

復
刻
版

TRAINING PAPER

〔特許出願中〕

DAILY[®] PROGRAM

高校数学

確立・統計（見本）

1

第1巻では、場合の数、順列、組合せについて学習します。場合の数では、場合の数を求めるときの基本となる和の法則、積の法則を学習し、順列、組合せでは、いろいろな場合の順列、組合せの数が正確に求められるように練習します。また、最後に二項定理を学習します。

場合の数

第1日	和の法則	4
第2日	集合の要素の個数	11
第3日	積の法則(1)	22
第4日	積の法則(2)	27
第5日	和の法則・積の法則の利用	33
第6日	和の法則・積の法則の復習	39
第7日	順列	43
第8日	順列の求め方	50
第9日	いろいろな順列(1)	57
第10日	いろいろな順列(2)	64
第11日	順列の復習	73
第12日	組合せ	77
第13日	組合せの数の求め方	86
第14日	いろいろな組合せ(1)	92
第15日	いろいろな組合せ(2)	98
第16日	組合せの復習	106
第17日	二項定理(1)	110
第18日	二項定理(2)	119
第19日	二項定理の復習	124

KYOIKUSHA

TRAINING PAPER®

高校数学 確率・統計

効果的な使い方

- 確率・統計のトレーニングペーパーは、4巻構成です。第4巻には総復習があります。

〈1日の構成〉

- 1号分は、平均18日です。学習のひとまとまりごとに復習日があります。
- 1日分は、次のような構成になっています。

学習内容の説明

新しい学習内容をわかりやすく説明してあります。また、定理や公式などは簡潔にまとめられています。

➡ よく読んで、しっかりと理解しよう

基本例題・例題

定理や公式などがどのように実際使われるかを示してあります。基本例題は基本的な問題、例題はやや発展的な問題をあつかいます。

➡ 考え方や解答のポイントをおさえよう

トレーニング

基本例題・例題をふまえて、実際に問題を解く練習です。

トレーニングによって、解法を完全に理解します。

➡ きちんと書きこみながら、しっかりトレーニングしよう

(ここまでが1日に2～3回程度くり返されます。)

解 答

くわしい解答が巻末にあります。

➡ 答え合わせも学習のうち、1問1問しっかりと

復 習 日

説明、例題、トレーニングで学習してきた内容を、もう一度確認します。~~やや~~レベルのたかい問題もとりあげてあります。

➡ 復習で実力を十分つけよう

〈効果的な使い方〉

- ❖ 2日にトレーニングペーパー1日分のペースで、計画的に学習していこう

このペースで学習していけば1か月で1号分を終えられます。

復習用として使うことはもちろんのこと、新しい学習内容でもていねいな説明がついていきますから、予習用、自学自習用としておおいに利用してください。

- ❖ 1日分の学習は、順を追い、指示に従いながら進めよう

順を追い、指示どおりにトレーニングしていくのが基本です。ただし、慣れてきたら、自分なりに使い方を工夫してかまいません。

- ❖ 定期試験の前には、弱点の部分を重点的に復習しよう

ふだんの学習で間違えたところをもう一度全部やり、復習日の問題を再確認しておきましょう。

賭けと確率

～確率論の起こり～

□どの目に賭けるか？

「2つのサイコロを同時に投げて出る目の和に賭けるとき、いくつに賭けるのが最も有利であろうか」

この問題に、皆さんはどう答えますか？

イタリアのミラノ生れの数学者カルダノ(1501～1576)は、このような賭けの有利不利に関する問題を、初めて解いた人と言われています。

彼は、2つのサイコロを区別できるものとして、目の出方が全部で、
 $6 \times 6 = 36$ 通り

あるとし、そのうち、目の和が2となる場合、3となる場合、……、12となる場合の目の出方をすべて数えあげてみました。

そして、目の和が7となる場合が、

(1, 6), (2, 5), (3, 4)

(6, 1), (5, 2), (4, 3)

の6通りあって、これが最も多いから最も有利であると結論づけました。

□どちらが多く起こるか？

望遠鏡の発明や物体の運動に関する観測、実験などで有名なガリレイ(1564～1642)も、賭けについての問題を解いています。

それは、「3つのサイコロを同時に投げたとき、目の和が9になる場合と10になる場合は、どちらが多く起こるか」という問題でした。

彼も、3つのサイコロが区別できるものとして、目の出方のすべての場合を数えあげました。

目の出方 $6^3 = 216$ 通りのうち、和が9となるのは、1と2と6の目が出る場合を考えると

(1, 2, 6), (1, 6, 2), (2, 1, 6)

(2, 6, 1), (6, 1, 2), (6, 2, 1)

の6通り、1と3と5の目が出る場合も同様に考えて6通り。さらに、1と4と4の目が出る場合が

(1, 4, 4), (4, 1, 4), (4, 4, 1)

の3通り、2と2と5の目が出る場合も3通りあります。

その他、2と3と4の目が出る場合が6通り。3個とも3の目が出る場合が1通りあります。

以上のようにして、和が9となる場合は、全部で25通りあります。

同様に、和が10となる場合は、全部で27通りあります。

こうしてガリレイは、目の和が10になる場合が、目の和が9になる場合よりも多く起こると答えたのです。

□ 賭け金の分配方法

2つのサイコロを同時に投げるとき、目の出方は36通りあり、たとえば、和が7となる場合は6通りあるから

和が7となる確率は $\frac{6}{36}$ である

というように、1つのことがらの起こり得る場合の数に注目して、確率論を初めて組み立てたのが、フランスの数学者パスカル(1623～1662)と、フェルマー(1601～1665)でした。

このすばらしい理論の発端も、やはり、賭けについてのことからでした。

A, B 2人が、先に3勝すれば勝ちというゲームを始めたが、Aの2勝1敗となったところでこのゲームを中止しなければならなくなり、どのように賭け金を分ければよいか、ということをパスカルに相談したのです。

パスカルは、このままゲームを続けたときを想定し、Aが賭けに勝つのは先に3勝する場合であるから、2人の技量が同じであるとして、

次のゲームでAが勝つ確率 $\frac{1}{2}$

次で負け、その次のゲームでAが勝つ確率 $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$
とし、結局、Aが賭けに勝つ可能性は、 $\frac{3}{4}$ となるから、賭け金を3:1の比に分ければよいとしました。

このことを、パスカルはフェルマーにも伝え、これをきっかけとして2人は現在の確率論の基礎を作り上げたのです。

今日、確率という用語およびその概念は、私達の日常生活にかなり浸透しています。また、確率論を基礎とする統計学の形をとって、確率は現代の科学のあらゆる分野に応用されている最も重要な概念です。

この巻では、その確率を考えるときに必要となる場合の数について、それを速く正確に求める方法を学びます。とくに、順列、組合せの計算については、しっかり学習していきましょう。

この巻では最後に、 $(a+b)^2$ 、 $(a+b)^3$ などの展開公式を一般化して、二項定理を学びますが、この中にパスカルの三角形といわれる展開公式の係数を並べたものが登場します。

これによって、確率論の創始者としてのパスカルの名は、諸君の頭の中に深く刻み込まれることでしょう。

～ 人間は考える葦である ～

和の法則

きょうから、場合の数についての学習をはじめことにしましょう。さいころの目の出かた、数字の並べ方などを考えますが、これは中学校のときにも学習しています。おぼえていますね。

きょうは、場合の数のうちで、和の法則といわれる、もっとも基本となる法則を学習することにします。

はじめは、並べ方についてとりあげます。まず説明を読んでからトレーニングに進むことにしましょう。

●場合の数と表、樹形図の利用

大小2つのさいころを投げて、目の数の和が8になる場合の数を求めてみましょう。このときの起こりうるすべての場合を表にすると

大	2	3	4	5	6
小	6	5	4	3	2
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
和	8	8	8	8	8

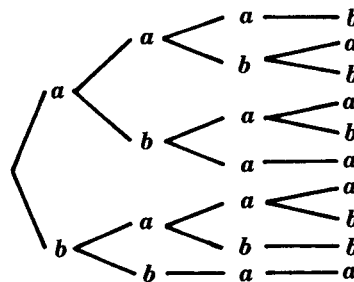
の5通りになり、求める場合の数は5ということがわかります。

次に、 a, a, a, b, b の5文字から4文字を選んで、1列に並べる方法は何通りあるかを求めてみましょう。

a は3つまで、 b は2つまでくり返して使えることに注意して、このときの起こりうるすべての場合を、英語の辞書と同じようにアルファベットの順に並べてみると

$aaab \quad aaba \quad aabb \quad abaa$
 $abab \quad abba \quad baaa \quad baab$
 $baba \quad bbaa$

となり、1列に並べる方法は10通りということがわかります。また、右のような枝分れしていく図、すなわち
じゆけいず
 樹形図から10通りと求めることもできます。



このように、場合の数を求めるときは、表や樹形図などをうまく使うことによって、もれや重なりのないように数えることがたいせつです。

場合の数を求めるときは、表や樹形図を使って、もれの少ないように数えることがポイントです。むずかしくはありませんが、ていねいに順序よく調べることが大切です。

■■■■■■■■■■ トレーニング ■■■■■■■■■■

- 1 大小2つのさいころを投げて、目の数の和が10になる場合の数を求めなさい。
- 2 a, b, c, d の4文字から異なる2文字を取り出して1列に並べるとき、並べ方は何通りありますか。
- 3 a, a, b, b, b, b の6文字から4文字を取り出して1列に並べるとき、並べ方は何通りありますか。

では、つぎに、場合の数についての和の法則に進みます。

●和の法則

大小2つのさいころを同時に投げるとき、出る目の数の和が平方数になる場合の数を求めてみましょう。平方数とは、自然数を2乗してできる数です。

目の数の和のとりうる値は2以上12以下ですから、それが平方数になるのは次の2つの場合しかありません。

- ・ 目の数の和が4になる。
- ・ 目の数の和が9になる。

それぞれの場合を表を使って調べると、目の数の和が4になる場合は

大	1	2	3
小	3	2	1

の3通りあり、目の数の和が9になる場合は

大	3	4	5	6
小	6	5	4	3

の4通りあることがわかります。

目の数の和が4になる場合と9になる場合は同時に起こることはありませんから、目の数の和が平方数になる場合の数は

$$3+4=7 \quad \Leftarrow (\text{和が4になる場合の数}) + (\text{和が9になる場合の数})$$

となります。

場合の数が和で求められる場合を一般にまとめると次のようになります。

□ 和の法則 □

同時に起こらない2つのことがら A, B があって、 A の起こる場合が m 通り、 B の起こる場合が n 通りであるとき、 A または B の起こる場合の数は $m+n$ である。

《注》 同時に起こることがない3つのことがら A, B, C があって、 A の起こる場合が m 通り、 B の起こる場合が n 通り、 C の起こる場合が l 通りであるとき、 A または B または C の起こる場合の数は $m+n+l$ となります。
3つ以上のことがらについても、同様に成り立つのです。

和の法則はわかりましたね。和の法則は、同時には起こらないことがらについて成り立ちます。
次の例題は、和の法則を使って解きます。

基本例題 1

和の法則

x, y が整数で、 $1 \leq x \leq 9, 1 \leq y \leq 9$ のとき、 x と y の和が8の倍数になる場合の数を求めなさい。

考え方

x と y の和のとりうる値は2以上18以下ですから、それが8の倍数になるのは、次の2つの場合しかありません。

(i) x と y の和が8になる。 (ii) x と y の和が16になる。

(i), (ii)は同時に起こらないことから、求める場合の数は、和の法則を使って求めることができます。

解 答

x と y の和が 8 の倍数になるのは、次の 2 つの場合が考えられる。

(i) x と y の和が 8 になる。 (ii) x と y の和が 16 になる。

それぞれの場合について調べる。

(i) の場合は

x	1	2	3	4	5	6	7
y	7	6	5	4	3	2	1

の 7 通りある。

(ii) の場合は

x	7	8	9
y	9	8	7

の 3 通りある。

ここで、(i)、(ii) は同時に起こらないから、求める場合の数は和の法則により

$$7 + 3 = 10$$

和の法則を使って解くトレーニングをしてみましょう。問題の条件をみたすのはどんな場合かを、まずはじめに考えるのです。

■■■■■■■■■■ トレーニング ■■■■■■■■■■

4 大小 2 つのさいころを投げて、目の数の和が 11 以上になる場合の数を求めなさい。

5 x, y が整数で、 $1 \leq x \leq 8$, $5 \leq y \leq 12$ のとき、 x と y の和が 9 の倍数になる場合の数を求めなさい。

- 6 大小2つのさいころを投げて、目の数の差が4以上になる場合の数を求めなさい。

できましたね。ここでの問題は、同時に起こらないことがらが2つの場合のものでした。次の例題は、3つ以上の同時に起こらないことがらを考えるものです。

例題 2 和の法則

大小2つのさいころを投げて、目の数の差が素数になる場合の数を求めなさい。

考え方 目の数の差のとりうる値は0以上5以下ですから、それが素数になるのは次の3つの場合しかありません。

- (i) 目の数の差が2になる。
- (ii) 目の数の差が3になる。
- (iii) 目の数の差が5になる。

(i), (ii), (iii)は同時に起こらないことから、求める場合の数は、和の法則を使って求めることができます。

解答 目の数の差が素数になるのは、次の3つの場合が考えられる。

- (i) 目の数の差が2になる。
 - (ii) 目の数の差が3になる。
 - (iii) 目の数の差が5になる。
- それぞれの場合について調べる。

(i)の場合は

大	1	2	3		4		5	6
小	3	4	1	5	2	6	3	4

の8通りある。

(ii)の場合は

大	1	2	3	4	5	6
小	4	5	6	1	2	3

の6通りある。

(iii)の場合は

大	1	6
小	6	1

の2通りある。

ここで、(i)，(ii)，(iii)は同時に起こらないことから，求める場合の数は和の法則により

$$8+6+2=16$$

注意

1は素数ではありませんので，目の数の差が1の場合はふくまれないことに注意しましょう。

3つ以上の同時に起こらないことがらについても，和の法則は2つの場合と同様に成り立ちます。では，トレーニングです。

■■■■■■■■■■ トレーニング ■■■■■■■■■■

7 大小2つのさいころを投げて，目の数の和が3の倍数になる場合の数を求めなさい。

8 $5 \leq x + y \leq 7$ をみたす正の整数の組 (x, y) はいくつありますか。

9 大小2つのさいころを投げて，目の数の和が7以上の奇数になる場合の数を求めなさい。

10 $x + y + z = 9$ をみたす正の整数の組 (x, y, z) はいくつありますか。

11 大中小 3 つのさいころを投げて、目の数の和が 10 になる場合の数を求めなさい。

同時に起こらないことがらと和の法則は、場合の数の基本ですから、しっかりおさえておきましょう。

では、きょうはこれで終わりにします。

集合の要素の個数

集合については、いままで、いろいろなところで学習してきました。集合の交わり、和集合、補集合、部分集合などの意味を覚えていますか。

きょうは、集合の要素の個数について学習します。

まず、はじめに、全体集合や和集合など、集合についての基本事項の説明からはじめることにしましょう。

● 集合とその要素

集合を考えるときは、はじめに考えるものの全体の集合 U をきめておくことがふつうです。この U を全体集合ぜんたいしゅうごうといいましたね。

また、 U の部分集合ぶぶんしゅうごう A, B に対して、次の集合も学習しましたね。

$A \cap B$ (A と B の交わりまじあるいは共通部分きょうつう ぶぶん)

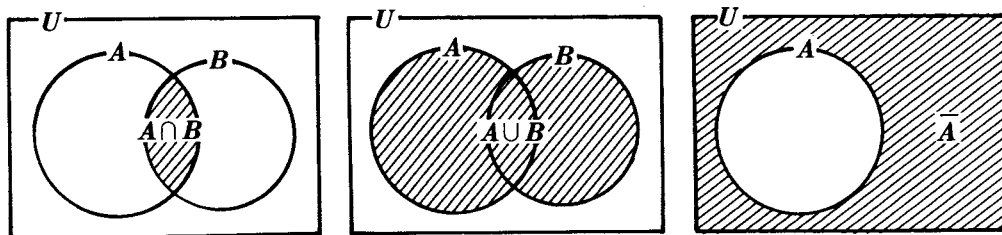
…………… A と B の両方に属する要素の集合

$A \cup B$ (A と B の結びむすあるいは和集合わしゅうごう)

…………… A と B の少なくとも一方に属する要素の集合

$\overline{A}$ (A の補集合ほしゅうごう)

…………… U の中で、 A に属していない要素の集合



いま、 U を 1 から 20 までの自然数の集合とします。

$$U = \{1, 2, 3, \dots, 20\}$$

また、 U の部分集合で、2 の倍数の集合を A 、3 の倍数の集合を B 、7 の倍数の集合を C とすると

$$A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$$

$$B = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$$

$$C = \{7, 14\}$$

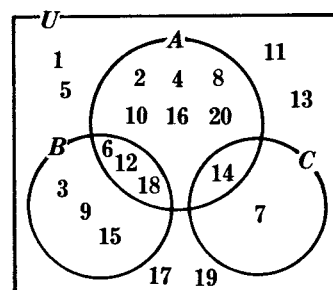
となりますね。

このときの $A \cap B$, $A \cup B$, $\overline{A}$ はそれぞれ

$$A \cap B = \{6, 12, 18\}$$

$$A \cup B = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20\}$$

$$\overline{A} = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19\}$$



となることはわかりますね。

では、 $B \cap C$ はどうでしょう。 B と C の両方に属する要素はありません。このように要素をまったくもたないものも集合のなかまに入れて、^{くうしゅうごう}空集合とよび、^{ファイ} ϕ で表しましたね。すなわち

$$B \cap C = \phi$$

となります。

集合 A と B の交わり、 A と B の結び、全体集合などは、いずれも中学校で学習しています。要素をもたないものも集合のなかまに入れて空集合とよびました。次のトレーニングで、集合を図示することを復習しておきましょう。

■■■■■■■■ トレーニング ■■■■■■■■

1 次の集合 A , B について、 $A \cap B$, $A \cup B$ を要素を書き並べて表しなさい。

(1) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$

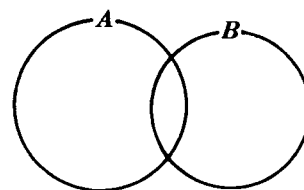
(2) $A = \{x \mid x \text{ は } 15 \text{ の正の約数}\}$, $B = \{x \mid x \text{ は } 18 \text{ の正の約数}\}$

2 図は、集合 A , B の関係を表しています。

次の集合を斜線で示しなさい。

(1) $A \cap B$

(2) $A \cup B$

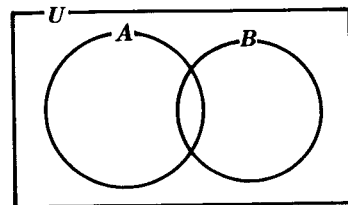


3 図は、全体集合 U の部分集合 A, B の関係を表しています。

次の集合を斜線で示しなさい。

(1) $\overline{A}$

(2) $\overline{A \cup B}$



集合の要素の個数を表す書き方を覚えましょう。

● 集合の要素の個数を表す記号

集合 A に属する要素の個数を $n(A)$ で表すこともあります。

たとえば、集合 A, B が

$$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}, B = \{2, 4, 6\}$$

のとき

$$A \cap B = \{2, 4\}, A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

となりますから

$$n(A) = 6 \quad \Leftrightarrow A \text{ の要素の個数は } 6$$

$$n(A \cap B) = 2 \quad \Leftrightarrow A \cap B \text{ の要素の個数は } 2$$

$$n(A \cup B) = 7 \quad \Leftrightarrow A \cup B \text{ の要素の個数は } 7$$

と表されます。

また、集合 C が空集合のとき、すなわち $C = \phi$ のとき、 C は要素をもたない集合ですから、要素の個数は 0 となり

$$n(C) = 0$$

と表されます。

《注》 集合 $A = \{0\}$ は 0 という要素 1 個をもつ集合を表しますから、 $n(A) = 1$ となります。 $A = \phi$ の場合と区別しておきましょう。

要素の個数を $n(A)$ と表しますから覚えておきましょう。

トレーニング

4 集合 A に属する要素の個数を $n(A)$ で表します。

集合 A, B, C が

$$A = \{1, 4, 7, 10\}, B = \{1, 3, 5, 7\}, C = \{2, 4, 6\}$$

であるとき、次の個数を求めなさい。

(1) $n(A)$

(2) $n(A \cup B)$

(3) $n(B \cap C)$

つぎに、和集合の要素の個数について説明しておきます。

● 和集合の要素の個数

集合 A, B が

$$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}, B = \{2, 4, 6, 8\}$$

のとき、集合 $A, B, A \cap B, A \cup B$ の要素の個数について、どんな関係があるかを調べてみましょう。

右の図からもわかるように、 $A, B, A \cap B, A \cup B$ の要素の個数はそれぞれ

$$n(A) = 6, n(B) = 4,$$

$$n(A \cap B) = 2, n(A \cup B) = 8$$

となりますね。

ところで、 $A \cup B$ の要素の個数 $n(A \cup B) = 8$ は、 $n(A) = 6$ と $n(B) = 4$ の和 10 と一致していません。

