y^3，x^4+y^4

(2) $x+\dfrac{1}{x}=3$ のとき，$x^2+\dfrac{1}{x^2}$，$x^3+\dfrac{1}{x^3}$

10 x，y，z が正の数で，$x^2+y^2+z^2=19$，$xy+yz+zx=3$，$xyz=7$ のとき，次の式の値を求めなさい。

(1) $x^3+y^3+z^3$　　(2) $(x+2)(y+2)(z+2)$

(3) $\dfrac{yz}{x^2}+\dfrac{zx}{y^2}+\dfrac{xy}{z^2}$

つぎは，$a+b+c=0$ のタイプの条件式が与えられたときの式の値を求める例題です。

例題 58 ―――― **条件式と式の値**

$a+b+c=0$ のとき，次の式の値を求めなさい。

(1) $a\left(\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)+b\left(\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{a}\right)+c\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)$　　(2) $\dfrac{a^2}{bc}+\dfrac{b^2}{ca}+\dfrac{c^2}{ab}$

考え方　(1)は，$\dfrac{1}{a}$，$\dfrac{1}{b}$，$\dfrac{1}{c}$ について整理してみます。また，条件を $a+b=-c$，$b+c=-a$，$c+a=-b$ と循環形に利用します。(2)は条件を使って1つの文字を消去して整理します。

解　答　(1)　与式 $=\dfrac{b+c}{a}+\dfrac{c+a}{b}+\dfrac{a+b}{c}$

$=\dfrac{-a}{a}+\dfrac{-b}{b}+\dfrac{-c}{c}$　　**←$b+c=-a$，$c+a=-b$，$a+b=-c$**

$=\mathbf{-3}$

(2)　与式 $=\dfrac{a^3+b^3+c^3}{abc}$

$=\dfrac{a^3+b^3+\{-(a+b)\}^3}{-ab(a+b)}$　　**←c を消去**

$=\dfrac{-3ab(a+b)}{-ab(a+b)}$

$=\mathbf{3}$

別　解　(2)　与式 $=\dfrac{a^3+b^3+c^3}{abc}$

$=\dfrac{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc}{abc}$　　**←$a+b+c=0$**

$=\mathbf{3}$

POINT　◆　$a+b+c=0$ のときの**式の値**を求めるには，次のような方法があります。

①　$c=-(a+b)$ として，c を消去して整理する。

②　$a+b+c$ を因数にもつ部分と，残りの部分に分けて，残りの部分を計算する。

では，トレーニングです。

トレーニング

11 $a+b+c=0$ のとき，次の式の値を求めなさい。

(1) $a\left(\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)+b\left(\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{a}\right)+c\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)$　　(2) $\dfrac{a^2}{bc}+\dfrac{b^2}{ca}+\dfrac{c^2}{ab}$

12 $x+y+1=0$ のとき，$x^3+y^3+x^2+y^2+x^2y+xy^2$ の値を求めなさい。

13 $a+b+c=0$ のとき，$2+bc-(b+a)(c+a)$ の値を求めなさい。

14 $x+y+z=0$ のとき，次の式の値を求めなさい。

$$\frac{y^2-z^2}{x}+\frac{z^2-x^2}{y}+\frac{x^2-y^2}{z}$$

15 $a^2+b^2=c^2$ のとき，$a^3+b^3+c^3+a^2(b-c)+b^2(a-c)-c^2(a+b)$ の値を求めなさい。

式の値の問題も，いろいろなタイプがでてきましたね。次の例題は，解と係数の関係を利用する応用題です。

例題 59 **複雑な条件式と式の値**

a，b，c を異なる数，x，y，z を連立方程式

$$x+ay+a^2z=a^3,\quad x+by+b^2z=b^3,\quad x+cy+c^2z=c^3$$

の解とするとき，$a^3+b^3+c^3$ を x，y，z で表しなさい。

考え方 式の見方を変えて，x，y，z についての連立方程式を，a，b，c についての3つの3次方程式と考えます。すると，3つの方程式は3次の係数，2次の係数，1次の係数，定数項がすべて等しいので，1つの方程式 $t^3-zt^2-yt-x=0$ で，a，b，c が解になっていることを示しています。そこで，解と係数の関係から，$a+b+c=z$，$ab+bc+ca=-y$，$abc=x$ がいえます。

解答 $x+ay+a^2z=a^3$，$x+by+b^2z=b^3$，$x+cy+c^2z=c^3$

から，a，b，c は，次の3次方程式の解である。

$$t^3-zt^2-yt-x=0$$

よって，解と係数の関係から

$$a+b+c=z,\quad ab+bc+ca=-y,\quad abc=x$$

したがって

$$\begin{aligned}
&a^3+b^3+c^3\\
&=(x+ay+a^2z)+(x+by+b^2z)+(x+cy+c^2z)\\
&=3x+(a+b+c)y+(a^2+b^2+c^2)z\\
&=3x+(a+b+c)y+\{(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)\}z\\
&=3x+zy+\{z^2-2\cdot(-y)\}z\\
&=\boldsymbol{3x+3yz+z^3}
\end{aligned}$$

POINT ◆ $x+ay+a^2z=a^3$，$x+by+b^2z=b^3$，$x+cy+c^2z=c^3$ は

$$x+yt+zt^2=t^3 \quad \cdots\cdots ①$$

の **t をそれぞれ a，b，c に変えたもの**です。これは，a，b，c が方程式①の解であることを示しています。

トレーニング 16 で，もう一度例題の問題に取り組み，考え方の確認をしましょう。

トレーニング

16 a，b，c を異なる数，x，y，z を連立方程式

$$x+ay+a^2z=a^3,\quad x+by+b^2z=b^3,\quad x+cy+c^2z=c^3$$

の解とするとき，$a^3+b^3+c^3$ を x，y，z で表しなさい。

17 a, b を異なる数，x, y を連立方程式

$$x+ay=a^2,\quad x+by=b^2$$

の解とするとき，a^2+b^2 を x, y で表しなさい。

18 $x^2-3x+p=0$ の 2 つの解を α, β, $x^2-3p+q=0$ の 2 つの解を γ, δ とするとき

$$(\gamma-\alpha)(\delta-\beta)(\gamma-\beta)(\delta-\alpha)$$

を，p, q で表しなさい。

19 $(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)+(x-a)(x-b)=0$ の 2 つの解を α, β とし，α, β は a, b, c とは等しくないとします。このとき

$$\frac{1}{(a-\alpha)(a-\beta)}+\frac{1}{(b-\alpha)(b-\beta)}+\frac{1}{(c-\alpha)(c-\beta)}$$

の値を求めなさい。

20 $abc\neq0$ で，x, y, z を連立方程式 $2a^3+(x+y+z)a^2-xyz=0$, $2b^3+(x+y+z)b^2-xyz=0$, $2c^3+(x+y+z)c^2-xyz=0$ の解とするとき，$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=0$ であることを証明しなさい。

つぎは，きょう最後の例題です。無理数解が与えられているときの式の値を求めます。

例題 60 　　**無理数解と式の値**

$x=2+\sqrt{3}$ のとき，$2x^3-6x^2+3x+4$ の値を求めなさい。

考え方　$x=2+\sqrt{3}$ を解とし，しかも係数が整数である2次方程式を作ると $x^2-4x+1=0$ となります。つぎに，与えられた式を x^2-4x+1 で割った商と余りで表します。そして，余りの x の1次式に $x=2+\sqrt{3}$ を代入します。

解　答　$x=2+\sqrt{3}$ から　　$x-2=\sqrt{3}$　　**←右辺を $\sqrt{3}$ だけにする。**

よって　　$(x-2)^2=3$　　**←両辺を平方する。**

$x^2-4x+1=0$

$2x^3-6x^2+3x+4$ を x^2-4x+1 で割ると

商は $2x+2$，余りは $9x+2$

よって

$$2x^3-6x^2+3x+4=(x^2-4x+1)(2x+2)+9x+2$$　**←$x^2-4x+1=0$**

$$=9\cdot(2+\sqrt{3})+2$$　**←$x=2+\sqrt{3}$ を代入**

$$=\mathbf{20+9\sqrt{3}}$$

POINT　◆ **無理数解**や，**複素数解**が与えられている式の値を求めるには，この無理数や複素数を解とする**整数係数の2次方程式**を利用します。

では，最後のトレーニングに進みましょう。

トレーニング

21 $x=2+\sqrt{3}$ のとき，$2x^3-6x^2+3x+4$ の値を求めなさい。

22 $x=-3+\sqrt{5}$ のとき，次の式の値を求めなさい。

(1) $3x^3+4x^2+7x+9$　　(2) $x^4+6x^3+4x^2+6x+4$

23 $x=1-i$ のとき，次の式の値を求めなさい。

(1) $2x^4-x^3-6x^2-7x-53$ (2) x^3+x^2-9x+4

24 $x^2-5x+1=0$ のとき，次の式の値を求めなさい。

(1) x^3-5x^2+7 (2) $x^4-4x^3-11x^2+36x-7$

25 $x^2+2x+7=0$ のとき，次の式の値を求めなさい。

(1) $2x^3+6x^2+5x+2$ (2) x^4-3x^2+2x-8

きょうは，式の値について学習しました。第14日は，方程式・不等式の演習問題に取り組みます。

第 14 日	方程式・不等式　　学習日　　月　　日 **演習問題**

きょうは，第７日～第13日で学習してきた方程式・不等式についての演習問題をします。全部で10題です。実力だめしのつもりで取り組みましょう。

1　2次方程式 $ax^2+(a-b)^2x+a^2+ab+b^2=0$ の１つの解が，a の値にかかわらず一定であるとき，他の解の値はどんな範囲にありますか。ただし，a，bは実数とします。

2　$x^2+ax+bc=0$ および $x^2+bx+ca=0$ が，ただ１つの共通解をもつとき，その共通でない２つの解は，$x^2+cx+ab=0$ の解であることを証明しなさい。ただし，$c\neq 0$ とします。

3 2次方程式 $x^2+2kx+2k^2-1=0$ が少なくとも1つの正の解をもつように k の値の範囲を定めなさい。

4 次の方程式を解きなさい。

(1) $2x^4-5x^3+x^2-5x+2=0$

(2) $x^5+2x^4-3x^3-3x^2+2x+1=0$

5 次の方程式を解きなさい。

(1) $x^2-x-1-\dfrac{1}{2x}+\dfrac{1}{4x^2}=0$

(2) $\dfrac{3}{2(x^2-5x+3)}-\dfrac{2x^2-10x+3}{5}=\dfrac{1}{5}$

6 方程式 $\sqrt{1-x^2}=1-ax$ を解きなさい。

7 x についての不等式 $(x-a)(x^2-x+1)>(x-b)(x^2+x+1)$ を満足する x の値の範囲が $\frac{1}{2}<x<1$ であるとき，実数 a，b の値を求めなさい。

8 次の不等式を解きなさい。

(1) $x^2-x-5>|2x-1|$

(2) $x^3-22x^2+75|x|-54<0$

9 a, b, cが正の数であるとき，次の不等式を証明しなさい。

(1) $(b+c)(c+a)(a+b) \geqq 8abc$

(2) $(a+b+c)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right) \geqq 9$

10 a, b, c, dを実数として，$a^2-bc=b^2-cd=c^2-da=d^2-ab$のとき，次のことを証明しなさい。

(1) $a=b=c=d$ または $a+b+c+d=0$

(2) $ab(a+b)+cd(c+d)=bc(b+c)+da(d+a)$

これで，演習問題は終わりです。解けなかった問題は，解答をよく見て，必ず解けるようにしておきましょう。

関　数

数と式，方程式・不等式が終わって，数学Ⅰも半分ちかく終わりました。ここまでで，式の扱いについては，かなり力がついているはずです。
ここからは，関数についての学習にはいります。ここでとりあげている関数は，２次関数，分数関数，無理関数といった基本的な関数です。これらのうちでは，やはり，２次関数が基本です。２次関数の最大・最小，２次関数のグラフと解について，完全にしておきましょう。

第 15 日	関　数　　　学習日　　月　　日 2次関数

きょうから，関数について学習します。関数では，とくに2次関数が重点です。2次関数のグラフが正しくかけることはもちろんのこと，その性質も十分理解しておく必要があります。

まず，2次関数以外の関数のグラフをかく問題からはじめましょう。

例題 61　　関数とグラフ

$$f(x)=\begin{cases} 2x & \left(x<\dfrac{1}{2}\right) \\ 2-2x & \left(x\geqq\dfrac{1}{2}\right) \end{cases}$$ とするとき，次の問いに答えなさい。

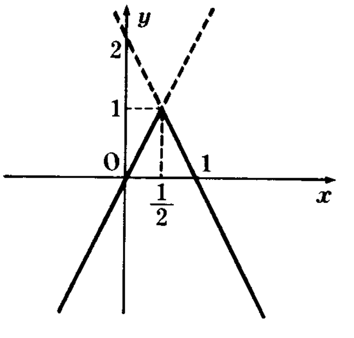
(1)　$y=f(x)$ のグラフをかきなさい。

(2)　$y=\dfrac{3}{2}x$ と，$y=f(x)$ との交点を求めなさい。

考え方　$y=2x\left(x<\dfrac{1}{2}\right)$ のグラフは，直線 $y=2x$ のうちの $x<\dfrac{1}{2}$ に対応する部分です。

$y=2x\left(x<\dfrac{1}{2}\right)$ と，$y=\dfrac{3}{2}x$ の交点の座標は，$y=2x$ と $y=\dfrac{3}{2}x$ を連立方程式として解き，$x<\dfrac{1}{2}$ をみたすものを求めます。

解　答　(1)　図のようになる。



(2)　$y=2x$　　　　………①

$y=2-2x$　　　………②

$y=\dfrac{3}{2}x$　　　　………③

とおく。

(i)　$x<\dfrac{1}{2}$ のとき　　………④

①，③から　$2x=\dfrac{3}{2}x$　　$x=0$

これは④をみたしている。

$x=0$ を①に代入すると　　$y=0$

よって，求める交点の座標は　　**(0，0)**

(ii)　$x\geqq\dfrac{1}{2}$ のとき　　………⑤

②，③から　$2-2x=\dfrac{3}{2}x$　　$x=\dfrac{4}{7}$

これは⑤をみたしている。

$x=\dfrac{4}{7}$ を③に代入すると　　$y=\dfrac{6}{7}$

よって，求める交点の座標は　　$\left(\boldsymbol{\dfrac{4}{7}},\ \boldsymbol{\dfrac{6}{7}}\right)$

POINT
- ◆ 1次関数のグラフは直線になります。変域に制限がつくときは，それに対応する部分になります。
- ◆ **2つの直線の交点の座標は，2つの直線の方程式を連立方程式として解いた解で求められます。**

変域が分かれているときは，変域ごとに，絶対値がついているときは場合分けをして，かいていきます。では，グラフをかいてみましょう。

トレーニング

1 $f(x)=\begin{cases} 2x & \left(x<\dfrac{1}{2}\right) \\ 2-2x & \left(x\geqq\dfrac{1}{2}\right) \end{cases}$ とするとき，次の問いに答えなさい。

(1) $y=f(x)$ のグラフをかきなさい。

(2) $y=\dfrac{3}{2}x$ と，$y=f(x)$ との交点を求めなさい。

2 $f(x)=\begin{cases} 2x+7 & (x<-1) \\ -x+4 & (x\geqq-1) \end{cases}$ とするとき，次の問いに答えなさい。

(1) 関数 $y=f(x)$ のグラフをかきなさい。

(2) 関数 $y=f(x)$ と関数 $y=-\dfrac{1}{2}x+2$ のグラフの交点の座標を求めなさい。

3 関数 $y=|x+3|-2\ (-6<x\leqq2)$ のグラフをかいて，最大値と最小値を求めなさい。

4 x を越えない最大の整数を $[x]$ という記号で表すとき，次の関数 $f(x)$ のグラフをかきなさい。ただし，$-3\leqq x\leqq3$ とします。