それは、 $n(A)$ と $n(B)$ の和をとったのでは、 $A \cap B$ の要素である 2 と 4 を二重に数えてしまうからです。ですから、 $n(A)$ と $n(B)$ の和から $n(A \cap B)$ をひけば、 $n(A \cup B)$ と一致します。すなわち

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$\begin{array}{ccccccc} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ 8 & = & 6 & + & 4 & - & 2 \end{array}$$

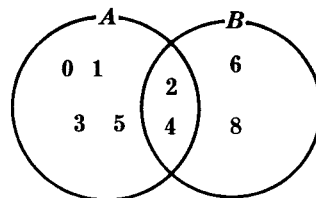
が成り立ちます。

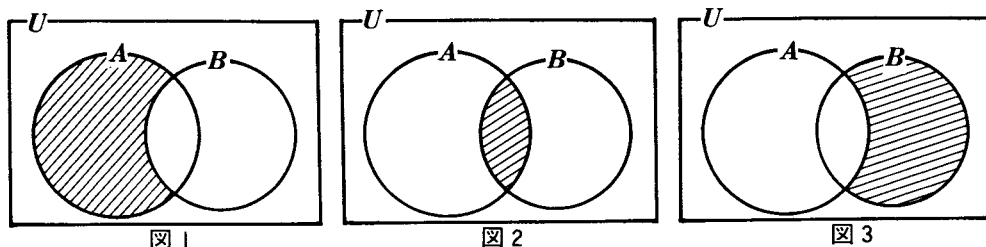
このことを、 $n(A) = a, n(B) = b, n(A \cap B) = c$ とおいて、一般の場合について示してみましょう。

$$A \cap \overline{B} \quad \text{図 1 の斜線部分} \cdots \cdots n(A \cap \overline{B}) = a - c$$

$$A \cap B \quad \text{図 2 の斜線部分} \cdots \cdots n(A \cap B) = c$$

$$\overline{A} \cap B \quad \text{図 3 の斜線部分} \cdots \cdots n(\overline{A} \cap B) = b - c$$





図からわかるように、 $n(A \cap \bar{B})$ と $n(A \cap B)$ と $n(\bar{A} \cap B)$ の和は、二重に数えられることなく、 $n(A \cup B)$ となります。

すなわち

$$\begin{aligned} n(A \cup B) &= (a - c) + c + (b - c) \\ &= a + b - c = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \quad \cdots \cdots \text{①} \end{aligned}$$

が成り立ちます。

ところで、 $A \cap B$ が要素をもたない集合のとき、すなわち $A \cap B = \phi$ のときには、 $n(A \cap B) = 0$ ですから、①は次のようになります。

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

□ 和集合の要素の個数 □

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

とくに、 $A \cap B = \phi$ のとき

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

なお、2つのことがら A 、 B があるとき、それぞれの1つ1つの場合を要素とする集合 A 、 B を考えると

⇔ことがらと集合を同じ文字で表した。

$n(A)$ …… A の起こる場合の数(m とする)

$n(B)$ …… B の起こる場合の数(n とする)

$n(A \cup B)$ …… A または B の起こる場合の数

したがって、 $A \cap B = \phi$ (A と B が同時には起こらない)のとき

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) = m + n$$

となりますが、これは、既に学んだ和の法則にほかなりません。

このように、和の法則は上の定理の特別なケースとみることができます。

和集合の要素の個数は、単純に2つの集合の要素の個数を加えたものではありません。次のトレーニングは、説明を確認するための問題です。

■■■■■■■■■■ トレーニング ■■■■■■■■■■

- 5 2つの集合 A, B に関して、次のことが成り立つことを証明しなさい。

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

ただし、 $n(A)$ は集合 A に属する要素の個数を表します。

- 6 集合 A に属する要素の個数を $n(A)$ で表します。次の問いに答えなさい。

(1) $n(A)=32, n(B)=16, n(A \cap B)=10$ のとき、 $n(A \cup B)$ を求めなさい。

(2) $n(A)=18, n(B)=13, n(A \cup B)=25$ のとき、 $n(A \cap B)$ を求めなさい。

(3) $n(A)=26, n(A \cap B)=8, n(A \cup B)=36$ のとき、 $n(B)$ を求めなさい。

集合の要素の個数を求める例題をしておきましょう。

基本例題 1

和集合の要素の個数

1 から 100 までの整数の集合 U の中で、2 の倍数の集合を A 、5 の倍数の集合を B とするとき、次の集合の要素の個数を求めなさい。

(1) A

(2) B

(3) $A \cap B$

(4) $A \cup B$

考え方

(3) 集合 $A \cap B$ は 2 と 5 の公倍数、すなわち 10 の倍数の集合です。

(4) 集合 A に属する要素の個数を $n(A)$ と表すと

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

が成り立ちますから、 $A \cup B$ の要素の個数は、(1)、(2)、(3)の結果より求められます。

解 答

(1) 2 の倍数を考えると、 $100=2 \times 50$ であるから、その個数は

50

(2) 5 の倍数を考えると、 $100=5 \times 20$ であるから、その個数は

20

(3) 2 と 5 の公倍数、すなわち 10 の倍数を考えると、 $100=10 \times 10$ であるから、その個数は

10

(4) 集合 A に属する要素の個数を $n(A)$ と表すと

$$n(A)=50, n(B)=20, n(A \cap B)=10$$

$$\text{また } n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

が成り立つから

$$n(A \cup B) = 50 + 20 - 10 = 60$$

要素の個数を求めるときは，集合の共通部分に注意する必要があります。和集合の要素の個数を求める公式は，集合の重なり部分を考えれば，共通部分をひいておく理由がわかりますね。

■■■■■■■■■■ トレーニング ■■■■■■■■■■

7 ジョーカーを除いた 52 枚のトランプから 1 枚ぬき出すとき，ぬき出したカードがクラブまたは絵札である場合は何通りありますか。

8 1 から 50 までの整数の集合 U の中で，2 の倍数の集合を A ，3 の倍数の集合を B とするとき，次の集合の要素は何個ありますか。

(1) A

(2) B

(3) $A \cap B$

(4) $A \cup B$

9 1 から 200 までの整数のうち，5 または 6 で割り切れる数はいくつありますか。

できましたね。つぎに，補集合の要素の個数について説明します。

●補集合の要素の個数

いま、全体集合 $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ の中で、
部分集合 $A = \{2, 4\}$ を考えると、その補集合は、
 $\bar{A} = \{0, 1, 3, 5\}$ ですから、それぞれの集合の要素の
個数について

$$n(U) = 6, \quad n(A) = 2, \quad n(\bar{A}) = 4$$

が成り立ちます。

A と $\bar{A}$ の共通部分に要素はまったくなく、 A と $\bar{A}$
の和集合は全体集合になりますから

$$A \cap \bar{A} = \phi, \quad A \cup \bar{A} = U$$

ですね。したがって、要素の個数について

$$n(U) = n(A \cup \bar{A}) = n(A) + n(\bar{A})$$

$$\begin{array}{ccc} \vdots & \vdots & \vdots \\ 6 & 2 & 4 \end{array}$$

すなわち、次の式が成り立ちます。

$$n(\bar{A}) = n(U) - n(A)$$

このように、補集合の要素の個数 $n(\bar{A})$ は、 $\bar{A}$ の要素を調べずに、 $n(U)$ と $n(A)$
から求めることができます。

このことを一般に示してみましょう。

全体集合を U 、その部分集合を A 、 A の補集合を $\bar{A}$
とすると

$$A \cap \bar{A} = \phi, \quad A \cup \bar{A} = U$$

となります。まず、 $A \cap \bar{A} = \phi$ より

$$n(A \cup \bar{A}) = n(A) + n(\bar{A})$$

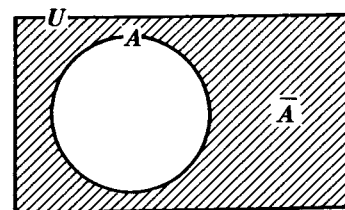
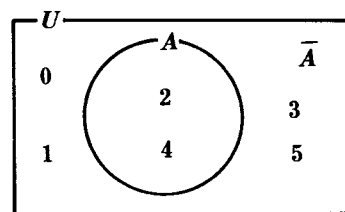
となることがわかりますね。また、 $A \cup \bar{A} = U$ ですから

$$n(U) = n(A) + n(\bar{A})$$

すなわち

$$n(\bar{A}) = n(U) - n(A)$$

が成り立ちます。



□ 補集合の要素の個数 □

全体集合を U 、その部分集合を A 、 A の補集合を $\bar{A}$ とすると

$$n(\bar{A}) = n(U) - n(A)$$

■■■■■■■■■■ トレーニング ■■■■■■■■■■

10 全体集合 U ，その部分集合 A ， A の補集合 $\overline{A}$ の間に次の関係が成り立つことを証明しなさい。

$$n(\overline{A}) = n(U) - n(A)$$

ただし， $n(A)$ は集合 A に属する要素の個数を表します。

では，補集合の要素の個数についての例題をしておきましょう。

例題 2

補集合の要素の個数

1 から 50 までの整数の集合 U の中で，4 の倍数の集合を A ，5 の倍数の集合を B とするとき，次の集合の要素の個数を求めなさい。

(1) $\overline{A}$

(2) $\overline{A \cap B}$

(3) $\overline{A \cap B}$

考え方

集合 A の要素の個数を $n(A)$ と表して考えます。

(1) $n(\overline{A}) = n(U) - n(A)$ の関係より， $n(\overline{A})$ を求めます。

(2) $\overline{A \cap B}$ は $A \cap B$ の補集合ですから，まず $n(A \cap B)$ を求め，次に

$$n(\overline{A \cap B}) = n(U) - n(A \cap B)$$

の関係より， $n(\overline{A \cap B})$ を求めます。

(3) $\overline{A \cap B} = \overline{A \cup B}$ が成り立ちますから， $n(A \cup B)$ を求めれば，あとは(2)と同様にして求めることができます。また， $n(A \cup B)$ は

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

の関係より求められます。

解答

4 の倍数を考えると， $50 = 4 \times 12 + 2$ であるから，その個数は 12 個である。

5 の倍数を考えると， $50 = 5 \times 10$ であるから，その個数は 10 個である。

4 と 5 の公倍数，すなわち 20 の倍数を考えると， $50 = 20 \times 2 + 10$ であるから，その個数は 2 個である。

以上から，集合 A に属する要素の個数を $n(A)$ と表すと

$$n(A) = 12, n(B) = 10, n(A \cap B) = 2$$

$$\text{また } n(U) = 50$$

$$(1) \quad n(\overline{A}) = n(U) - n(A) = 50 - 12 = 38$$

$$(2) \quad n(\overline{A \cap B}) = n(U) - n(A \cap B) = 50 - 2 = 48$$

$$(3) \quad n(\overline{A \cap B}) = n(\overline{A \cup B}) = n(U) - n(A \cup B)$$

ここで， $n(A \cup B)$ を求めると

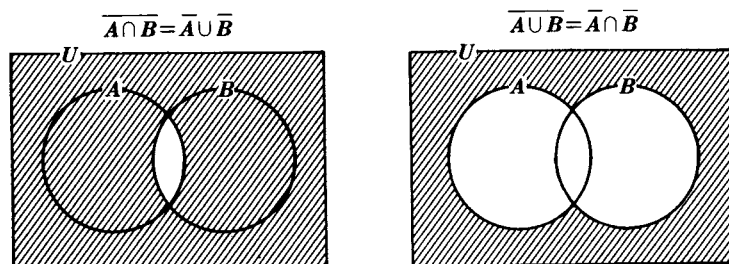
$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$= 12 + 10 - 2 = 20$$

$$\text{よって } n(\overline{A \cap B}) = 50 - 20 = 30$$

注 意

共通部分，和集合の補集合について，次の式が成り立ちます。この2つの式をド・モルガンの法則といいます。



補集合の要素の個数といっても，とくべつむずかしくはありませんね。個々の集合の要素の個数や，共通部分の要素の個数がわかればすぐにできます。

//////////////// トレーニング //////////////////

- 11** 1 から 50 までの整数の集合 U の中で，3 の倍数の集合を A ，5 の倍数の集合を B とするとき，次の集合の要素の個数を求めなさい。ただし， $n(A)$ は A に属する要素の数を表します。

(1) $n(\overline{A \cap B})$

(2) $n(\overline{A} \cap \overline{B})$

(3) $n(\overline{A \cup B})$

- 12** 1 から 80 までの整数の集合 U の中で，4 の倍数の集合を A ，6 の倍数の集合を B とするとき，次の集合の要素の個数を求めなさい。

(1) $\overline{A}$

(2) $\overline{A \cup B}$

(3) $A \cap \overline{B}$

13 クラス 50 人の中で、新聞 A, B の購読状況を調べたところ、A を読んでいる家が 28 軒、B を読んでいる家が 30 軒、A, B 両方とも読んでいない家が 2 軒でした。このとき、次の問いに答えなさい。

(1) A, B 両方とも読んでいる家は何軒ですか。

(2) B だけ読んでいる家は何軒ですか。

14 1 から 100 までの整数について、次の問いに答えなさい。

(1) 2 でも 3 でも割り切れない数はいくつありますか。

(2) 2 で割り切れるが 3 で割り切れない数はいくつありますか。

きょうは、集合の要素の個数を $n(A)$ のように表すこと、和集合の要素の個数の公式、補集合の要素の個数について学習しました。いずれも、和集合や補集合の意味がきちんと理解できていればできるものばかりでした。

積の法則 (1)

きょうは、場合の数で、積の法則といわれる法則を学習します。

あることがらが起こり、それに引きつづいて別のことが起こる場合がしばしばあります。その場合の数を数えあげるしかたが「積の法則」といわれるものです。ここでは、積の法則と、その考え方を利用して問題を解いていきます。

● 積の法則

いま、録音テープに、46 分テープ、60 分テープ、90 分テープ、120 分テープの 4 種類があり、それら 4 種類のテープすべてを、A 社、B 社が発売しているとします。その中から 1 本選んで買うとき、何通りの買い方があるでしょうか。

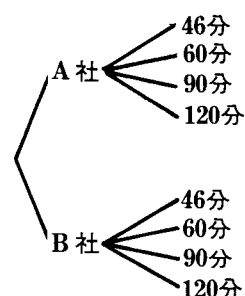
右のような樹形図からも 8 通りとわかりますが、次のように、考えることもできます。

会社の選び方は 2 通りで、そのどの場合についても、テープの種類の選び方は 4 通りですから、テープ 1 本の選び方は

$$2 \times 4 = 8 (\text{通り})$$

$$\Leftarrow (\text{会社の選び方の数}) \times (\text{テープの種類の選び方の数})$$

のように積で求めることができます。



場合の数が、積で求められる場合を一般にまとめると次のようになります。

□ 積の法則 □

ことがら A の起こる場合が m 通りあり、そのどの場合についてもことがら B の起こる場合が n 通りあるとき、A と B がともに起こる場合の数は $m \times n$ である。

《注》 3 つ以上のことがらについても同様に成り立ちます。

積の法則はわかりましたね。では、積の法則を使う簡単な例題をしてみましょう。

基本例題 1

積の法則

A 市から B 市までの行き方は 6 通り、B 市から C 市までの行き方は 3 通りあります。A 市から B 市を通過して C 市まで行く方法は何通りありますか。

考え方

A 市から B 市までの 6 通りの行き方のどの場合についても、B 市から C 市まで 3 通りの行き方があるから、積の法則によって求めることができます。

解 答

道順のとり方は、積の法則により

$$6 \times 3 = 18(\text{通り})$$

A 市から B 市へいくどの場合についても、B 市から C 市へ行く行き方が 3 通りずつある、ということで積の法則が使えるのです。

//////////////////// トレーニング //////////////////////

- 1** 男子 5 人と女子 4 人が、いす A, B に 1 人ずつすわるとします。男子がいす A, 女子がいす B にすわるとき、すわり方は何通りありますか。
- 2** 3 冊の本と 6 冊のノートがあります。この中から、本とノートを 1 冊ずつ選ぶとき、選び方は何通りありますか。
- 3** A 市から B 市までの行き方は 4 通り、B 市から C 市までの行き方は 3 通り、C 市から D 市までの行き方は 5 通りあります。A 市から B 市、C 市を通過して D 市まで行く方法は何通りありますか。

4 次の式を展開すると、異なる項はいくつできますか。

(1) $(a+b)(x+y+z)$

(2) $(a+b+c)(p+q)(l+m+n)$

次の例題も積の法則を使う例題です。

基本例題 2

積の法則

10 人の中から 400m リレーの第 1 走者、第 2 走者、第 3 走者、第 4 走者を選びます。選び方は何通りありますか。

考え方

第 1 走者の選び方は、10 人のうちだれでもいいから 10 通りです。第 2 走者の選び方は、第 1 走者にきまった人を除いた 9 人のうちから選びますから 9 通りです。以下、同じように考えて、積の法則を使います。

解答

第 1 走者の選び方は

10 通り

次に、第 2 走者の選び方は、残り 9 人の選び方であるから

9 通り

さらに、第 3 走者の選び方は、残り 8 人の選び方であるから

8 通り

最後に、第 4 走者の選び方は、残り 7 人の選び方であるから

7 通り

よって、求める選び方は積の法則により

$$10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040 (\text{通り})$$

この例題は、前の例題よりすこしむずかしくなっています。3 つ以上のことがらで、積の法則を使っている場合ですね。3 つ以上の場合でも、積の法則は成り立ちます。では、トレーニングしましょう。

■■■■■■■■■■ トレーニング ■■■■■■■■■■

5 次の問いに答えなさい。

- (1) 1, 2, 3, 4, 5, 6 という 6 つの数字から、異なる 2 つの数字をとってつくられる 2 けたの整数はいくつありますか。

(2) 8人がいす A, B に1人ずつすわる時、そのすわり方は何通りありますか。

6 次の問いに答えなさい。

(1) a, b, c, d, e, f, g の7文字から異なる2文字を取り出して1列に並べるとき、並べ方は何通りありますか。

(2) A市からB市までの行き方は6通りあります。行きと帰りに同じ道を通らないとすれば、A市からB市に行き、A市に帰ってくる方法は何通りありますか。

7 次の問いに答えなさい。

(1) 40人のクラスの中から、議長、副議長、書記を1名ずつ3人選ぶことにしました。きめ方は何通りありますか。

(2) A, B, C, D, E の5人が5人がけのいすにすわりました。すわり方は何通りありますか。

8 男子5人と女子4人がいす A, B, C に1人ずつすわるとします。男子がいす A に、女子がいす B にすわり、いす C にすわるのは男子でも女子でもかまわないとき、すわり方は何通りありますか。

9 0, 1, 2, 3, 4, 5 の 6 つの数字だけを使って次のような整数をつくる時、その整数は全部で何通りできますか。

(1) それぞれの数字は 1 回しか使えないとして、3 けたの整数をつくる時

(2) 同じ数字を何回使ってもよいとして、3 けたの奇数をつくる時

きょうは、積の法則を学習してきました。ことがら A の起こる場合が m 通りあり、そのどの場合についてもことがら B の起こる場合が n 通りあるとき、A と B がともに起こる場合の数は $m \times n$ になるということでした。積の法則も和の法則同様、基本の法則です。

積の法則 (2)

きょうは、積の法則に関連したやや応用的な問題と、直積という新しい考え方を学習します。

どちらも、考え方のもとになっているのは、積の法則です。

では、まずはじめに、約数の個数を求める例題を考えてみましょう。

例題 1

約数の個数

216 の正の約数の個数を求めなさい。

考え方

216 を素因数分解すると、 $2^3 \times 3^3$ ですから、216 の約数は、 $2^x \times 3^y$ の形に表されます。そして、 x は 0, 1, 2, 3 の値を、 y も 0, 1, 2, 3 の値をとり得ます。その x, y の値のとり方に応じて約数がきまりますから、積の法則があてはまります。

解 答

216 を素因数分解すると $216 = 2^3 \times 3^3$

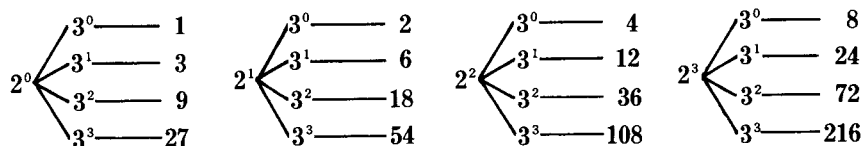
$2^3 \times 3^3$ の約数は、 $2^x \times 3^y$ の形に表される。

x のとりうる値は 0, 1, 2, 3

y のとりうる値は 0, 1, 2, 3

よって、求める約数の個数は積の法則により

$$4 \times 4 = 16 (\text{個})$$



注 意

約数には、1 も 216 自身もふくまれます。

x, y として、0, 1, 2, 3 をとりうるということに気づけば、個数はすぐに求められます。
 $x = 0, y = 0$ のとき 1 となりますが、これも約数の 1 つです。

■■■■■■■■ トレーニング ■■■■■■■■

1 次の数の正の約数の個数を求めなさい。

(1) 5^3

(2) $2^3 \times 3^4$

(3) $3^4 \times 5$

(4) $2^2 \times 3^2 \times 5^3$

2 次の数の正の約数の個数を求めなさい。

(1) 72

(2) 800

(3) 360

3 次の数の正の約数の個数を求めなさい。

(1) 324

(2) 176

(3) 980

約数の個数の求め方はわかりましたね。こんどは、約数を全部加えたものがどうなるかという例題です。解き方にポイントがありますから、例題の解き方をよく読んでください。

例題 2

約数の総和

168 の正の約数の個数を求めなさい。また、それらの約数の総和を求めなさい。

考え方

168 を素因数分解すると、 $2^3 \times 3 \times 7$ となりますから、168 の約数は

$$2^x \times 3^y \times 7^z \quad (x, y, z \text{ は整数}, 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

の形で表されます。ところで

$$(2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3)(3^0 + 3^1)(7^0 + 7^1) \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

を多項式と考えて展開すると

$$2^0 \times 3^0 \times 7^0 + 2^0 \times 3^0 \times 7^1 + 2^0 \times 3^1 \times 7^0 + \cdots + 2^3 \times 3^1 \times 7^0 + 2^3 \times 3^1 \times 7^1$$

となります。

この式の各項は①の形で表され、また、①の形で表された数はこの式の各項のどれかになりますから、168 の約数の総和は②で求められます。

解 答

168 を素因数分解すると $168 = 2^3 \times 3 \times 7$

$2^3 \times 3 \times 7$ の約数は、 $2^x \times 3^y \times 7^z$ の形に表される。

x のとりうる値は 0, 1, 2, 3

y のとりうる値は 0, 1

z のとりうる値は 0, 1

よって、約数の個数は積の法則により

$$4 \times 2 \times 2 = 16 (\text{個})$$

また、これら 16 個の約数は

$$(2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3)(3^0 + 3^1)(7^0 + 7^1)$$

の展開式の 16 個の項であるから、これらの総和は

$$15 \times 4 \times 8 = 480$$

約数の和を求めるときに、展開するかたちを考えるとこがうまい方法ですね。この方法は特殊ですから、覚えておきましょう。では、同じ考え方で解く問題をトレーニングします。

||||| トレーニング |||||

4 144 の正の約数の個数を求めなさい。また、それらの約数の総和を求めなさい。

5 300 の正の約数の個数を求めなさい。また、それらの約数の総和を求めなさい。

6 504 の正の約数の個数を求めなさい。また、それらの約数の総和を求めなさい。

では、つぎに、積の法則に関連した直積というものを学習します。直積とは、はじめて聞くことばですね。しかし、むずかしいことはありません。まず、説明を読みましょう。

● 直積

x, y が整数で、 $1 \leq x \leq 5, 2 \leq y \leq 4$ のとき、点 (x, y) を図示してみましょう。
できる点は

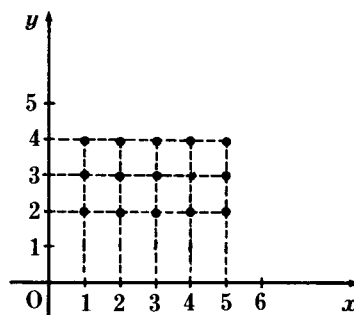
(1, 2), (1, 3), (1, 4),
(2, 2), (2, 3), (2, 4),
(3, 2), (3, 3), (3, 4),
(4, 2), (4, 3), (4, 4),
(5, 2), (5, 3), (5, 4)

となり、図の●がそれらを示しています。

そして、できる点の個数は、 x のとりうる値が5通りで、 y のとりうる値が3通りですから、積の法則により

$$5 \times 3 = 15 (\text{個})$$

と求めることができます。



一般に、2つの集合 A, B が

$$A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_m\}, B = \{b_1, b_2, b_3, \dots, b_n\}$$

であるとき、 A と B の要素を1つずつとってつくった組

$$(a_1, b_1), (a_1, b_2), \dots, (a_1, b_n), (a_2, b_1), \dots, (a_m, b_n)$$

のすべてからなる集合を、 A, B の直積ちよくせきといい、 $A \times B$ で表します。

$$\begin{aligned} A \times B &= \{(a_1, b_1), (a_1, b_2), \dots, (a_1, b_n), (a_2, b_1), \dots, (a_m, b_n)\} \\ &= \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\} \end{aligned}$$

また、直積 $A \times B$ の要素の個数は、 x のとりうる値が m 通り、 y のとりうる値が n 通りですから、積の法則により

$$n(A \times B) = mn = n(A) \times n(B) \quad \Leftarrow n(A) = m, n(B) = n$$

で求められます。

《注》 直積 $A \times A, B \times A$ など考えることもできます。

$$\begin{aligned} A \times A &= \{(a_1, a_1), (a_1, a_2), \dots, (a_1, a_m), (a_2, a_1), \dots, (a_m, a_m)\} \\ &= \{(x, y) \mid x \in A, y \in A\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B \times A &= \{(b_1, a_1), (b_1, a_2), \dots, (b_1, a_m), (b_2, a_1), \dots, (b_n, a_m)\} \\ &= \{(x, y) \mid x \in B, y \in A\} \end{aligned}$$

■■■■■■■■■■ トレーニング ■■■■■■■■■■

- 7 2つの集合 A, B を $A=\{a, b, c, d\}$, $B=\{1, 2\}$ とするとき、直積 $A \times B$ の要素をすべて書き表しなさい。

ただし、直積 $M \times N$ とは、 M と N の要素を1つずつとってつくった組のすべてからなる集合です。

集合 A と B の直積 $A \times B$ の要素の個数は、 A のすべての要素の個数と、 B のすべての要素の個数をかけたものになります。次の例題は、直積の要素の個数についてのものです。

基本例題 3

直積の要素の個数

2つの集合 A, B を、 $A=\{a_1, a_2, a_3\}$, $B=\{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ とするとき、直積 $A \times B$ の要素の個数を求めなさい。

ただし、 $M \times N$ とは、 M と N の要素を1つずつとってつくった組のすべてからなる集合です。

解答

集合 A の要素は3つで、集合 A の1つの要素に対して集合 B には4つの対応する要素があるから、直積 $A \times B$ の要素の個数は

$$3 \times 4 = 12$$

直積の要素の個数の求め方は簡単ですね。では、トレーニング。

■■■■■■■■■■ トレーニング ■■■■■■■■■■

- 8 集合 A を $A=\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ とするとき、直積 $A \times A$ の要素の個数を求めなさい。

ただし、直積 $M \times N$ とは、 M と N の要素を1つずつとってつくった組のすべてからなる集合です。

- 9 2つの集合 A, B を, $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$ とするとき, 次の直積の要素の個数を求めなさい。

(1) $A \times B$

(2) $A \times A$

(3) $B \times B$

- 10 2つの集合 A, B を $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$, $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ とするとき, 次の直積の要素の個数を求めなさい。

(1) $A \times B$

(2) $A \times A$

(3) $B \times A$

きょうは, 約数の個数, 約数の和, 直積について学習しました。これで終わりにします。

和の法則・積の法則の利用

これまでに、場合の数を求める基本的な考え方である「和の法則」と「積の法則」を学習してきました。きょうは、和の法則と積の法則を利用して問題を解く練習をします。どんな場合に和の法則が使えるか、どんな場合に積の法則が使えるかを見きわめることが大切です。では、次の例題からはじめましょう。

例題 1 和の法則，積の法則の利用

4000 と 8000 の間にある整数の中で、各位がすべて異なる数字でできている奇数は何個ありますか。

考え方

千の位の数字が偶数か奇数かによって、一の位の数字の選び方が異なります。

すなわち

千の位の数字 一の位の数字

偶数 → 1, 3, 5, 7, 9 のいずれか

奇数 → 1, 3, 5, 7, 9 のうち、千の位で使った数字以外のいずれか

そこで、千の位の数字が偶数、奇数の 2 つの場合について考えます。

解答

千の位の数字が偶数、奇数の 2 つの場合について考える。

(i) 千の位の数字が偶数のとき

千の位の数字の選び方は、4, 6 の

2 通り

一の位の数字の選び方は、1, 3, 5, 7, 9 の

5 通り

百の位の数字は、千の位、一の位で使った数字以外であるから、その選び方は

8 通り

十の位の数字は、千の位、一の位、百の位で使った数字以外であるから、その選び方は

7 通り

よって、この場合の奇数の個数は積の法則により

$$2 \times 5 \times 8 \times 7 = 560 (\text{個})$$

(ii) 千の位の数字が奇数のとき

千の位の数字の選び方は、5, 7 の

2 通り

一の位の数字は、1, 3, 5, 7, 9 のうち、千の位で使った数字以外であるから、その選び方は

4 通り

百の位の数字は、千の位、一の位で使った数字以外であるから、その選び方は

8通り

十の位の数字は、千の位、一の位、百の位で使った数字以外であるから、その選び方は

7通り

よって、この場合の奇数の個数は積の法則により

$$2 \times 4 \times 8 \times 7 = 448(\text{個})$$

(i), (ii)は同時に起こらないから、求める奇数の個数は和の法則により

$$560 + 448 = 1008(\text{個})$$

千の位の数字で場合分けしているところで和の法則、各位の数字の選び方で積の法則を使っています。

■■■■■■■■■■ トレーニング ■■■■■■■■■■

1 英語、数学、国語の3科目のうち、どれか2科目の参考書を1冊ずつ買うために店に行ったところ、英語には5種類、数学には3種類、国語には4種類買いたい本がありました。買う本の選び方は全部で何通りありますか。

2 300と800の間にある整数の中で、各位がすべて異なる数字でできている偶数は何個ありますか。

3 A, B, C, Dの4つのグループがあり、それぞれのグループの人数は4人, 5人, 6人, 5人です。この4つのグループから2つのグループを選び、その2つのグループから1人ずつを選ぶとき、選び方は全部で何通りありますか。

できましたね。では、次の例題をしてみなさい。

例題 2 積の法則，補集合の要素の個数の利用

100 から 699 までの 3 けたの整数の中で，百の位，十の位，一の位の少なくとも 1 つに 5 の数字が使われている整数は何個ありますか。

考え方

全体集合 U とその部分集合 A を

100 から 699 までの整数の集合……… U

各位が 5 でない整数の集合……… A

とすると，右の図からもわかるように

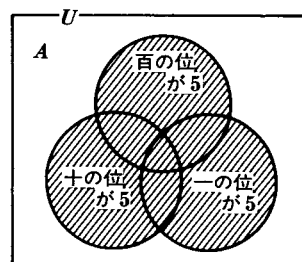
百の位，十の位，一の位の少なくとも 1 つに 5 の数字が使われている整数の集合

は， A の補集合 $\bar{A}$ になっています。

そこで，求める整数の個数は

$$(U \text{ の要素の個数}) - (A \text{ の要素の個数})$$

から導かれます。



解答

100 から 699 までの整数の集合を全体集合 U ，各位が 5 でない整数の集合を A とすると，求めるものは

$$n(U) - n(A)$$

ここで， $n(U)$ とは，集合 U に属する要素の個数を表す。

各位が 5 でない整数の各位の数字の選び方は

百の位は 1, 2, 3, 4, 6 の 5 通り

十の位は 5 以外の 9 通り

一の位は 5 以外の 9 通り

であるから

$$n(A) = 5 \times 9 \times 9 = 405$$

また， $n(U) = 600$ であるから，求める整数の個数は

$$600 - 405 = 195(\text{個})$$

この例題では，補集合の要素の個数の考え方を利用して解いています。各位に 5 が 1 つも使われていない場合を考えて解くと簡単です。では，トレーニングです。

■■■■■■■■■■ トレーニング ■■■■■■■■■■

- 4 100 から 999 までの 3 けたの整数の中で，百の位か一の位に 6 が少なくとも 1 つは使われている整数は何個ありますか。
- 5 1000 から 9999 までの 4 けたの整数の中で，千の位か一の位に 8 が少なくとも 1 つ使われている整数は何個ありますか。
- 6 1000 から 4999 までの 4 けたの整数の中で，百の位か十の位に 1 か 6 が少なくとも 1 つ使われている整数は何個ありますか。
- 7 100 から 499 までの 3 けたの整数の中で，百の位，十の位，一の位の少なくとも 1 つに 3 の数字が使われている整数は何個ありますか。

では、次の例題を考えてみなさい。これは、和集合、補集合の要素の個数を利用する問題です。

例題 3 和集合・補集合の要素の個数の利用

143 より小さくて、143 とたがいに素な自然数の個数を求めなさい。

考え方

143 を素因数分解すると、 $143=11 \times 13$ となりますから、11 の倍数でもなく、13 の倍数でもない自然数が 143 とたがいに素な数となります。

そこで、 $U=\{x \mid x \text{ は } 143 \text{ より小さい自然数}\}$ を全体集合とし、その部分集合 A, B を

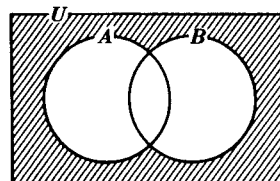
$$A=\{x \mid x \text{ は } 11 \text{ の倍数}\},$$

$$B=\{x \mid x \text{ は } 13 \text{ の倍数}\}$$

とすると、143 とたがいに素な自然数の集合は

$$\overline{A \cap B} \text{ すなわち } \overline{A \cup B}$$

で表されます。



解答

143 を素因数分解すると $143=11 \times 13$ ………①

いま、 $U=\{x \mid x \text{ は } 143 \text{ より小さい自然数}\}$ を全体集合とし、その部分集合 A, B を

$$A=\{x \mid x \text{ は } 11 \text{ の倍数}\}, B=\{x \mid x \text{ は } 13 \text{ の倍数}\}$$

とおけば、143 とたがいに素な自然数の集合は、 $\overline{A \cap B}$ すなわち $\overline{A \cup B}$ であるから、求めるものは

$$n(U) - n(A \cup B)$$

ここで、 $n(U)$ は集合 U に属する要素の個数を表す。

ところで、 A, B はともに 143 より小さい自然数の集合であるから、①より

$$n(A)=12, n(B)=10$$

$A \cap B$ は 11 と 13 の公倍数、すなわち 143 の倍数の集合であるから

$$n(A \cap B)=0$$

$$\begin{aligned} \text{よって } n(A \cup B) &= n(A) + n(B) - n(A \cap B) \\ &= 12 + 10 - 0 = 22 \end{aligned}$$

また、 $n(U)=142$ であるから、求める自然数の個数は

$$142 - 22 = 120(\text{個})$$

たがいに素である、というのは、1 より大きい共通な因数をもたないということです。ですから、まず素因数分解からはいります。和集合の要素の個数も、おさえておきます。

トレーニング

8 133 より小さくて、133 とたがいに素な自然数の個数を求めなさい。

9 221 より小さくて，221 とたがいに素な自然数の個数を求めなさい。

10 175 より小さくて，175 とたがいに素な自然数の個数を求めなさい。

きょうは，和の法則と積の法則を利用した問題を取りあげ，問題練習を中心に学習しました。
全部できましたね。次の日は，復習日です。

和の法則・積の法則の復習

きょうは、これまで学習してきた第1日から第5日の復習をすることにします。
和の法則、積の法則など、いままで学習してきたことを、きょうの復習日でより確かなものにしておきましょう。いろいろな場面で、どの考え方があてはまるかを正しくとらえられることが大切なことです。さっそく、問題を解いてみましょう。

■■■■■■■■■■ トレーニング ■■■■■■■■■■

- 1 1 から 6 の目をきざんださいころ A と、3 から 8 の目をきざんださいころ B と、5 から 10 の目をきざんださいころ C があります。

A, B, C 3 つのさいころを投げて、目の数の和が 13 になる場合の数を求めなさい。

- 2 集合 A に属する要素の個数を $n(A)$ で表します。次の問いに答えなさい。

(1) $n(A)=20$, $n(B)=15$, $n(A \cap B)=10$ のとき, $n(A \cup B)$ を求めなさい。

(2) $n(A)=12$, $n(B)=18$, $n(A \cup B)=22$ のとき, $n(A \cap B)$ を求めなさい。

■ 3 1 から 100 までの整数のうち、9 または 12 で割り切れる数はいくつありますか。

■ 4 全体集合 U とその部分集合 A, B があります。それらの集合の要素の個数が

$$n(U)=45, n(A)=20, n(B)=15, n(A \cap B)=9$$

のとき、次の集合の要素の個数を求めなさい。

(1) $\overline{A}$

(2) $\overline{A \cup B}$

(3) $\overline{A} \cap B$

■ 5 1 から 300 までの整数について、次の問いに答えなさい。

(1) 3 でも 5 でも割り切れない数はいくつありますか。

(2) 3 で割り切れるかまたは 5 で割り切れない数はいくつありますか。

■ 6 A 市から B 町までの行き方は 8 通り、B 町から C 市までの行き方は 5 通りあります。行きと帰りに同じ道を通らないとすれば、A 市から B 町を通過して C 市に行き、B 町を通過して A 市に帰ってくる方法は何通りありますか。

7 1260 の正の約数の個数を求めなさい。また、それらの約数の総和を求めなさい。

8 A, B 両チームで、先に 3 勝したチームが優勝し、以後の試合を打ち切る優勝戦を行うとき、優勝が決定するまでの勝負の分かれ方は何通りありますか。ただし、どの試合も引き分けはないものとします。

9 3 つの集合 A, B, C を

$$A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7\}$$

$$B = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}, C = \{c_1, c_2, c_3, c_4\}$$

とすると、次の直積の要素の個数を求めなさい。

(1) $A \times B$

(2) $A \times C$

(3) $C \times B$

10 1000 円札が 4 枚，500 円硬貨が 2 枚，100 円硬貨が 2 枚で支払うことのできる金額は何通りありますか。

11 1000 円札，500 円硬貨，100 円硬貨を使って 2000 円を支払う方法は何通りありますか。

12 和の順序を問題にしないとき，10 を 4 つの自然数の和として表す方法は何通りありますか。自然数の中には，等しいものがあってもよいものとして答えなさい。

ものを並べるとき、並べる順序を考えることが多いのですが、順序をいろいろに変えると、並べ方は何通りできるでしょうか。きょうは、ものの並べ方の数について考えていくことにします。

まず、順列とは何かということからはじめることにしましょう。

● 順列の定義

4 枚の異なった曲のレコードから 3 枚を取り出し、それらのかける順番を考えると、何通りのかけ方があるでしょう。

4 枚のレコードを a, b, c, d で表し、英語の辞書と同じようにアルファベット順に並べると、かけ方は

abc	abd	acb	acd	adb	adc
bac	bad	bca	bcd	bda	bdc
cab	cad	cba	cbd	cda	cdb
dab	dac	dba	dbc	dca	dcb

の 24 通りあることがわかります。

このとき、この 24 個の 1 つ 1 つを、異なる 4 個 a, b, c, d から異なる 3 個をとった じゅんれつ 順列といいます。

一般に、異なる n 個のものがあるとき、そのうちの異なる r 個を取り出して 1 列に並べたものを、 n 個のものから r 個とった順列といい、その数を

$${}_nP_r$$

で表します。

上の例は、4 個のものから 3 個とった順列で、その数は 24 ですから

$${}_4P_3 = 24$$

と表せますね。

《注》 P は、Permutation(順列)の頭文字です。

${}_nP_r$ の読み方は、「エヌ・ピー・アール」、「ピーのエヌ・アール」のどちらでもかまいません。

■■■■■■■■ トレーニング ■■■■■■■■

- ❶ a, b, c, d, e の 5 文字から異なる 2 文字を取り出してできる順列をすべて書きなさい。

順列とはなにかわかりましたね。では、順列の数はどのようにして求めるのでしょうか。こんどは、順列の数の求め方を考えてみましょう。

● 順列の数

4枚の異なった曲のレコード a, b, c, d から3枚を取り出し、それらのかける順番を考えたときのレコードのかけ方の数 ${}_4P_3$ の計算のしかたを考えましょう。

1曲めは、 a, b, c, d のどれでもよいから

4通り

2曲めは、1曲めの曲を除いてどれでもよいから

3通り

3曲めは、残り2枚のうちどちらかであるから

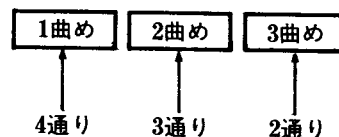
2通り

となり、積の法則により

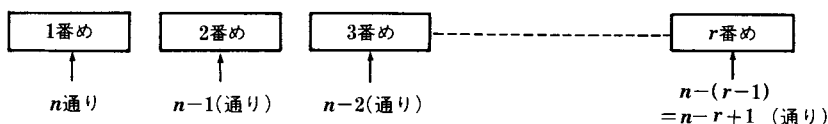
$$4 \times 3 \times 2$$

が求める数 ${}_4P_3$ になります。すなわち

$${}_4P_3 = 4 \times 3 \times 2$$



同様に考えて、異なる n 個のものから、 r 個をとった順列については



となり、積の法則により、この順列の数 ${}_nP_r$ は

$${}_nP_r = \overbrace{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}^{r \text{ 個の積}}$$

で求められます。これを使って、 ${}_7P_3$ 、 ${}_6P_4$ を計算すると、それぞれ

$${}_7P_3 = \overbrace{7 \times 6 \times 5}^{3 \text{ 個の積}} = 210 \qquad {}_6P_4 = \overbrace{6 \times 5 \times 4 \times 3}^{4 \text{ 個の積}} = 360$$