(1) $f(x)=[x]$　　　(2) $f(x)=x-[x]$

ガウス記号を含む関数のグラフもかけましたね。つぎは，通る点や頂点の座標から２次関数を決める問題です。

例題 62 　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　**２次関数の決定**

２次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフは，２点 $(-1,\ 0)$，$(2,\ 15)$ を通り，かつ $y=7x-1$ に接するといいます。$y=ax^2+bx+c$ の頂点の座標を求めなさい。ただし，a は整数とします。

考え方　まず，係数 a，b，c を決めてから，それを変形して頂点の座標を求めます。

グラフが点 $(-1,\ 0)$ を通るとは，$y=ax^2+bx+c$ で，$x=-1$ のとき，$y=0$ ということです。また，$y=ax^2+bx+c$ と $y=7x-1$ が接するとき，これらから y を消去した方程式 $ax^2+bx+c=7x-1$ の判別式が０になります。

解答　$y=ax^2+bx+c$ ………①，$y=7x-1$ ………②とおく。

①のグラフが２点 $(-1,\ 0)$，$(2,\ 15)$ を通ることから

$a-b+c=0$ ………③　　**←$(-1,\ 0)$ を通る。**

$4a+2b+c=15$ ………④　　**←$(2,\ 15)$ を通る。**

直線②が放物線①に接することから，①，②から y を消去した方程式

$$ax^2+(b-7)x+c+1=0$$

の判別式を D とおくと

$D=(b-7)^2-4a(c+1)=0$ ………⑤　　**←接する ⇄ 判別式＝0**

③，④より　$b=5-a$，$c=5-2a$　　**←③，④，⑤を連立方程式として解く。**

これらを⑤に代入すると

$$9a^2-20a+4=0$$

$$(a-2)(9a-2)=0$$

a は整数であるから　　$a=2$

よって　$b=3$，$c=1$

したがって，①の頂点の座標は

$$y=2x^2+3x+1=2\left(x+\frac{3}{4}\right)^2-\frac{1}{8}$$

より　$\left(-\dfrac{3}{4},\ -\dfrac{1}{8}\right)$

POINT

◆ **$y=f(x)$ のグラフが，点 $(a,\ b)$ を通る $\Longleftrightarrow$ $b=f(a)$**

◆ 放物線 $y=ax^2+bx+c$ と直線 $y=mx+n$ が**接するとき**，方程式

$$ax^2+bx+c=mx+n$$

の判別式を D とおくと，$\boldsymbol{D=0}$

◆ 放物線 $y=ax^2+bx+c=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{b^2-4ac}{4a}$ で

軸は直線 $\boldsymbol{x=-\dfrac{b}{2a}}$，**頂点**は点 $\left(\boldsymbol{-\dfrac{b}{2a},\ -\dfrac{b^2-4ac}{4a}}\right)$

このような２次関数の決定問題は，関数の基本です。軸や頂点，また２次関数の概形はしっかりとおさえておくことです。では，トレーニングしなさい。

トレーニング

5 2次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフは，2点 $(-1,\ 0)$，$(2,\ 15)$ を通り，かつ $y=7x-1$ に接するといいます。$y=ax^2+bx+c$ の頂点の座標を求めなさい。ただし，a は整数とします。

6 関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフは，放物線 $y=-x^2+4x+3$ を平行移動したもので，2点 $(-3,\ 3)$，$(1,\ -1)$ を通るといいます。定数 a，b，c の値を求めなさい。

7 頂点が点 $(3,\ -4)$ で，点 $(5,\ 4)$ を通る放物線の式を求めなさい。

8 放物線 $y=ax^2+bx+c$ は，3点 $(-4,\ -5)$，$(-2,\ 7)$，$(-1,\ 4)$ を通るといいます。この放物線の頂点の座標を求めなさい。

9 放物線 $y=-x^2-2x-9$ と接し，2点 $(-3,\ 0)$，$(1,\ 0)$ を通る放物線の頂点の座標を求めなさい。

こんどは，与えられた条件から2次関数の係数を決定する問題です。

例題 63 **放物線と定数係数**

放物線 $y=ax^2+(5a+6)x+(4a+8)$ は，定数 a の値にかかわらず，つねに2定点を通ります。この定点の座標を求めなさい。

考え方 与えられた方程式を a について整理すると $(x^2+5x+4)a+6x+8-y=0$ です。これが a の値にかかわらず成り立つことから，$x^2+5x+4=0$，$6x+8-y=0$ を連立方程式として解きます。

解　答 $(x^2+5x+4)a+6x+8-y=0$　　**←a について整理**

これが a の値にかかわらず成り立つことから

$$\begin{cases} x^2+5x+4=0 & \text{←}a\text{ の係数}=0 \\ 6x+8-y=0 & \text{←定数項}=0 \end{cases}$$

をみたす $(x,\ y)$ が，求める定点の座標である。

これを解くと

$x=-1,\ y=2$　または　$x=-4,\ y=-16$

したがって，求める2定点の座標は

$\boldsymbol{(-1,\ 2),\ (-4,\ -16)}$

POINT ◆ 定数 a を係数に含む x についての関数 y で，**a の値にかかわらず，つねに通る定点の座標を求めるには，**a について整理して

$$\boldsymbol{F(x,\ y)a+G(x,\ y)=0}$$

とし，$\begin{cases} \boldsymbol{F(x,\ y)=0} \\ \boldsymbol{G(x,\ y)=0} \end{cases}$ の連立方程式を解きます。

定点を通るというときは，係数について整理してみます。また，接しているというようなときは，接する条件を求めることになります。では，問題を解いてみましょう。

トレーニング

10 放物線 $y=ax^2+(5a+6)x+(4a+8)$ は，定数 a の値にかかわらず，つねに2定点を通ります。この定点の座標を求めなさい。

11 放物線 $y=ax^2+(2a+3)x+(a-6)$ は，定数 a の値にかかわらず，つねに1定点を通ります。この定点の座標を求めなさい。

12 放物線 $y=mx^2-2mx+m+1$ は，定数 m の値にかかわらず，つねにある1直線と接します。この直線の式を求めなさい。

13 放物線 $y=2x^2-4(m+2)x+m^2-3$ の頂点は，定数 m の値にかかわらず，つねにある放物線上にあります。この放物線の式を求めなさい。

14 放物線 $y=-2x^2+4px-p^2-2p$ が，定数 p の値にかかわらず，つねに放物線 $y=ax^2+bx+c$ と接するとき，定数 a，b，c の値を求めなさい。

問題の意図にあわせて求めていけばできたはずです。つぎは，問題の条件にしたがって関数を作成する問題です。

例題 64 ―――― **2次関数の具体例**

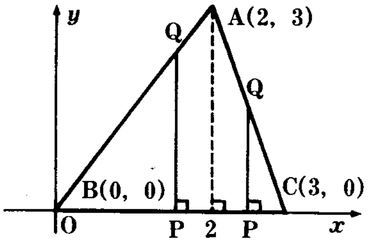
点 A(2, 3)，B(0, 0)，C(3, 0) を頂点とする三角形があります。
底辺 BC 上の 1 点 P(x, 0) を通り，BC に垂直な直線でこの三角形を 2 つの部分に分けるとき，頂点 B の側にある部分の面積を x の関数として表し，そのグラフをかきなさい。

考え方 x の変域は $0 \leqq x \leqq 3$ です。そして，P が $0 \leqq x \leqq 2$ 内を動くとき，Q は AB 上を動き，B の側にある図形は三角形です。また，P が $2 \leqq x \leqq 3$ 内を動くとき，Q は AC 上を動き，B の側にある図形は四角形です。この四角形の面積は，△ABC－△PQC で求められます。

解　答 直線 AB の方程式は　$y=\dfrac{3}{2}x$

直線 AC の方程式は　$y=-3(x-3)$

P(x, 0) を通り x 軸と垂直な直線が，AB または AC と交わる点を Q とし，PQ に関して B の側にある図形の面積を y とする。



(ⅰ)　$0 \leqq x \leqq 2$ のとき

頂点 B の側にある図形は△BQP で，

OP$=x$，PQ$=\dfrac{3}{2}x$　　**←Q は AB 上**

よって　$\boldsymbol{y=\dfrac{3}{4}x^2}$

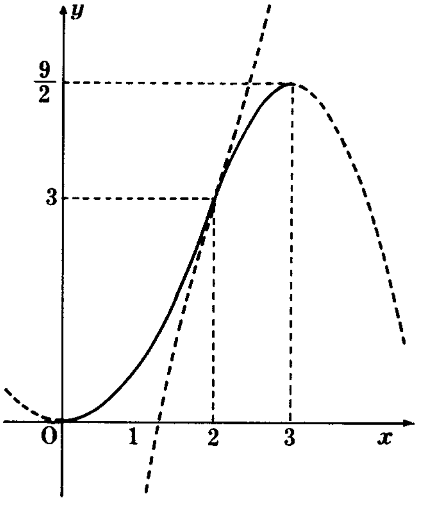
(ⅱ)　$2 \leqq x \leqq 3$ のとき

△ABC$=\dfrac{9}{2}$

PC$=3-x$，PQ$=-3(x-3)$ より　**←Q は AC 上**

△QPC$=\dfrac{3}{2}(x-3)^2$

よって　$y=\dfrac{9}{2}-\dfrac{3}{2}(x-3)^2=\boldsymbol{-\dfrac{3}{2}x^2+9x-9}$



(ⅰ)，(ⅱ)より，この関数のグラフは図のようになる。

POINT ◆ 文章題では，まず，**図をかいて題意をつかみます。**
そして，上の場合でいえば，Q が AB 上を通るときと AC 上を通るときがありますが，そのような状況の変わり目で**場合分けして，その変域を考え，問題を解きます。**

問題の条件を式に表すと，2 次関数になりました。その 2 次関数のグラフをかく問題でした。では，類題の練習です。

トレーニング

15 点 A(2, 3), B(0, 0), C(3, 0) を頂点とする三角形があります。
底辺 BC 上の 1 点 P(x, 0) を通り，BC に垂直な直線でこの三角形を 2 つの部分に分けるとき，頂点 B の側にある部分の面積を x の関数として表し，そのグラフをかきなさい。

16 4 点 A(0, 2), B(−1, 0), C(1, 0), D(2, 2) を頂点とする平行四辺形が，辺 BC 上の 1 点 P(x, 0) を通り y 軸に平行な直線で 2 つの部分に分けられます。このとき，頂点 D の側にある部分の面積を x の関数として表し，そのグラフをかきなさい。

17 3 点 A(0, 4), B(−2, 0), C(4, 0) を頂点とする三角形があります。直線 $y=x+a$ によってこの三角形を 2 つの部分に分けるとき，頂点 A の側にある部分の面積 S を a の関数として表し，そのグラフをかきなさい。

18 4 点 A(−2, 2), B(−2, −2), C(2, −2), D(2, 2) を頂点とする正方形 ABCD が，直線 $y=\frac{1}{2}x+m$ で 2 つの部分に分けられているとき，頂点 C の側にある部分の面積 S を m の関数で表し，そのグラフをかきなさい。

19 4 点 A(0, 1), O(0, 0), B(2, 0), C(2, 1) を頂点とする長方形があります。動点 P は，頂点 O を出発して，O → B → C → A → O の順に長方形の辺上を毎秒 1 の速さで 1 周します。線分 OP を 1 辺とする正方形の面積を出発後の時間の関数で表し，そのグラフをかきなさい。

つぎは，きょうの最後の例題です。放物線が通過する範囲についての問題です。

例題 65 　　　　**放物線の頂点の軌跡**

点 P(p, q) が 3 直線 $x=1$, $y=0$, $y=x+1$ によってできる三角形の周上を 1 周するとき，放物線 $y=x^2-2px+q$ の頂点はどのような線上を動きますか。

考え方 　まず，放物線 $y=x^2-2px+q$ の頂点の座標を (x, y) とし，x, y をそれぞれ p, q で表します。つぎに，点 P(p, q) が 3 直線で囲まれた三角形の周上にある条件を p, q で表します。そして，この両方の条件から p, q を消去し，x, y についての関係を導きます。

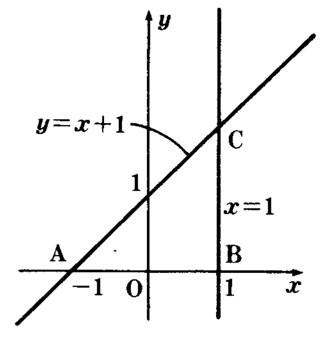
解答 　放物線 $y=x^2-2px+q=(x-p)^2-p^2+q$

の頂点の座標を (x, y) とすると

$x=p$, $y=-p^2+q$ 　　………①

また，3 直線 $x=1$, $y=0$, $y=x+1$ の交点は

A$(-1, 0)$, B$(1, 0)$, C$(1, 2)$



よって

(i) P が AB 上にあるとき

$-1 \leqq p \leqq 1$, $q=0$

これと①から

$y=-x^2$ $(-1 \leqq x \leqq 1)$

(ii) P が BC 上にあるとき

$p=1$, $0 \leqq q \leqq 2$

これと①から

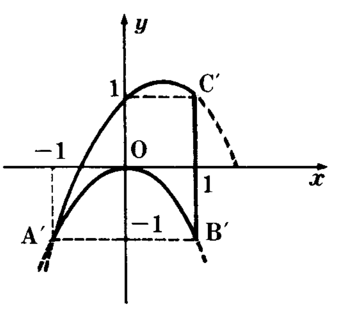
$x=1$ $(-1 \leqq y \leqq 1)$

(iii) P が AC 上にあるとき

$-1 \leqq p \leqq 1$, $q=p+1$

これと①から

$y=-x^2+x+1$ $(-1 \leqq x \leqq 1)$



よって，点 P が A → B → C → A の順に動くとき，

放物線の頂点は，図に示した線上を A′ → B′ → C′ → A′ の順に動く。

POINT

◆ **点 (x, y) の x 座標，y 座標が，p, q でそれぞれ表されるとき，x, y の関係式を求めるには，p, q を消去します。**

◆ 点 (p, q) が，線分 $ax+by+c=0$, $k \leqq x \leqq l$ 上にあるとは，x を p, y を q で置き換えると成り立つということです。

「必要でない文字は消去する」と，覚えておきましょう。この方法は有効です。例題をきちんと解いてから，以下のトレーニングをしましょう。

トレーニング

20 点 $P(p,\ q)$ が 3 直線 $x=1$, $y=0$, $y=x+1$ によってできる三角形の周上を 1 周するとき，放物線 $y=x^2-2px+q$ の頂点はどのような線上を動きますか。

21 4 点 $A(0,\ 1)$, $B(-1,\ 0)$, $C(0,\ -1)$, $D(1,\ 0)$ を頂点とする正方形の 4 辺 AB，BC，CD，DA 上を，点 $P(a,\ b)$ が 1 周するとき，放物線 $y=-x^2-2ax+b$ の頂点はどのような線上を動きますか。

22 点 $P(p,\ q)$ が放物線 $y=2x^2+2x-3$ 上にあるとき，放物線 $y=x^2+2px+q$ の頂点がえがく図形の方程式を求めなさい。

23 放物線 $y=x^2-2(a-1)x+2a(a-3)$ において，定数 a が変化するとき，この放物線の頂点がえがく図形の方程式を求めなさい。

24 直線 $y=2x-3$ と接する放物線 $y=x^2+ax+b$ の頂点が描く図形の方程式を求めなさい。

きょうは，2 次関数を重点にとりあげて練習しました。とくに，頂点や軸など，2 次関数の図形的なことがらは，非常に大切ですから，完全に理解しておきましょう。

第 16 日	関　数　　　　　学習日　　月　　日 **最大・最小**

きょうは，関数の最大・最小についての問題を練習することにしましょう。最大・最小の問題には，関数についてのいろいろな内容が含まれています。個々の解法を十分に理解して，完全にしておきましょう。