となります。

□ 順列の数 □

$${}_nP_r = \overbrace{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}^{r \text{ 個の積}}$$

順列の数の求め方はわかりましたね。 n からひとつずつ小さくなる数を r 個かければよいのです。では、トレーニングをしましょう。

■■■■■■■■■■ トレーニング ■■■■■■■■■■

2 次の値を求めなさい。

(1) ${}_5P_3$

(2) ${}_{10}P_3$

(3) ${}_6P_6$

3 次の順列の数を求めなさい。

(1) 異なる 7 個のものから 2 個とった順列

(2) 異なる 5 個のものから 4 個とった順列

4 次の計算をしなさい。

(1) ${}_{10}P_5 \div {}_5P_4$

(2) ${}_8P_5 \times {}_7P_2$

5 次の計算をしなさい。

(1) ${}_9P_2 + {}_5P_3$

(2) ${}_{12}P_6 \div {}_8P_4$

(3) ${}_5P_4 \times {}_6P_3$

できましたね。つぎは、順列の式を使った例題を解いてみましょう。

例題 1

順列と方程式

次の等式をみたす n の値を求めなさい。

$${}_nP_2 + 2 \cdot {}_nP_3 = 3 \cdot {}_{n+1}P_2$$

考え方

${}_nP_2 = n(n-1)$, ${}_nP_3 = n(n-1)(n-2)$, ${}_{n+1}P_2 = (n+1)n$ を与えられた等式に代入して, n についての方程式を解きます。

このとき, ${}_nP_2$, ${}_nP_3$, ${}_{n+1}P_2$ の意味から, n の値は

$$n \geq 2, n \geq 3, n+1 \geq 2$$

を同時にみたす整数でなければならないことに注意します。

解答

$${}_nP_2 = n(n-1), {}_nP_3 = n(n-1)(n-2), {}_{n+1}P_2 = (n+1)n$$

よって

$$n(n-1) + 2n(n-1)(n-2) = 3n(n+1) \quad \cdots \cdots \cdots \textcircled{1}$$

${}_nP_2$, ${}_nP_3$, ${}_{n+1}P_2$ の意味から, それぞれ

$$n \geq 2, n \geq 3, n+1 \geq 2$$

よって $n \geq 3$

これより, $n \neq 0$ であるから, ①の両辺を n で割って整理すると

$$n^2 - 4n = 0$$

$$n(n-4) = 0$$

よって $n = 0, 4$

n は 3 以上の整数であるから

$$n = 4$$

■■■■■■■■■■ トレーニング ■■■■■■■■■■

6 次の等式をみたす n の値を求めなさい。

(1) ${}_nP_2 = 12$

(2) ${}_nP_3 + 3 \cdot {}_nP_2 = 2 \cdot {}_{n+1}P_2$

7 次の等式をみたす n の値を求めなさい。

(1) ${}_nP_3=120$

(2) $3 \cdot {}_{n+1}P_2 + {}_{n+1}P_3 = 5 \cdot {}_nP_3$

順列の数の式では、1 ずつ小さくなる数の積の形が出てきますね。このような式をもっと簡単に表す方法があるのです。つぎは、このことを説明しましょう。

● 階乗

${}_nP_r$ の計算で、 $r=n$ のときの ${}_nP_n$ について調べてみましょう。

まず、 ${}_3P_3$ 、 ${}_5P_5$ の計算をみると

$${}_3P_3=3 \times 2 \times 1 \qquad {}_5P_5=5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

となり、両方とも最後は 1 までかけています。

一般に、 ${}_nP_n$ は

$${}_nP_n = \overbrace{n(n-1)(n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1}^{n \text{ 個の積}}$$

となります。この式を、末尾から見ると、1 から n までの自然数の積になっています。

これを、 n の^{かいじょう}階乗といい、 $n!$ という記号で表します。すなわち

$${}_nP_n = n! = n(n-1)(n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$$

たとえば、 $5!$ 、 $4!$ の値は、それぞれ

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120 \qquad 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

となります。

《注》 $5!$ は「5 の階乗」、 $4!$ は「4 の階乗」と読みます。

階乗を使った式についてトレーニングしておきましょう。

■■■■■■■■ トレーニング ■■■■■■■■

8 次の値を計算しなさい。

(1) $4!$

(2) $6!$

(3) $7!$

9 次の問いに答えなさい。

(1) $\frac{8!}{5!}$ を計算しなさい。

(2) $7! \times x = 10!$, $8! \div y = 4!$ をみたす x , y の値を求めなさい。

では、最後に、順列の数を階乗を使って表すことを学習します。

● ${}_nP_r$ と階乗

${}_7P_3$ の値を階乗^{かいじよう}で表すことを考えてみます。

$${}_7P_3 = 7 \times 6 \times 5$$

ですから、5 に続けて、 $4 \times 3 \times 2 \times 1$ をかけると、 $7!$ になりますね。

$$\underline{(7 \times 6 \times 5)} \times \underline{(4 \times 3 \times 2 \times 1)} = 7!$$

↓

${}_7P_3$

↓

$4!$

これから、 ${}_7P_3 = \frac{7!}{4!}$ となることがわかります。

同じように考えると

$$\underline{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)} \times \underline{(n-r)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1} = n!$$

↓

${}_nP_r$

↓

$(n-r)!$

すなわち

$${}_nP_r \times (n-r)! = n! \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

が成り立つことがわかります。

ところで、 $r=n$ のとき、 $(n-r)! = (n-n)! = 0!$ ですから、 $\textcircled{1}$ は

$${}_nP_n \times 0! = n!$$

となりますが、 $n!$ の定義では $0!$ は意味をもちません。そこで、 $r=n$ のときも $\textcircled{1}$ が成

り立つように約束をします。

${}_nP_n$ は定義より

$${}_nP_n = n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1 = n!$$

ですから

$$0! = 1$$

と約束すれば、 $r=1, 2, 3, \dots, n$ に対して、①が成り立ちます。

したがって、①から

$${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

となり、 ${}_nP_r$ を階乗で表すことができます。

では、ここまでのことがらをまとめておきましょう。

□ ${}_nP_r$ と階乗 □

$${}_nP_n = n! = n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1$$

とくに、 $0! = 1$ と約束すると

$${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

■■■■■■■■ トレーニング ■■■■■■■■

10 自然数 n, r が $n > r$ のとき、次の等式が成り立つことを証明しなさい。

$$n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

これで、きょうの学習を終わります。順列の意味、順列の数の求め方の基本がわかりましたね。次の日は、順列の数を求める問題を学習します。

順列の数の求め方

順列とはなにか、もうわかっていますね。きょうは、順列に関する典型的な問題をとおして、その解決のしかたを練習していきます。どの例題にも、基本的で重要な考え方が含まれていますから、しっかり理解していきましょう。さっそく、例題からはじめよう。

基本例題 1

順列

1, 2, 3, 4, 5, 6 の 6 個の数字から、同じ数字をくり返して使うことを許さないとき、4 けたの整数は何通りできますか。

解 答

6 個の数字の中から 4 個をぬき出し、それを 1 列に並べるしかたと考えられるから、これは 6 個のものから 4 個とる順列である。

よって、できる 4 けたの整数は

$${}_6P_4 = 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360 (\text{通り})$$

くり返して使うことを許さないのですから、6 個から 4 個とって並べる順列の数に等しくなりますね。では、次の問題を解いてみよう。

■■■■■■■■ トレーニング ■■■■■■■■

1 次の問いに答えなさい。

- (1) 40 人のクラスで、リーダー、副リーダー、会計を 1 人ずつ 3 人選んで旅行に行くことにしました。そのきめ方は何通りありますか。

- (2) 8 色を使って、4 つの国を相異なる色でぬり分けます。ぬり分け方は何通りありますか。

2 次の問いに答えなさい。

- (1) 1, 2, 3, 4, 5 の 5 個の数字から、同じ数字をくり返して使うことを許さないとき、3 けたの整数は何通りできますか。

(2) 8人を1列に並べる方法は何通りありますか。

3 次の問いに答えなさい。

(1) a, b, c, d, e, f, g の7文字から異なる4文字を取り出して1列に並べる方法は何通りありますか。

(2) ある鉄道には16の駅があります。切符に発駅と着駅を示すとすると、切符は何通り必要ですか。

できましたね。次の例題も順列の問題ですが、並べ方に制約がついた問題です。

基本例題 2

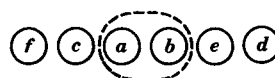
順列

a, b, c, d, e, f の6文字を1列に並べるとき、次のようなものは何通りありますか。

- (1) a, b が隣り合っているもの
- (2) a, b が隣り合わないもの
- (3) a, b が両端にくるもの

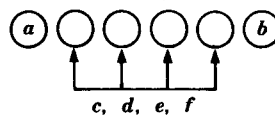
考え方

(1) a, b をまとめて1つとみなすと、5つのものの並べ方を考えることになります。そして、そのおのおのに対して、 a, b の交換により異なった並べ方になりますから、積の法則を利用します。



(2) 6文字の並べ方から、 a, b が隣り合っている並べ方を除いたものと考えます。

(3) a, b を1列の両端に並べる方法を考えます。そのおのおのについて、間に c, d, e, f の4文字の並べ方がありま



解答

(1) a, b をまとめて1つとみたとき、5つのものの並べ方は

${}_5P_5$ 通り

そのおのおのに対して、 a, b 相互の並べ方は

${}_2P_2$ 通り

よって、求める並べ方は

${}_5P_5 \times {}_2P_2 = 5! \times 2! = 120 \times 2 = 240$ (通り)

(2) a, b が隣り合わない場合の数は、6文字の並べ方の数 ${}_6P_6$ から a, b が隣り合う場

合の数をひけばよいから

$${}_6P_6 - 240 = 6! - 240 = 720 - 240 = 480(\text{通り})$$

(3) a, b を 1 列の両端に並べる方法は

$${}_2P_2 \text{ 通り}$$

そのおのおのに対して、残りの 4 文字の並べる方法は

$${}_4P_4 \text{ 通り}$$

したがって、求める並べ方は

$${}_2P_2 \times {}_4P_4 = 2! \times 4! = 2 \times 24 = 48(\text{通り})$$

例題の解き方はわかりましたね。2 つのものをまとめて 1 つとみる見方など、有効な考え方で
す。では、トレーニングをしましょう。

■■■■■■■■■■ トレーニング ■■■■■■■■■■

4 7 つの文字 a, b, c, d, e, f, g を 1 列に並べるとき、次のようなものは何通りありますか。
か。

(1) a, b が隣り合っているもの

(2) a, b が隣り合っていて、かつ、この順序に並んでいるもの

(3) a, b, c が隣り合っているもの

5 a, b, c, d, e, f の 6 文字を 1 列に並べるとき、次のようなものは何通りありますか。

(1) 最初と最後に母音がくるもの

(2) 最初と最後に子音がくるもの

6 7 つの文字 a, b, c, d, e, f, g を 1 列に並べるとき、次のようなものは何通りありますか。
か。

(1) a, b が隣り合わないもの

(2) a が端にこないもの

7 次の問いに答えなさい。

(1) 男子 5 人，女子 4 人が 1 列に並ぶとき，男子，女子が 1 人おきに並ぶ方法は何通りありますか。

(2) 男子 5 人，女子 5 人が 1 列に並ぶとき，男子，女子が 1 人おきに並ぶ方法は何通りありますか。

8 1 から 6 までの番号がついた白石 6 個と 1 から 5 までの番号がついた黒石 5 個があります。
このとき，次の問いに答えなさい。

(1) 白石 6 個，黒石 5 個を 1 列に並べるとき，白石，黒石が 1 個おきに並ぶ方法は何通りありますか。

(2) 白石 6 個の中から 5 個を取り出し，これと黒石 5 個を 1 列に並べるとき，白石，黒石が 1 個おきに並ぶ方法は何通りありますか。

次の例題は整数に関する問題です。

例題 3

整数と順列

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 の 7 個の数字から，同じ数をくり返して使うことを許さないとき，次のような整数は何通りできますか。

(1) 5300 より小さい 4 けたの整数

(2) 3 の倍数になる 3 けたの整数

考え方

(1) 千の位のとりうる数字は，1, 2, 3, 4, 5 です。そのうち，1, 2, 3, 4 のときは，百，十，一の位にどのような数字がきても 5300 より小さくなります。

また，千の位が 5 のときは，百の位のとりうる数字は，1, 2 で，このとき，十，一の位

にどのような数字がきても 5300 より小さくなります。

- (2) 3 の倍数になるのは、各位の数字の和が 3 の倍数になるときですから、まず、そのような数字の組をつくります。次に、その並べ方を考えます。

解 答

- (1) 千の位のとりうる数字は 1, 2, 3, 4, 5

そこで、次のように場合分けする。

- (i) 千の位が 1 であるとき

百，十，一の位の数字のきめ方は、1 以外の 6 個の数字から 3 個とる順列であるから

$${}_6P_3 = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120 (\text{通り})$$

- (ii) 千の位が 2 であるとき

(i) と同様にして 120 (通り)

- (iii) 千の位が 3 であるとき

(i) と同様にして 120 (通り)

- (iv) 千の位が 4 であるとき

(i) と同様にして 120 (通り)

- (v) 千の位が 5 であるとき

百の位の数字のきめ方は、1, 2 の 2 通りに限られる。

十，一の位の数字のきめ方は、千，百の位に使った数字以外の 5 個の数字から 2 個とる順列であるから

$${}_5P_2 \text{ 通り}$$

よって、この場合は

$$2 \times {}_5P_2 = 2 \times 5 \cdot 4 = 40 (\text{通り})$$

(i)，(ii)，(iii)，(iv)，(v) より、条件をみたす 4 けたの整数は

$$120 + 120 + 120 + 120 + 40 = 520 (\text{通り})$$

- (2) 3 けたの整数が 3 の倍数になるのは、各位の数字の和が 3 の倍数となる場合である。

これをみたす数字の組は

(1, 2, 3), (1, 2, 6), (1, 3, 5), (1, 4, 7), (1, 5, 6),
(2, 3, 4), (2, 3, 7), (2, 4, 6), (2, 6, 7), (3, 4, 5),
(3, 5, 7), (4, 5, 6), (5, 6, 7)

の 13 通りある。

どの組の場合についても、各位にどの数字を並べてもよいから、そのきめ方は

$${}_3P_3 \text{ 通り}$$

よって、条件をみたす 3 けたの整数は

$$13 \times {}_3P_3 = 13 \times 3! = 78 (\text{通り})$$

この例題では、場合分けをして考えました。整理して考えることは大変重要なことです。次のトレーニングも、整数に関する問題です。

■■■■■■■■■■ トレーニング ■■■■■■■■■■

9 0, 1, 2, 3, 4, 5 の 6 個の数字から、同じ数字をくり返して使うことを許さないとき、4 けたの整数は何通りできますか。

10 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 の 9 個の数字から、同じ数字をくり返して使うことを許さないとき、次のような整数は何通りできますか。

(1) 4 けたの偶数

(2) 3000 より小さい 4 けたの整数

11 1, 2, 3, 4, 5, 6 の 6 個の数字から、同じ数字をくり返して使うことを許さないとき、次のような整数は何通りできますか。

(1) 3200 より大きい 4 けたの整数

(2) 9 の倍数になる 4 けたの整数

12 0, 1, 2, 3, 4 の 5 個の数字から、同じ数字をくり返して使うことを許さないとき、次のような整数は何通りできますか。

(1) 3 けたの偶数

(2) 3000 より大きい 4 けたの整数

(3) 3 の倍数になる 3 けたの整数

きょうは、順列の数の求め方で、いろいろな問題をとりあげて練習してきました。解き方がわかってきましたね。次の日は、同じものを含む順列の学習です。

いろいろな順列 (1)

順列の数の数え方や記号にも慣れてきましたね。これまでは、異なる種類のものから、いくつかとって並べる、という場合を扱ってきました。順列には、この他にもいろいろなものがあります。きょうは、1, 1, 2, 3, 3, 3のように、同じものをいくつか含んでいるものの順列について学習することにします。

● 同じものをふくむ順列

まず、文字 a が 3 個、文字 b が 2 個、文字 c が 1 個あるとき、これら 6 文字を全部 1 列に並べてできる^{じゅんれつ}順列の数を調べてみましょう。

6 文字がすべて異なる場合は、 ${}_6P_6=6!$ となりますが、同じものがありますから、たとえば

$a \ b \ c \ a \ b \ a$

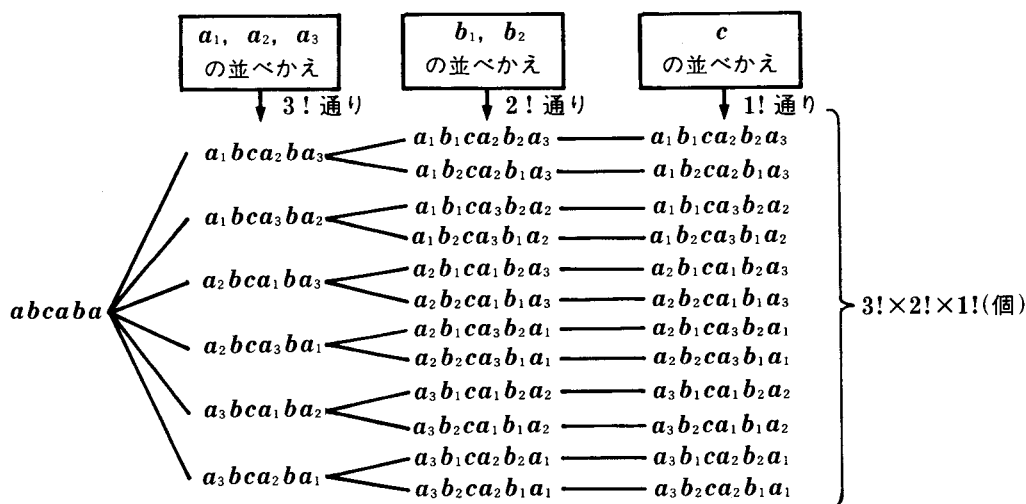
について、3 個の a どうし、2 個の b どうしをそれぞれ並べかえても順列は変わりません。

この 6 文字からできる順列の数を求めるために次のように考えてみます。まず、この 6 文字からできる異なる順列の数を x としましょう。できた 1 つ 1 つの順列で 3 個の a 、2 個の b に区別をつけて順列を調べます。

できた x 個の順列のうちの 1 つ、たとえば

$a \ b \ c \ a \ b \ a$

について、 a に区別があるとして、 a の場所を a_1, a_2, a_3 で並べかえ、 b にも区別があるとして、 b の場所を b_1, b_2 で並べかえてみると、次のようになります。



このように、 x 個の順列の 1 つ $abcaba$ から

$$3! \times 2! \times 1!$$

個の順列が得られますね。このことは x 個の順列のそれぞれについて、まったく同様ですから、全部で

$$x \times 3! \times 2! \times 1!$$

個の順列ができます。

ところで、これは異なる 6 文字 $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, c$ を全部 1 列に並べる順列の数と同じですから

$$x \times 3! \times 2! \times 1! = 6! \quad \Leftrightarrow \text{異なる 6 文字を全部 1 列に並べる順列の数は } {}_6P_6 = 6!$$

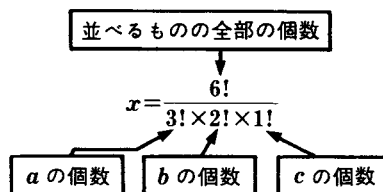
が成り立ちます。

これから、求める順列の数は

$$x = \frac{6!}{3! \times 2! \times 1!} = 60$$

となることがわかります。

一般に、同じものをふくむ順列について次のことが成り立ちます。



□ 同じものをふくむ順列 □

n 個のもののうち、 p 個が同じもの、 q 個が他の同じもの、 r 個がさらに他の同じもの、……であるとき、これら n 個のものを全部 1 列に並べてできる順列の数は

$$\frac{n!}{p!q!r!\cdots} \quad \text{ただし、} p+q+r+\cdots=n$$

同じものを含む場合の順列の数の求め方はわかりましたね。では、この公式を使って解く問題をしてみましょう。

基本例題 1 □ 同じものをふくむ順列 □

$a, a, a, b, b, b, b, b, c, c$ の 10 文字を 1 列に並べるとき、並べ方は何通りありますか。

考え方

a が 3 個、 b が 5 個、 c が 2 個で、全部で $3+5+2=10$ です。

n 個のもののうち、 p 個、 q 個、 r 個が同じもので $p+q+r=n$ のとき、 n 個のものを全部 1 列に並べてできる順列の数は

$$\frac{n!}{p!q!r!}$$

となります。

解 答 10 個のものの中に 3 個, 5 個, 2 個のそれぞれ同じものをふくむから, 求める並べ方は

$$\frac{10!}{3!5!2!} = 2520(\text{通り})$$

公式にそのまま数値をあてはめて解いています。では, 同じようにして解いてみましょう。

■■■■■■■■■■ トレーニング ■■■■■■■■■■

1 次の問いに答えなさい。

(1) まったく同じ形の赤玉 3 個, 白玉 2 個, 青玉 4 個を 1 列に並べるとき, その並べ方は何通りありますか。

(2) 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3 の 8 個の数字をすべて使ってできる 8 けたの整数は全部でいくつありますか。

2 circle という語の 6 文字をすべて並べてできる順列の数を求めなさい。

3 television という語の 10 文字をすべて並べてできる順列の数を求めなさい。

つぎは, 整数をつくる問題です。同じ数字があることに注意します。

例題 2 ــ 同じものをふくむ順列の利用

0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 3 の 8 個の数字を使ってできる 8 けたの整数は全部でいくつありますか。

考え方 8 個のうち、2 個、2 個、3 個がそれぞれ同じものである順列の中には、左端に 0 がくるものもふくまれています。

そこで、全体の数から、左端に 0 がくる場合の数をひきます。左端に 0 がくる場合の数は、0 以外の残りのものの並べ方の数です。

解 答 0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 3 を左から順に並べる方法は

$$\frac{8!}{2!2!3!}=1680(\text{通り})$$

この中には、左端に 0 がくる場合がふくまれている。

左端に 0 がくる場合の数は、残り 1, 1, 2, 2, 3, 3, 3 を並べるしかただけあるから

$$\frac{7!}{2!2!3!}=210(\text{通り})$$

よって、できる 8 けたの整数は

$$1680 - 210 = 1470(\text{個})$$

同じ数字が含まれていること、0 が含まれていることがポイントです。では、問題をして確認しておきましょう。

■■■■■■■■■■ トレーニング ■■■■■■■■■■

4 0, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3 の 9 個の数字を使ってできる 9 けたの整数は全部でいくつありますか。

5 0, 0, 1, 1, 1, 2, 3 の 7 個の数字を使ってできる 7 けたの整数は全部でいくつありますか。

つぎは、一見すると同じものを含む順列ではなさそうですが、よくみると同じものを含む順列に帰着できる問題です。

例題 3 — 同じものをふくむ順列の利用 —

KUMAMOTO の 8 文字を 1 列に並べるとき、K と U と T の順序が K, U, T の順になるものは何通りありますか。

考え方 O, O, M, A, M, O, O を 1 列に並べるすべての順列について、O の中に、順に、K, U, T を入れれば、条件をみたす順列ができます。したがって、K, U, T を同じ文字とみなして考えることができます。

解答 K, U, T の順序が変わることはないので、K, U, T を同じ文字とみなすことができる。

よって、8 個のものの中に 3 個、2 個、2 個のそれぞれ同じものをふくむことになるから、求める並べ方は

$$\frac{8!}{3!2!2!} = 1680 (\text{通り})$$

別解 K, U, M, A, M, O, T, O の 8 文字を 1 列に並べるとき、8 個のものの中に 2 個、2 個のそれぞれ同じものをふくむから、並べ方は

$$\frac{8!}{2!2!} \text{通り}$$

また、K, U, T の並べ方は

$$3! \text{通り}$$

K, U, T の 1 つ 1 つの並べ方に対して、8 文字の並べ方の数は等しい。

したがって、求める並べ方は

$$\frac{8!}{2!2!3!} = 1680 (\text{通り})$$

解き方がわかりましたね。K, U, T の並び方が同じということは、同じ文字が 3 つあると考えればよいのです。では、トレーニングしましょう。

■■■■■■■■■■ トレーニング ■■■■■■■■■■

6 NAGOYA の 6 文字を 1 列に並べるとき、N と G と Y の順序が N, G, Y の順になるものは何通りありますか。

7 1, 2, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 6 の9個の数字を1列に並べるとき, 1と2と3の順序が1, 2, 3の順になるものは何通りありますか。

8 1, 2, 3, 4, 4, 5, 6 の7個の数字を1列に並べるとき, 1と2の順序が1, 2の順に, 1と3と5の順序が1, 3, 5の順になるものは何通りありますか。

9 $a, b, c, d, e, e, e, f, g$ の9文字を1列に並べるとき, a と b の順序が a, b の順に, a と c の順序が a, c の順になるものは何通りありますか。

10 1, 1, 2, 3, 3, 4, 5, 6, 6 の9個の数字を1列に並べるのに奇数はすべて奇数番めにあるようにするとき, 並べ方は何通りありますか。

11 everyone という語の 8 文字から 3 文字をとってできる順列の数を求めなさい。

きょうは、同じものを含むものの順列を考えてきました。同じものを含む場合でもむずかしくはなかったですね。では、これできょうは終わりです。

いろいろな順列 (2)

これまでは、異なるものの並べ方と、同じものを含んでいるときの並べ方を学習してきました。きょうは、同じものを何度使ってもよい場合と、1列ではなく、輪をつくる場合の順列について学習することになります。

まずはじめは、同じものを何度使ってもよいときの順列です。

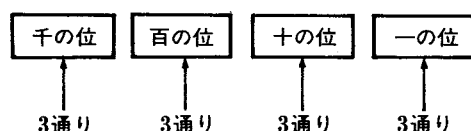
● 重複順列

まず、1, 2, 3 の 3 個の数字から同じ数字をくり返して使うことを許すとき、4 けたの整数はいくつできるか考えてみましょう。

千の位の数字は、1, 2, 3 のどれでもよいから、きめ方は

3 通り

あります。



そのおのおのに対して、百の位の数字

は、千の位に使った数字をくり返し使ってよいから、1, 2, 3 のどれでもよく、きめ方は

3 通り

ありますね。

以下、同様に考えると、十、一の位のきめ方はともに

3 通りずつ ⇐ 千、百の位に使った数字をくり返し使えることから

あります。

したがって、4 けたの整数は、積の法則により

$$3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^4 = 81 (\text{個})$$

できることがわかります。

このように、異なる 3 個のものから、くり返しとることを許して、4 個にとって並べたものを、3 個のものから 4 個とった ちようふくじゆんれつ 重複順列とといいます。

重複してとる、という意味がわかりましたね。では重複してとるとき順列の数を求めてみましょう。

■■■■■■■■■■ トレーニング ■■■■■■■■■■

1 1, 2, 3, 4 の 4 つの数字をくり返して使うことを許してできる 4 けたの整数はいくつあるかを、次の問いにしたがって求めなさい。

(1) 千の位にはいる数字は何通りありますか。

(2) 千の位のおのおのに対して百の位にはいる数字は何通りありますか。

(3) 4けたの整数は全部でいくつできますか。

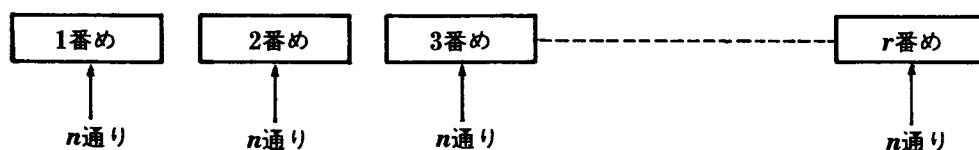
2 1, 2, 3, 4の4個の数字から同じ数字をくり返して使うことを許すとき, 3けたの整数はいくつできますか。

3 a, b, c の3文字から, くり返しとることを許して5個とる順列の数を求めなさい。

重複順列の数を公式としてまとめると次のようになります。

● 重複順列の公式

一般に, 異なる n 個のものから, くり返しとることを許して, r 個とって並べたもの, すなわち, n 個のものから r 個とった重複順列については



となり, 積の法則により, この順列の数は

$$\overbrace{n \times n \times n \times \cdots \times n}^{r \text{ 個の積}} = n^r$$

となります。

重複順列についてまとめると次のようになります。

□ 重複順列 □

異なる n 個のものから、くり返しとることを許して、 r 個とって並べたものを、 n 個のものから r 個とった重複順列といい、その数は

$$n^r$$

《注》「くり返しとることを許して」というかわりに、「重複を許して」ということもあります。

この重複順列の公式を使って解く問題の例題をしておきます。

基本例題 1

重複順列

a, b, c, d の 4 文字から、重複を許して 3 個とる順列の数を求めなさい。

考え方

a, b, c, d という異なる 4 つの文字から、くり返しとることを許して 3 個とる場合です。異なる n 個のものから、くり返しとることを許して r 個とる順列の数は n^r です。

解答

異なる 4 個から 3 個とる重複順列であるから、求める数は

$$4^3 = 64$$

例題の解き方にならって次の問題を解いてみましょう。

トレーニング

4 次の重複順列の数を求めなさい。

(1) 異なる 2 個のものから、重複を許して 4 個とった順列

(2) 異なる 5 個のものから 2 個とった重複順列

5 次の問いに答えなさい。

(1) 1, 2, 3, 4 の 4 個の数字から同じ数字をくり返して使うことを許すとき、3 けたの整数はいくつできますか。

(2) 異なる5個の品物をA, B, Cの3つの箱にしまう方法は何通りありますか。ただし、どの箱にも品物を5個まで入れることができ、また空箱があってもよいとします。

6 1から n までの自然数からなる集合があります。この集合の部分集合はいくつありますか。

7 0, 1, 2, 3, 4の5個の数字から同じ数字をくり返して使うことを許すとき、4けたの整数はいくつできますか。

重複順列はわかりましたね。つぎは、円順列です。円順列とはどんな順列でしょう。

●円順列

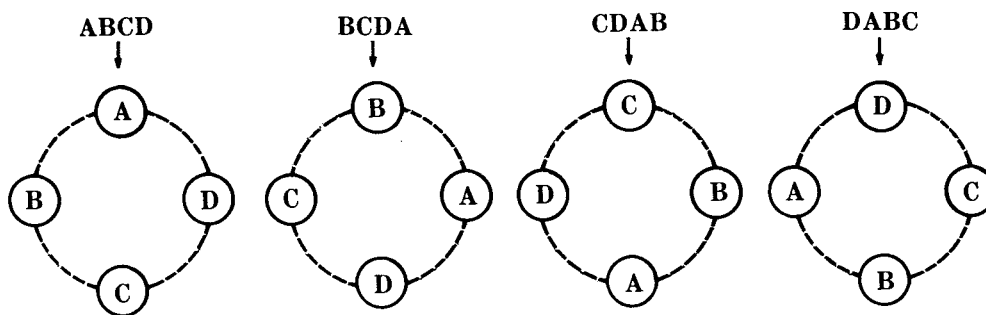
A, B, C, Dの4人が手をつないで輪をつくるとき、何通りのつくり方があるか考えてみましょう。

その前に、1列に並べる^{じゆんれつ}順列と、輪をつくることとはどう違うのか、はっきりさせておきましょう。

1列に並べるときは、たとえば

ABCD BCDA CDAB DABC

は異なる順列として数えますが、それぞれの先頭と最後尾の人が手をつないで輪をつくると、それぞれどの人の隣にも同じ人がきますから、輪のつくり方としては1通りと数えます。



1 列に並べる順列と、輪をつくることとはどう違うのかわかりましたね。では、輪をつくる時、何通りのつくり方があるかを求めましょう。

A, B, C, D を 1 列に並べるとき、並べ方は

$${}_4P_4=4!$$

となりますが、図からもわかるように、それらの中には同じものが 4 通りずつありますから、輪のつくり方は

$$\frac{4!}{4}=3!=6(\text{通り})$$

になります。

このように、異なる 4 個のものを円形に並べたものを、4 個のものの円順列えんじゆんれつといいます。

円順列とはどういうものかわかりましたね。円順列の基本をトレーニングで確かめます。

■■■■■■■■■■ トレーニング ■■■■■■■■■■

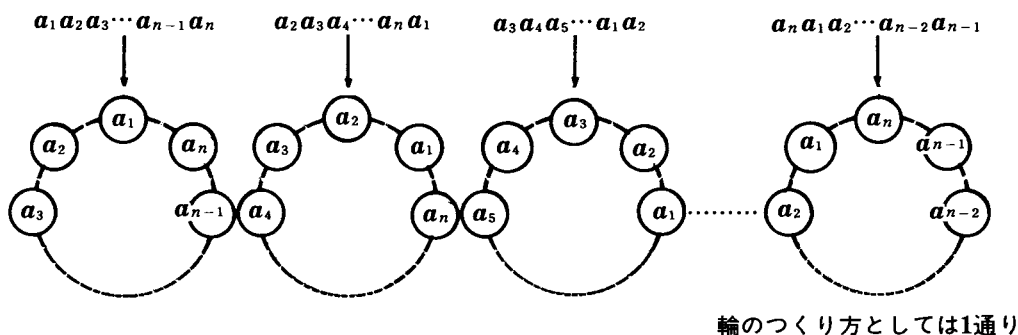
■ 8 1, 2, 3, 4, 5 の 5 つの数字を並べてできる円順列の数はいくつありますか。

■ 9 A, B, C, D の 4 枚のカードを机の上に円形に並べるしかたは何通りありますか。

円順列の数について一般的にまとめると次のようになります。

● 円順列の公式

異なる n 個のものを円形に並べたもの、すなわち、 n 個のものの円順列の数はどのようなになるでしょう。



異なる n 個を1列に並べるとき、並べ方は

$${}_nP_n = n!$$

となりますが、それらの中には、同じものが n 通りずつあります。

このことから、異なる n 個のものの円順列の数は

$$\frac{n!}{n} = (n-1)! \quad \Leftarrow \frac{n!}{n} = \frac{(n-1)! \times n}{n}$$

となります。

□ 円順列 □

異なる n 個のものを円形に並べたものを、 n 個のものの円順列とい
い、その数は
 $(n-1)!$

円順列の数についての公式を使って解いてみましょう。

基本例題 2

円順列

6 人が円卓に着席します。着席のしかたは何通りありますか。

考え方

異なる n 個のものからつくられる円順列の数は $(n-1)!$ で与えられます。

解答

異なる 6 個のものの円順列であるから

$$(6-1)! = 5! = 120(\text{通り})$$

注 意

円形に並べたものを1つずつ位置をずらしても円順列としては同じです。ですから、1つの位置を固定し、残りの位置を決めると考えることもできます。

この問題では、6人のうちの1人が着席する位置を決め、残りの5人の位置を決めると考えて、 ${}_5P_5=5!$ (通り)とすることもできます。

公式を利用して、円順列の数を求める問題をしておきましょう。

//////////////////// トレーニング //////////////////////

10 次の円順列の数を求めなさい。

(1) 異なる5個のものの円順列

(2) 異なる6個のものの円順列

11 次の問いに答えなさい。

(1) 異なる色の6つの玉を円周上に並べるとき、並べ方は何通りありますか。

(2) 5人の子供 A, B, C, D, E が手をつないで輪をつくる方法は何通りありますか。

12 次の問いに答えなさい。

(1) 10人の子供が手をつないで輪をつくる方法は何通りありますか。

- (2) 7人を丸テーブルに並べるとき、並べ方は何通りありますか。

できましたね。では、きょうの最後に、円順列の問題で、すこし応用的なものを取りあげます。

例題 3

円順列の利用

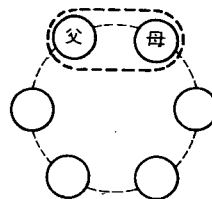
4人の子供と両親が円卓に着席します。次の場合の着席のしかたは何通りありますか。

- (1) 両親が隣り合う場合

- (2) 両親が向かい合う場合

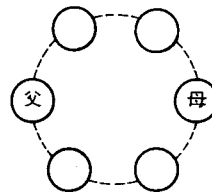
考え方

- (1) 両親をひとまとめにして1人と考え、5人の円順列の数を求めます。そして、そのおのおのに対して、両親の入れかえにより、異なる着席のしかたができますから、積の法則を利用します。



- (2) 父の位置を固定すると、自動的に母の位置もきまります。

あとの着席のしかたは、子供4人を1列に並べるしかた $4!$ だけです。



解答

- (1) 両親をひとまとめにして1人と考える。すなわち、5人で着席すると考えれば、着席のしかたは

$$(5-1)! = 4! (\text{通り})$$

この着席のしかたのおのおのに対して、両親の着席のしかたは

$$2! \text{ 通り}$$

したがって、求める着席のしかたは

$$4! \times 2! = 48 (\text{通り})$$

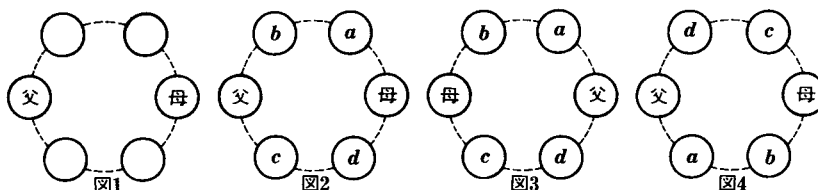
- (2) 父と母の位置を固定して考えれば、あとの着席のしかたは、子供4人を1列に並べるしかただけある。

したがって、求める着席のしかたは

$$4! = 24 (\text{通り})$$

注意

- (2) 4人の子供をそれぞれ a, b, c, d としたとき、父と母の位置を図1のようにきめた並び方の1つに、図2のような並び方があります。この図2の父と母の位置を入れかえた図3を 180° 回転させると、図4になり、これも父と母の位置を図1のようにきめた場合の並び方の1つです。したがって、両親の入れ方を考える必要はありません。



両親をひとまとめにする考え方，父と母のすわる位置を固定するという考え方がわかりますね。
トレーニングで考え方を確かめておきましょう。

■■■■■■■■■■ トレーニング ■■■■■■■■■■

13 6 人の子供と両親が円卓に着席します。次の場合の着席のしかたは何通りありますか。

(1) 両親が隣り合う場合

(2) 両親が向かい合う場合

14 男子 5 人と女子 5 人が 1 つの円卓に交互に着席するとき，その方法は何通りありますか。

15 8 個の色の異なる玉を糸をつないで，首飾りをつくる時，その方法は何通りありますか。

きょうは，いろいろな順列として，重複順列と円順列について学習してきました。重複順列や円順列の意味はもうわかりましたね。この次は，順列の復習日です。

順列の復習

順列についての基本的な内容と、典型的な問題が終わったところで、きょうは復習をすることにします。これまでに学習したこととすべて関係している問題ばかりです。いままでの内容を整理しながら、より一層、問題の解決力をつけることにしましょう。

■■■■■■■■■■ トレーニング ■■■■■■■■■■

1 次の問いに答えなさい。

- (1) 20 人のグループで、委員長、副委員長、書記、会計を 1 人ずつ選ぶとき、きめ方は何通りありますか。

- (2) $a, b, c, d, e, f, g, h, i$ の 9 文字を 1 列に並べる方法は何通りありますか。

2 次の等式をみたす n の値を求めなさい。

(1) ${}_{2n}P_3 = 6 \cdot {}_nP_4$

(2) ${}_{n+1}P_3 - 7 \cdot {}_nP_2 = 42$

3 $1 \leq r \leq n-1$ のとき、次の等式を証明しなさい。

$${}_nP_r = {}_{n-1}P_r + r \cdot {}_{n-1}P_{r-1}$$

4 a, b, c, d, e の 5 文字を 1 列に並べるとき、次のようなものは何通りありますか。

(1) 母音が隣り合わないもの

(2) 少なくとも 1 端に母音がくるもの

5 4 つの文字 a, b, c, d があります。使わない文字があってもよいとき、これらの文字を 1 列に並べる方法は何通りありますか。ただし、1 つの文字は 1 回しか使えません。

6 次の問いに答えなさい。

(1) まったく同じ形の黒石 5 個、白石 3 個を 1 列に並べるとき、並べ方は何通りありますか。

(2) a, a, a, a, b, b, c の 7 文字を 1 列に並べるとき、並べ方は何通りありますか。

7 MORIOKA の 7 文字を 1 列に並べるとき、K より先に I がくるものは何通りありますか。

8 次の問いに答えなさい。

(1) 1, 2, 3, 4, 5 の 5 個の数字から重複を許して 3 個とる順列の数を求めなさい。

(2) 3 つの意見 A, B, C のうち、どれが一番よいと思うかを 6 人に聞いたとき、意見の分かれ方は何通りありますか。

9 0, 1, 2, 3, 4, 5 の 6 個の数字から同じ数字をくり返して使うことを許すとき、3 けたの整数はいくつできますか。

10 次の問いに答えなさい。

(1) a, b, c, d, e, f の 6 人が 1 つの円卓に着席するとき、着席のしかたは何通りありますか。

(2) 異なる色の 8 つの玉を円周上に並べるとき、並べ方は何通りありますか。

11 6 個の色の異なる玉から 4 個とり出して円形に並べるとき、並べ方は何通りありますか。

組合せ

順列というものは、ものの並べ方を考えるものでしたね。ものの並べ方ではなく、どんなものが集まっているか、どんなものが組み合わせられているかを考えるのが、組合せというものです。数字の 1, 2, 3 も、3, 2, 1 も、並び方はちがいますが、集まっているものは同じですね。では、まず組合せの意味からはじめることにしましょう。