はじめは，変域がついているときの2次関数の最大・最小です。

例題 66　　　　**区間における2次関数の最大・最小**

$y=-x^2+4x-3$ について，$0 \leqq x \leqq t$ における最大値と最小値を求めなさい。

考え方　$y=-(x-2)^2+1$ と変形して，この関数のグラフの頂点の位置を確かめます。

そして，この頂点の x 座標が変域内にあるかどうか，また，それが変域の中の中央より左か右か，ちょうど中央かに場合分けして考えます。そして，変域の端点 $x=0$，t における関数値を比べます。

解　答　$y=f(x)$ とおくと　$f(x)=-(x-2)^2+1$　　**←基本変形**

$f(0)=-3$，$f(t)=-t^2+4t-3$，$f(2)=1$　　**←変域の端の点の関数値**

$f(0)-f(t)=t(t-4)$

(i)　$0<t<2$ のとき　**←頂点の x 座標を含まない。**

この関数のグラフの頂点は，変域の外にある。

また，$f(0)-f(t)<0$

よって

$x=t$ のとき　最大値 $-t^2+4t-3$，$x=0$ のとき　最小値 -3

(ii)　$2 \leqq t<4$ のとき　**←頂点の x 座標は変域内の右側**

$f(0)-f(t)<0$

よって

$x=2$ のとき，最大値 1，$x=0$ のとき　最小値 -3

(iii)　$t=4$ のとき　**←頂点の x 座標は変域の中央**

$f(0)-f(t)=0$

よって

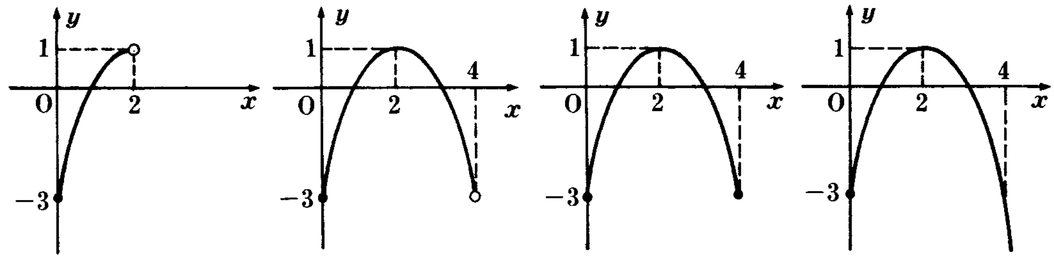
$x=2$ のとき　最大値 1，$x=0$，4 のとき　最小値 -3

(iv)　$4<t$ のとき　**←頂点の x 座標は変域内の左側**

$f(0)-f(t)>0$

よって

$x=2$ のとき　最大値 1，$x=t$ のとき　最小値 $-t^2+4t-3$



POINT ◆ 変域に制限のある２次関数の最大値・最小値を求めるには，この関数のグラフを考えて

① **頂点の x 座標が変域内にあるかどうかを調べます。**

② **ない場合**……変域の端点の関数値を求めて比べます。

ある場合……頂点の y 座標と変域の端点の関数値を求めて比べます。

この例題では，変域に文字 t がはいっていますから，t の値で場合分けして，求めます。最大値・最小値では，変域の端の点，頂点の座標に目をつけます。

トレーニング

1 $y=-x^2+4x-3$ について，$0 \leqq x \leqq t$ における最大値と最小値を求めなさい。

2 関数 $y=-2x^2+4x-3$ について，次の変域における y の最大値と最小値を求めなさい。

(1) $-3 \leqq x \leqq 3$　　(2) $0 \leqq x \leqq 2$

3 次のような x についての関数について，y の最大値と最小値を求めなさい。

(1) $y=-x^2+6x-5$ $(x \geqq 0)$　　(2) $y=x^2-x+3$ $(2<x \leqq 4)$

4 x についての２次関数 $y=-(x-a)^2+4$ の変域が $0 \leqq x \leqq 4$ のとき，y の最大値と最小値を求めなさい。

5 放物線 $y=-x^2+2x+3$ 上に３点 A(0, 3), B(3, 0), C(p, q) をとり，点 C は２点 A，B の間にあるものとします。このとき，四角形 AOBC の面積の最大値を求めなさい。

トレーニングはできましたね。めんどうでも，きちんと場合分けしなくてはいけません。つぎは2次式の最大・最小でよくある問題です。

例題 67 ―― 条件つき2変数の最大・最小

x，y が実数で，$x^2+4y^2=1$ のとき，$x+5y^2$ の最大値・最小値を求めなさい。

考え方 $x^2+4y^2=1$ を，y^2 について解きます。そして，それを $x+5y^2$ に代入して x だけの式にします。また，x，y が実数で，$y^2\geqq 0$ であることから x の変域を求めます。そしてその変域での最大値と最小値を求めます。

解答 $x^2+4y^2=1$ より　$y^2=\dfrac{1-x^2}{4}$ ………①

x，y は実数であるから　$1-x^2\geqq 0$ 　**←$y^2\geqq 0$ から**

よって　$-1\leqq x\leqq 1$ ………② 　**←x の変域**

$f(x)=x+5y^2$ とおくと，①より 　**←y を消去**

$$f(x)=x+5\cdot\frac{1-x^2}{4}=-\frac{5}{4}\left(x-\frac{2}{5}\right)^2+\frac{29}{20}$$

$$f(-1)=-1,\ f(1)=1,\ f\left(\frac{2}{5}\right)=\frac{29}{20}$$

これと②より

$x=\dfrac{2}{5}$，$y=\pm\dfrac{\sqrt{21}}{10}$ のとき　最大値 $\dfrac{29}{20}$ 　**←y の値は①から計算**

$x=-1$，$y=0$ のとき　最小値 -1

POINT
- ◆ 2変数の最大・最小問題で，条件が与えられているときには，**条件から1つの変数を消去**します。
- ◆ 条件は変数を1つ消去するために使われますが，その代わりに，**残された変数の変域に制限がつきます。**

与えられた条件から，変域を決めるところを忘れないようにしましょう。では，トレーニングです。

トレーニング

6 x，y が実数で，$x^2+4y^2=1$ のとき，$x+5y^2$ の最大値・最小値を求めなさい。

7 実数 x，y が $x^2+y^2=4$ を満たすとき，$2x-y^2$ の最大値と最小値を求めなさい。

8 x，y が実数で，$x^2-2x+2y^2=0$ のとき，$2x^2-3x+2y^2$ の最大値と最小値を求めなさい。

9 x についての 2 次方程式 $ax^2+2ax+2a-1=0$ が実数解をもつとき，$-a^2+a+1$ の最大値と最小値を求めなさい。

10 x についての 2 次関数 $y=x^2-ax+a$ の最小値 m を求めなさい。また，m の最大値 M を求めなさい。

できましたね。つぎは，絶対値がついた関数での，最大・最小です。まず，絶対値をはずすことを考えます。

例題 68 ―――― **絶対値記号のついた 2 次関数の最大・最小**

次の関数の最大値と最小値を求めなさい。

(1)　$y=|x^2-3x|-x+2$　　　　(2)　$y=x|x-2|\left(0\leqq x\leqq\dfrac{5}{2}\right)$

考え方　| |の中の式の符号が正，0，負の場合に分けて絶対値記号をはずします。つぎに，グラフをかいて，最大・最小になるときの x の値とその関数の値を求めます。

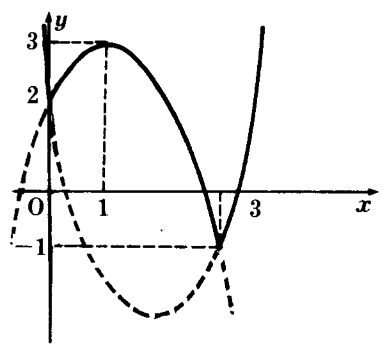
解　答　(1)　$x^2-3x=x(x-3)$ より

$x\leqq0$，$3\leqq x$ のとき　　**←$x^2-3x\geqq0$ の範囲**

$$f(x)=x^2-3x-x+2$$
$$=(x-2)^2-2$$

$0<x<3$ のとき　　**←$x^2-3x<0$ の範囲**

$$f(x)=-(x^2-3x)-x+2$$
$$=-(x-1)^2+3$$



よって，この関数のグラフは右の図のようになる。

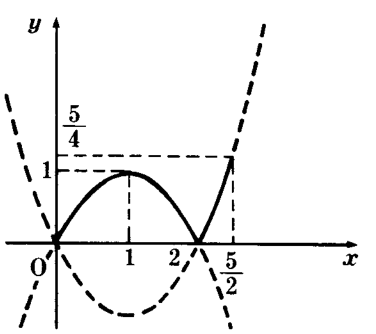
したがって　**$x=3$ のとき　最小値 -1，最大値はない。**

(2)　$0\leqq x<2$ のとき

$$y=-x(x-2)=-(x-1)^2+1$$

$2\leqq x\leqq\dfrac{5}{2}$ のとき

$$y=x(x-2)=(x-1)^2-1$$



よって，この関数のグラフは右の図のようになる。

したがって　**$x=0$，2 のとき　最小値 0**

$x=\dfrac{5}{2}$ のとき　最大値 $\dfrac{5}{4}$

POINT　◆　| |記号のついた 2 次関数の最大・最小を求めるには，まず

$A\geqq0$ のとき　$|A|=A$，$A<0$ のとき　$|A|=-A$

を使って| |記号をはずし，そのグラフをかいて考えます。

絶対値をはずしたあと，グラフがどんな形になっているか注意します。グラフをかいてみて，最大値・最小値を決めます。

トレーニング

11 次の関数の最大値と最小値を求めなさい。

(1) $y=|x^2-3x|-x+2$　　(2) $y=x|x-2|\left(0\leqq x\leqq\dfrac{5}{2}\right)$

12 関数 $y=|x^2-2x-3|-3$ について，次の変域における最大値と最小値を求めなさい。

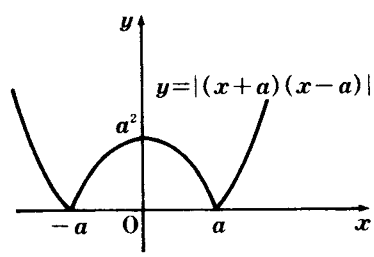
(1) x はすべての実数　　(2) $-1\leqq x\leqq 2$

13 次の関数の最大値と最小値を求めなさい。

(1) $y=-2x|x-1|+x^2-4x+1\ (0\leqq x\leqq 2)$

(2) $y=|2x^2-5x+2|-x+3\ (0<x<3)$

14 x についての関数 $y=|(x+a)(x-a)|$ の変域が $0\leqq x\leqq 2$ のとき，この関数の最大値と最小値を求めなさい。ただし，$a>0$ とします。



15 放物線 $y=x^2-6x+5$ 上の $0\leqq x\leqq 8$ の範囲に動点 P があるとき，点 P と x 軸との距離の最大値と最小値を求めなさい。

つぎは，2次式を別の文字に置き換えて解く問題です。複2次式のような形の式をとりあげましょう。

例題 69 — おきかえによる2次関数の最大・最小

x についての関数 $f(x)=a(x^2+2x+2)^2+2a(x^2+2x+2)+b$ が最小値6をもち，$f(0)=11$ です。このとき，定数 a，b の値と，最小値をとるときの x の値を求めなさい。

考え方 $x^2+2x+2=X$ とおくと，X の2次関数になることに着目します。ここで，$X=(x+1)^2+1\geqq 1$ より，$X\geqq 1$ という変域になることに注意します。

解 答 $X=x^2+2x+2$ とおくと

$X=(x+1)^2+1$ より　$X\geqq 1$

この範囲で，$g(X)=aX^2+2aX+b=a(X+1)^2-a+b$ を考える。

$a=0$ とすると，$g(X)=b$ で，定数関数になり，条件に合わない。

よって　$a\neq 0$

$f(0)=11$ より　$g(2)=11$　　**← $x=0$ のとき　$X=0^2+2\cdot 0+2=2$**

よって　$8a+b=11$　　………①

$X\geqq 1$ の範囲で，$g(X)$ は

$a<0$ のとき　最小値はない。

$a>0$ のとき　$X=1$ のとき　最小値 $3a+b$

よって，$a>0$ で，最小値が6であることから

$3a+b=6$　　………②

①，②より　　$\boldsymbol{a=1,\ b=3}$

これは $a>0$ をみたす。

また，$X=1$ のとき　$(x+1)^2+1=1$ より　$x=-1$

よって，**最小値をとるときの x の値は　-1**

注 意 $g(X)$ は，6と11という少なくとも2つの関数値をもつので定数関数ではありません。

POINT ◆ x の4次関数で，くふうして X の2次関数に変形できる場合がありますが，**x の変域と X の変域は一般には等しくありません。**

たとえば，上の問題で，x の変域はすべての実数ですが，X の変域は $X\geqq 1$ です。

この制限された変域を利用して最小値を求めます。

4次式や，この例題の式のように同じ形の式があるときは，置き換えをして次数を下げて解いていきます。では，トレーニングをしましょう。

トレーニング

16 x についての関数 $f(x)=a(x^2+2x+2)^2+2a(x^2+2x+2)+b$ が最小値6をもち，$f(0)=11$ です。このとき，定数 a，b の値と，最小値をとるときの x の値を求めなさい。

17 x がすべての実数値をとって変わるとして，$f(x)=x^4-2ax^2$ の最小値を求めなさい。

18 x がすべての実数値をとって変わるとき，次の関数の最小値を求めなさい。

$$f(x)=(x^2+3x+1)(x^2+3x+2)+3x^2+9x+8$$

（長崎大）

19 x の関数 $f(x)=a(x^2+4x+6)^2+2a(x^2+4x+6)+b$ は最小値10をもち，$f(0)=50$ です。このとき，a，b の値と，最小値をとるときの x の値を求めなさい。

20 x の関数 $f(x)=(x^2+2x+b)^2-4(x^2+2x+b)+b-20$ は最小値21をもちます。このとき，b の値を求めなさい。

置き換えのしかたもわかりましたね。では，きょう最後の例題は，最大・最小を調べるときによく使う方法，判別式による最大・最小の問題です。

例題 70 —— **判別式の利用による最大・最小の求め方**

x，y，z は実数で，次の 2 つの関係式

$$x^2-yz-8x+7=0,\ y^2+z^2+yz-6x+6=0$$

をみたすとき，次の問いに答えなさい。

(1) $y+z$，yz を x で表し，x のとり得る値の範囲を求めなさい。

(2) $xy+yz+zx$ の最小値を求めなさい。 (北海道大)

考え方 y，z を解にもつ 2 次方程式 $t^2-(y+z)t+yz=0$ は，y，z が実数であることから，判別式 $\{-(y+z)\}^2-4yz\geqq 0$ です。$y+z$，yz を x だけの式で表してこの式に代入することによって，x の範囲が求められます。そして，この範囲で，$xy+yz+zx$ を x だけの式で表して最小値を求めます。

解 答 (1) $x^2-yz-8x+7=0$ より

$$\boldsymbol{yz=x^2-8x+7} \quad\cdots\cdots①$$

$y^2+z^2+yz-6x+6=0$ より

$$(y+z)^2=yz+6x-6$$
$$=x^2-2x+1 \quad \leftarrow ①より\ \boldsymbol{yz=x^2-8x+7}$$
$$=(x-1)^2$$