● 組合せの定義

^{くみあわ}組合せということばは、試合の組合せなどと使われますが、数学で使う場合は、どういうことをいうのか、はっきりさせておきましょう。

まず、4 枚のレコード a, b, c, d から、かける順序は考えないで、3 枚を選び出すとき、何通りの選び方があるかを考えてみましょう。

いま、たとえば、 a, b, c の 3 枚を選んだ場合を

$$\{a, b, c\}$$

のように表すことにすると、もちろん順序は考えませんから

$$\{a, c, b\}, \{b, a, c\}, \{b, c, a\}, \{c, a, b\}, \{c, b, a\}$$

は、 $\{a, b, c\}$ と同じ選び方ですね。このことに気をつけて、異なる選び方を全部書き出してみると

$$\{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}$$

の 4 通りがあることがわかります。

このとき、この 4 個の 1 つ 1 つを、異なる 4 個 a, b, c, d から異なる 3 個をとった組合せといいます。

一般に、異なる n 個のものから異なる r 個を取り出して 1 組にしたものを n 個のものを r 個とった組合せといい、その数を

$${}_nC_r$$

で表します。

上の例は、4 個のものから 3 個とった組合せで、その数は 4 ですから

$${}_4C_3=4$$

と表せますね。

【注】 C は、Combination(組合せ)の頭文字です。

${}_nC_r$ の読み方は、「エヌ・シー・アール」、「シーのエヌ・アール」のどちらでもかまいません。

組合せの意味がわかりましたから、実際に組合せを書いてみましょう。

||||| トレーニング |||||

- 1 a, b, c, d, e, f の 6 文字から異なる 3 文字を取り出してできる組合せをすべて書きなさい。たとえば, a, b, c の 3 文字を取り出してできる組合せは, $\{a, b, c\}$ と書くことにします。

こんどは, 組合せの数を求めてみましょう。組合せの数は, どのように計算できるのでしょうか。

● 組合せの数

4 枚のレコード a, b, c, d から 3 枚を選ぶ場合の数 ${}_4C_3$ を求めましょう。

順列の求め方はすでにわかっていますから, これを利用して ${}_4C_3$ のみたす関係式を調べてみることにします。

${}_4C_3$ 個の組合せのうちの 1 つ, たとえば

$\{a, b, c\}$

について, 選んだレコードのかける順序を考えると

3! 通り

$\Leftarrow {}_3P_3$ 通り

があります。

どの選び方についても, 3! 通りのかけ方がありますから

${}_4C_3 \times 3! (\text{通り})$

が, レコード 4 枚から 3 枚を選び, それらのかける順序を考えたときのかけ方の数になります。

ところで, これは 4 個のものから 3 個とる順列の数 ${}_4P_3$ に等しいから

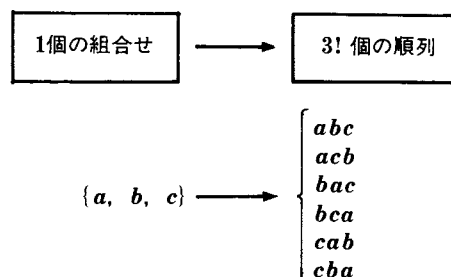
$${}_4C_3 \times 3! = {}_4P_3$$

が成り立ちます。これより, ${}_4C_3$ の計算は

$${}_4C_3 = \frac{{}_4P_3}{3!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 4$$

のようにできることがわかります。

同様な考え方をして, ${}_nC_r$ の計算のしかたについて調べてみましょう。



n 個のものから r 個とった組合せの数は、全部で

$${}_nC_r$$

です。 ${}_nC_r$ 個の組合せの 1 つをとって、この r 個のものに順序をつけると、その順列の数は

$$r!$$

となります。このことをすべての組合せに対して行くと、全体で得られる順列の数は

$${}_nC_r \times r!$$

です。

これは、 n 個のものから r 個とった順列の数 ${}_nP_r$ に等しいから

$${}_nC_r \times r! = {}_nP_r$$

が成り立ちます。これより、 ${}_nC_r$ の計算は

$${}_nC_r = \frac{{}_nP_r}{r!} = \frac{\overbrace{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}^{r \text{ 個の積}}}{\underbrace{r(r-1)(r-2)\cdots 1}_{r \text{ 個の積}}}$$

のようにできることがわかります。これを使って、 ${}_6C_3$ 、 ${}_{10}C_5$ を計算すると、それぞれ

$${}_6C_3 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20 \quad {}_{10}C_5 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 252$$

となります。

□ 組合せの数 □

$${}_nC_r = \frac{\overbrace{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}^{r \text{ 個の積}}}{\underbrace{r(r-1)(r-2)\cdots 1}_{r \text{ 個の積}}}$$

組合せの数の計算のしかたはわかりましたね。では、組合せの計算の練習をしておきます。

■■■■■■■■ トレーニング ■■■■■■■■

■ 1, 2, 3, 4, 5 という 5 つの数字から異なる 3 つの数字をとってできる組合せの数 ${}_5C_3$ を次の順序にしたがって求めなさい。

(1) 1, 2, 3, 4, 5 という 5 つの数字から異なる 3 つの数字をとってできる ${}_5C_3$ 個の組合せの 1 つをとってこの 3 つの数字に順序をつけます。このとき、何個の順列ができますか。階乗の形で表しなさい。

(2) ${}_5C_3$ 個のおのものの組合せについて、順序を考えると、順列の数は全体で

$${}_5C_3 \times \square !$$

です。 $\square$ の中にあてはまる数を求めなさい。

(3) (2)で求めた順列の総数は、1, 2, 3, 4, 5 という 5 つの数字から異なる 3 つの数字をとってできる順列の数 ${}_5P_3$ に等しくなります。

このことから、 ${}_5C_3$ を求めなさい。

3 次の値を求めなさい。

(1) ${}_5C_2$

(2) ${}_7C_3$

(3) ${}_{10}C_{10}$

4 次の組合せの数を求めなさい。

(1) 異なる 8 個のものから 3 個とった組合せ

(2) 異なる 6 個のものから 2 個とった組合せ

5 次の計算をしなさい。

(1) ${}_5C_2 + {}_6C_3$

(2) ${}_8C_2 \times {}_6C_2$

つぎに、組合せの数の式を使った例題をしておきます。組合せの式の計算ができれば解けます。

例題 1

組合せと方程式

次の等式をみたす n の値を求めなさい。

$$3 \cdot {}_nC_2 - 2 \cdot {}_nC_3 = 5$$

考え方

${}_nC_2 = \frac{n(n-1)}{2 \cdot 1}$, ${}_nC_3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{3 \cdot 2 \cdot 1}$ を与えられた等式に代入して、 n についての方程式を解きます。

このとき、 ${}_nC_2$, ${}_nC_3$ の意味から、 n の値は

$$n \geq 2, n \geq 3$$

を同時にみたす整数でなければならないことに注意します。

解 答

$${}_nC_2 = \frac{n(n-1)}{2 \cdot 1}, {}_nC_3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{3 \cdot 2 \cdot 1} \text{ であるから}$$

$$3 \cdot \frac{n(n-1)}{2 \cdot 1} - 2 \cdot \frac{n(n-1)(n-2)}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 5$$

$$\text{整理すると} \quad 2n^3 - 15n^2 + 13n + 30 = 0$$

$$\text{因数分解すると} \quad (n+1)(n-6)(2n-5) = 0$$

$$\text{ゆえに} \quad n = -1, 6, \frac{5}{2}$$

ところで、 ${}_nC_2$, ${}_nC_3$ の意味から、それぞれ

$$n \geq 2, n \geq 3$$

$$\text{よって} \quad n \geq 3$$

したがって、 n は 3 以上の整数であるから

$$n = 6$$

例題のトレーニングをしましょう。

■■■■■■■■■■ トレーニング ■■■■■■■■■■

⑥ 次の等式をみたす n の値を求めなさい。

$$(1) \quad {}_nC_3 = 120$$

$$(2) \quad {}_nC_2 : {}_{n-1}C_3 = 5 : 2$$

7 次の等式をみたす n の値を求めなさい。

(1) ${}_nC_3 + {}_{n+1}C_2 = 92$

(2) ${}_{2n}C_3 = 4 \cdot {}_{n+2}C_4$

ここで、組合せの数についての性質を説明しておきましょう。説明をよく読んでください。

● ${}_nC_r$ の性質

${}_{10}C_7$ を組合せの数の公式にあてはめると

$${}_{10}C_7 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \quad \Leftarrow {}_nC_r = \frac{n(n-1)(n-2) \cdots (n-r+1)}{r(r-1)(r-2) \cdots 1}$$

となります。この式の分子と分母には共通な数 $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$ があります。その数で約分すると

$${}_{10}C_7 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \textcircled{7} \cdot \textcircled{6} \cdot \textcircled{5} \cdot \textcircled{4}}{\textcircled{7} \cdot \textcircled{6} \cdot \textcircled{5} \cdot \textcircled{4} \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1}$$

となり、 $\frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = {}_{10}C_3$ に等しくなります。すなわち

$${}_{10}C_7 = {}_{10}C_3$$

が成り立ちます。

この関係が成り立つことは、次の2つのことが同じであるということからわかります。

・ 10 個のもののから 7 個取り出すこと

$\Leftarrow$ この場合の数は ${}_{10}C_7$

・ 10 個のもののから 3 個残すこと

$\Leftarrow$ この場合の数は ${}_{10}C_3$

一般に、 n 個のもののから r 個取り出すことは、 n 個のもののから $(n-r)$ 個残すこと、すなわち、取り出さないで残す $(n-r)$ 個をきめることと同じですから

$${}_nC_r = {}_nC_{n-r} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

が成り立ちます。

ところで、 $r=n$ のとき、 $\textcircled{1}$ は

$${}_nC_n = {}_nC_0$$

となりますが、 ${}_nC_0$ は n 個のもののから何も取り出さないこと（そのままにしておくこと）です。そこで、 $r=n$ のときも成り立つように約束をします。

${}_nC_n$ は n 個のもののから n 個を取り出す組合せの数で、 ${}_nC_n = 1$ ですから

$${}_nC_0 = 1$$

と約束すれば、 $r=0, 1, 2, \cdots, n$ に対して、 $\textcircled{1}$ が成り立ちます。

《注》①は、 r の値が n の値の半分より大きいときに有効です。たとえば

$${}_{20}C_{18} = {}_{20}C_2 = \frac{20 \cdot 19}{2 \cdot 1} = 190, \quad {}_{10}C_6 = {}_{10}C_4 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 210$$

と利用すると計算がらくになります。

■■■■■■■■ トレーニング ■■■■■■■■

8 次の値を求めなさい。

(1) ${}_7C_5$

(2) ${}_{50}C_{47}$

(3) ${}_{12}C_8$

組合せの数を階乗を使って表すと次のようになります。順列のときにも、順列の数を階乗を使って表すことを学習しました。

● ${}_nC_r$ と階乗

順列の数 ${}_nP_r$ を階乗！を使って表すと、 ${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$ ですね。

これを ${}_nC_r = \frac{{}_nP_r}{r!}$ に代入すると

$${}_nC_r = \frac{{}_nP_r}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

となります。このように、 ${}_nC_r$ を！で表すことができます。

たとえば、 ${}_8C_3$ 、 ${}_6C_6$ は次のようになります。

$${}_8C_3 = \frac{8!}{3!5!}, \quad {}_6C_6 = \frac{6!}{6!0!}$$

$${}_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

この組合せの数の表現のしかたもしばしば出てきますから、使えるようにしておかなくてはけません。これを使った例題を解いてみましょう。

$1 \leq r \leq n-1$ のとき、次の等式を証明しなさい。

$$r \cdot {}_n C_r = n \cdot {}_{n-1} C_{r-1}$$

考え方

${}_n C_r$, ${}_{n-1} C_{r-1}$ を階乗! で表すと

$${}_n C_r = \frac{n!}{r!(n-r)!},$$

$${}_{n-1} C_{r-1} = \frac{(n-1)!}{(r-1)! \{ (n-1) - (r-1) \}!} = \frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!}$$

となります。このことと

$$r \cdot \frac{1}{r!} = r \cdot \frac{1}{r \cdot (r-1)!} = \frac{1}{(r-1)!}, \quad n! = n \cdot (n-1)!$$

となることに注目します。

解答

$$r \cdot {}_n C_r = r \cdot \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} = n \cdot \frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!}$$

ここで

$${}_{n-1} C_{r-1} = \frac{(n-1)!}{(r-1)! \{ (n-1) - (r-1) \}!} = \frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!}$$

であるから

$$r \cdot {}_n C_r = n \cdot {}_{n-1} C_{r-1}$$

別 解

n 個のもののから r 個とり出し、その r 個のうちの 1 個を選ぶしかたは ${}_n C_r \cdot r$

n 個のもののから 1 個選び、残りの $n-1$ 個から $r-1$ 個をとり出すしかたは

$n \cdot {}_{n-1} C_{r-1}$ この 2 つのしかたの結果は、選んだ 1 個と、とり出して選ばれなかった $r-1$ 個が得られ、両者の結果は同じになる。

ゆえに ${}_n C_r \cdot r = n \cdot {}_{n-1} C_{r-1}$

式の変形に注意してください。次のトレーニングできょうは終わりです。

■■■■■■■■■■ トレーニング ■■■■■■■■■■

9 ${}_n C_r$ の公式を使って、次の等式を証明しなさい。

$${}_n C_r = {}_n C_{n-r}$$

10 $1 \leq r \leq n-1$ のとき，次の等式を証明しなさい。

$${}_nC_r = {}_{n-1}C_r + {}_{n-1}C_{r-1}$$

きょうは，組合せの数の表し方を重点に学習してきました。記号の使い方にも慣れていきましょう。この次は，具体的な問題で組合せの数を求めてみます。

組合せの数の求め方

組合せの意味、組合せの記号、計算のしかたはわかりました。

きょうは、具体的な問題で、組合せの数を求める方法を学習していくことにしましょう。はじめは、生徒を選ぶ選び方の問題、どう考えたらよいでしょう。

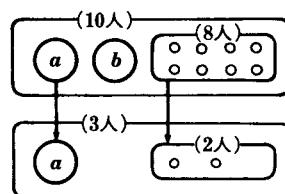
基本例題 1

組合せ

10 人の生徒の中から 3 人を選ぶとき、 a は選ばれ、 b は選ばれない方法は何通りありますか。

考え方

a は選ばれ、 b は選ばれないように 3 人を選ぶということは、まず a を選んでおき、 b を除いた残りの 8 人から 2 人を選ぶことと同じです。



解答

求める場合の数は、 a 、 b の 2 人を除いた 8 人の中から 2 人を選ぶ組合せの数に等しいから

$${}_8C_2 = \frac{8 \cdot 7}{2 \cdot 1} = 28(\text{通り})$$

生徒を選ぶということは、生徒の集まりを決めるということで、組合せになります。残りの生徒に注目するところが大切です。

トレーニング

1 次の問いに答えなさい。

(1) 45 人のクラスで 2 人の代表を選ぶとき、その選び方は何通りありますか。

(2) 円周上に、A、B、C、D、E、F、G、H、I の 9 個の点があります。この 9 個の点から 3 点を選んで、それらを頂点とする三角形をつくるとき、三角形は何個できますか。

2 次の問いに答えなさい。

(1) 52 枚のトランプのカードから 4 枚選ぶとき、選び方は何通りありますか。

(2) 100 円硬貨を 7 回投げるとき、表が 5 回出る場合は何通りありますか。

3 次の問いに答えなさい。

(1) 50 人のクラスから 3 人の委員を選ぶとき、特定の 1 人が必ず選ばれる方法は何通りありますか。

(2) 52 枚のトランプのカードから 3 枚選ぶのに、3 枚の中にハートのカードをふくまない選び方は何通りありますか。

4 次の問いに答えなさい。

(1) 色の異なる 10 個の玉から 4 個を選ぶとき、特定の 1 個の玉が必ず選ばれる方法は何通りありますか。

(2) 8 種類の果物から 4 種類を選ぶとき、特定の 1 種類の果物をふくまない選び方は何通りありますか。

できましたね。では、次の例題をこなさい。

基本例題 2

組合せ

A, B, C の 3 つのグループの人数はそれぞれ 4 人, 5 人, 7 人です。各グループから 2 人ずつ合計 6 人を選ぶとき、選び方は何通りありますか。

考え方

各グループから 2 人を選ぶ場合の数の積で求められます。

解答

A グループ 4 人の中から 2 人選ぶ方法は

${}_4C_2$ 通り

B グループ 5 人の中から 2 人選ぶ方法は

${}_5C_2$ 通り

C グループ 7 人の中から 2 人選ぶ方法は

${}_7C_2$ 通り

したがって、求める選び方は積の法則により

$${}_4C_2 \times {}_5C_2 \times {}_7C_2 = \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} \times \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} \times \frac{7 \cdot 6}{2 \cdot 1} = 1260 (\text{通り})$$

例題はできましたね。A のグループの選び方のどの場合にも、B のグループの選び方が別々にありますから、積の法則で求めます。組合せと積の法則を利用しています。では、トレーニングです。

//////////////////// トレーニング //////////////////////

5 次の問いに答えなさい。

(1) 男子 5 人, 女子 4 人の中から男女 2 人ずつ選ぶとき、選び方は何通りありますか。

(2) 5 本の平行線とこれらと交わる 6 本の平行線があります。これらの平行線で囲まれる平行四辺形は何個ありますか。

6 次の問いに答えなさい。

(1) 洋書 13 冊と和書 7 冊があります。洋書を 4 冊, 和書を 3 冊を選ぶとき、選び方は何通りありますか。

(2) 5 個, 6 個, 4 個の平面からなる 3 組の平行な平面がたがいに交わっています。これらの

平面で囲まれる平行六面体は何個ありますか。

- 7 男子8人と女子6人から3人を選びます。このとき、男女が混っている選び方は何通りありますか。

では、次の例題を下さい。少なくとも、ということはどう考えますか。

基本例題 3

組合せ

52枚のトランプカードの中から、4枚ぬき出すとき、少なくとも1枚はハートであるぬき出し方は何通りありますか。

考え方

少なくとも1枚はハートであるぬき出し方の数は、4枚をぬき出すすべての方法の数から、ハートを1枚もぬき出さない方法の数をひいて求めます。

ハートを1枚もぬき出さない方法の数は、ハートのカードを除いた39枚の中から4枚をぬき出す組合せの数に等しくなります。

解答

52枚の中から4枚をぬき出す方法は

$${}_{52}C_4 \text{ 通り} \quad \cdots \cdots \text{①}$$

少なくとも1枚はハートであるぬき出し方の数は、ハートを1枚もぬき出さない方法の数を①からひいたものである。

ハートを1枚もぬき出さない方法は、ハートのカードを除いた39枚の中から4枚をぬき出す方法であるから

$${}_{39}C_4 \text{ 通り} \quad \cdots \cdots \text{②}$$

①、②から、求めるぬき出し方は

$${}_{52}C_4 - {}_{39}C_4 = \frac{52!}{4!48!} - \frac{39!}{4!35!} = 188474 (\text{通り})$$

少なくとも1枚のハートを抜き出す場合を、1枚もハートを抜き出さない場合の否定と考えて解くのです。わかりましたね。では、問題を下さい。

■■■■■■■■■■ トレーニング ■■■■■■■■■■

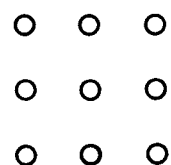
8 男子 6 人と女子 4 人の中から 4 人の委員を選びます。このとき、次のような選び方は何通りありますか。

(1) 女子を少なくとも 1 人選ぶ。

(2) 男子、女子ともに少なくとも 1 人選ぶ。

9 20 人の生徒の中から 6 人の委員を選びます。このとき、特定の 2 人のうち少なくとも 1 人を選ぶ方法は何通りありますか。

10 右の図のように、碁盤の目の形に並んでいる 9 個の点から、同一直線上にない 3 個の点を選んで、それらを頂点とする三角形をつくりま
す。三角形はいくつできますか。



11 正八角形の 8 個の頂点から 3 個の点を選んで、それらを頂点とする三角形をつくります。このとき、次のものは何個できますか。

(1) 正八角形と 2 辺を共有する三角形

(2) 正八角形と 1 辺だけを共有する三角形

(3) 正八角形と辺を共有しない三角形

きょうは、組合せの数の求め方を、具体的な問題で学習しました。すぐそのまま組合せを使う問題でなくても、問題の意味を解釈して、組合せの数を利用できました。問題をどのようにとらえるかが大切なところですね。

いろいろな組合せ (1)

組合せの問題にも慣れてきましたね。きょうは、組分けの問題を中心に、組合せの考えを使って解く問題をします。

はじめは、組合せと順列の考えを使って解く問題です。

例題 1

順列と組合せの利用

a, b, c, d から 2 個, e, f, g, h, i から 2 個, 合わせて 4 個の文字を取り出して 1 列に並べるとき, 全部で何通りの並べ方がありますか。

考え方

次のことに注目します。

n 個のものから r 個を選ぶ方法は……… ${}_nC_r$ 通り

n 個のものを 1 列に並べる方法は……… ${}_nP_n = n!$ (通り)

ここでは, a, b, c, d の 4 個の文字から 2 個を選ぶ方法, e, f, g, h, i の 5 個の文字から 2 個を選ぶ方法がそれぞれ何通りあるかを調べてから, 4 個の文字を 1 列に並べる方法が, おのおの何通りずつあるかを調べます。

解 答

a, b, c, d から 2 個選ぶ方法は

${}_4C_2$ 通り

e, f, g, h, i から 2 個選ぶ方法は

${}_5C_2$ 通り

また, 取り出した 4 個の文字を 1 列に並べる方法は, おのおの

$4!$ 通り

ずつある。

したがって, 求める並べ方は積の法則により

$${}_4C_2 \times {}_5C_2 \times 4! = \frac{4!}{2!2!} \times \frac{5!}{2!3!} \times 4! = 1440 \text{ (通り)}$$

2 個ずつ 4 個とり出すしかた, それぞれに, とり出した 4 個の文字を並べるしかたがありますから, 積の法則で求めます。では, トレーニングをしましょう。

■■■■■■■■■■ トレーニング ■■■■■■■■■■

- 1 a, b, c から 2 個, d, e, f, g, h から 3 個, 合わせて 5 個の文字を取り出して 1 列に並べるとき, 全部で何通りの並べ方がありますか。

- a, b, c, d, e, f, g の 7 文字から異なる 4 文字を取り出して 1 列に並べるとき、 a, b が隣り合う並べ方は何通りありますか。
- a, b, c, d, e, f, g, h の 8 文字から異なる 5 文字を取り出して 1 列に並べるとき、 a, b が両端にくる並べ方は何通りありますか。
- 男子 8 人と女子 12 人の中から、男女 3 人ずつ合計 6 人を選んで輪に並べるとき、全部で何通りの並べ方がありますか。
- 男子 5 人と女子 7 人の中から、男子 2 人と女子 3 人の合計 5 人を選んで円卓に着席させます。全部で何通りの着席のしかたがありますか。

つぎは、組分けをするときの問題です。

例題 2

組分けの問題

8 人を、5 人の組と 3 人の組に分ける方法は何通りありますか。

考え方

8 人から、5 人の組にはいる 5 人を選べば、残りの 3 人は 3 人の組にはいることになります。

解 答

8 人から 5 人を選ぶ方法は

${}_8C_5$ 通り

残りは、そのまま 3 人の組になるから、求める分け方は

$${}_8C_5 = \frac{8!}{5!3!} = 56(\text{通り})$$

8 人から 5 人を選ぶかわりに、8 人から残りの 3 人を選ぶと考えても同じことです。このことは、組合せの数の性質からいえることですね。

■■■■■■■■ トレーニング ■■■■■■■■

6 次の問いに答えなさい。

(1) 7 人が 2 台のタクシー A, B にそれぞれ 3 人, 4 人に分かれて乗る方法は何通りありますか。

(2) 12 人が 3 つのグループ A, B, C にそれぞれ 5 人, 4 人, 3 人に分かれる方法は何通りありますか。

7 次の問いに答えなさい。

(1) 8 人を 2 つの組 A, B にそれぞれ 6 人, 2 人に分ける方法は何通りありますか。

(2) 9冊の異なる本をそれぞれ4冊, 3冊, 2冊の組に分ける方法は何通りありますか。

8 色の異なる9個の玉があります。これについて、次の問いに答えなさい。

(1) 袋A, Bにそれぞれ5個, 4個の玉を入れる方法は何通りありますか。

(2) 袋A, B, Cにそれぞれ6個, 2個, 1個の玉を入れる方法は何通りありますか。

できましたね。つぎも組分けの問題です。ちょっと注意が必要です。

例題 3

組分けの問題

8人の生徒がいます。4人ずつ2つの組に分ける場合、分け方は何通りありますか。

考え方

「4人ずつ2つの組に分ける」場合と、「A, Bの2つの組に、4人ずつ分ける」場合とではちがいががあります。前者には組の区別がありませんが、後者には組の区別があります。8人を a, b, c, d, e, f, g, h としたとき、たとえば

$$\{a, b, c, d\} \text{ と } \{e, f, g, h\}$$

に分けるしかたは、組を区別しない場合は1通りと数えますが、組をA組, B組と区別する場合は、次のような、A, Bの組に入れるしかた $2!$ 通りを別々のものとして数えます。

$$\{a, b, c, d\} \cdots \cdots \text{A組}, \{e, f, g, h\} \cdots \cdots \text{B組}$$

$$\{a, b, c, d\} \cdots \cdots \text{B組}, \{e, f, g, h\} \cdots \cdots \text{A組}$$

そこで、「4人ずつ2つの組に分ける」場合を x 通りとして

$$x \times 2!$$

が「A, Bの2つの組に4人ずつ分ける」場合の数に等しいことから x の値を求めます。

解 答

A, Bの2つの組に4人ずつ分ける方法は、8人の中からA組にはいる4人がきまれば、B組にはいる4人がきまるから

$${}_8C_4 \text{ 通り}$$

また、4人ずつ2つの組に分ける場合の分け方の1つについて、その2つの組をA, Bの組に入れるしかたは

$$2! \text{ 通り}$$

したがって、求める分け方を x 通りとすれば

$$x \times 2! = {}_8C_4$$

が成り立つ。

ゆえに、求める分け方は

$$x = \frac{{}_8C_4}{2!} = \frac{8!}{2!4!4!} = 35(\text{通り})$$

別 解

特定の1人に着目し、その人と同じ組になる3人を残りの7人から選ぶと考えて

$${}_7C_3 = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 35(\text{通り})$$

わかりましたね。例題の解答をよく読んで、次の問題をしなさい。

■■■■■■■■■■ トレーニング ■■■■■■■■■■

9 9人の生徒がいます。次の場合、分け方は何通りありますか。

(1) A, B, Cの3つの組に、3人ずつ分ける場合

(2) 3人ずつの3つの組に分ける場合

10 色の異なる6個の玉があります。次の場合、分け方は何通りありますか。

(1) A, Bの2つの組に、3個ずつ分ける場合

(2) 3個ずつの2つの組に分ける場合

11 11冊の異なる本があります。次の場合、分け方は何通りありますか。

(1) A, B, C, Dの4つの組に、それぞれ3冊, 3冊, 3冊, 2冊入れる場合

(2) 3冊, 3冊, 3冊, 2冊の4つの組に分ける場合

12 3人乗りのボートが2艘あります。4人をこれに分乗させるしかたは何通りありますか。

次の各場合について答えなさい。

- (1) 人もボートも区別しないで、人数の分け方だけを考えるとき
- (2) 人は区別しないが、ボートを A, B と区別するとき
- (3) ボートは区別しないが、人は区別するとき
- (4) ボートも人も区別して考えるが、座席は問題にしないとき
- (5) どの人が、どのボートの、どの座席につくかまで区別して考えるとき

きょうは、組合せの問題で、組分けの問題を中心にとりあげました。このつぎは、組合せの考え方を応用する問題をとりあげることにします。

いろいろな組合せ (2)

きょうは、組合せの考えを応用することがらをとりあげます。むずかしいことでは
ありませんから、着実にやっていきましょう。

まずはじめは、同じものを含む順列の数が、組合せの考え方で導けることの説明で
す。

● 同じものをふくむ順列の数と組合せ

a, a, a, b, b, c, c の 7 文字を 1 列に並べてできる^{じゆんれつ}順列の数は
同じ a ………3 個, 同じ b ………2 個, 同じ c ………2 個
ですから、同じものをふくむ順列の数の公式より

$$\frac{7!}{3!2!2!} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\Leftarrow \frac{n!}{p!q!r! \cdots} \quad \text{ただし, } n = p + q + r + \cdots$$

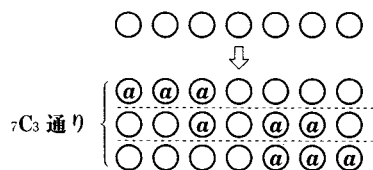
となります。

この式は、次のように^{くみあわ}組合せの考えを使って導くこともできます。

まず、7 文字を 1 列に並べるのですから、 $\bigcirc$ を 7 つ 1 列に並べておきましょう。
この 7 個の場所に 3 個の a をどこに入れ
るかによって、場所のきめ方が

${}_7C_3$ 通り

あります。



次に、 a の場所のきめ方の 1 つ 1 つにつ
いて、2 個の b を入れる場所のきめ方は、
残り 4 個の場所から 2 個選べばよいから

${}_4C_2$ 通り

ずつあります。

そして、2 個の c は残り 2 個の場所に入
ればよいのですから、場所のきめ方は 1
通りにきまります。

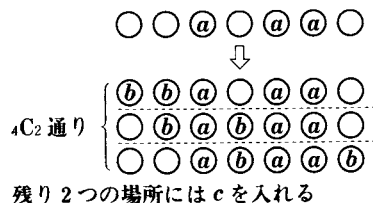
よって、求める並べ方の数は

$${}_7C_3 \times {}_4C_2$$

になります。これを、^{かいじよう}階乗! を使って表すと

$${}_7C_3 \times {}_4C_2 = \frac{7!}{3!4!} \times \frac{4!}{2!2!} = \frac{7!}{3!2!2!}$$

となりますから、組合せの考えを使って、 $\textcircled{1}$ を導くことができます。



残り 2 つの場所には c を入れる

■■■■■■■■■■ トレーニング ■■■■■■■■■■

1 $a, a, a, a, b, b, b, c, c$ の 9 文字を 1 列に並べるとき、全部で何通りの並べ方があるかを次の手順にしたがって求めなさい。

- (1) 9 つの場所に a を入れる場所を選ぶ方法は全部で何通りありますか。□C□ の形で答えなさい。



- (2) a を入れる場所をきめたとき、 b を入れる場所を選ぶ方法は何通りありますか。□C□ の形で答えなさい。

- (3) (1), (2) の結果を使って、答えを導きなさい。

2 p 個、 q 個、 r 個がそれぞれ同じ種類のもので、 $p+q+r=n$ とします。これらの n 個のものを 1 列に並べるとき、並べ方の総数は

$$\frac{n!}{p!q!r!}$$

となることを組合せを使って証明しなさい。

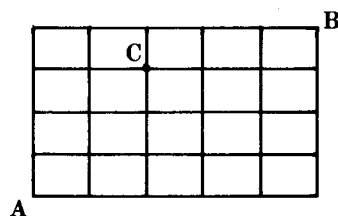
同じものを含む順列の公式が導けましたね。つぎは、道順の問題です。

例題 1

最短路と組合せ

右の図のような道をもつ町があります。この町の西南端 A から東北端 B にいたる最短路について、次の問いに答えなさい。

- (1) 全部で何通りの行き方がありますか。
 (2) C 地点を通らないで行く行き方は何通りありますか。



考え方

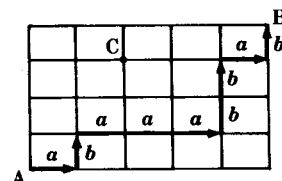
横路、縦路を1単位進む道をそれぞれ a 、 b で表して考えます。

- (1) A から B への最短路は、5 個の a と 4 個の b を 1 列に並べた順列に対応します。

たとえば、右の図の太線の最短路は

$abaaabbab$

で表されます。ですから、5 個の a と 4 個の b を 1 列に並べる順列の数だけ最短路があるといえます。



- (2) C を通らないで行く最短路の数は、(1) で求めた数から C を必ず通って行く最短路の数をひいて求めます。

また、C を必ず通って行く最短路の数は、A から C までの最短路の数と C から B までの最短路の数の積で求められます。

解答

横路、縦路を1単位進む道をそれぞれ a 、 b で表すことにする。

- (1) A から B への最短路は 5 個の a と 4 個の b を 1 列に並べた順列で示される。

ここで、 a に注目して、1 列に並んでいる 9 個の場所から 5 個の a の場所のきめ方は

${}_9C_5$ 通り

残りの場所を b とすればよいから、求める最短路は

$${}_9C_5 = \frac{9!}{5!4!} = 126 (\text{通り}) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

- (2) まず、C を通って行く最短路を考えてみる。

A から C までの最短路は、2 個の a と 3 個の b を 1 列に並べた順列で示されるから、その数は

${}_5C_2$ 通り

C から B までの最短路は、3 個の a と 1 個の b を 1 列に並べた順列で示されるから、その数は

${}_4C_3$ 通り

よって、C を通って A から B へ行く最短路は、積の法則により

$${}_5C_2 \times {}_4C_3 (\text{通り}) \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

ここで、C を通らないで行く最短路の数は、①から②をひいたものである。

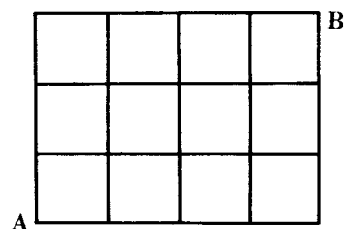
したがって、求める最短路は

$$126 - {}_5C_2 \times {}_4C_3 = 126 - \frac{5!}{2!3!} \times \frac{4!}{3!1!} = 86 (\text{通り})$$

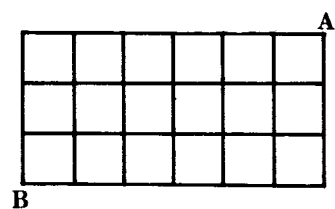
横に進むときを a 、縦に進むときを b として、 a と b のとり方として考えています。わかりません。では、トレーニングで問題を解いてみなさい。

||||| トレーニング |||||

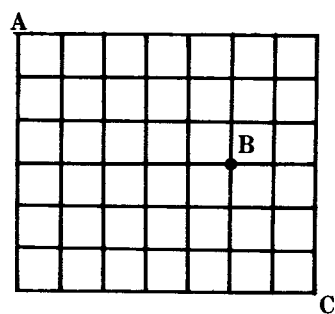
- 3** 右の図のような道をもつ町があります。この町の西南端 A から東北端 B にいたる最短路は何通りありますか。



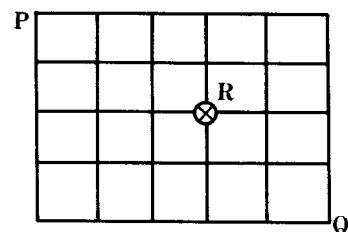
- 4** 右の図のような道をもつ町があります。この町の東北端 A から西南端 B にいたる最短路は何通りありますか。



- 5** 右の図のような道をもつ町があります。この町の西北端 A から点 B を通って東南端 C まで行く最短路は何通りありますか。



- ⑥ 右のような町で、西北端 P から東南端 Q まで R を通らないで行く最短路は何通りありますか。



順列のときに、くり返してとることを許す重複順列を学習しました。組合せでも、くり返してとることを許す重複組合せを考えることができます。このことを考えてみましょう。

● 重複組合せ

いま、 a, b, c, d の 4 文字があつて、それらの文字をくり返してとることを許して 5 個とる場合、組合せは何通りあるか求めてみましょう。

くり返してとることが許されますから、たとえば、 a を 2 個、 b を 1 個、 c を 1 個、 d を 1 個とる組合せは、条件に合った組合せの 1 つです。これを

$aabcd$

と表すことにします。また

$abbdd \quad \Leftarrow a$ を 1 個、 b を 2 個、 d を 2 個とる組合せ

$aaacc \quad \Leftarrow a$ を 3 個、 c を 2 個とる組合せ

$bbbbb \quad \Leftarrow b$ を 5 個とる組合せ

なども条件に合った組合せになります。

ところで、5 個の $\bigcirc$ に 3 本 (4 個のものを並べるときの間の数) の仕切りを入れ、仕切られた $\bigcirc$ の数が左から順にそれぞれ a, b, c, d の個数を表すとする、上の 4 つの例は次の図のように表すことができます。

$aabcd \quad \longleftrightarrow \bigcirc \bigcirc \mid \bigcirc \mid \bigcirc \mid \bigcirc$

$abbdd \quad \longleftrightarrow \bigcirc \mid \bigcirc \bigcirc \mid \mid \bigcirc \bigcirc$

$aaacc \quad \longleftrightarrow \bigcirc \bigcirc \bigcirc \mid \mid \bigcirc \bigcirc \mid$

$bbbbb \quad \longleftrightarrow \mid \bigcirc \bigcirc \bigcirc \bigcirc \bigcirc \mid \mid$

このように考えると、条件に合う組合せの 1 つ 1 つが、5 個の $\bigcirc$ と 3 本の仕切りによる仕切られ方の 1 つ 1 つに対応していることがわかります。

そして、仕切られ方の数は、5 個の $\bigcirc$ と 3 本の仕切りを 1 列に並べるしかたといえますから、8 個の場所から 3 個の仕切りの場所を選ぶ数になります。

このことから、求める組合せは

$${}_8C_3 = \frac{8!}{3!5!} = 56(\text{通り})$$

となります。

このように、同じものをくり返してとることを許す組合せを、ちょうふくくみあわ重複組合せといいます。

では、重複組合せの考え方で解く問題をしてみましょう。

例題 2

重複組合せ

方程式 $x+y+z=8$ をみたす負でない整数解の組の数を求めなさい。また、正の整数解の組の数を求めなさい。

考え方

8個の○に2本(3つに仕切るための仕切り)仕切りを入れて、仕切られた○の数を左から順に、 x, y, z と考えると、 $x+y+z=8$ となります。

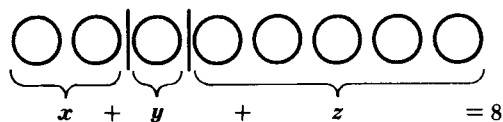
このことから、負でない整数解の組の数は、8個の○と2本の仕切りを1列に並べる数で求められることがわかります。

また、正の整数解の組の数は、 x も y も z も1以上ですから、 $x=x'+1, y=y'+1, z=z'+1$ とおくことによって、 $x'+y'+z'=5$ をみたす負でない整数解の組の数を求めることになります。

解答

まず、負でない整数解の組の数を求める。

図のように、8個の○に2本の仕切りを入れて、仕切られた○の数を左から順に x, y, z とする。



仕切られ方は、8個の○と2本の仕切りを1列に並べるしかたであり、その個数は、10個の場所から2個の仕切りの場所を選ぶ数である。

したがって、求める場合の数は

$${}_{10}C_2 = \frac{10!}{2!8!} = 45$$

次に、正の整数解の組の数は、 x も y も z も1以上であるから、方程式

$$x' + y' + z' = 5$$

の負でない整数解の組の数に等しい。

したがって、求める場合の数は、7個から2個とる組合せの数であるから

$${}_7C_2 = \frac{7!}{2!5!} = 21$$

3種類のものを区別する仕切りは2本です。8個の中に2本の仕切りを入れますから、その方法は10個の場所から2個の仕切りの場所を選ぶ方法の数に等しいわけですね。

||||| トレーニング |||||

7 a, b, c の 3 個の文字から，くり返してとることを許して 4 個とる組合せの数を求めなさい。

8 次の方程式をみたす負でない整数解の組の数を求めなさい。また，正の整数解の組の数を求めなさい。

(1) $x + y = 8$

(2) $x + y + z = 5$

9 次の方程式をみたす負でない整数解の組の数を求めなさい。また，正の整数解の組の数を求めなさい。

(1) $x + y = 7$

(2) $x + y + z = 10$

10 りんご 16 個を 3 枚の相異なるさらに盛ります。このとき，次の場合の盛り分け方は何通りありますか。

(1) 盛られていないさらがあってもよい場合

(2) どのさらにも 2 個以上りんごを盛る場合

11 区別のつかない 5 個のさいころを投げるとき，出る目の組合せの数を求めなさい。

これで，きょうの学習を終わりにします。きょうは，組合せの考えを使って解く問題で，応用的な問題を取りあげました。次の日は，組合せの復習をすることにします。

組合せの復習

きょうは、第12日から第15日まで学習してきた組合せについて復習します。
組合せに関して、いままで学習してきたことを確かめるための問題を出題してありますから、しっかり復習しておきましょう。

■■■■■■■■■■ トレーニング ■■■■■■■■■■

1 次の問いに答えなさい。

(1) 20 人のバレーボール部員から 6 人の選手を選ぶとき、選び方は何通りありますか。

(2) 8 つのチームが 1 回ずつ総当たりで、サッカーの試合をします。試合は何通りありますか。

2 次の問いに答えなさい。

(1) 48 人のクラスから 5 人の代表を選ぶとき、 a は選ばれ、 b は選ばれない方法は何通りありますか。

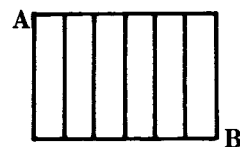
(2) 52 枚のトランプのカードから 4 枚選ぶのに、4 枚の中に絵札のカードをふくまない選び方は何通りありますか。

3 次の問いに答えなさい。

- (1) A, B, C の3つのグループの人数はそれぞれ8人, 7人, 9人です。A グループから2人, B グループから2人, C グループから3人の合計7人を選ぶとき, 選び方は何通りありますか。
- (2) $\angle XOY$ の辺 OX 上にある8個の点と, 辺 OY 上にある6個の点を結んでできる線分全体のうち, どの3つをとっても1点で交わることがないとします。このとき, これらの線分の交点は $\angle XOY$ 内に何個できますか。

4 図のように, 横に2本, 縦に7本の道路があります。

1度通った道はふたたび通らないとするとき, 点Aから点Bに行く方法は何通りありますか。



5 1から8までの8個の数字から異なる3個を選ぶとき, 最大の数が5以上となる選び方は何通りありますか。

6 男子 15 人と女子 10 人の中から，男子 3 人と女子 2 人の合計 5 人を選んで 1 列に並べるとき，全部で何通りの並べ方がありますか。

7 9 人の生徒がいます。次の場合，分け方は何通りありますか。

(1) A, B, C の 3 つの組に，それぞれ 2 人，2 人，5 人入れる場合

(2) 2 人，2 人，5 人の 3 つの組に分ける場合

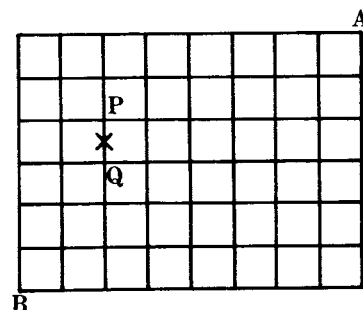
8 6 人を 3 つの部屋に入れる方法は何通りありますか。1 つの部屋には，最低 1 人ははいるものとして，次の場合について答えなさい。