よって $\boldsymbol{y+z=\pm(x-1)} \quad\cdots\cdots②$

①，②より，y，z を解にもつ 2 次方程式

$$t^2\mp(x-1)t+(x-1)(x-7)=0 \quad \leftarrow \boldsymbol{t^2-(y+z)t+yz=0}$$

が実数解をもつ条件は ← **y，z は実数**

$$(x-1)^2-4(x^2-8x+7)\geqq 0$$

よって $\boldsymbol{1\leqq x\leqq 9}$

(2) $xy+yz+zx=x(y+z)+yz$ より

(i) $y+z=x-1$ のとき

$$xy+yz+zx=x(x-1)+(x-1)(x-7)$$
$$=2x^2-9x+7$$
$$=2\left(x-\frac{9}{4}\right)^2-\frac{25}{8}$$

このとき $1\leqq x\leqq 9$ の範囲では $x=\dfrac{9}{4}$ のとき 最小値 $-\dfrac{25}{8}$

(ii) $y+z=-(x-1)$ のとき

$$xy+yz+zx=-x(x-1)+(x-1)(x-7)$$
$$=-7x+7$$

このとき $1\leqq x\leqq 9$ の範囲では $x=9$ のとき 最小値 -56

(i)，(ii)より，**$x=9$，$y=-4$，$z=-4$ のとき 最小値 -56**

POINT ◆ 条件をある変数について解くのが困難なときは，上の問題で $y+z$，yz を求めたように，くふうして変数を消去します。

◆ **変数 x を係数にもつ t についての2次方程式が，実数解をもつとき**

判別式 $D \geqq 0$

で，x の変域が求められます。

---

x，y，z が実数という条件がありますから，判別式が正または0という条件が使えます。では，最後のトレーニング。

トレーニング

21 x，y，z は実数で，次の2つの関係式

$$x^2-yz-8x+7=0,\ y^2+z^2+yz-6x+6=0$$

をみたすとき，次の問いに答えなさい。

(1) $y+z$，yz を x で表し，x のとり得る値の範囲を求めなさい。

(2) $xy+yz+zx$ の最小値を求めなさい。 (北海道大)

22 x，y，z は実数で，次の2つの関係式

$$x^2-yz-2x-8=0 \qquad y^2+z^2+yz-6x-12=0$$

を満たすとき，次の問いに答えなさい。

(1) $y+z$，yz を x で表し，x のとり得る値の範囲を求めなさい。

(2) $xy+yz+zx$ の最小値を求めなさい。

23 実数 x，y，z の間に

$$2x^2+2y^2+z^2=8 \ \cdots\cdots① \qquad x-y=2 \ \cdots\cdots②$$

の関係があるとき，$x+y+3z$ のとり得る最大値を求めなさい。

24 x，y が実数で，$x^2-2xy+y^2-2x-2y+8=0$ を満たすとき，次の問いに答えなさい。

(1) $x+y$ のとり得る値の範囲を求めなさい。

(2) xy の最小値を求めなさい。

できましたね。判別式の応用範囲はじつにひろいものです。今後も，いろいろな問題で応用する場面が出てきます。きょうの学習はこれで，終わりにしましょう。

第 17 日	関　数　　　　　　学習日　　月　　日
	グラフと方程式の解

第17日　グラフと方程式の解

きょうは，方程式の解がともに1より大きいとか，解が-1と1の間にあるというような条件を求める問題，グラフの交点に関する問題をとりあげます。

解に関する問題としては，いずれも典型的な問題です。はじめは，2次方程式の2つの解が共に1より大という例題です。

例題 71　　**2次方程式の解の分離(1)**

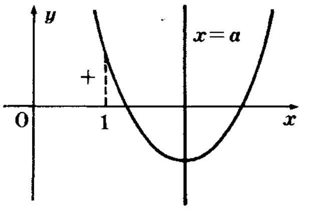
2次関数 $f(x)=x^2-2ax+4$ のグラフを利用して，2次方程式 $x^2-2ax+4=0$ の2つの解が共に1より大となるための a の条件を求めなさい。

考え方　2つの解がともに1より大であることは，放物線 $y=f(x)$ が x 軸と $x=1$ の右側で交わるか接することです。下に凸の放物線だから条件は次の3つです。

(i)　$f(x)=0$ の判別式 $D\geqq 0$

(ii)　軸の位置から　$x=a>1$

(iii)　$f(1)>0$



解　答　$$f(x)=x^2-2ax+4=(x-a)^2+4-a^2$$

より，2次関数 $f(x)$ のグラフは，下に凸の放物線で，軸の方程式は $x=a$ である。よって，2次方程式 $f(x)=0$ の2つの解がともに1より大きくなるためには

(i)　$f(x)=0$ の判別式 $D\geqq 0$ より　　**←実数条件**

$a^2-4\geqq 0$　ゆえに　$a\leqq -2,\ 2\leqq a$　　………①

(ii)　軸の位置 >1 より　$a>1$　　………②

(iii)　$f(1)>0$ より　$1-2a+4>0$　よって　$a<\dfrac{5}{2}$　　………③

①，②，③より　$\boldsymbol{2\leqq a<\dfrac{5}{2}}$

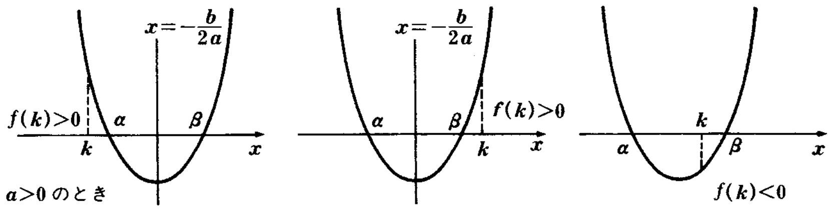
POINT　◆　2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の2つの実数解 α，$\beta(\alpha<\beta)$ と定数 k との大小関係は，2次関数 $y=f(x)=ax^2+bx+c=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{b^2-4ac}{4a}$ のグラフから，次のようになります。

2つの解が k より大 $\iff D\geqq 0,\ x=-\dfrac{b}{2a}>k,\ af(k)>0$

2つの解が k より小 $\iff D\geqq 0,\ x=-\dfrac{b}{2a}<k,\ af(k)>0$

1つが k より大，1つが k より小 $\iff af(k)<0$

(注)　$af(k)>0$ は，$a>0$ のとき $f(k)>0$，$a<0$ のとき $f(k)<0$ の意味。



2次方程式の解が1より大というような問題では，まず，グラフの形をおもいうかべて解いていきます。公式として覚えることはありません。では，トレーニングです。

トレーニング

1 2次関数 $f(x)=x^2-2ax+4$ のグラフを利用して，2次方程式 $x^2-2ax+4=0$ の2つの解が共に1より大となるための a の条件を求めなさい。

2 2次方程式　$x^2+2(a-1)x+7-a=0$ が次のような2つの解をもつように，実数の定数 a の値の範囲を求めなさい。

(1) 2つの解がともに負　　　(2) 2つの解が異符号

3 2次方程式　$x^2-2px+4=0$ が次のような2つの解をもつように，実数の定数 p の値の範囲を求めなさい。

(1) 2つの解がともに1より小

(2) 1つの解が1より小で，他の解が1より大

4 x の2次方程式 $(k+1)(x-1)^2+x^2=2$ の2つの解がともに正の数であるために実数 k のとるべき範囲を求めなさい。　(明治大)

5 x の2次方程式 $8x^2+2mx-m^2=0$ の1つの解が1より大であるための実数 m の条件を求めなさい。

グラフの形を想像しながらできましたね。つぎも，2次方程式の解に関する問題です。

例題 72 ―― **2次方程式の解の分離(2)**

x についての2次方程式 $x^2+(4a+1)x+a^2=0$ ……①について，次の条件に適するように実数 a の値の範囲を定めなさい。

(1) ①が区間 $-1<x<1$ に2つの解をもつ。

(2) ①が $x\leqq-1$ と $-1<x<1$ にそれぞれ1つの解をもつ。

考え方 $y=f(x)=x^2+(4a+1)x+a^2$ のグラフが下に凸な放物線であることから

(1)の2つの解がともに $-1<x<1$ の範囲にある条件は

判別式 $D\geqq0$，軸の位置が $-1<x<1$ の間，$f(-1)>0$ $f(1)>0$

(2)の1つの解が -1 以下で，もう1つの解が $-1<x<1$ の範囲にある条件は

(i) 1つの解が -1 より小，他の解が $-1<x<1$

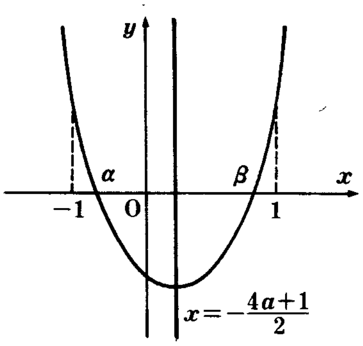
(ii) 1つの解が -1，他の解が $-1<x<1$

の2つの場合に分けて考えます。

解 答 $f(x)=x^2+(4a+1)x+a^2$ とおく。

(1) $f(x)=0$ の判別式を D とおくと

$D=(4a+1)^2-4a^2\geqq0$ ………①



$y=f(x)$ のグラフの軸の位置から

$-1<-\dfrac{4a+1}{2}<1$ ………②

$f(-1)=1-(4a+1)+a^2>0$ ………③

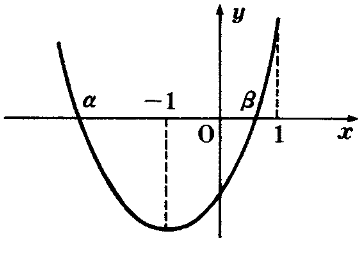
$f(1)=1+4a+1+a^2>0$ ………④

①，②，③，④より

$$\boldsymbol{-2+\sqrt{2}<a\leqq-\frac{1}{2},\quad -\frac{1}{6}\leqq a<0}$$

(2) $x=-1$ を解にもつ，もたないで場合分けする。

(i) 1つの解が -1 より小，他の解が $-1<x<1$ の場合



$f(-1)=1-(4a+1)+a^2<0$ ………①

$f(1)=1+4a+1+a^2>0$ ………②

①，②より $0<a<4$

(ii) 1つの解が -1，他の解が $-1<x<1$ の場合

$f(-1)=0$ より $a=0,\ 4$

$a=0$ のとき $x^2+x=0$ より $x=-1,\ 0$ これは題意に適する。

$a=4$ のとき $x^2+17x+16=0$ より $x=-1,\ -16$ これは題意に適さない。

(i)，(ii)より $\boldsymbol{0\leqq a<4}$

POINT ◆ 2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の2つの実数解 $\alpha,\ \beta\ (\alpha\leqq\beta)$ について，2次関数 $y=f(x)=ax^2+bx+c=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{b^2-4ac}{4a}$ のグラフで考えると，次のことがわかります。

2つとも $l<x<m$ の値にある $\Longleftrightarrow$ $D \geqq 0$, $l<-\dfrac{b}{2a}<m$,

$$af(l)>0,\ af(m)>0$$

1つが l よりも小，もう1つが $l<x<m$ の範囲にある

$$\Longleftrightarrow af(l)<0,\ af(m)>0$$

この例題のほうが，前の例題よりも複雑ですが，解がどうなるかという考え方は変わりません。では，問題を解いてみましょう。

トレーニング

6 x についての2次方程式 $x^2+(4a+1)x+a^2=0$ ……①について，次の条件に適するように実数 a の値の範囲を定めなさい。

(1) ①が区間 $-1<x<1$ に2つの解をもつ。

(2) ①が $x \leqq -1$ と $-1<x<1$ にそれぞれ1つの解をもつ。

7 $f(x)=(1-a)x^2+ax+1$ とするとき，$f(x)=0$ をみたす2つの解がともに0と1との間にあるための実数 a の値の範囲を求めなさい。 (法政大)

8 2次方程式 $x^2-mx+4=0$ の2つの解がそれぞれ $x \leqq -1$, $-1<x<1$ に1つずつ存在するような実数 m の値の範囲を求めなさい。

9 x の2次方程式 $x^2-2ax+6a-5=0$ の2つの実数解が，それぞれ $-2<x<2$, $2 \leqq x$ に1つずつ存在するような実数 a の値の範囲を求めなさい。

10 x に関する2次方程式　$7x^2-(k+13)x+k^2-k-2=0$ の2つの解が，それぞれ $x<1$ および $2<x$ に1つずつあるための k の値の範囲を求めなさい。

解の配置を考えるときの解き方はわかりましたね。こんどは，4次方程式の解についての例題です。

例題 73 ―― **異なる4つの実数解をもつ4次方程式**

x についての方程式 $(x^2+ax+b)(x^2+bx+a)=0$ が異なる4つの実数解をもつとき，点 $(a,\ b)$ の存在する範囲を図示しなさい。（一橋大）

考え方　$x^2+ax+b=0$ または $x^2+bx+a=0$ で，4つの異なる実数解をもつのですから，それぞれが異なる2つの実数解をもち，しかも共有解をもたない条件を求めます。

解　答　$(x^2+ax+b)(x^2+bx+a)=0$ が異なる4つの実数解をもつとは，2つの2次方程式

$x^2+ax+b=0$ ………①

$x^2+bx+a=0$ ………②

が，それぞれ異なる2つの実数解をもち，しかも，2つの方程式が共通解をもたないことである。

①が異なる2つの実数解をもつことから

$a^2-4b>0$ ………③ **←判別式>0**

②が異なる2つの実数解をもつことから

$b^2-4a>0$ ………④

また，①，②が共通解 x をもつとすると

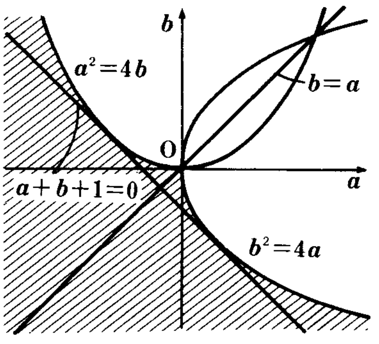
①−②より　$(a-b)(x-1)=0$

ここで，$a=b$ のとき，①，②は一致する。

$x=1$ のとき，①，②は $1+a+b=0$

よって，①，②が共通解をもたない条件は

$a\neq b$，$1+a+b\neq 0$



したがって，$(a,\ b)$ の存在する範囲は，上の図の斜線部分である。ただし，境界および直線 $b=a$，$a+b+1=0$ 上の点を含まない。

POINT　◆ 次のような特別な4次方程式が，**異なる4つの実数解をもつ条件**は次のようです。

① $(x^2+ax+b)(x^2+cx+d)=0$

$\iff$ **$x^2+ax+b=0$，$x^2+cx+d=0$ が異なる2つの実数解をもち，しかも共有解をもたない。**

② $ax^4+bx^2+c=0$ $\iff$ **$at^2+bt+c=0$ が異なる2つの正の解をもつ。**

異なる実数解をもつ条件，共有解をもたない条件で解きます。これも，判別式の応用ですね。では，トレーニング。

トレーニング

11 x についての方程式 $(x^2+ax+b)(x^2+bx+a)=0$ が異なる4つの実数解をもつとき，点 $(a,\ b)$ の存在する範囲を図示しなさい。（一橋大）

12 x の4次方程式 $x^4-2(3a-1)x^2+a(a-2)=0$ が異なる4つの実数解をもつとき，実数 a の値の範囲を求めなさい。（北海道教育大）

13 x の4次方程式 $x^4-2(3a+1)x^2+7a^2+3a=0$ が，実数解を2つ，虚数解を2つもつとき，実数 a の値の範囲を求めなさい。

14 x の4次方程式 $x^4+2px^2+p+1=0$ が，絶対値が1より大きくない異なる4つの実数解をもつとき，実数 p の値の範囲を求めなさい。（中央大）