(1) 人も部屋も区別しないで，人数の分け方だけを考えるとき

(2) 人は区別しないが，部屋を A, B, C と区別するとき

(3) 部屋は区別しないが，人を区別するとき

- 9 右の図のような道をもつ町があります。いま、P、Qの間は工事中で通れません。このとき、東北端 A から西南端 B にかかる最短路は何通りありますか。



- 10 次の方程式をみたす負でない整数解の組の数を求めなさい。また、正の整数解の組の数を求めなさい。

(1) $x + y = 10$

(2) $x + y + z = 7$

- 11 12 人の選挙人が 3 人の候補者から 1 名を選挙するとき、次の場合の票の分かれ方は何通りありますか。

(1) 記名投票の場合

(2) 無記名投票の場合

二項定理 (1)

式の展開については、数学 I の数と式のところで学習しました。2 乗の式の展開や、3 乗の式の展開は簡単にできます。では、4 乗、5 乗となっていったらどうでしょう。順番にかけていけばできることはできますが、簡単ではありません。きょうは、式の展開に関連した二項定理というものを学習します。はじめの説明はすこし長いですが、二項定理の説明です。

● 二項定理

$(a+b)^2$, $(a+b)^3$ の展開式は

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

となります。では、 $(a+b)^4$, $(a+b)^5$, ……の展開式はどのようなになるでしょう。

$$(a+b)^4 = (a+b)(a+b)^3$$

$$= (a+b)(a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3)$$

$$= a^4 + 3a^3b + 3a^2b^2 + ab^3 + a^3b + 3a^2b^2 + 3ab^3 + b^4$$

$$= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$(a+b)^5 = (a+b)(a+b)^4$$

$$= (a+b)(a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4)$$

$$= a^5 + 4a^4b + 6a^3b^2 + 4a^2b^3 + ab^4 + a^4b + 4a^3b^2 + 6a^2b^3 + 4ab^4 + b^5$$

$$= a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

のように、計算していけば、展開式を求めることはできますが、計算はたいへんですし、 $(a+b)^n$ のような一般的なものを扱うことはできませんね。

そこで、組合せの考えを使って、展開式を調べましょう。

たとえば、 $(a+b)^4$ の展開式において、 a^3b は 4 個の因数のうち 3 個を選んで、その因数からは a を、残り 1 個の因数からは b をとってかけたものです。

その選び方の個数、すなわち、 b をとる 1 個の因数の選び方の数

$${}_4C_1$$

⇨先に a をとる因数を選んでも、 b をとる因数を選んでも個数は同じ

が a^3b の係数になります。

□ 二項定理 □

$$(a+b)^n = {}_nC_0 a^n + {}_nC_1 a^{n-1} b + {}_nC_2 a^{n-2} b^2 + \cdots \\ + {}_nC_r a^{n-r} b^r + \cdots + {}_nC_{n-1} a b^{n-1} + {}_nC_n b^n$$

この式において, $a=1$, $b=x$ とおくと

$$(1+x)^n = {}_nC_0 + {}_nC_1 x + {}_nC_2 x^2 + \cdots \\ + {}_nC_r x^r + \cdots + {}_nC_{n-1} x^{n-1} + {}_nC_n x^n$$

二項定理とはどんなものかわかりますね。展開したときの係数が, 組合せの数によって表されています。

■■■■■■■■ トレーニング ■■■■■■■■

1 $(a+b)^n$ を展開したとき, $a^{n-r} b^r$ の係数は ${}_nC_r$ となることを証明しなさい。

2 次の問いに答えなさい。

(1) $a+b$ を次々にかけて, $(a+b)^4$ を展開しなさい。

(2) (1)の結果を使って, 次の等式が成り立つことを確かめなさい。

$$(a+b)^4 = {}_4C_0 a^4 + {}_4C_1 a^3 b + {}_4C_2 a^2 b^2 + {}_4C_3 a b^3 + {}_4C_4 b^4$$

次の例題は, 二項定理を使って式を展開する問題です。

基本例題 1

二項定理と展開式

二項定理を使って, 次の式を展開しなさい。

(1) $(x+y)^5$

(2) $(x-2y)^4$

解 答

$$(1) \quad (x+y)^5 = {}_5C_0x^5 + {}_5C_1x^4y + {}_5C_2x^3y^2 + {}_5C_3x^2y^3 + {}_5C_4xy^4 + {}_5C_5y^5 \\ = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$$

$$(2) \quad (x-2y)^4 = {}_4C_0x^4 + {}_4C_1x^3(-2y) + {}_4C_2x^2(-2y)^2 + {}_4C_3x(-2y)^3 + {}_4C_4(-2y)^4 \\ = x^4 - 8x^3y + 24x^2y^2 - 32xy^3 + 16y^4$$

注 意

(2) $(\bigcirc - \bigcirc)^n$ の展開式の係数の符号は、 $+$ 、 $-$ が交互に出てきます。

展開したときの係数が二項係数です。それぞれの係数を計算します。では、二項定理によって、式を展開してみましょう。

■■■■■■■■■■ トレーニング ■■■■■■■■■■

3 二項定理を使って、次の式を展開しなさい。

(1) $(a+b)^8$

(2) $(x-y)^7$

(3) $(a+3b)^5$

4 二項定理を使って、次の式を展開しなさい。

(1) $\left(2a + \frac{1}{2}\right)^5$

(2) $\left(\frac{1}{3}x - 2y\right)^4$

5 $\left(x^3 - \frac{1}{x}\right)^4$ を二項定理を使って、展開しなさい。

1, 6, 15, 20, 15, 6, 1

これが, $(a+b)^6$ の展開式の a^6 , a^5b , a^4b^2 , a^3b^3 , a^2b^4 , ab^5 , b^6 のそれぞれの係数

${}_6C_0$, ${}_6C_1$, ${}_6C_2$, ${}_6C_3$, ${}_6C_4$, ${}_6C_5$, ${}_6C_6$

になりますから, $(a+b)^6$ の展開式は

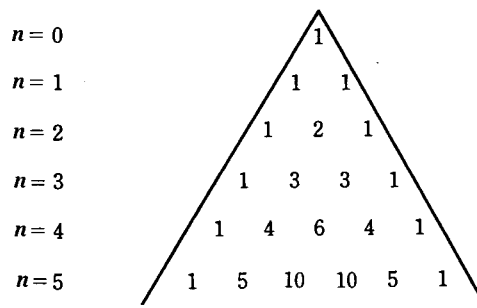
$$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$$

となります。このように, パスカルの三角形を使って, $(a+b)^6$ の展開式などを求めることができます。

展開したときの係数を求めるのに, パスカルの三角形を使うのも 1 つの方法です。次の問題は, この方法で解いてみます。

■■■■■■■■ トレーニング ■■■■■■■■

- 6 パスカルの三角形で $n=6$, $n=7$ の行をつくり, $(a+b)^6$, $(a+b)^7$ の展開式を書きなさい。



つぎに, 展開したときの項について説明します。

● 展開式の一般の項

$(a+b)^n$ の展開式は

$$(a+b)^n = {}_nC_0 a^n + {}_nC_1 a^{n-1}b + {}_nC_2 a^{n-2}b^2 + \cdots + {}_nC_r a^{n-r}b^r + \cdots + {}_nC_{n-1} a b^{n-1} + {}_nC_n b^n$$

ですね。このときの項

$${}_nC_r a^{n-r}b^r$$

を $(a+b)^n$ の展開式の一般の項といいます。

たとえば, $(a+b)^7$ の展開式の一般の項は ${}_7C_r a^{7-r}b^r$ となります。

ところで, 展開式の項の係数は, この一般の項を使って求められます。

$(a+b)^7$ の展開式における a^3b^4 の係数ならば, $a^{7-r}b^r$ が a^3b^4 となるのは $r=4$ のと

きですから

$${}^7C_4 = \frac{7!}{4!3!} = 35$$

となります。

一般の項といういい方のかわりに一般項といういい方もします。では，トレーニングしましょう。

||||| トレーニング |||||

7 $(a+b)^5$ の展開式における a^3b^2 の係数を求めなさい。

8 次の式の展開式における [] 内に示した項の係数を求めなさい。

(1) $(a+b)^7$ [a^5b^2]

(2) $(x-y)^6$ [xy^5]

展開した式で，特定の次数になる項の係数を求めさせるのはよくある問題です。次の例題をしてみましょう。

例題 2

展開式における項の係数

$\left(x^3 - \frac{2}{x}\right)^5$ の展開式において， x^7 の係数を求めなさい。

考え方

$(a+b)^n$ の展開式の一般の項は ${}_nC_r a^{n-r} b^r$ ですから， $\left(x^3 - \frac{2}{x}\right)^5$ の展開式の一般の項は

$${}_5C_r (x^3)^{5-r} \left(-\frac{2}{x}\right)^r \quad \text{整理すると} \quad (-2)^r {}_5C_r x^{15-4r}$$

となります。そこで， x^{15-4r} が x^7 となるような r の値，すなわち

$$15-4r=7$$

をみたす r の値を見つけ、これを $(-2)^r {}_5C_r$ に代入して、 x^7 の係数を求めます。

解 答 $\left(x^3 - \frac{2}{x}\right)^5$ の展開式の一般の項は

$$\begin{aligned} {}_5C_r (x^3)^{5-r} \left(-\frac{2}{x}\right)^r &= {}_5C_r x^{15-3r} \cdot (-2)^r \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^r \\ &= (-2)^r {}_5C_r x^{15-3r} x^{-r} = (-2)^r {}_5C_r x^{15-4r} \end{aligned}$$

ここで、 $15-4r=7$ とおけば

$$r=2$$

したがって、求める係数は

$$(-2)^2 {}_5C_2 = 4 \cdot \frac{5!}{2!3!} = 40$$

注 意 展開式における項の係数を求めるとき、指数の計算がよくできます。

$$a^m a^n = a^{m+n}, (a^m)^n = a^{mn}, \frac{1}{a^n} = a^{-n}, \left(\frac{1}{a^m}\right)^n = (a^{-m})^n = a^{-mn}$$

などは、十分使いこなせるようにしておくことがたいせつです。

一般の項を求めて、次数を考えます。わかりますね。では、トレーニングをしましょう。

■■■■■■■■ トレーニング ■■■■■■■■

9 次の式の展開式における〔 〕内に示した項の係数を求めなさい。

(1) $(2x+y)^6 [x^3 y^3]$

(2) $(x-3)^5 [x^3]$

(3) $(3x+2y)^5 [x^4 y]$

(4) $\left(2a + \frac{1}{2}\right)^6 [a^4]$

10 次の式の展開式における〔 〕内に示した項の係数を求めなさい。

(1) $(x-3y)^5 [x^2 y^3]$

(2) $(2a-5)^6 [a^4]$

(3) $(4l+3m)^7 [l^3 m^4]$

(4) $\left(\frac{2}{3}x+3\right)^8 [x^5]$

11 次の式の展開式における〔 〕内に示した項の係数を求めなさい。

(1) $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^5$ $[x^4]$

(2) $\left(2x^3 - \frac{1}{3x}\right)^6$ $[x^{10}]$

(3) $\left(a - \frac{1}{2a^2}\right)^{15}$ [定数項]

12 次の式の展開式における〔 〕内に示した項の係数を求めなさい。

(1) $\left(a^4 - \frac{1}{a}\right)^5$ $[a^5]$

(2) $\left(2x^4 + \frac{3}{2x^3}\right)^6$ $[x^3]$

(3) $\left(l^3 - \frac{2}{l^2}\right)^{10}$ [定数項]

13 次の式の展開式における〔 〕内に示した項の係数を求めなさい。

(1) $(x+y)^{2n}$ $[x^n y^n]$

(2) $(ax-b)^{13}$ $[x^5]$

きょうは、二項定理について学習してきました。二項定理を使って式を展開すること、展開した式の係数についてわかりましたね。この次は、3つの項の式を展開するとどうなるかを学習します。

二項定理 (2)

きょうは、二項定理の続きで、3つの項の展開式について学習します。

3つ以上の項の展開については、展開した結果がどうなるかという一般的な定理がありますが、ここでは、ふれないで、展開後の係数に関することをとりあげることにします。

● $(a+b+c)^n$ の展開式における項の係数

$(a+b+c)^9$ の展開式における $a^2b^3c^4$ の係数を求めてみましょう。

いま、 $(a+b+c)^9 = \{(a+b)+c\}^9$ とおいて、これを展開すると次のようになります。

$$(a+b+c)^9 = {}_9C_0(a+b)^9 + {}_9C_1(a+b)^8c + \cdots + {}_9C_4(a+b)^5c^4 + \cdots + {}_9C_9c^9$$

$a^2b^3c^4$ は c^4 をふくむ項ですから、 ${}_9C_4(a+b)^5c^4$ の中だけにあり、他にはありません。

また、 $(a+b)^5$ を展開すると

$$(a+b)^5 = {}_5C_0a^5 + {}_5C_1a^4b + {}_5C_2a^3b^2 + {}_5C_3a^2b^3 + {}_5C_4ab^4 + {}_5C_5b^5$$

となりますから、 ${}_9C_4(a+b)^5c^4$ は

$$\begin{aligned} {}_9C_4(a+b)^5c^4 &= {}_9C_4({}_5C_0a^5 + \cdots + {}_5C_3a^2b^3 + \cdots + {}_5C_5b^5)c^4 \\ &= {}_9C_4 \cdot {}_5C_0a^5c^4 + \cdots + {}_9C_4 \cdot {}_5C_3a^2b^3c^4 + \cdots + {}_9C_4 \cdot {}_5C_5b^5c^4 \end{aligned}$$

この式より、 $a^2b^3c^4$ の係数は

$${}_9C_4 \times {}_5C_3 = \frac{9!}{4!5!} \times \frac{5!}{3!2!} = 1260$$

となります。

このように、 $(a+b+c)^9$ の展開式の $a^2b^3c^4$ の係数は、 $\{(a+b)+c\}^9$ の展開式で、 c^4 をふくむ項すなわち $(a+b)^5c^4$ の係数 ${}_9C_4$ と、 $(a+b)^5$ の展開式の a^2b^3 の係数 ${}_5C_3$ の積で求められることがわかりましたね。

3つの項があるときの展開式での係数についてわかりましたね。次の例題で解き方を確認しておきましょう。

例題 1

展開式における項の係数

$(a+b+c)^7$ の展開式で、 ab^2c^4 の係数を求めなさい。

考え方

まず、 $(a+b+c)^7 = \{(a+b)+c\}^7$ と考えます。

求めるものは、 ab^2c^4 の係数ですから、 $\{(a+b)+c\}^7$ の展開式で、 c^4 をふくむ項を見つめます。

次に、 $(a+b)^3$ の展開式で、 ab^2 の係数を求めます。

解 答

$(a+b+c)^7 = \{(a+b)+c\}^7$ と考えると、 c^4 をふくむ項は

$${}^7C_4(a+b)^3c^4$$

さらに、 $(a+b)^3$ の展開式で、 ab^2 の係数は

$${}_3C_2$$

したがって、 ab^2c^4 の係数は

$${}^7C_4 \times {}_3C_2 = \frac{7!}{4!3!} \times \frac{3!}{2!1!} = 105$$

c に関する係数と、 a と b についての係数を考えます。では、トレーニングをしましょう。

||||| トレーニング |||||

1 $(a+b+c)^6$ の展開式で、 a^3b^2c の係数を求めなさい。

2 $(x+2y+z)^9$ の展開式で、 $x^2y^3z^4$ の係数を求めなさい。

3 $(x-y+3z)^5$ の展開式で、 x^2y^2z の係数を求めなさい。

4 $(2x-y-2)^7$ の展開式で、 x^4y^2 の係数を求めなさい。

5 $(1+x+x^2)^5$ の展開式で、 x^5 の係数を求めなさい。

次の例題は、二項係数の性質についての問題です。これもよくある問題ですから、例題とトレーニングで解法を理解してしまいましょう。

例題 2

二項係数の性質の証明

次の等式を証明しなさい。

$${}_nC_0 + {}_nC_1 + {}_nC_2 + \cdots + {}_nC_n = 2^n$$

考え方

${}_nC_0, {}_nC_1, {}_nC_2, \dots, {}_nC_n$ は $(1+x)^n$ の展開式の各項の係数になります。

そこで、次の2つの式を見くらべて、上の式の x に何をあてはめれば、下の式が得られるかを考えます。

$$(1+x)^n = {}_nC_0 + {}_nC_1x + {}_nC_2x^2 + \cdots + {}_nC_nx^n$$

$$2^n = {}_nC_0 + {}_nC_1 + {}_nC_2 + \cdots + {}_nC_n$$

解答

$$(1+x)^n = {}_nC_0 + {}_nC_1x + {}_nC_2x^2 + \cdots + {}_nC_nx^n$$

ここで、 $x=1$ とおくと

$$2^n = {}_nC_0 + {}_nC_1 + {}_nC_2 + \cdots + {}_nC_n$$

二項定理を使って等式を導いていますね。では、トレーニングです。

||||| トレーニング |||||

6 次の式の値を求めなさい。

$$p^n + {}_nC_1 p^{n-1}(1-p) + {}_nC_2 p^{n-2}(1-p)^2 + \cdots + {}_nC_{n-1} p(1-p)^{n-1} + (1-p)^n$$

7 次の等式を証明しなさい。

$$(1) \quad {}_nC_0 + {}_nC_1 + {}_nC_2 + \cdots + {}_nC_n = 2^n$$

$$(2) \quad {}_nC_0 - {}_nC_1 + {}_nC_2 - \cdots + (-1)^n {}_nC_n = 0$$

8 次の等式を証明しなさい。

$${}_{2n}C_0 + {}_{2n}C_2 + \cdots + {}_{2n}C_{2n} = {}_{2n}C_1 + {}_{2n}C_3 + \cdots + {}_{2n}C_{2n-1} = 2^{2n-1}$$

9 $r \cdot {}_nC_r = n \cdot {}_{n-1}C_{r-1}$ を証明しなさい。

また，その結果を使って，次の等式を証明しなさい。

$$1 \cdot {}_nC_1 + 2 \cdot {}_nC_2 + \cdots + n \cdot {}_nC_n = n \cdot 2^{n-1}$$

きょうは，3つの項の展開式での係数，二項係数に関する問題を取りあげました。
次の日は，二項定理の復習をします。

二項定理の復習

きょうは、第17日と第18日の2日間学習した二項定理の復習をします。

二項定理による式の展開では、とくに、展開したときの指数に注意しましょう。また、指数の計算や、係数の計算を間違いなく行うことも大切なことです。

では、問題にとりかかりましょう。

■■■■■■■■■■ トレーニング ■■■■■■■■■■

1 二項定理を使って、次の式を展開しなさい。

(1) $\left(2a - \frac{3}{2}\right)^4$

(2) $\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y\right)^5$

2 $(x+1)^6 - (x-1)^6$ を計算しなさい。

3 次の式の展開式における〔 〕内に示した項の係数を求めなさい。

(1) $(2a+b)^8$ $[a^2b^6]$

(2) $(3x-4y)^7$ $[x^3y^4]$

$$(3) (6a-1)^7 [a^2]$$

$$(4) \left(\frac{1}{3}x+3\right)^6 [x^2]$$

4 次の式の展開式における〔 〕内に示した項の係数を求めなさい。

$$(1) \left(a^2+\frac{3}{a^3}\right)^6 [a^2]$$

$$(2) \left(2x-\frac{1}{x^2}\right)^7 \left[\frac{1}{x^2}\right]$$

$$(3) \left(3a^4-\frac{1}{2a^2}\right)^6 [\text{定数項}]$$

5 $\left(x-\frac{1}{3x^2}\right)^{18}$ の展開式における中央の項を求めなさい。

6 $(3x-1)^7(2x-1)^3$ の展開式における x^3 の係数を求めなさい。

7 $(3x+3y-2z)^6$ の展開式で、 $x^2y^2z^2$ の係数を求めなさい。

8 次の等式を証明しなさい。

$$(1) {}_nC_0 + {}_nC_1 + {}_nC_2 + \cdots + {}_nC_n = 2^n$$

$$(2) {}_nC_0 - {}_nC_1 + {}_nC_2 - \cdots + (-1)^n {}_nC_n = 0$$

9 次の等式を証明しなさい。

$${}_nC_0^2 + {}_nC_1^2 + \cdots + {}_nC_n^2 = {}_{2n}C_n$$

- 10** $x > 0$, n は 2 以上の整数のとき, 次の不等式を証明しなさい。
 $(1+x)^n > 1+nx$

第1巻「場合の数」についての学習は, きょうで終わりです。最後まで, よくがんばりました。第2巻も, この調子で着実に学習を進めていきましょう。
第2巻では, 「確率」について学習します。

教育社

TRAINING PAPER

DAILY PROGRAM

発行人 加藤 譲

発行所 株式会社 教育社

高校数学／確立・統計