15 x の4次方程式 $x^4+ax^3-12ax^2+ax+1=0$ が異なる4つの実数解をもつとき，実数 a の値の範囲を求めなさい。

4次方程式といっても，結局は2次方程式の問題にして解決していくことがわかりました。つぎは，放物線の交点についての問題です。

例題 74 —— **2つの放物線の交点**

2つの放物線の方程式を

$y=x^2-5x+6$ ………①,　　$y=-x^2+ax+b$ ………②

とします。この2つの放物線は，2点P，Qで交わっており，Pの x 座標は1です。このとき，次の問いに答えなさい。

(1) a，b についての条件を求めなさい。

(2) 原点Oと2つの点P，Qが一直線上にあるとき，a，b の値を求めなさい。

考え方 (1)は，点Pが放物線①，②の両方の点であることから関係式を導きます。
(2)は，3点O，P，Qが一直線上にあることから，まず，座標のわかっているOとPから直線OPの方程式をつくります。そして，①とOPの交点としてQを求めます。そのQが②上の点であることから，a，b の関係を求め，(1)の結果と連立方程式をつくって解きます。

解答 (1) 点Pは放物線①上の点であるから，その y 座標は　$y=1-5+6=2$

また，点P(1, 2)は放物線②上の点でもあるから　$2=-1+a+b$

よって　$a+b=3$ ………③

①，②は2点で交わるから，$x^2-5x+6=-x^2+ax+b$ の判別式を

D とすると　$D=(a+5)^2-8(6-b)>0$

これに③を代入して　$(a+1)^2>0$　ゆえに　$a\neq-1$

よって，求める条件は　$\boldsymbol{a+b=3,\ a\neq-1}$

(2) 直線OPの方程式は　$y=2x$ ………④

①と④の交点が，P，Qであることから，Qの座標を求める。**←O，P，Qが一直線上**

①と④から y を消去すると　$x^2-5x+6=2x$

$x^2-7x+6=0$

$(x-1)(x-6)=0$

よって　$x=1,\ 6$

$x\neq1$ より　$x=6$　**←$x=1$ はPの x 座標**

④より，このとき　$y=12$

よって，Qの座標は　(6, 12)

また，点Qは②上の点であるから　$12=-36+6a+b$ ………⑤

③，⑤から　$\boldsymbol{a=9,\ b=-6}$

POINT

- 2つの放物線の交点の座標は，その2つの放物線の方程式を連立方程式として解いて求められます。
- 点 $(p,\ q)$ が，放物線 $y=ax^2+bx+c$ 上の点であるとは，$x=p$，$y=q$ を代入すれば成り立つということです。
- **3点O，P，Qが一直線上にあるとは，2点を通る直線上に残りの1点があることです。**

放物線の交点を求めるには，2つの放物線の方程式を連立させて，解いていくことになります。実

数解をもつ条件なども利用します。では，練習です。

トレーニング

16 2つの放物線の方程式を

$y=x^2-5x+6$ ………①,　　$y=-x^2+ax+b$ ………②

とします。この2つの放物線は，2点P，Qで交わっており，Pの x 座標は1です。このとき，次の問いに答えなさい。

(1) a，b についての条件を求めなさい。

(2) 原点Oと2つの点P，Qが一直線上にあるとき，a，b の値を求めなさい。

17 2つの放物線

$y=x^2-4x+3$ ………①　　$y=-x^2+x+6$ ………②

の交点の座標を求めなさい。

18 2つの放物線

$y=x^2+x-6$ ………①

$y=x^2-(k+1)x+4k$ ………②

の交点の x 座標が -2 であるとき，k の値を求めなさい。

19 2つの放物線

$y=x^2+2(p+1)x-p+3$ ………①

$y=-x^2+4x-2p$ ………②

のグラフが異なる2点を共有するように，定数 p の値の範囲を定めなさい。

20 2つの放物線

$y=x^2-7x+12$ ………①

$y=-x^2+ax+b$ ………②

が2点P，Qで交わり，Pの x 座標は2です。また，原点Oと2点P，Qが一直線上にあるとき，a，b の値を求めなさい。

できましたね。こんどは，実数解の解の個数を問う問題です。よくある形の問題です。

例題 75 　　**方程式の解の個数とグラフ**

方程式 $|x^2-1|-x-k=0$ の実数解の個数は，実数 k の値によってどのように変わるかを調べなさい。ただし，重解は1個と考えることにします。

考え方　$|x^2-1|=x+k$ と変形して，$y=|x^2-1|$ と $y=x+k$ のグラフの交点の個数を調べます。k の値によって変化するのは $y=x+k$ の上下方向ですから，$y=|x^2-1|$ のグラフと接する点や，特別な点を通るときの k の値を境に，交点の個数を調べます。

解　答　$|x^2-1|=x+k$ ………①

の実数解の個数は

$y=|x^2-1|$ ………②，$y=x+k$ ………③

のグラフの共有点の個数である。

②を変形すると，次のようになる。

$$y=\begin{cases} x^2-1 & (x\leqq -1,\ 1\leqq x) \\ -(x^2-1) & (-1<x<1) \end{cases}$$

←$x^2-1\geqq 0$ のとき
←$x^2-1<0$ のとき

よって，②と③が接するのは，次の方程式が重解をもつときである。

$-(x^2-1)=x+k$　**←$x\leqq -1$，$1\leqq x$ では接点をもたない。(下図参照)**

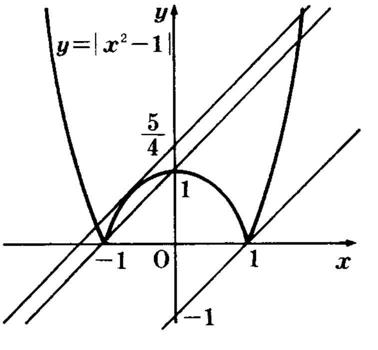
よって　$1-4(k-1)=0$　**←判別式＝0**

ゆえに　$k=\dfrac{5}{4}$

また，③が②上の点 $(-1,\ 0)$，$(1,\ 0)$ を通るとき　$k=1,\ -1$

したがって，右のグラフから

$k<-1$ のとき　0個
$k=-1$ のとき　1個
$-1<k<1$，$\dfrac{5}{4}<k$ のとき　2個
$k=1$，$\dfrac{5}{4}$ のとき　3個
$1<k<\dfrac{5}{4}$ のとき　4個



POINT

◆ 方程式 $f(x)=g(x)$ の**実数解の個数は**，$y=f(x)$ のグラフと $y=g(x)$ の**グラフの共有点の個数**です。

◆ 放物線 $y=ax^2+bx+c$ と直線 $y=mx+n$ が**接するのは**，方程式 $ax^2+bx+c=mx+n$ の**判別式が0のとき**です。

◆ グラフの共有点の個数を調べるときは，グラフが接するときや，特別な点を通るときを境に調べます。

方程式の解の個数を調べるときは，グラフをかいて調べるのです。グラフの共有点がどうなるかを見ながら解きます。解法としては，典型的なものです。

トレーニング

21 方程式 $|x^2-1|-x-k=0$ の実数解の個数は，実数 k の値によってどのように変わるかを調べなさい。ただし，重解は1個と考えることにします。

22 方程式 $x^2+2|x-k|-1=0$ の実数解の個数は，実数 k の値によってどのように異なるかを調べなさい。

23 方程式 $-|x^2-8x+12|+x+k=0$ の実数解の個数は，実数 k の値によって，どのように変わりますか。（岡山大）

24 方程式 $x^2-a|x|+1=0$ が3と-3の間に4つの実根をもつ条件を求めなさい。（関西大）

25 方程式 $|x^2-a|-x+3=0$ の実数解の個数は，実数 a の値の変化によってどう変わりますか。（新潟大）

グラフの共有点がどうなるかわかりましたね。きょうは，関数のグラフを利用しながら，解の分離，解の個数の求め方などを学習しました。第18日は，分数関数です。

第 18 日	関　数　　　　学習日　　月　　日 **分数関数**

きょうは，分数関数に関する問題を学習します。

分数関数のグラフ，漸近線の意味，分数不等式の解法，分数関数での最大・最小がおもな内容です。

はじめの例題は，まず，グラフをかく問題です。

例題 76　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　**分数関数のグラフ**

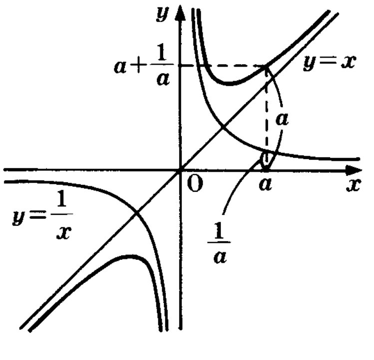
次の分数関数のグラフをかきなさい。また，その分数関数の値域を求めなさい。

(1)　$y=x+\dfrac{1}{x}$　　　　　　　　(2)　$y=2x-\dfrac{1}{x}$

考え方　一般に，$y=f(x)+g(x)$ のグラフは，$y_1=f(x)$，$y_2=g(x)$ の 2 つのグラフを同一の座標平面上にかき，それを合成すればよいのです。

また，このような分数関数の値域を求めるには，分母をはらって，x の 2 次方程式を導き，実数解をもつ条件から，y の値の範囲を決めていきます。

解　答　(1)　$y_1=x$，$y_2=\dfrac{1}{x}$ のグラフをかく。つぎに，同じ x の値に対して，$y_1=x$ の y 座標 y_1 と，$y_2=\dfrac{1}{x}$ の y 座標 y_2 との和 y_1+y_2 を y 座標とする点をとってなめらかな曲線で結んでいくと，右図のようなグラフが得られる。



（漸近線は　$y=x$，$x=0$ で表される 2 直線）

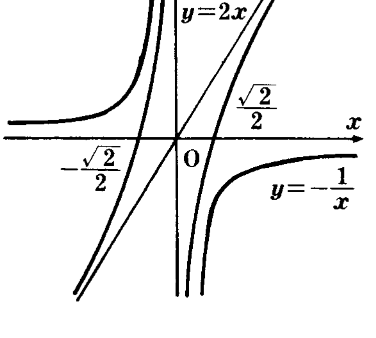
値域は，与式の分母をはらって，x についての 2 次方程式を導くと，

$$x^2-yx+1=0$$

x は実数値をとるから，判別式 $D=y^2-4\geqq 0$　　**←判別式 $D\geqq 0$ の利用**

よって，求める値域は　　$\{\boldsymbol{y}\mid \boldsymbol{y}\geqq \mathbf{2}$　**または，**$\boldsymbol{y}\leqq -\mathbf{2}\}$

(2)　$y_1=2x$，$y_2=-\dfrac{1}{x}$ のグラフをかき(1)と同様にして，$y=y_1+y_2$ のグラフをかくと右図が得られる。



（漸近線は，　$y=2x$，$x=0$ である 2 直線）

値域は，与式の分母をはらって，x について整理すると，

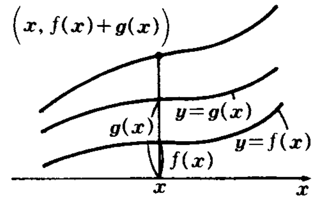
$$2x^2-yx-1=0$$

x は実数値をとるから，判別式 $D=y^2+8>0$

これは，すべての実数で成立する。

よって，値域は　　$\{\boldsymbol{y}\mid \boldsymbol{y}$　**全実数**$\}$

POINT ◆ $y=f(x)+g(x)$ のグラフをかくには，$y_1=f(x)$，$y_2=g(x)$ の２つのグラフをかき，点 $(x,\ f(x)+g(x))$ をいろいろにとり，この点を結んでグラフをかいていきます。



基本の分数関数のグラフはわかっていますね。値域というのは y の値としてとりうる値のことです。では，グラフをかいてみましょう。

トレーニング

1 次の分数関数のグラフをかきなさい。また，その分数関数の値域を求めなさい。

(1) $y=x+\dfrac{1}{x}$　　(2) $y=2x-\dfrac{1}{x}$

2 次の分数関数のグラフをかきなさい。

$$y=x-\frac{1}{x+1}$$

3 次の分数関数のグラフをかきなさい。

$$y=\frac{x^2+2x+2}{x+1}$$

4 次の分数関数のグラフをかきなさい。

$$y=\frac{x^2-1}{|x|}$$

5 次の分数関数のグラフをかきなさい。また，その関数の値域を求めなさい。

$$y=\frac{-x^2+2x-5}{x-1}$$

次の例題も，分数関数のグラフをかく問題です。

例題 77 ——— いろいろな分数関数のグラフ

次の関数のグラフをかきなさい。

(1) $y=\dfrac{|x|}{1-x}$

(2) $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=2$

(3) $y=\dfrac{x^2+3x+3}{x+1}$

考え方 (1) $x\geqq 0$ のとき $y=\dfrac{x}{1-x}$，$x<0$ のとき $y=\dfrac{-x}{1-x}$ のグラフをかきます。

(2) 分母をはらって，$y=\dfrac{k}{x-p}+q$ の形にします。$x=0$，$y=0$ を除くことに注意。

(3) $y=x+2+\dfrac{1}{x+1}$ と変形し，$y=x+2$，$y=\dfrac{1}{x+1}$ のグラフを合成します。

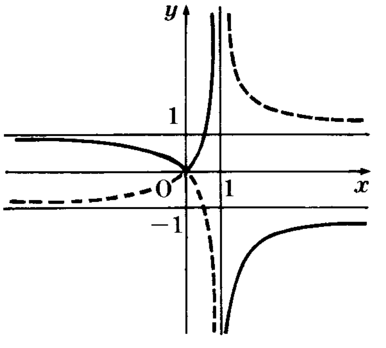
解　答 (1) $x\geqq 0$ のとき　$y=\dfrac{x}{1-x}=-1+\dfrac{-1}{x-1}$

($y=\dfrac{-1}{x}$ を x 軸方向に 1，

y 軸方向に -1 平行移動)

$x<0$ のとき　$y=\dfrac{-x}{1-x}=1+\dfrac{1}{x-1}$

($y=\dfrac{1}{x}$ を x 軸方向に 1，y 軸方向に 1 平行移動)



このグラフをかくと，右図のようになる。

(漸近線は　$x=1$，$y=1$，$y=-1$)

(2) 分母をはらってまとめると

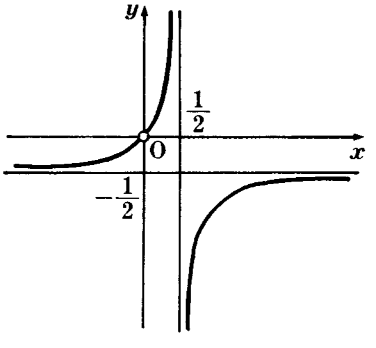
$y-x=2xy$

$(2x-1)y=-x$

$$y=\frac{-x}{2x-1}=-\frac{1}{2}+\frac{-\frac{1}{4}}{x-\frac{1}{2}}$$

ただし，$x\neq 0$，$y\neq 0$　　←分母を 0 にしない。

したがって，原点を除く。グラフは右図のようになる。



(漸近線は　$x=\dfrac{1}{2}$，$y=-\dfrac{1}{2}$)

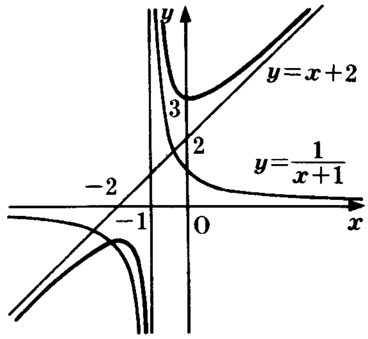
(3) 分母を分子で割ると

$$y=x+2+\frac{1}{x+1}$$

したがって，$y_1=x+2$，$y_2=\dfrac{1}{x+1}$ のグラフをかき，合成すればよい。　**←グラフの合成。**

グラフは右図のようになる。

（漸近線は　$y=x+2$，$x=-1$）



POINT

◆ **分数関数　$y=\dfrac{k}{x-p}+q$ のグラフは，$y=\dfrac{k}{x}$ のグラフを x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動したものです。**

◆ 曲線　$\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{y}=c$ のグラフは，$ay+bx=cxy$ すなわち $y=\dfrac{bx}{cx-a}$ のグラフから，$x=0$，$y=0$ を除くことを忘れないようにする。（分母$\neq 0$）

トレーニング

6 次の関数のグラフをかきなさい。

(1) $y=\dfrac{|x|}{1-x}$

(2) $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=2$

(3) $y=\dfrac{x^2+3x+3}{x+1}$

7 次の分数関数のグラフをかきなさい。

$$y=\frac{3x+2}{x+1}$$

8 次の分数関数のグラフをかきなさい。

$$y=\frac{|x|}{|x|-1}$$

9 次の分数関数のグラフをかいて，最大値を求めなさい。

$$y=\frac{2x+1}{x+1}\ (x\leqq -2,\ 1\leqq x)$$

正しくかけましたね。つぎは，分数関数のグラフで漸近線についての問題です。

例題 78 **漸近線**

次の関数のグラフをかき，漸近線の方程式を求めなさい。

$2xy-3x+2y+3=0$

考え方　与えられた式を変形して，$y=q+\dfrac{k}{x-p}$ の形にします。すなわち，$y=\dfrac{3}{2}-\dfrac{3}{x+1}$ の形に変形します。

解　答　$2xy-3x+2y+3=0$ $\cdots\cdots\cdots$①

y についてまとめると

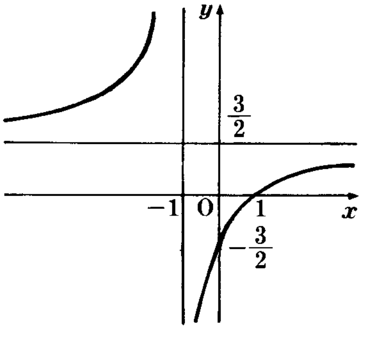
$2(x+1)y=3(x-1)$　**←y を x の関数とみる。**

$x=-1$ とすると $0\cdot y=-6$ となるので，これをみたす y の値はない。

したがって，①は $x=-1$ では成立しない。ゆえに　$x \neq -1$

$y=\dfrac{3(x-1)}{2(x+1)}=\dfrac{3}{2}-\dfrac{3}{x+1}$ $\cdots\cdots\cdots$②

これは $y=-\dfrac{3}{x}$ のグラフを x 軸方向に -1，y 軸方向に $\dfrac{3}{2}$ 平行移動したものである。



$x=0$ のとき　$y=-\dfrac{3}{2}$，$y=0$ のとき，$x=1$

よって，座標軸との交点は　$\left(0,\ -\dfrac{3}{2}\right)$，$(1,\ 0)$

漸近線は②より，$\boldsymbol{x=-1}$，$\boldsymbol{y=\dfrac{3}{2}}$ で表される 2 直線。

したがって，グラフは右図のようになる。

POINT　◆　分数関数の漸近線

与えられた分数関数のグラフは，まず　$\boldsymbol{y=q+\dfrac{k}{x-p}}$ **の形に変形**します。このとき，**漸近線は，直線 $x=p$，$y=q$** となります。

与えられた式を基本の分数関数のグラフに変形すれば，漸近線はすぐにわかります。トレーニングをして理解してしまいましょう。

トレーニング

10 次の関数のグラフをかき，漸近線の方程式を求めなさい。

$2xy-3x+2y+3=0$

11 漸近線が，2直線 $x=2$，$y=-2$ である双曲線で，点 $(3,\ 1)$ を通るものを求めなさい。

12 $y=\dfrac{ax+b}{3x+c}$ のグラフが，点 $(2,\ 7)$ を通り，$x=1$，$y=3$ を漸近線とするとき，定数 a，b，c の値を求めなさい。

13 $y=-\dfrac{3x+1}{x+1}$ のグラフを x 軸方向に a，y 軸方向に b 平行移動すると，$y=\dfrac{x}{x-2}$ になりました。a，b の値を求めなさい。

14 $y=\dfrac{3x+q}{x+p}$ のグラフは，$y=\dfrac{1}{x}$ のグラフを平行移動したものであり，そのグラフが点 $(2,\ 4)$ を通るとき，p，q の値を求めなさい。

できましたね。こんどは，分数不等式の問題をしてみましょう。

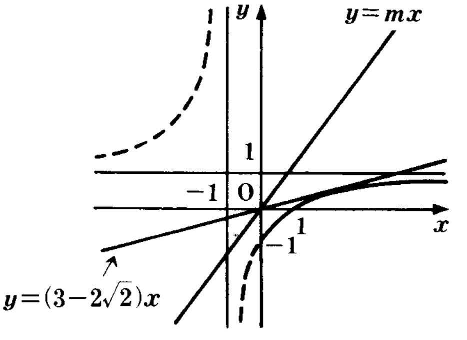
例題 79 **分数不等式の解法**

$x>0$ をみたすすべての x の値に対して，$mx>\dfrac{x-1}{x+1}$ が成り立つための m の値の範囲を求めなさい。

考え方　$x>0$ の範囲で，直線 $y=mx$ がつねに，分数関数のグラフ $y=\dfrac{x-1}{x+1}$ の上側にあるための m の条件を求めます。

解　答　$y=mx$ ………①

$y=\dfrac{x-1}{x+1}=1+\dfrac{-2}{x+1}$ ………②



①と②のグラフをかくと，右図のようになる。

①の直線が②の曲線に接するときの m の値は

$$mx=\frac{x-1}{x+1}$$

分母をはらって，まとめると

$$mx^2+(m-1)x+1=0$$

$m\neq 0$（$m=0$ のとき接しない）だから，

判別式 D をとると $D=0$

ゆえに

$$D=(m-1)^2-4m=0$$

$$m^2-6m+1=0$$

したがって　$m=3\pm\sqrt{8}=3\pm 2\sqrt{2}$

$x>0$ で接するのは，　$m=3-2\sqrt{2}$ のときである。

図から，①のグラフが $x>0$ の範囲でつねに②のグラフより上側にあるのは

$$\boldsymbol{m>3-2\sqrt{2}}$$

のときである。

POINT　◆ $f(x)>g(x)$ がつねに成り立つ条件は，**曲線 $y=f(x)$ が，曲線 $y=g(x)$ より上側にある条件を求めればよい**ことになります。

分数不等式は，単純な不等式の問題として解けるもの，グラフを考えて解くものなどがあります。以下のトレーニングではやや応用的なものもとりあげています。

トレーニング

15 $x>0$ をみたすすべての x の値に対して，$mx>\dfrac{x-1}{x+1}$ が成り立つための m の値の範囲を求めなさい。

16 つぎの不等式を解きなさい。

(1) $\dfrac{1}{x-1}>\dfrac{2}{x+2}$　　　(2) $\dfrac{x}{x-2}\leqq x+5$

17 つぎの不等式を解きなさい。

$$\frac{(x+1)(x-1)(x+2)}{(x+2)(x^2+x+1)}>0$$

18 不等式 $\dfrac{ax}{3-x}>a-3$ をみたす x の範囲を求めなさい。ただし，a は定数とします。

(三重大)

19 $\dfrac{x-a}{x^2+x+1}>\dfrac{x-b}{x^2-x+1}$ を満足する x の値の範囲が $\dfrac{1}{2}<x<1$ であるためには，a，b の値をどのようにすればよいですか。

つぎに，分数関数の最大・最小を考える問題をしてみましょう。

例題 80 　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　**分数関数の最大・最小**

$x>0$ のとき，$p=\dfrac{x^4+4x^3+x^2+4x+1}{x^3+x}$ について，次の各問いに答えなさい。

(1) $x+\dfrac{1}{x}=t$ とおき，p を t の式で表しなさい。

(2) (1)の結果を利用して，p の最小値を求めなさい。また，そのときの x の値を求めなさい。

考え方 (1) p の分母・分子を x^2 で割って，$x+\dfrac{1}{x}=t$，$x^2+\dfrac{1}{x^2}=t^2-2$ を利用します。

(2) (1)で求めた結果を利用するとき，$t=x+\dfrac{1}{x}\geqq 2\sqrt{x\cdot\dfrac{1}{x}}=2$ の条件に注意しましょう。

解　答 (1) p の分母・分子を $x^2(\neq 0)$ で割ると

$$p=\frac{x^2+4x+1+\dfrac{4}{x}+\dfrac{1}{x^2}}{x+\dfrac{1}{x}}=\frac{\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2+4\left(x+\dfrac{1}{x}\right)-1}{x+\dfrac{1}{x}}$$

ここで，$x+\dfrac{1}{x}=t$ を代入すると

$$\boldsymbol{p=\frac{t^2+4t-1}{t}}$$

となる。

(2) (1)から

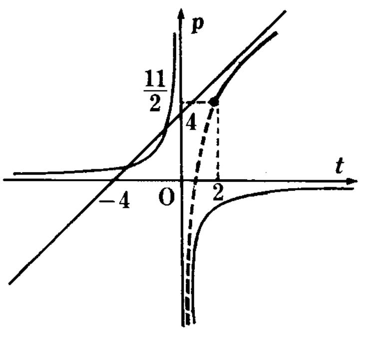
$$p=\frac{t^2+4t-1}{t}=t+4-\frac{1}{t}$$

ところで，$x>0$ より　$t=x+\dfrac{1}{x}\geqq 2\sqrt{x\cdot\dfrac{1}{x}}=2$　　← $\dfrac{a+b}{2}\geqq\sqrt{ab}$ の利用

したがって，グラフ $p=t+4-\dfrac{1}{t}$ を $t\geqq 2$ の範囲でかくと，右図のようになる。すなわち，$t=2$ のとき

最小値 $\boldsymbol{\dfrac{11}{2}}$ をとる。

このとき，x の値は，　$x+\dfrac{1}{x}=2$ から，$\boldsymbol{x=1}$である。



POINT ◆ $\boldsymbol{x>0}$ **のとき，**$\boldsymbol{t=x+\dfrac{1}{x}\geqq 2\sqrt{x\cdot\dfrac{1}{x}}=2}$ から，$t\geqq 2$ の制限がつきます。このことに注意しましょう。(相加平均≧相乗平均の利用)

式の形としては，分数関数ですが，解くうえでは，相加・相乗平均の関係や，実数解をもつ条件な

どを使っていきます。では，解法を理解してしまいましょう。

トレーニング

20 $x>0$ のとき，$p=\dfrac{x^4+4x^3+x^2+4x+1}{x^3+x}$ について，次の各問いに答えなさい。

(1) $x+\dfrac{1}{x}=t$ とおき，p を t の式で表しなさい。

(2) (1)の結果を利用して，p の最小値を求めなさい。また，そのときの x の値を求めなさい。

21 $x>0$ のとき，$y=x+\dfrac{1}{x}+\dfrac{8x}{x^2+1}$ の最小値およびそのときの x の値を求めなさい。

(日本大)

22 $x>0$ のとき，$P=\dfrac{x^4+x^2+1}{x^3+x}$ について，次の各問いに答えなさい。

(1) $x+\dfrac{1}{x}=t$ とおいて，P を t の関数として表しなさい。

(2) P の最小値およびそのときの x の値を求めなさい。 (慶応大)

23 $-2<a<2$ のとき，$y=\dfrac{ax+1}{x^2+ax+1}$ の最大値，最小値を求めなさい。 (甲南大)

きょうは，分数関数に関する問題をとりあげて練習してきました。分数関数についてはもうだいじょうぶです。第19日は，無理関数をとりあげます。

第 19 日	関　数　　　　学習日　月　日
	無理関数

きょうは，分数関数に続いて，無理関数の学習です。

無理関数のグラフが正しくかけること，絶対値を含む無理関数のグラフ，無理関数のグラフと直線との交点に関する問題などをとりあげます。

まず，無理関数のグラフをかく問題からはじめましょう。

例題 81 ―― 無理関数のグラフ

次の無理関数の定義域と値域を求め，グラフをかきなさい。

(1)　$y=2-\sqrt{4-x}$

(2)　$y=\sqrt{|x+3|-2}$

考え方　(1)　(根号内)$\geqq 0$ より $4-x\geqq 0$，すなわち，$4\geqq x$ が定義域で，$y-2=-\sqrt{4-x}$ から，$y-2\leqq 0$ すなわち，$y\leqq 2$ が値域となります。

(2)　絶対値を場合分けしてはずします。すなわち，$x+3\geqq 0$ のとき $y=\sqrt{(x+3)-2}$，$x+3<0$ のとき $y=\sqrt{-(x+3)-2}$ となります。

解　答　(1)　$y=2-\sqrt{4-x}$

(根号内)$\geqq 0$ より　$4-x\geqq 0$　　　ゆえに　$x\leqq 4$

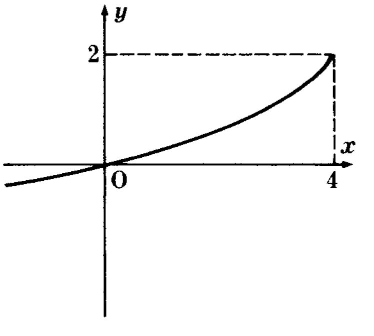
また，$y-2=-\sqrt{4-x}\leqq 0$　　　ゆえに　$y\leqq 2$

これより

定義域は　　$\{\boldsymbol{x}\mid \boldsymbol{x}\leqq \boldsymbol{4}\}$

値域は　　$\{\boldsymbol{y}\mid \boldsymbol{y}\leqq \boldsymbol{2}\}$

グラフは，$y=2-\sqrt{-(x-4)}$ より，$y=-\sqrt{-x}$ のグラフを，x 軸方向に 4，y 軸方向に 2 だけ平行移動したものになる。(右図)



(2)　$y=\sqrt{|x+3|-2}$

$x+3\geqq 0$　すなわち，$x\geqq -3$ のとき　$y=\sqrt{(x+3)-2}=\sqrt{x+1}$

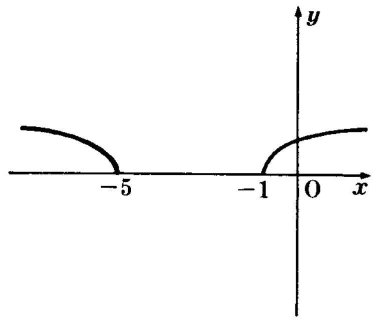
$x+3<0$　すなわち，$x<-3$ のとき　$y=\sqrt{-(x+3)-2}=\sqrt{-x-5}$

(根号内)$\geqq 0$ より

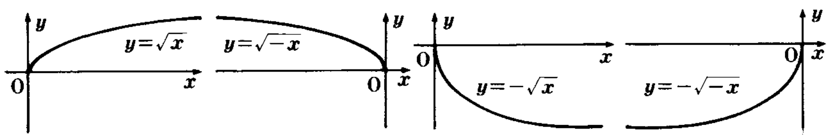
$x\geqq -3$ のとき　$x+1\geqq 0$　ゆえに　　　$x\geqq -1$

$x<-3$ のとき　$-x-5\geqq 0$　ゆえに　　$x\leqq -5$
さらに，いずれのときも　　$y\geqq 0$
これより
　定義域は　　$\{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x}\leqq -5,\ -1\leqq \boldsymbol{x}\}$
　値域は　　$\{\boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{y}\geqq 0\}$

$y=\sqrt{x+1}$ のグラフは，$y=\sqrt{x}$ を x 軸方向に -1 だけ，$y=\sqrt{-x-5}$ のグラフは，$y=\sqrt{-x}$ を x 軸方向に -5 だけそれぞれ平行移動したものになる。(右図)



POINT　◆　無理関数のグラフの基本は，$y=\sqrt{x}$，$y=\sqrt{-x}$，$y=-\sqrt{x}$，$y=-\sqrt{-x}$ の4つのグラフです。



◆　**無理関数　$y=a\sqrt{x-p}+q$ のグラフは，$y=a\sqrt{x}$ のグラフを x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動したものです。**

無理関数では，根号のなかが正または0であるということと，値域にとくに注意してください。では，トレーニングです。

トレーニング

1　次の無理関数の定義域と値域を求め，グラフをかきなさい。
(1)　$y=2-\sqrt{4-x}$
(2)　$y=\sqrt{|x+3|-2}$

2　次の無理関数の定義域と値域を求め，グラフをかきなさい。
(1)　$y=\sqrt{3x}$　　　(2)　$y=-\sqrt{-3x}$

3　次の無理関数の定義域と値域を求め，グラフをかきなさい。
(1)　$y=-\sqrt{2x+4}$　　　(2)　$y=\sqrt{2x+4}-1$

4　次の無理関数の定義域と値域を求め，グラフをかきなさい。
(1)　$y=\sqrt{|x+1|}$　　　(2)　$y=\sqrt{|x|+1}$

こんども，無理関数のグラフをかく問題です。この問題では，絶対値がはいっています。

例題 82 —— **絶対値を含む無理関数のグラフ**

次の関数のグラフをかきなさい。

$y=\sqrt{2x+2+2|x+1|}$ （大阪工大）

考え方　絶対値記号| |を分類してはずします。すなわち，$x \geqq -1$ と $x<-1$ に分けて考えます。

解　答

$$y=\sqrt{2x+2+2|x+1|}$$

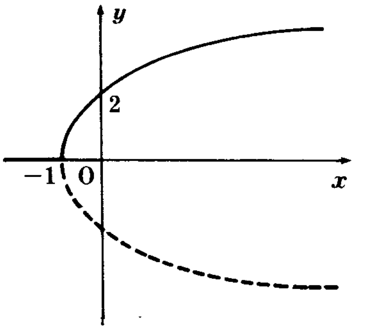
$x+1 \geqq 0$ すなわち，$x \geqq -1$ のとき

$$y=\sqrt{2x+2+2(x+1)}=\sqrt{4x+4}=2\sqrt{x+1}$$

$x+1<0$ すなわち，$x<-1$ のとき

$$y=\sqrt{2x+2-2(x+1)}=0$$

したがって，グラフをかくと，右図のようになる。



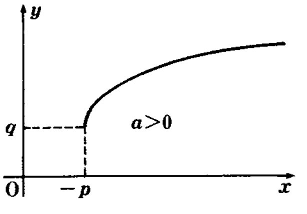
注　意　$x+1<0$ のとき，すなわち，$x<-1$ のとき，$y=0$ を忘れないようにすること。

POINT

◆ 絶対値を含む関数は，(絶対値内)$\geqq 0$，(絶対値内)<0 に場合分けして絶対値をはずします。

◆ 無理関数のグラフは，$\boldsymbol{y=a\sqrt{x+p}+q}$ の形に変形してかきます。

このとき，**端点は** $(\boldsymbol{-p},\ \boldsymbol{q})$ で，$\boldsymbol{a}$ **の値の符号**で上開きか，下開きかがきまります。



絶対値をはずすことと，グラフがかきやすいように変形することです。では，トレーニングをしてみましょう。

トレーニング

5 次の関数のグラフをかきなさい。

$y=\sqrt{2x+2+2|x+1|}$ （大阪工大）

6 次の関数のグラフをかきなさい。

$$y=\sqrt{x-1-|x-2|}-1$$

7 次の関数のグラフをかきなさい。

$$y=\sqrt{x-3-|x-3|}+1$$

8 次の関数のグラフをかきなさい。

(1) $y=\sqrt{x+1+|2x+5|}$

(2) $y=\sqrt{x+1+|2x+1|}$

9 次の式の表すグラフをかきなさい。

(1) $|y|=\sqrt{x}$

(2) $|y-1|=3\sqrt{x+2}-3$

こんどは，無理関数のグラフと無理関数の逆関数のグラフについての問題です。

例題 83 ——— **無理関数の逆関数とそのグラフ**

関数　$y=x^2-4\ (x\geqq 0)$　………①　$y=\sqrt{x+4}\ (x\geqq -4)$　………②

について，次の各問いに答えなさい。

(1) ②のグラフ上の点を$(a,\ b)$とすると，点$(b,\ a)$は①のグラフ上にあることを示しなさい。また，逆も成り立つことを示しなさい。

(2) ①，②のグラフの交点は直線 $y=x$ 上にあることを証明しなさい。

(3) (2)を用いて，①，②のグラフの交点を求めなさい。（佐賀大）

考え方　(1) ②に点$(a,\ b)$をあてはめたときの a と b の関係が，①に点$(b,\ a)$をあてはめたときの a と b の関係と等しくなるかどうかを考えます。(逆関数の性質)

(2) 交点を$(a,\ b)$とし，$a\neq b$ と仮定したときの矛盾を導きます。

(3) ①と $y=x$ を連立させて解きます。

解　答　(1) 点$(a,\ b)$が②のグラフ上にあるので

$$b=\sqrt{a+4}\ (a\geqq -4),\ b\geqq 0$$

この式を変形して

$$b^2=a+4\quad すなわち\quad a=b^2-4\ (b\geqq 0)$$

したがって，点$(b,\ a)$は①のグラフ上にある。

逆に，点$(b,\ a)$が①上にあれば　$a=b^2-4\ (b\geqq 0)$

この式を変形して　$b^2=a+4$

これから　$a+4\geqq 0$　ゆえに　$a\geqq -4$

また，$b\geqq 0$ より　$b=\sqrt{a+4}$

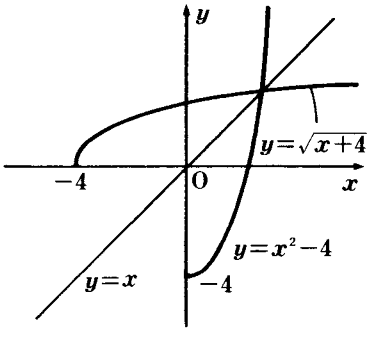
これは，点$(a,\ b)$が②上にあることを示している。

(2) 交点を$(a,\ b)$とすると，①と②の上にあるので，点$(b,\ a)$も①，②上にあり交点となる。

いま，$a\neq b$とすると，2点$(a,\ b)$，$(b,\ a)$を結ぶ線分の傾きは，$\dfrac{b-a}{a-b}=-1$ となり，2つの交点がのっている①が増加関数であることに反する。

ゆえに　$a=b$

したがって，交点は直線 $y=x$ 上にある。



(3) ①と $y=x$ とを連立させて

$$x^2-4=x$$

$$x^2-x-4=0\qquad ゆえに\quad x=\frac{1\pm\sqrt{17}}{2}$$

$x>0$ であるから，交点は直線 $y=x$ 上にあることに注意して，

$$\left(\frac{1+\sqrt{17}}{2},\ \frac{1+\sqrt{17}}{2}\right)$$

POINT ◆ **関数 $y=f(x)$ の逆関数を $y=g(x)$ とすると，このグラフは，直線 $y=x$ に関して対称となります。**

したがって，この２つの曲線に交点があれば，直線 $y=x$ 上に存在します。

トレーニングでは，無理関数と直線との交点を求める問題，無理関数の逆関数に関する問題を練習しましょう。

トレーニング

10 関数　$y=x^2-4\ (x\geqq 0)$　………①　　$y=\sqrt{x+4}\ (x\geqq -4)$　………②

について，次の各問いに答えなさい。

(1) ②のグラフ上の点を $(a,\ b)$ とすると，点 $(b,\ a)$ は①のグラフ上にあることを示しなさい。また，逆も成り立つことを示しなさい。

(2) ①，②のグラフの交点は直線 $y=x$ 上にあることを証明しなさい。

(3) (2)を用いて，①，②のグラフの交点を求めなさい。　(佐賀大)

11 次の①，②のグラフの交点を求めなさい。

$y=\sqrt{x+2}$　………①

$y=|x|$　………②

12 次の①，②のグラフの交点を求めなさい。

$y=3\sqrt{|x|-1}-1$　………①

$y=x$　………②

13 関数　$y=-\sqrt{2-x}$　………①　　$y=-x^2+2\ (x\leqq 0)$　………②

について，次の各問いに答えなさい。

(1) ①のグラフ上の点を $(a,\ b)$ とすると，点 $(b,\ a)$ は②のグラフ上にあることを示しなさい。また，逆も成り立つことを示しなさい。

(2) ①，②のグラフの交点は直線 $y=x$ 上にあることを証明しなさい。

(3) (2)を用いて，①，②のグラフの交点を求めなさい。

無理関数のグラフについてわかりましたから，つぎは，無理関数と直線が交わる条件を考える問題をとりあげます。

例題 84 ―― **無理関数のグラフと直線の交点**

直線 $y=mx-2m+1$ と曲線 $y=\sqrt{x-2}$ とが相異なる 2 点で交わるように，実数 m の値の範囲を定めなさい。

考え方 直線 $y=mx-2m+1$ と，$y=\sqrt{x-2}$ のグラフをかき，その交点を調べます。ここで，直線は，m の値に関係なく，1 つの定点を通ることを利用しましょう。

解 答 $y=mx-2m+1$ ………① $y=\sqrt{x-2}$ ………②

直線①は，m について整理すると

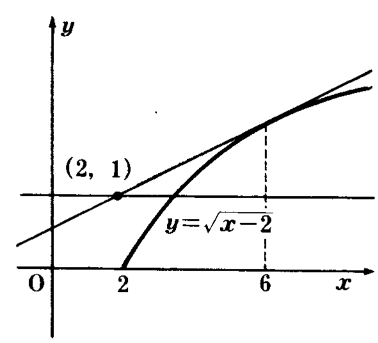
$m(x-2)+1-y=0$ **←m についての恒等式とみる。**

すなわち，m の値がいろいろな値をとるとき，つねに成立する条件は，

$x-2=0,\quad 1-y=0$

これは，直線①が m の値にかかわらず定点 $(2,\ 1)$ を通っていることを示している。

①と②のグラフをかくと，右図のようになる。



①と②が接するときの m の値は

$mx-2m+1=\sqrt{x-2}$

$(mx-2m+1)^2=x-2$ **←両辺を 2 乗する。**

整理すると

$m^2x^2-(4m^2-2m+1)x+(4m^2-4m+3)=0$

判別式 $D=0$ から **←接する ⇄ $D=0$ の利用**

$(4m^2-2m+1)^2-4m^2(4m^2-4m+3)=0$

$16m^4+4m^2+1-16m^3-4m+8m^2-16m^4+16m^3$
$-12m^2=0$

$1-4m=0$

ゆえに $m=\dfrac{1}{4}$

したがって，上図から，①の傾き m が $\boldsymbol{0<m<\dfrac{1}{4}}$ の範囲にあれば，相異なる 2 点で交わる。

POINT ◆ **m がいろいろな値をとるとき，曲線 $f(x,\ y)+mg(x,\ y)=0$ は，必ず $f(x,\ y)=0$，$g(x,\ y)=0$ の交点を通っています。**このことから，曲線がつねに通る定点を求めましょう。

無理関数と直線の関係を調べるときは，グラフをかいて，無理関数のグラフと直線がどういう位置関係にあるかを見るのです。では，トレーニングです。

トレーニング

14 直線 $y=mx-2m+1$ と曲線 $y=\sqrt{x-2}$ とが相異なる 2 点で交わるように，実数 m の値の範囲を定めなさい。

15 直線 $y=mx$ ………① 曲線 $y=\sqrt{2x-1}$ ………②
の交点の数は，m の値によってどのように変わりますか。

16 直線 $y=mx+1$ ………① 曲線 $y=2\sqrt{|x|-1}+1$ ………②
が交わらないように，実数 m の値の範囲を求めなさい。

17 直線 $2y=mx+1$ ………① 曲線 $y=2\sqrt{|x|+1}-2$ ………②
の共有点の数が 2 個になるような m の値を求めなさい。

18 直線 $my=x-m-1$ ………① 曲線 $y=-\sqrt{1-4x}$ ………②
とが相異なる 2 点で交わるように，実数 m の値の範囲を求めなさい。

最後は，ガウス記号があるときの無理関数のグラフです。

例題 85 ―― **ガウス記号と無理関数**

2 つの関数

$y=[x]-\sqrt{x-[x]}$

$y=ax-1$

を $x\geqq 0$ において考えます。ただし，$[x]$ は x を超えない最大の整数（すなわち，$m\leqq x<m+1$ をみたす整数 m）を表す記号です。

(1) $y=[x]-\sqrt{x-[x]}$ のグラフの $0\leqq x<4$ の部分をかきなさい。

(2) $x\geqq 0$ において，2 つの関数のグラフの交点が 1 個であるような a の値の範囲を求めなさい。

(3) $x\geqq 0$ において，2 つの関数のグラフの交点が n 個 ($n\geqq 2$) であるような a の値の範囲を求めなさい。 （慶応大）

考え方 (1) $0\leqq x<1$ のとき $[x]=0$，$1\leqq x<2$ のとき $[x]=1$，$2\leqq x<3$ のとき $[x]=2$，$3\leqq x<4$ のとき $[x]=3$ であることを使います。

(2) グラフを利用します。直線 $y=ax-1$ の傾き a の範囲を考えていけばよいことになります。

(3) $y=[x]-\sqrt{x-[x]}$ のグラフの n 個の部分と，直線 $y=ax-1$ が交わる条件を求めていきます。

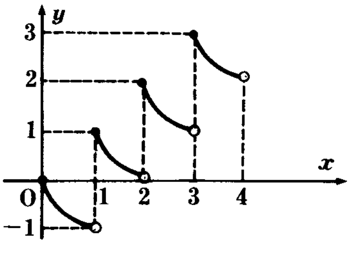
解答 (1) $0\leqq x<1$ のとき　$[x]=0$ より　$y=-\sqrt{x}$

$1\leqq x<2$ のとき　$[x]=1$ より　$y=1-\sqrt{x-1}$

$2\leqq x<3$ のとき　$[x]=2$ より　$y=2-\sqrt{x-2}$

$3\leqq x<4$ のとき　$[x]=3$ より　$y=3-\sqrt{x-3}$

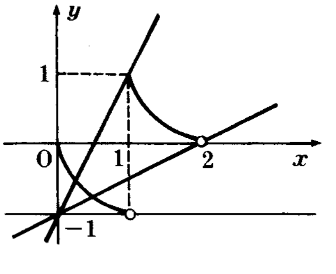
したがって，グラフは右図のようになります。



(2) 直線は，傾き a で切片が -1 である。

よって右図より，交点が 1 個であるのは，直線が点 (0, 0) と点 (1, 1) の間，点 (1, −1) と点 (2, 0) の間にあるときである。

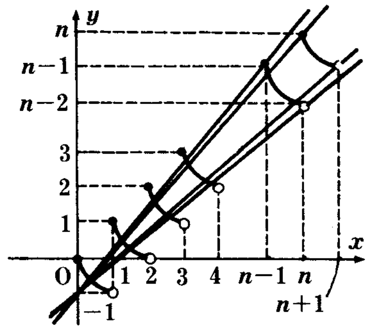
したがって，そのときの傾き a は



$$\mathbf{0<a\leqq \frac{1}{2},\quad 2<a}$$ ←等号の有無に注意。

(3) $x \geqq 0$ において，2つのグラフの交点が n 個であるのは，$y=[x]-\sqrt{x-[x]}$ のグラフの n 個の部分と直線が交わることである。

すなわち，直線が，点 $(n-1,\ n-1)$ と点 $(n,\ n)$ の間と，点 $(n+1,\ n-1)$ と点 $(n,\ n-2)$ の間に存在するときである。また，直線は必ず点 $(0,\ -1)$ を通るから，その傾き a の存在範囲は，



$$\frac{n-2+1}{n}<a \leqq \frac{n-1+1}{n+1},\quad \frac{n+1}{n}<a \leqq \frac{n-1+1}{n-1}$$

すなわち

$$\boldsymbol{\frac{n-1}{n}<a \leqq \frac{n}{n+1},\quad \frac{n+1}{n}<a \leqq \frac{n}{n-1}}$$ ←**等号の有無に注意。**

となる。

POINT ◆ **$[x]$ はガウス記号と呼ばれ，x を超えない最大の整数を表す記号です。**

例 $[5.6]=5$，$[103.95]=103$，$[-2.5]=-3$

◆ $x=n+t$ （n は整数，$0 \leqq t<1$）のとき，

$$y=[x]-\sqrt{x-[x]}=n+\sqrt{n+t-n}=n-\sqrt{t}$$

となります。

ガウス記号を含むときの，グラフの形がわかりましたね。では，実際にトレーニングしてみることにしましょう。

トレーニング

19 2つの関数

$$y=[x]-\sqrt{x-[x]}$$
$$y=ax-1$$

を $x \geqq 0$ において考えます。ただし，$[x]$ は x を超えない最大の整数（すなわち，$m \leqq x<m+1$ をみたす整数 m）を表す記号です。

(1) $y=[x]-\sqrt{x-[x]}$ のグラフの $0 \leqq x<4$ の部分をかきなさい。

(2) $x \geqq 0$ において，2つの関数のグラフの交点が1個であるような a の値の範囲を求めなさい。

(3) $x \geqq 0$ において，2つの関数のグラフの交点が n 個 $(n \geqq 2)$ であるような a の値の範囲を求めなさい。　（慶応大）

20 関数　$y=\sqrt{[x]-x+1}$　のグラフの　$-2 \leqq x \leqq 2$ の部分をかきなさい。ただし，$[x]$ は x を超えない最大の整数を表す記号です。

21 次の関数のグラフをかき，最大値，最小値を求めなさい。

$$y=\sqrt{2|x-1|+[x]-1}\ (-2 \leqq x \leqq 2)$$

22 直線　$y=kx$　………①　　　曲線　$y=[x]+\sqrt{x-[x]}$　………②

について次の問いに答えなさい。

(1)　②のグラフの $-2 \leqq x \leqq 2$ の部分をかきなさい。

(2)　①と②のグラフの交点の数が 2 個であるような k の値の範囲を求めなさい。

23 2 つの関数　$y=2\sqrt{x-[x]}$　………①　　　$y=ax+2$　………②

を考えます。

(1)　①のグラフの　$-3 \leqq x < 3$ の部分をかきなさい。

(2)　①と②の交点が 1 個であるような a の値の範囲を求めなさい。

(3)　①と②の交点が n 個 $(n \geqq 2)$ であるような a の値の範囲を求めなさい。

きょうは，無理関数に関する問題を練習してきました。無理関数のグラフ，無理関数と直線の交わりなどが重要なことです。第20日は，演習問題です。

第20日	関　数　　　　学習日　　月　　日
	演習問題

きょうは，これまでに学習してきた関数についての復習です。2次関数のグラフ，2次関数の最大・最小，解の分離など，どれも基本となる重要な内容ばかりです。完全にできるように，ここで，練習しておきましょう。

では，問題をはじめなさい。

1 次の3つの条件をみたすように，関数 $f(x)=ax^2+bx+c$ の係数 a，b，c を定めなさい。

(1) $y=f(x)$ のグラフは点 $(1,\ 1)$ を通る。

(2) $x=1$ における $y=f(x)$ の接線の傾きは2である。

(3) 直線 $y=-2x+7$ は $y=f(x)$ に接する。　　　　（神戸商大）

2 実数 x，y が $x^2+4y^2=4$ をみたすとき，$x+y$ の最大値，最小値を求めなさい。

3 x の変域が $\{x \mid -1 \leqq x \leqq 1\}$ であるとき，関数 $f(x)=-x^2+2ax$ の最大値，最小値を求めなさい。

4 方程式　$ax^2-x-1=0$　の 2 つの解 α，β がともに -1 と 1 との間にあるための条件を求めなさい。

（東北学院大）

5 $y=ax^2+bx+c$ $(a \neq 0)$ は，放物線 $y=2-x^2$ と直線 $y=x$ との 2 交点を通るとします。

(1) a，b，c の間には，どんな関係がありますか。

(2) この放物線が直線 $y=3x+6$ に接するとき，接点の座標を求めなさい。

6 次の方程式の実数解の個数は，実数 a の値によってどのように異なるかを調べなさい。ただし，重複解は 1 つと考えます。

$$|x(x-3)|-a(x-4)=0$$

7 分数関数 $f(x)=\dfrac{ax+5}{bx+c}$ のグラフは，$x=\dfrac{1}{2}$，$y=-\dfrac{1}{3}$ を漸近線とし，点 $(1,\ 1)$ を通ります。このとき，a，b，c の値を求めなさい。また，$f^{-1}(-3)$ を求めなさい。　(早稲田大)

8 $|x|\leqq 1$ のとき，$y=\dfrac{2x+1}{2x-1}$ のとりうる値の範囲を求めなさい。

9 すべての実数 x に対して定義された $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2+ax+1}$ の最大値が $2a$，最小値が b であるとき，定数 a，b を求めなさい。 （東京女大）

10 正の数 x，y に対して，$\sqrt{x}+\sqrt{y}\leqq a\sqrt{x+y}$ が成り立つような正数 a のうちで最小のものを求めなさい。 （成蹊大）

これで，デイリープログラムの第1巻の学習は終わりです。ここまでで，基礎的な実力はかなりついています。第2巻も，この調子で進めましょう。

大学受験デイリープログラム100日　数学・文系

＊一部変更することがあります

各巻・各日の学習内容

学習内容の細目は，おもなものに限って示してあります

● 第1巻　数と式，方程式・不等式，関数

1 整式の整理　単純な展開整理，乗法公式による展開整理，対称式の利用。

2 整式の除法　わり算の実行，剰余定理，完全平方式の利用，因数定理。

3 分数式　分数式の計算，部分分数形の利用，比例式利用，繁分数式。

4 平方根，無理数　平方根の性質と計算，2重根号と分母の有理化，式の値。

5 数と集合　整数問題，整数の集合と証明，集合の包含関係，集合の個数。

6 演習問題　数と式での演習問題。因数分解，因数定理，約数と倍数。

7 2次方程式　解の公式，解と係数の関係，判別式，方程式の作成。

8 高次方程式　相反方程式，3次方程式の解と係数の関係，複素数解など。

9 いろいろな方程式　連立方程式の解き方，分数方程式，無理方程式など。

10 不等式の解法　絶対値を含む不等式，連立不等式，2次・3次不等式。

11 不等式の証明　相加平均・相乗平均，コーシー・シュワルツ，大小比較。

12 等式の証明　式の消去利用，比例式利用，特殊な文字の消去法，恒等式。

13 式の値　対称式の値，単純な式の値，無理式を含む式の値。

14 演習問題　方程式・不等式に関する演習問題。分数・無理方程式など。

15 2次関数　ガウス記号を含む関数，2次関数のグラフ，頂点の軌跡など。

16 最大・最小　2次関数の最大・最小，区間つきの最大・最小など。

17 グラフと方程式の解　解の配置，実数解をもつ条件，交点の個数など。

18 分数関数　分数関数のグラフ，漸近線，分数不等式，最大・最小。

19 無理関数　2次関数のグラフとの交点，直線との交点の条件など。

20 演習問題　関数に関する演習問題。最大値・最小値，方程式の解の条件。

● 第2巻　平面図形と式，三角比・関数，指数・対数関数

21 点と直線　点の座標，分点表示，傾きの範囲，直線の方程式の決定。

22 2直線の位置関係　平行・垂直，交点通過の直線，点対称・線対称。

23 円　円の方程式，半円のグラフ，傾きのわかる接線など。

24 不等式の表す領域　点の存在する範囲，正・負領域，領域内での最大・最小。

25 軌跡　線分の中点の軌跡，重心の軌跡，媒介変数消去など。

26 演習問題　平面図形と式に関する演習問題。直線の定点を通る条件など。

27 三角比・三角関数の計算　三角比の値，三角比の変換式，三角関数の計算。

28 三角関数のグラフ　グラフと最大・最小，グラフからの関数決定など。

29 三角方程式・不等式　三角方程式，絶対値を含む三角方程式，三角不等式。

30 正弦定理・余弦定理　三角形の解法，三角形の形状，等式の証明など。

31 加法定理　加法定理，2倍角の公式，最大・最小，積を和に変える公式。

32 三角関数の応用　三角形・四角形の面積，三角形の作成条件，2等分線。

33 演習問題　三角比・三角関数に関する演習問題。三角方程式，式の値など。

34 指数関数　指数関数のグラフ，指数の計算，指数を用いた式の値など。

35 対数の性質　対数の計算，常用対数の性質，対数の値，けた数。

36 対数関数　対数関数の逆関数，対数関数のグラフ・いろいろなグラフなど。

37 指数方程式・不等式　置き換え形，解の条件，文字を含む指数不等式。

38 対数方程式・不等式　単純形，底の変換，対数不等式(底の分類)，絶対値形。

39 大小比較　指数の大小，対数の大小，グラフ利用，差の計算利用。

40 演習問題　指数・対数関数に関する演習問題。けた数，方程式，不等式。

● 第3巻　2次曲線，ベクトル，空間図形

41 放物線　放物線のグラフ，放物線の定義，放物線の性質，直交接線。

42 だ円　だ円の定義，軌跡がだ円となるもの，接線，媒介変数表示。

43 双曲線　双曲線のグラフ，双曲線の方程式の決定，双曲線の性質，接線。

44 2次曲線と直線　放物線と直線，双曲線と直線，だ円と直線など。

45 2次曲線の分類と領域　2次式の分類，2次式の回転，不等式と領域など。

46 演習問題　2次曲線に関する演習問題。2次曲線と直線，軌跡。

47 ベクトルの演算　分点表示，ベクトルの1次独立，ベクトルの和・差。

48 ベクトルの成分と内積　ベクトルの相等，和・大きさ，三角表示の成分。

49 内積の計算　成分を使っての内積，内積の図形へのあてはめ，なす角など。

50 平行・垂直　一直線上にある条件(成分表示・ベクトル表示)，内積の証明。

51 図形への応用　ベクトル方程式，軌跡，領域，面積，メネラウスの定理。

52 空間ベクトル　面積，内積とベクトルの垂直，内積と図形，ベクトル方程式。

53 演習問題　ベクトルに関する演習問題。演算，2等分線，係数比較など。

54 空間図形　空間座標，点と点の距離，重心，内分・外分など。

55 直線　直線の方程式，同一直線上にある条件，垂直に交わる直線。

56 直線の位置関係　2直線の交点，2直線の位置条件，2直線のなす角など。

57 平面　平面の方程式(1点と法線ベクトル・通る3点)，平面の交線。

58 直線と平面　ベクトルに垂直な平面と直線，2平面の交線と直線など。

59 球　球による直線の切り取り，球の切り口，球に接する平面の方程式。

60 演習問題　空間図形に関する演習問題。2直線の共通垂線，平面の方程式。

● 第4巻　行列・1次変換，数列，確率

61 行列の演算　行列の相等，行列の和，積の法則(結合法則)，積の性質。

62 逆行列　逆行列の定義，逆行列をもたない条件，逆行列の計算など。

63 ケーリー・ハミルトンの公式　公式の作成・計算，$a+d$，$ad-bc$ の値。

64 A^n の計算　固有値の存在，固有値を利用した A^n の計算など。

65 1次変換　ベクトルと1次変換，合成，点・直線の変換，平面の変換。

66 回転・対称移動　点・直線の回転，2次曲線の回転，大きさ不変の写像など。

67 いろいろな1次変換　不動点，直線から直線，円から円への1次変換など。

68 演習問題　行列・1次変換に関する演習問題。逆行列の計算，回転移動。

69 等差・等比数列　等差数列になる条件，等差数列の和，等比中項。

70 Σの計算　Σの計算(単純形・応用)，ΣΣの計算，部分分数形。

71 階差数列・群数列　等差となる階差数列，等比となる階差数列，群数列。

72 いろいろな数列　2項定理，S-rS の利用，和で定義された数列など。

73 帰納法　等式・不等式の証明，Σを含む不等式，漸化式から一般項。

74 $a_{n+1}=pa_n+q$ の解法　基本的な解法，応用，3項間の漸化式など。

75 いろいろな漸化式　2項間の和，対数をとる方法，3項間の和，連立形，分数形。

76 演習問題　数列に関する演習問題。帰納法，群数列，不等式の証明など。

77 順列　順列，同種のものを含む順列，重複順列，円順列など。

78 組合せ　組合せ，グループ分け，重複組合せ，不定方程式の解など。

79 確率の計算　組合せ利用，余事象，加法定理，乗法定理，独立試行。

80 演習問題　確率に関する演習問題。不定方程式の解，2項定理，乗法定理利用。

● 第5巻　微分法，積分法

81 極限　極限値の計算，係数決定，関数の極限，関数の決定応用など。

82 微分係数・導関数　平均変化率，微分係数の定義と利用，係数決定など。

83 接線・法線　傾きより係数決定，傾き既知の接線，2点で接する接線。

84 増減・極値　関数の増加・減少，極値よりの係数決定，極値をもたない条件。

85 曲線のグラフ　基本・絶対値を含むもの，x軸に接する曲線など。

86 最大・最小　最大値・最小値より係数決定，係数による分類など

87 速度・加速度　落下運動の速度，パラメータ表示，加速度，表面積・体積。

88 方程式の実数解　実数解の個数，絶対値を含む方程式，解の大小など。

89 不等式への応用　関数のグラフと不等式，不等式の成立条件など。

90 演習問題　微分法に関する演習問題。極値をもつ条件，方程式の実数解など。

91 不定積分　不定積分の計算，微分と積分の関係，関数の決定など。

92 定積分　偶関数・奇関数，絶対値を含む定積分，定積分の最大・最小。

93 定積分の性質　定積分で表された関数の極値，任意の関数で成立する条件。

94 定積分で表された関数　微分と積分の関係，定積分関数の最大・最小など。

95 定積分と不等式　偶関数・奇関数利用の不等式，差の利用など。

96 面積(Ⅰ)　3次曲線と面積，曲線と接線とで囲まれた面積など。

97 面積(Ⅱ)　面積を直線で2等分する条件，面積の最大・最小など。

98 体積　x軸 y軸回転の体積，x軸の両側にある部分の回転体積。

99 速度，道のり　速度・位置・時間，道のり，速度と加速度，変位。

100 演習問題　積分法に関する演習問題。関数方程式，面積，体積の最大・最小。

● 第6巻　補充演習編

◆入試問題を主体とした応用的な問題練習で，実力をよりいっそう確実なものにする。

◆そのあと，総合問題に取り組み，実戦的な力を養成する。

TRAINING PAPER

DAILY PROGRAM

発行人　加藤 譲
発行所　株式会社 教育社

大学受験デイリープログラム100日

高校3年 数学